

BACCALAURÉAT BLANC
DRENA SAN PÉDRO
UP : Mathématiques



Année scolaire 2023-2024
Niveau : T^{le} C
Durée : 04h00
Coefficient 5

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées

EXERCICE 1 : (2 points)

Écris sur ta copie le numéro de chaque affirmation, suivi de "V" si elle est vraie ou de "F" si elle est fausse.

N°	Affirmations
1	Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x + 3) = 0$, alors la droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote oblique en $-\infty$ à la courbe représentative de f dans un repère $(O ; I ; J)$.
2	Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, si P est le plan d'équation cartésienne : $x + \frac{3}{2}y + 2z - 4 = 0$, alors le vecteur $\vec{n}(2; 3; 4)$ est un vecteur normal à P.
3	Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$. l'ellipse d'équation réduite : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, de demi distance focale $\sqrt{7}$ a pour foyer F($\sqrt{7}$; 0) et F'(- $\sqrt{7}$; 0).
4	Toute suite numérique bornée et croissante admet une limite finie.

EXERCICE 2 : (2 points)

Pour chacune des affirmations du tableau ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule permet d'avoir l'affirmation juste.

Écris le numéro de chaque affirmation, suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponses	
1	Dans un repère de l'espace, les droites (D) et (Δ) de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = -1 + 3u \\ y = 6u \\ z = -1 - 9u \end{cases}, u \in \mathbb{R} \text{ sont ...}$	A	sécantes.
		B	strictement parallèles.
		C	sont perpendiculaires.
2	L'unité de longueur est le centimètre. ABC est un triangle isocèle en C tel que AB=4, AC=BC=6 et I milieu de [AB]. L'ensemble (E) des points M du plan tel que $2MA^2 + 2MB^2 - 4MC^2 = 0$ est	A	un cercle.
		B	une droite.
		C	un plan.
3	Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1 ; \vec{e}_2)$ et A le point d'affixe $2 - i$. L'ensemble (C) des points M du plan d'affixe z tels que $\text{Arg}(z - 2 + i) = \frac{\pi}{4}$ est.....	A	une droite passant par A.
		B	un cercle de centre A.
		C	une demi-droite d'origine A.
4	Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$, l'ensemble (Γ) d'équation $(x - 2)^2 - 4(y + 1)^2 - 16 = 0$ est ...	A	une hyperbole.
		B	une parabole.
		C	une ellipse.

EXERCICE 3: (4points)

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1-Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

2-a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_n) au voisinage de $+\infty$, puis déterminer la position relative de (C_n) et (D) .

3-Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations.

4-Construire la courbe (C_3) . (On prendra $f_3(-0,6) \approx 0$ et $f_3(-1,5) \approx 0$ et $\ln 3 \approx 1,1$)

5-a) Montrer que pour $n \geq 3$ on a : $\frac{e}{n} < \ln n$.

b) Montrer que pour $n \geq 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que :

$$x_n \leq -\ln n \quad \text{et} \quad \frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0.$$

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

6-On considère la fonction numérique g définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x & x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction g est continue à droite au point 0.

b) Vérifier que pour $n \geq 3$, on a : $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$.

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$.

EXERCICE 4: (3points)

L'unité est le centimètre. Dans le plan orienté, on donne un carré ABCD de centre I tel que AB=3 et F le barycentre des points pondérés (A ;4), (B ; -1) et (D ; -1).

1- a) Démontre que A est le milieu du segment [FI].

b) Justifie que $FB^2 = \frac{45}{2}$ puis que $FB = FD$.

2- Soit (E_1) l'ensemble des points du plan tels que : $4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 9$.

a) Démontre que $M \in (E_1) \Leftrightarrow 2MF^2 - 27 = 9$.

b) Détermine et construis l'ensemble (E_1)

3- Dans le plan muni d'un repère $(B; \vec{i}; \vec{j})$, on admet que les coordonnées des points A et C sont A(0 ;3), C(3 ;0) et la droite (AD) a pour équation : $y = 3$. Soit (E_2) l'ensemble des points M(x ;y) du plan tels que $4MA^2 - MB^2 - MD^2 = \frac{1}{2}(y - 3)^2 - 27$.

a) Détermine les coordonnées du point F puis justifie que dans le repère $(B; \vec{i}; \vec{j})$, une équation de (E_2) est : $\frac{4(x+1,5)^2}{3} + (y - 5)^2 = 1$.

b) Déduis-en que (E_2) est une ellipse dont on précisera l'excentricité, un foyer et la directrice associée.

c) Justifie que les coordonnées des sommets sont : $S_1\left(-\frac{3}{2}; 4\right)$ et $S_2\left(-\frac{3}{2}; 6\right)$.

d) Construis (E_2) sur la même figure que (E_1) .

EXERCICE 5 : (4points)

Partie I :

1.a) On donne le nombre complexe : $a = 2 - 2i\sqrt{3}$. Détermine sous forme algébrique les racines carrées de a .

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - (3\sqrt{3} + 3i)z + 4i\sqrt{3} = 0$

2. Soit le polynôme complexe p tel que : $p(z) = 2z^3 - 3(\sqrt{3} + 3i)z^2 - 10(1 - i\sqrt{3}) + 8\sqrt{3}$.

a) Vérifie que : $p(2i) = 0$.

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, unité graphique 2cm. On donne les points U, B et K d'affixes respectives $z_U = \sqrt{3} + i$, $z_B = 2i$ et $z_K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

1. a) Place les points U, B et K dans le plan complexe.

b) Ecris sous forme trigonométrique les nombres complexes z_U, z_B et z_K .

2. Détermine la nature du triangle BOU.

3. Soit C l'image du point O par la symétrie de centre K.

a) Détermine l'affixe du point C.

b) Démontre que le quadrilatère BOUC est un losange.

4. On note $G = \text{bar} \{(O, 2), (U, -1), (C, 1)\}$.

a) Démontre que G est le milieu du segment [BO].

b) Détermine et construis l'ensemble $(\mathcal{A})$ des points M du plan tels que :

$$\|2\vec{MO} - \vec{MU} + \vec{MC}\| = \|\vec{MB} + \vec{MU} - 2\vec{MC}\|.$$

EXERCICE 6 : (5 points)

Pour fructifier ses affaires, KOUYA un jeune de la commune de SAN PEDRO décide d'ouvrir le coffre-fort contenant des objets précieux que lui a légués son défunt père anciennement professeur de Mathématiques. Après avoir ouvert le coffre-fort, il découvre une enveloppe contenant une feuille sur laquelle sont données des indications sur le code de déverrouillage du coffre-fort. Sur la feuille, on pouvait lire ceci :

- le code de déverrouillage est un nombre entier naturel de quatre chiffres, multiple de 99 ;
- le chiffre des milliers est le chiffre des unités du nombre 3^{2023} ;
- le chiffre des centaines est la plus petite solution dans $\mathbb{N}$ de l'équation $(E): 4x + 5 \equiv 0[7]$.

Ne sachant comment exploiter ces informations, il te sollicite. A l'aide d'une production argumentée, basée sur tes connaissances mathématiques, donne une réponse à KOUYA.