

**MATHÉMATIQUES**

**SÉRIE A1**

*Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2  
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

**EXERCICE 1 (2 points)**

Écris le numéro de chaque proposition ci-dessous suivi de **Vrai** si la proposition est vraie ou de **Faux** si elle est fausse.

N°	PROPOSITIONS
1	Pour tout nombre réel $x$ , $e^x > 0$
2	$F$ étant une primitive sur $[-1,2]$ d'une fonction $f$ , on a : $\int_{-1}^2 f(x)dx = F(-1) - F(2)$
3	La fonction $f$ définie par $h(x) = -3e^{2x+1}$ a pour dérivée sur $\mathbb{R}$ : $h'(x) = 6e^{2x+1}$
4	La droite d'ajustement linéaire d'un nuage de points passe par le point moyen de ce nuage

**EXERCICE 2 (2 points)**

Pour chaque ligne du tableau, quatre compléments sont proposés dont un seul est juste.  
Note le numéro de chaque énoncé incomplet suivi de la lettre correspondant au complément juste.

N°	Enoncés incomplets	Compléments proposés
1.	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3e^x)$ est égale à :	<b>A</b> $+\infty$
		<b>B</b> $-\infty$
		<b>C</b> 0
		<b>D</b> 1
2.	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f: x \mapsto -3x^2 + 2x - 1$ est la fonction $F$ définie par :	<b>A</b> $F(x) = x^3 + x^2 - x$
		<b>B</b> $F(x) = -x^3 + x^2 + x$
		<b>C</b> $F(x) = -x^3 + x^2 - x$
		<b>D</b> $F(x) = -3x^3 + 2x^2 - x$
3.	L'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}, e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ est :	<b>A</b> $\{0; 2\}$
		<b>B</b> $\emptyset$
		<b>C</b> $\{0; \ln \frac{1}{2}\}$
		<b>D</b> $\{0; \ln 2\}$
4.	Dans une série statistique double $(X, Y)$ , la droite de régression de $y$ en fonction de $x$ par la méthode de moindres carrés a pour équation $y = ax + b$ où le nombre $a$ égal à :	<b>A</b> $\frac{\text{Cov}(X;Y)}{V(X)}$
		<b>B</b> $\frac{\text{Cov}(X;Y)}{V(Y)}$
		<b>C</b> $\frac{\text{Cov}(X;Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$
		<b>D</b> $\frac{V(X)}{V(Y)}$

**EXERCICE 3 (5 points)**

La mairie d'une ville offre chaque fin d'année scolaire des vacances au meilleur élève de la localité. Les noms de 15 villes dont 7 d'Europe, 3 d'Asie et 5 d'Amérique sont inscrits sur des morceaux de carton mis dans une urne. Les morceaux de cartons sont indiscernables au toucher. Le meilleur élève désigné doit tirer simultanément 3 noms de villes c'est-à-dire 3 morceaux de carton. Il aura ensuite la latitude d'opter pour sa ville préférée.

- 1- Justifie que l'élève peut s'attendre à 455 tirages possibles.
- 2- Soit l'évènement :  $A$  : « l'élève tire des villes de trois continents différents ».

Justifie que la probabilité de l'évènement  $A$  est égale à  $\frac{3}{13}$ .

3- Soit l'évènement : B : « l'élève tire des villes d'un même continent ».

Calcule la probabilité de l'évènement B.

4- Justifie que la probabilité de l'évènement C : « l'élève ne tire aucune ville d'Asie » est égale à  $\frac{44}{91}$ .

5- Calcule la probabilité de l'évènement D : « l'élève tire au moins une ville d'Asie ».

6- On désigne par  $X$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de villes d'Asie dans le tirage effectué par l'élève.

a) Justifie que l'ensemble des valeurs prises par  $X$  est  $\{0; 1; 2; 3\}$ .

b) Détermine la loi de probabilité de  $X$ .

c) Justifie que l'espérance mathématique  $E(X)$  de  $X$  est égale à  $\frac{3}{5}$ .

### **EXERCICE 4 (6 points)**

Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O, I, J)$ . Unités graphiques :  $OI = 1 \text{ cm}$  et  $OJ = 5 \text{ cm}$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + \ln x$ . On désigne par (C) la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O, I, J)$ .

1- a) Vérifie que la limite de  $f$  à droite en 0 est  $-\infty$ . Interprète graphiquement ce résultat.

b) En remarquant que pour tout  $x$  élément de  $]0; +\infty[$ ,  $f(x) = x \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{3x} + \frac{\ln x}{x} \right)$ , calcule la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

2- On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

a) Justifie que la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  est définie par :  $f'(x) = \frac{-x+3}{3x}$ .

b) Étudie le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

c) Déduis-en que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0; 3]$  et décroissante sur  $[3; +\infty[$ .

d) Dresse le tableau de variation de la fonction  $f$ .

3- Justifie qu'une équation de la tangente ( $T$ ) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est :  $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ .

4- Démontre que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  telle que :  $6,7 < \alpha < 6,8$ .

5- On donne le tableau suivant :

$x$	0,5	1	3	5	6	7	8	10
$f(x)$	-0,5	0	0,4	0,3	0,12	-0,05	-0,25	-0,7

Trace la tangente ( $T$ ) et construis la courbe (C).

6- On considère la fonction  $F$  dérivable et définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $F(x) = -\frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} + x \ln x$ .

a) Justifie que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

b)  $\mathcal{A}$  est l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe  $(OI)$  et les droites d'équations :  $x = 1$  et  $x = 4$ . Justifie que :  $\mathcal{A} = 40 \ln(2) - \frac{45}{2}$ .

### **EXERCICE 5 (5 points)**

Une entreprise produit et commercialise des pièces destinées à l'industrie automobile. Pour des raisons matérielles, sa capacité journalière de production est comprise entre 0 et 30 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de  $x$  pièces peut être modélisé sur l'intervalle  $[0; 30]$ , par une fonction  $B$  définie par :  $B(x) = -2x^2 + 60x - 400$ .

N'ayant pas de personnel qualifié mais désireux d'accroître son bénéfice, le Directeur de l'entreprise désire déterminer le nombre de pièces à produire en un jour, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal. Le Directeur te sollicite. À l'aide d'une production cohérente basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation du Directeur.