

1S2 LONDO AKADEMY

LIMITES ET CONTINUITE

Exercice 1 Pour chacune des fonctions f , trouver D_f puis **étudier** les limites aux bornes de D_f . En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe de f .

① $f(x) = \frac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4}$

④ $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2(x - 1)}$

② $f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 1}{(x^2 - 1)(3x - 5)}$

⑤ $f(x) = \frac{x\sqrt{x+2} + 1}{x + 1}$

③ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{|-2x + 3|}$

⑥ $f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

Exercice 2 Montrer les limites suivantes.

① $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3 - |x - 1|}{|x^2 - 3x - 4|} = \frac{1}{5}$

④ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \frac{7}{8}$

② $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{x} - 8}{4 - x} = -3$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = 3$

③ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = -1$

⑥ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{5x+4}}{\sqrt{7x+1} - \sqrt{x+1}} = -\frac{1}{3}$

Exercice 3 Calculer les limites suivantes.

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 + \sqrt{1 - x}$

⑥ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 1}}$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 12}$

⑦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+4}}$

③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{|x|}}{3x + 2}$

⑧ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{-x} - 1}$

④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

⑨ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x-2}} \right)$

⑤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + 2}}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 2 \end{cases}$ Étudier la continuité de f en 2.

Exercice 5

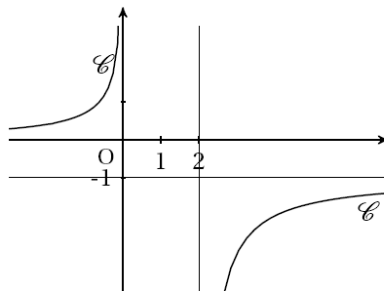
Soit g la fonction définie par : $g(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si } x \in [3; 4[\\ -\frac{1}{4}x + 4 & \text{si } x \in [4; +\infty[\end{cases}$
 Étudier la continuité de g en 4 puis sur $[3; +\infty[$.

Exercice 6 Étudier la continuité en a des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} f(x) = \begin{cases} \frac{x+|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} & a = 0 \\ \textcircled{2} f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x^2+2x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} & a = 0 \\ \textcircled{3} f(x) = \begin{cases} \frac{x-\sqrt{|x|}}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ xE\left(\frac{x}{2}\right) & \text{si } x \geq 1 \end{cases} & a = 1 \\ \textcircled{4} f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{\sin x - 1} & \text{si } \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right] \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases} & a = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Exercice 7 Soit la fonction g dont la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est donné ci-dessous.

- ① Préciser les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.
- ② A l'aide du graphique conjecturer les limites suivantes:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} g(x)$.

**Exercice 8**

$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+3} & \text{si } x \geq -2 \\ a^2 + x & \text{si } x < -2 \end{cases}$ Trouver les réels a pour que f soit continue en -2 .

Exercice 9 Soit $g(x) = \begin{cases} x^2 + x + 6 & \text{si } x < 2 \\ 2x - a & \text{si } x > 2 \\ g(2) = b \end{cases}$

Pour quelles valeurs des réels a et b la fonction g est-elle continue en 2 ?

Exercice 10

Soit : $h(x) = \begin{cases} -2 \sin x & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Trouver a et b pour que h soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{-2x-1}{x+2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{|x^2-4x|-4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- ① Trouver l'ensemble de définition de f .
- ② Ecrire f sans valeur absolue et étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
- ③ Etudier la continuité de f en 1 et en 4?

Exercice 12

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-2x|}{x(x^2-x-2)} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = \frac{1}{3} \end{cases}$

- ① Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.
- ② Déterminer un prolongement par continuité à droite de f en 2.
- ③ Etudier les limites de f aux bornes de Df.

Exercice 13

- ① La fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 9}{|x| - 3}$ est-elle prolongeable par continuité en -3 ? en 3 ? Si oui donner le prolongement.
- ② La fonction g définie par : $g(x) = \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1}$ est-elle prolongeable par continuité ?

Exercice 14

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6 + |x - 3|}{x^2 - 9} & \text{si } x \neq 3 \\ a & \text{si } x = 3 \end{cases}$

- ① Trouver l'ensemble de définition de f .
- ② Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f .
- ③ Trouver toutes les asymptotes de la courbe de f .
- ④ Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles f est continue en 3 ?

Exercice 15

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ par : $f(x) = \frac{x^3 + px + q}{(x - 1)(x - 2)}$

- ① Déterminer les réels p et q pour que f admette un prolongement par continuité en 1 et 2 .
- ② Calculer la valeur de ce prolongement en 1 et en 2 .