ENSEA

08 BP 03 ABIDJAN 03
Tél. 22 44 41 15 / Fax. 22 44 39 88
Email : ensea@ensea.ed.ci

Session de Septembre 2007

CONCOURS DIRECT D'ENTRÉE EN DIVISION
DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour l'épreuve écrite de mathématiques et entre pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé à l'exclusion des calculatrices graphiques.
Tout calcul de limite doit être justifié.

Exercice 1

z étant un nombre complexe différent de i, on considère le nombre u défini par :

$$u = \frac{iz - 2 + 4i}{z - i} \ ;$$

1) Démontrer que u est différent de i.
2) Soient Z = z-i et U = u-i. Démontrer que ZU = -3 +4i.
3) Déterminer les nombres complexes Z vérifiant Z = U.
4) Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation

$$z = \frac{iz - 2 + 4i}{z - i}.$$

Exercice 2

Un dé parfait a six faces numérotées de 1 à 6. On le lance quatre fois de suite. A chaque lancer, on note le numéro marqué sur la face supérieure du dé.
(Les résultats seront arrondis à 0,001 près) ;

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « On obtient deux fois le nombre 6 et deux fois seulement » ;
   B : « On obtient au moins une fois le nombre 6 » ;
   C : « On obtient 6 pour la première fois au troisième lancer» ;
2) Calculer la probabilité de :

a) l'événement « A et C » ;
b) l'événement « B et C ».

Exercice 3

Dans cet exercice, il s'agit de préciser les positions relatives des courbes de trois fonctions f, g et h sur l'intervalle $I = [-0,5 ; 1]$.

On donne $f(x) = \ln(1 + 2x)$, $g(x) = 2x(1-x)$, $h(x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3$.

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, A, B) dont les unités graphiques sont : OA = 5 cm ; OB = 2,5 cm.

On désigne par C_f, C_g, C_h les courbes respectives des fonctions f, g et h.

1) Étudier les positions relatives des courbes C_g et C_h.
2) a) Dresser le tableau des variations de g sur l'intervalle I.
   b) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-0,5	-0,2	0	0,2	0,4	0,5	0,8	1
g(x)	-1,5	-0,48	0	0,32	0,48	0,5	0,32	0

   c) Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe C_g au point d'abscisse x = 0.
   d) Tracer la droite (T) et la courbe C_g. On prendra soin de placer l'origine du repère au centre de la page.
3) a) Dresser le tableau des variations de h sur l'intervalle I.
   b) Démontrer que la droite (T) est aussi la tangente à la courbe C_h au point d'abscisse x = 0.
   c) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant : *(les résultats seront arrondis à 0,001 près)*

x	0,4	0,5	0,8	1
h(x)-g(x)	0,170	0,333	1,365	2,666

   d) Tracer la courbe C_h dans le repère (O,A,B) .
4) On appelle l la fonction égale à f-g.
   a) Calculer la dérivée l'(x) sur I et étudier son signe ;
   b) Déterminer le sens de variation de l ;
   c) Calculer l(0) et en déduire le signe de l(x) sur I.
5) On appelle k la fonction égale à f-h.
   a) Calculer la dérivée k'(x) sur I et étudier son signe ;
   b) Déterminer le sens de variation de k ;
   c) Calculer k(0) et en déduire le signe de k(x) sur I.
6) Préciser les positions relatives des courbes C_f, C_g, et C_h sur I.
7) Démontrer que la droite (T) est aussi la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x = 0.
8) Tracer la courbe C_f dans le repère (O, A, B).

Session Septembre 2007

CONCOURS DIRECT D'ENTREE EN DIVISION
DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE CALCULS NUMERIQUES

Durée: 2 heures

CALCULATRICES AUTORISEES / AUTRES DOCUMENTS NON AUTORISES

Exercice 1

oit x un nombre réel. On considère les expressions suivantes :

$$A(x) = 4x^3 + 5x^2 - 5x - 4 \text{ et } E(x) = x^3 + 27 + (x+3)(3x-1).$$

. Factoriser A(x) et E(x).

. Déterminer l'ensemble de définition du quotient $R(x) = \dfrac{E(x)}{A(x)}$ et étudier son signe uivant les valeurs de x.

Exercice 2

oit $n \in \mathbb{N}^*$, on se propose de calculer la somme $S_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour out entier naturel strictement positif n.

. Calculer S_2, S_3, S_4 et S_5.

. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire un calcul simple de S_{2007}.

c) Donner alors une expression plus simple de S_n en fonction de n.

Exercice 3

Pour un entier naturel n, on pose :

$$U_n = (\sqrt{2}+1)^n \quad \text{et} \quad V_n = (\sqrt{2}-1)^n.$$

a) Montrez qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) d'entiers naturels tels que:

$$U_n = a_n + b_n\sqrt{2} \; ;$$

b) Quelles sont les valeurs de a_0 et b_0? Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n ;

c) Déterminez l'expression de $2b_n^2 - a_n^2$ en fonction de n puis calculer PGCD (a_n, b_n) pour n strictement positif ;

d) Quelle est la valeur de U_nV_n?
Donnez alors l'expression de V_n en fonction de a_n et b_n ;

e) Montrez que pour tout n entier naturel, il existe un entier naturel p_n tel que :

$$(\sqrt{2}+1)^n = \sqrt{p_n} + \sqrt{p_n + 1}.$$

Exercice 4

Une société envisage d'ouvrir une salle de musculation d'une capacité d'accueil de 200 à 250 personnes par jour.

Elle souhaite que le bénéfice moyen, par personne et par heure, soit au moins égal à 300 FCFA. Elle vous demande de déterminer le nombre minimum de personnes accueillies par heure qui satisfait cette contrainte.

On fixe le prix l'heure de musculation à 800 FCFA par personne.
On estime que le coût de fonctionnement horaire de la salle de musculation est constitué :
- d'un coût fixe de 15 000 FCFA
- d'un coût variable de 450 FCFA par personne.

1) Dans cette question, on se place dans le cas particulier où l'occupation horaire est de 125 personnes.

a) Calculer la recette horaire relative au prix du séjour.
b) Calculer le coût de fonctionnement horaire.
c) Calculer le bénéfice horaire, différence entre la recette horaire et le coût de fonctionnement horaire.
d) En déduire le bénéfice horaire moyen, par personne (*arrondir au centime*).

2) Dans la suite, on se place dans le cas général où l'occupation horaire est de n personnes.

a) Exprimer la recette horaire $R(n)$ en fonction de n.
b) Exprimer le coût de fonctionnement horaire $C(n)$ en fonction de n.
c) En déduire le bénéfice horaire $J(n)$.
d) En déduire l'expression du bénéfice horaire moyen par personne.
e) Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la société atteigne son objectif.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

ENSEA

08 BP 03 ABIDJAN 08
Tel 22 44 41 15 / Fax 22 44 39 88
Email : ensea@ensea.ed.ci

Session Avril 2008

CONCOURS DIRECT D'ENTREE EN DIVISION
DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE CALCULS NUMERIQUES

Durée: 2 heures

CALCULATRICES AUTORISEES / AUTRES DOCUMENTS NON AUTORISES

Exercice 1

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes. Pour les inéquations, représenter l'ensemble des solutions :
   a. $(2x-3)^2-(2x-1)(2x-2)=-1$;
   b. $2(x-4)-3(2x-1)\leq 7$;
   c. $\frac{3x}{2}-\frac{2x}{3}<\frac{5}{6}$;
   d. $(x+3)^2-3(2x+5)=0$.
2. Soit le nombre $A=(2\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-2)$
   a. Calculer A et donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs ;
   b. On donne l'encadrement : $1{,}5<\sqrt{3}<2$. En déduire un encadrement de A.
3. Calculer et donner l'écriture scientifique de : $C=\frac{0{,}4\times10^{-8}}{(5\times10^{-5})^2}$.

Exercice 2

1. α est un angle aigu tel que $\cos\alpha=\frac{2}{3}$. Calculer la valeur exacte de $\sin\alpha$ et en déduire celle de $\tan\alpha$;
2. x est un angle aigu. Exprimer plus simplement $(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2$.

Exercice 3

Résoudre les questions 1) et 2) à l'aide d'une équation du 1er degré.

1) Je choisis un nombre, je lui ajoute 5, puis je multiplie le résultat par 4. Enfin, je divise le résultat trouvé par 5, et je retombe sur le nombre de départ. Quel était ce nombre ?

2) Aujourd'hui, l'âge d'un père vaut 4 fois celui de sa fille. Mais dans 18 ans, l'âge du père sera seulement le double de celui de sa fille. Quels sont leurs âges actuels ?

3) Je marche à 4 km/h. J'habite à 850 mètres d'une gare.

a) Quelle est la durée exacte de mon parcourt entre chez moi et cette gare ? Donner le résultat en minutes et secondes.

b) En marchant 1 km/h plus vite, combien de temps vais-je gagner sur ce même parcour

Problème

Dans ce problème, on s'intéresse aux suites (u_n) qui vérifient la relation de récurrence : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

On note E l'ensemble des suites réelles qui vérifient cette relation de récurrence.

Partie A - Stabilité de l'ensemble E

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de l'ensemble E.

Soient λ et μ deux réels quelconques.

Démontrer que la suite (c_n) définie par $c_n = \lambda a_n + \mu b_n$ appartient aussi à l'ensemble E.

Partie B - Recherche de suites géométriques appartenant à E

Soit (a_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$.

Comment choisir q pour que la suite (a_n) soit élément de l'ensemble E ?

Partie C - Suite de Fibonacci

On appelle "suite de Fibonacci" la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

1. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.
2. Déterminer les valeurs de λ et μ telles que pour tout $n \in IN$: $u_n = \lambda q^n + \mu q^n$
3. Démontrer que : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Cette limite est le "nombre d'or")
4. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in IN^*$: $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^2$

Partie D - Somme des termes de la suite de Fibonacci

On note (u_n) la suite de Fibonacci (définie à la partie C) et S_n la somme :

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

1. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.
2. Démontrer que pour tout $n \in IN$: $S_n = u_{n+2} - 1$

ENSEA
08 BP 03 ABIDJAN 08
Tél. 22 48 32 32/00 / Fax 22 44 39 88
Email : ensea@ensea.ed.ci – Site Web : www.ensea.ed.ci

Session de Avril 2009

CONCOURS DIRECT D'ENTRÉE EN DIVISION DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée 3 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour l'épreuve de mathématiques et entre pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé à l'exclusion des calculatrices graphiques. Tout calcul de limite doit être justifié.

Exercice

Un sac contient trois boules indiscernables au toucher numérotées 0, 1 et 2. On tire une boule dans le sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac. Ensuite, on tire une seconde boule, on note le numéro y et on la remet dans le sac. A chaque tirage de deux boules, on associe le nombre complexe $z = x+iy$.

1) Calculer la probabilité des événements suivants :
   a. A : « z est un nombre réel »
   b. B : « z est un nombre imaginaire pur » ;
   c. C : « z est une solution de l'équation $|z-1| = |\bar{z}+1|$ » ;
   d. D : « z est une solution de l'équation $\frac{z-1}{z+1} = i$ » ;
2) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules associe la somme x^2+y^2. Déterminer la loi de la probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

Problème

Le plan P est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

On considère la fonction numérique définie par $F(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.

1) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
2) Étudier la parité de F.
3) On appelle f la restriction de F à l'intervalle $]0\,;+\infty[$
   a) Calculer les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$;
   b) Interpréter graphiquement ces résultats.
4) Pour tout nombre réel strictement positif,
   a) Calculer le nombre dérivé $f'(x)$;
   b) Déterminer le sens de variation de f ;
5) Pour tout nombre réel x strictement négatif,
   a) Justifier que $F'(x) = f'(-x)$
   b) En déduire le sens de variation de F ;
   c) Dresser le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}^*$.

Partie B

On considère la fonction G définie par $G(0)=0$ et $G(x) = \dfrac{1}{F(x)}$ pour tout nombre réel non nul.

1) Justifier que G est une fonction dérivable en 0 ;
2) Justifier que G est une fonction bijective sur $\mathbb{R}$. Indiquer son ensemble d'arrivée ;
3) Définir la fonction réciproque de G

Partie C

On appelle I l'intervalle $[1\,,2]$;

1) Pour tout élément x de I,
   a) Démontrer que $f(x)$ appartient à I ;
   b) Démontrer que : $|f'(x)| \leq \dfrac{4}{5}$;
2) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle I ;
3) En déduire que pour tout élément x de I, $|f(x)-\alpha| \leq \dfrac{4}{5}|x-\alpha|$;
4) On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier n, $U_{n+1} = f(U_n)$. P
   tout entier naturel n, justifier que :
   a) U_n est élément de I ;
   b) $|U_{n+1}-\alpha| \leq \dfrac{4}{5}|U_n-\alpha|$;
   c) $|U_n-\alpha| \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$;
   d) Démontrer que la suite (U_n) converge vers α.
5) Représenter graphiquement :
   a) La courbe de f sur l'intervalle I ;
   b) Les quatre premiers termes de la suite (U_n) et estimer à partir du graphique, une valeur d
   à 10^{-1} près ;
6) Déterminer un entier p tel que, U_p est une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

RÉPUBLIQUE DE COTE-D'IVOIRE
Union – Discipline – Travail

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

ENSEA

08 BP 03 ABIDJAN 08
Tél. 22 48 32 32/00 / Fax. 22 44 39 88
Email : ensea@ensea.ed.ci – Site Web : www.ensea.ed.ci

Session de Avril 2009

CONCOURS DIRECT D'ENTREE EN DIVISION DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

Durée: 2 heures

CALCULATRICES AUTORISEES / AUTRES DOCUMENTS NON AUTORISES

X Exercice

Un restaurateur propose 5 repas à la carte. Leurs prix sont les suivants :

- Repas A : 7 800 FCFA
- Repas B : 6 100 FCFA
- Repas C : 8 600 FCFA
- Repas D : 4 900 FCFA
- Repas E : 5 700 FCFA

Question 1:
Calculer le prix moyen des repas.

Question 2.
Afin de conserver une cohérence dans sa gamme de prix, le restaurateur souhaite qu'aucun des repas n'ait un prix inférieur ou supérieur à 20 % du prix moyen des repas.

2.1 Calculer l'écart maximum souhaité (en plus ou en moins) par rapport au prix moyen des repas. Le résultat est arrondi au centième près.
2.2 Calculer le prix minimum souhaité ;
2.3 Calculer le prix maximum souhaité ;
2.4 Vérifier la cohérence de la gamme des prix. Justifier votre réponse.

Question 3
Le restaurateur fait un relevé des ventes des repas.

3.1 Compléter le tableau ci-dessous.

Repas	Effectifs	Prix en FCFA	Effectifs x Prix en FCFA
A	24	7 800	187200
B	22	6 100	134 200
C	14	8 600	120400
D	9	4 900	44 100
E	11	5 700	62700
	Total = 80		Total = 548600

3.2 Calculer le montant moyen dépensé pour un repas.

Problème

Vingt chevaux, numérotés de 1 à 20, participent à une course. On admet a priori que les vingt chevaux ont la même chance de gagner la course.

Question 1.
Un joueur désigne, dans l'ordre, les chevaux numérotés 4, 11, 18 ;

a) Calculer la probabilité de voir les trois chevaux en question prendre, dans l'ordre indiqué, les trois premières places de la course ;
b) Dans l'hypothèse où la mise du joueur est égale à 500 francs, calculer, en cas de gain, la somme que devra lui verser l'organisateur de la course, le jeu étant supposé équitable.
c) L'organisateur du jeu supporte des frais qu'il estime à 20% de ses recettes. Calculer, dans ce cas, la somme qu'il versera au joueur en admettant qu'il veuille s'assurer un bénéfice égal à 5% des recettes.

Question 2 :
Un joueur a désigné, dans l'ordre, les chevaux numérotés 10, 11 et 12 ;

a) Calculer la probabilité de voir les trois chevaux en question prendre, non dans l'ordre, les trois premières places de la course.

Question 3 :
On suppose maintenant que les vingt chevaux soient d'inégale valeur. Les chevaux numérotés 1 à10 ont une probabilité individuelle de victoire égale à 0,05 ; les chevaux numérotés 11 à 14 ont une probabilité individuelle de gagner égale à 0,08 ; les chevaux numérotés 15 à 20 ont chacun une probabilité égale de vaincre.

a) Exprimer la probabilité de voir, dans l'ordre, les trois chevaux numérotés 4, 11 et 18, prendre les trois premières places de la course ;
b) Exprimer la probabilité de voir, non dans l'ordre, les trois chevaux numérotés 10, 11 et 12, prendre les trois premières places de la course.

Scanné avec CamScanner

Session de Avril 2010

CONCOURS **DIRECT** D'ENTRÉE EN DIVISION DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour l'épreuve écrite de mathématiques et entre pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé à l'exclusion des calculatrices graphiques. Tout calcul de limite doit être justifié.

Exercice

Un jeu consiste à lancer une bille dans un circuit comportant cinq butoirs désignés par les lettres A, B, C, D, E. Les butoirs A, B, C, D, E sont marqués respectivement par les numéros 1, 2,1, 2, 3.

Au début du lancer, la bille frappe au hasard un des butoirs A ou B ou C. Ensuite,

- de A, elle frappe au hasard B ou D ou E ;
- de B, elle frappe au hasard D ou E ;
- de C, elle frappe E ;

et de D ou E elle sort du circuit.

1. A l'aide d'un arbre de choix,
   a. présenter tous les trajets possibles de la bille au cours d'un lancer.
   b. démontrer que la probabilité du trajet (A, B, E) est égale à $\frac{1}{18}$.
   c. calculer la probabilité pour que la bille frappe le butoir B au cours de son trajet.
2. Le joueur gagne en francs CFA, 100 fois le nombre égal au total des chiffres marqués sur les butoirs heurtés par la bille au cours d'un trajet. On note G ce gain.
   a. Établir la loi de probabilité de G ;
   b. Calculer l'espérance mathématique de G.
3. Une partie consiste en n lancers indépendants de la bille ; n étant un entier naturel non nul.
   a. Déterminer la probabilité p_n pour que le joueur réalise au cours d'une partie au moins un lancer dont le gain est strictement supérieur à 400 F CFA ;
   b. Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle p_n est supérieure à 0,99.

PROBLEME

L'objet du problème est la construction de la Cissoïde de Dioclès par deux méthodes.

Partie A :

f est la fonction définie sur $[0;1[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$.

(Γ_1) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 5 cm.

1.
   a. Calculer la limite de f lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et interpréter graphiquement le résultat ;
   b. Étudier la dérivabilité de f en 0 et indiquer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.
2.
   a. Dresser le tableau de variation de f.
   b. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ_1) au point d'abscisse $x=\frac{1}{2}$.
3. Sur le même graphique,
   a. Construire la droite (T) et la courbe (Γ_1).
   b. Tracer la courbe (Γ_2), symétrique de (Γ_1) par rapport à l'axe (OI).
4. Soit $(\Gamma)=(\Gamma_1)\cup(\Gamma_2)$. La courbe (Γ) est appelée cissoïde de Dioclès.
   Démontrer que la courbe (Γ) a pour équation cartésienne : $x(x^2+y^2)-y^2=0$.

Partie B :

Dans le repère (O, I, J) de la partie A :
- (C) est le cercle de diamètre [OI] ;
- (Δ) est la tangente à (C) en I ;
- (D) est la droite passant par O et de coefficient directeur t, $t\in\mathbb{R}$.

1.
   a. Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) et de la droite (D).
   b. Le cercle (C) et la droite (D) se coupent au point O et en un second point M. Déterminer les coordonnées du point M.
      a. La courbe (Γ) et la droite (D) se coupent en O et en second point M'. Déterminer les coordonnées du point M'.
      b. Les droites (Δ) et (D) se coupent en un point appelé N. Déterminer les coordonnées du point N.

2. Démontrer l'égalité vectorielle : $\overline{OM'}=\overline{MN}$.
3. Donner une liste de consignes permettant de construire point par point de la courbe (Γ).

Scanné avec CamScanner

Tel 22 48 12 32/00 / Fax. 22 44 39 88
Email ensea@ensea.ed.ci - Site Web : www.ensea.ed.ci

Session de Avril 2010

CONCOURS **DIRECT** D'ENTREE EN DIVISION DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE CALCULS NUMERIQUES

Durée : 2 heures

CALCULATRICES AUTORISEES / AUTRES DOCUMENTS NON AUTORISES

Exercice 1

1. Trois sportifs se partagent une prime. Le partage doit être fait inversement proportionnellement au score de chacun. Antoine a mis 30 minutes pour parcourir le circuit, Benoît a mis 25 minutes et Camille 20 minutes. Camille a reçu 600 000 FCFA de plus qu'Antoine.
   Calculer la prime de chacun.
2. La commune de BELLEVILLE a acheté un terrain qui est partagé en quatre parcelles A, B, C et D destinées à accueillir sur chacune d'elles des lotissements. Le nombre d'habitants du lot A représente 1/3 de la population totale des quatre parcelles ; celui du lot B est le 1/7 de la population totale, celui du lot C correspond aux 5/3 de celui de B et enfin la population du lot D est de 1 320 habitants.
   a. Déterminer la population de chaque parcelle et la part en pourcentage de chacune d'elles par rapport à la population totale occupant ce terrain.
   b. Présenter les résultats sous forme d'un tableau.

Exercice 2

Un planteur de bananes ne dispose que d'un vieil éléphant pour transporter ses bananes. L'animal consomme une banane au kilomètre et n'accepte de porter que 1000 bananes au plus sur son dos. Le plus proche marché se trouve à 1000 kilomètres de la plantation. La production est de 5000 bananes.

1. Combien de bananes au maximum, ce planteur pourra-t-il mettre en vente sur le marché ? Quel est le coefficient de perdition (bananes consommées par l'éléphant/bananes produites) ?
2. Mêmes questions avec 10000 bananes.
3. Mêmes questions avec 25000 bananes.
4. Que peut-on en conclure sur le coefficient de perdition si le nombre de bananes à transporter devient très grand ?

Exercice 3

On considère la séquence de nombres entiers définie par $u_n = u_{n-1} - u_{n-2}$ avec $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$. On considère tous les triplets (u_i, u_j, u_k) avec $1 \leq i < j < k \leq n$ et on calcule la somme des trois termes. Quelle est la plus petite valeur de n qui permet d'obtenir au moins 2010 résultats différents ?

CONCOURS DIRECT D'ENTREE EN DIVISION DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE CALCULS NUMERIQUES

Durée : 2 heures

CALCULATRICES AUTORISEES / AUTRES DOCUMENTS NON AUTORISES

Exercice I

1. Dans une entreprise, parmi les salariés, le tiers sont des ouvriers, le quart sont des chauffeurs, le cinquième sont des mécaniciens et le sixième sont des employés de bureau. Les 6 employés restant sont des cadres.
   a. Quelle est la part des cadres dans cette entreprise ?
   b. Combien y a-t-il d'employés en tout dans cette entreprise ?

2. La distance Terre – Soleil est de 150×10^9 m. La vitesse de la lumière dans le vide est de 3×10^8 m.s^{-1}. Calculer le temps que met la lumière pour nous parvenir du Soleil. On exprimera les résultats en secondes puis en minutes et secondes.

3. Jean choisit un nombre, il lui ajoute 5, puis multiplie le résultat par 4. Enfin Jean divise le résultat trouvé par 5 et il retombe sur le nombre de départ. Quel était ce nombre ?

4. Aujourd'hui, l'âge d'un père vaut 4 fois celui de sa fille. Mais dans 18 ans, l'âge du père sera seulement le double de celui de sa fille. Quels sont leurs âges actuels ?

… d'une intégr…

…ns cet exercice, on désire calculer l'intégrale I suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt\ ;$$

1. On définit pour tout réel x la fonction F par :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt\ ;$$

   expliquer pourquoi la fonction F est dérivable sur R et calculer sa dérivée F'.

2. Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$g(x) = F(\tan(x))$$

   A l'aide du théorème de dérivation d'une fonction composée, démontrer que g est dérivable et que g' est constante.
   En utilisant la valeur de $g(0)$, expliciter la fonction g.

3. En déduire la valeur de I.

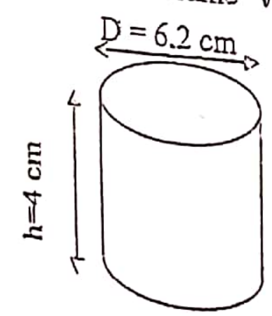
Problème

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 4x + 5y = 9 \\ 2x + 9y = 12{,}30 \end{cases}$

2. Raphael et Eric se rendent un dimanche chez la vendeuse. Ils souhaitent acheter des beignets et des pains au soja pour le petit déjeuner. Raphael achète 8 beignets et 10 pains au soja et paie 1 800 FCFA. Eric achète 2 beignets et 9 pains au soja et paie 1 230 FCFA.

   Traduire le problème en un système de deux équations à deux inconnus et en déduire le prix d'un beignet et le prix d'un pain au soja.

3. Soit une tasse cylindrique dont le diamètre d'une base circulaire est de D = 6,2 cm et dont la hauteur est h = 4 cm.
   Calculer le volume VT de cette tasse. En donner la valeur arrondie à 0,1 cm^3



4. Sachant que chaque tasse est remplie à 90% de son volume total, indiquer le volume V de bouillie.contenu dans chaque tasse. En donner la valeur arrondie à 0,1 cm^3.

5. Combien de tasses Raphael et Eric pourront-ils servir avec une soupière contenant un demi-litre de bouillie ?

CONCOURS DIRECT D'ENTREE EN DIVISION DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour l'épreuve écrite de mathématiques et entre pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé à l'exclusion des calculatrices graphiques
Tout calcul de limite doit être justifié.

EXERCICE 1

On considère les nombres complexes $a = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $b = 1 - i$.

1. Écrire sous forme trigonométrique a, b et $\frac{a}{b}$.
2. En déduire que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
3. On considère l'équation (E) : $x \in IR$, $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2$.
   a. Résoudre (E).
   b. Placer les points images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout entier naturel $k \leq n$, on pose $I_{k,n} = \int_0^1 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\,dx$.

(On rappelle que C_n^k désigne le nombre de parties de k éléments dans un ensemble de éléments).

b. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel k [illegible], $I_{k+1,n} = I_{k,n}$.

c. En déduire l'expression de $I_{k,n}$ en fonction de n.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x + ln(1 + e^{-x})$.

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unités OI = 1 cm et OJ = 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Démontrer que la droite (D) : $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
   c. Justifier que, pour tout réel x, $f(x) = -\frac{2}{3}x + ln(1 + e^{x})$.
   d. En déduire la limite de f en $-\infty$.
   e. Démontrer que la droite (D') : $y = -\frac{2}{3}x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

2. Calculer la dérivée f'(x) pour tout réel x et dresser le tableau de variation de f.

3. Tracer les droites (D) et (D') et la courbe $(\mathscr{C})$.

4. a. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :
   $$g(t) = -t + \ln(1 + t).$$
   b. Calculer g(0) et justifier le signe de g suivant les valeurs de t.

5. Soit n un entier naturel non nul. On note a_n l'aire, en cm², du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = n$.
   a. Justifier que $a_n = 2\int_0^n ln(1 + e^{-x})dx$ cm².
   b. Démontrer que pour tout réel x, $ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $a_n \leq 2$.
   d. Démontrer que la suite (a_n) est convergente.

6. Dans cette question, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe $(\mathscr{C})$. On note (T) la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse O.
   a. Calculer le coefficient directeur de (T) puis tracer (T).
   b. Soit M et N deux points de $(\mathscr{C})$ dont les abscisses sont non nulles et opposées. Démontrer que la droite (MN) est parallèle à (T).

CONCOURS DIRECT D'ENTREE EN DIVISION
DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour l'épreuve écrite de mathématiques et entre pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé à l'exclusion des calculatrices graphiques.
Tout calcul de limite doit être justifié.

EXERCICE 1 :

1. Résoudre dans IR l'équation $x^3 - 9x^2 - x + 9 = 0$ après avoir vérifié que x = 1 est une solution :
2. Résoudre alors l'équation suivante :

$$2C_n^2 - 4C_{n+1}^2 + n + 3 = 0, \text{ dans IN.}$$

EXERCICE 2:

Vingt-cinq (25) personnes assistent à une soirée. Les salutations coutumières se font comme suit :

- Toutes les femmes s'embrassent entre elles : lorsque deux femmes s'embrassent, deux (2) bises sont échangées ;
- Les femmes embrassent chaque homme, sauf leur compagnon pour celles qui sont accompagnées ; quand une femme et un homme s'embrassent quatre (4) bises sont échangées ;
- Quant aux hommes, ils se serrent tous la main.

Lorsque tout le monde est arrivé, on a compté 774 bises et 55 poignées de mains.
Quel est le nombre d'hommes ? Quel est le nombre de femmes non accompagnées ?

EXERCICE 3 :

On considère la fonction f de IR vers IR définie par $f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$;

On note (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) ;

On prendra OI = OJ = 2 cm.

1. a. Démontrer que IR est l'ensemble de définition de f ;
   b. Démontrer que la fonction f est impaire ;

2. a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$;

   b. Interpréter graphiquement ces résultats.

3. a. Justifier que f est dérivable sur $[0; +\infty[$;
   b. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$;
   c. Justifier que si x < 0 alors f'(x) = f'(-x). En déduire le tableau de variations de f sur IR ;

4. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse x = 0 ;

   b. Tracer (T) et (C).

5. a. Démontrer que f est une bijection de IR vers IR ;

   b. Tracer la courbe représentative (C'), de la bijection réciproque f^{-1} de f sur le même graphique que (C).

6. Démontrer que l'expression explicite de $f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{4e^x}$.

7. Calculer l'aire en cm^2 du domaine du plan délimité par (C), (C'), (OI) et la droite d'équation $x = \frac{e^2-1}{4e}$.

Session de Avril 2012

CONCOURS **DIRECT** D'ENTREE EN DIVISION
DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE CALCULS NUMERIQUES

Durée : 2 heures

CALCULATRICES AUTORISEES / AUTRES DOCUMENTS NON AUTORISES

Exercice 1

On suppose qu'un indice, calculé quotidiennement, n'évolue d'un jour à l'autre que de trois façons possibles ; soit il diminue de 10%, soit il est stable, soit il augmente de 10%. On note $i_0 = 100$ l'indice de départ et i_n l'indice au bout de n jours.

1) a) Si, pendant dix jours consécutifs, il y avait trois jours de hausse, puis quatre jours de stabilité, puis trois jours de baisse, quel serait, arrondi au centième, l'indice final i_{10} ?

b) Quelle serait l'évolution en pourcentage par rapport à i_0 ?

a) On suppose que l'indice augmente tous les jours. Montrer que la suite i_n des indices est une suite géométrique, dont on précisera le terme initial et la raison. Dans ce cas, déterminer au bout de combien de jours cet indice dépassera la valeur 1 000.

2) Une étude a montré que, chaque jour, l'indice augmente de 10 % avec une probabilité égale à 0,3, diminue de 10% avec une probabilité égale à 0,2 et reste stable avec une probabilité égale à 0,5. L'évolution d'un jour à l'autre est indépendante de l'évolution des jours précédents.

On s'intéresse maintenant à l'évolution de cet indice sur deux jours. On note X la valeur de l'indice i_2 au bout de deux jours.

a) Construire un arbre de probabilités illustrant l'évolution de cet indice sur deux jours.

b) Recopier et compléter le tableau suivant, donnant la loi de probabilité de X où les x_i sont les valeurs possibles de X et p_i la probabilité que X soit égale à x_i.

x_i	81	90		100	110	121
p_i	0,04	0.2	0.12	0.25	0,3	0,09

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 2

Le tableau suivant donne l'évolution du pourcentage de CD piratés dans un pays de 1990 à 1998. On désigne par x le rang de l'année et par y le pourcentage de CD piratés.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcentage y_i	85	78	73	66	57	51	47	44	43

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) dans un repère orthogonal tel que 1 cm représente un an sur l'axe des abscisses ; 1 cm représente 10% sur l'axe des ordonnées.
2. Ecrire une équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés. Représenter (D) dans le repère précédent.
3. En utilisant l'ajustement affine de la question précédente, donner une estimation du pourcentage de CD piratés en 2000, en 2005. Que peut-on en penser ?
4. On pose $z = \ln(y)$
   a. Reproduire et compléter le tableau suivant (les valeurs seront données au centième le plus p
   b. roche)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln(y_i)$	−0,16	4,35	4,29	4,18	4,04	3,93	3,85	3,78	3,76

   c. En utilisant le tableau des valeurs de la fonction ln ci-dessous, donnez, en expliquant, une nouvelle estimation du pourcentage de CD piraté en 2005.

X	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\ln(X)$	3,00	3,04	3,09	3,14	3,18	3,22	3,26	3,30	3,33	3,37	3,40

Session de Avril 2013

CONCOURS DIRECT D'ENTREE EN DIVISION DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour l'épreuve écrite de mathématiques et entre pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé à l'exclusion des calculatrices graphiques.
Tout calcul de limite doit être justifié.

EXERCICE 1 :

On considère le nombre complexe $z_m = \dfrac{-\frac{1}{2} + m + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} - m + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$; m étant un nombre réel.

1- Écrire z_m sous forme algébrique.

2- Déterminer les valeurs de m pour lesquelles z_m est imaginaire pur.

3- Résoudre dans C l'équation $(z+i)^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_{-1}$. Ecrire les résultats sous forme algébrique.

EXERCICE 2

Une société a lancé un avis de recrutement de cadres supérieurs. Elle a réceptionné 12 dossiers. Zadi et Awa ont postulé. Les dossiers ont été rangés dans des chemises indiscernables.
A la demande du Directeur qui veut apporter un premier regard sur les dossiers des postulants, la secrétaire dépose sur son bureau 5 chemises qu'elle a choisies au hasard dans le lot.
Calculer la probabilité des événements A, B et C décrits ci-dessous.

A : « les dossiers de Awa et de Zadi ne figurent pas parmi les chemises qui se trouvent sur la table du Directeur. »

Scanné avec CamScanner

B: « les dossiers de Awa et de Zadi figurent parmi les chemises qui se trouvent sur la table du Directeur. »

C : « le dossier de Awa ou de Zadi ne figure pas parmi les chemises qui se trouvent sur la table du Directeur. »

EXERCICE 3

On considère la fonction f dérivable et définie sur IR par $f(x) = (2x - 7)(1 - e^{1-x})$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). L'unité sur chaque axe est 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur IR par $g(x) = 2e^{x-1} + 2x - 9$.

1) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans IR une solution unique α comprise entre 1,9 et 2.
3) Déterminer le signe de g sur IR.

Partie B

1. a. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b. Démontrer que la droite (D) : $y = 2x - 7$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
   c. Préciser la position de (C) par rapport à (D).

2. a. Calculer la limite de f en $-\infty$.
   b. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$ et donner une interprétation graphique du résultat.

3. a. Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe en utilisant la fonction g.
   b. Dresser le tableau de variation de f.

4. a. Démontrer que $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 7)^2}{2\alpha - 9}$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction $h: x \mapsto \frac{(2x-7)^2}{2x-9}$ sur l'intervalle $\left]-\infty ; \frac{7}{2}\right]$.
   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

5. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) et de l'axe (OI) ;
   b. Tracer la droite (D) et la courbe (C) ;

6. A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \frac{7}{2}$

Session de Avril 2013

CONCOURS **DIRECT** D'ENTREE EN DIVISION
DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE CALCULS NUMERIQUES

Durée : 2 heures

CALCULATRICES AUTORISEES / AUTRES DOCUMENTS NON AUTORISES

Exercice 1

1. Déterminer le PGCD de 238 et 170 par la méthode de votre choix en faisant apparaitre les calculs intermédiaires. En déduire la forme irréductible de la fraction $\frac{170}{238}$.
2. $B = 3\sqrt{2} - \sqrt{98}$. Donner la valeur arrondie au centième près de B. Ecrire B sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un entier.
3. On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ pour tout entier naturel n. Cette suite est-elle majorée par 3 ?

Exercice 2 *(On donnera les résultats arrondis au millième)*

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté. Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V, sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :

- S'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo ;
- S'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, il effectuera le trajet en roller ;
- S'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied ;
- S'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.

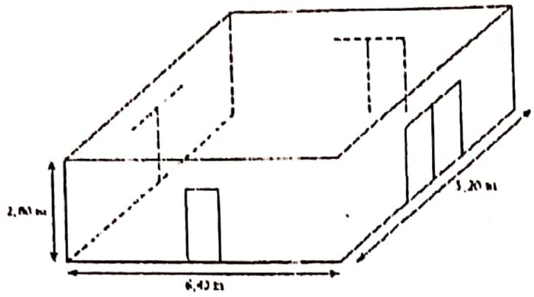
On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70% des cas, il choisit le roller dans 20% des cas et il décide de faire le parcours à pied dans 10% des cas.

1. Construire un arbre de pondéré correspondant à la situation.
2. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.
3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?
4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendantes les unes des autres. L'expérience de l'année précédente permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur,

d'avoir effectué le trajet à vélo est $\frac{2}{3}$. Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste ».

Problème

Une entreprise doit rénover un local. Ce local a la forme d'un parallélépipède rectangle. La longueur est 6,4 m la largeur est 5,2 m et la hauteur sous plafond est 2,8 m. Il comporte deux portes de 2 m de haut et de 0,8 m de large et trois baies vitrées de 2 m de haut et de 1,6 m de large.



Partie A : Peinture des murs et du plafond

Les murs et le plafond doivent être peints. L'étiquette suivante est posée sur les pots de la peinture choisie.

Peinture pour murs et plafond Séchage rapide Contenance : 5 litres Utilisation recommandée : 1 litre pour 4 m²

1. a) Calculer l'aire du plafond. b) Combien de litres de peinture faut-il pour peindre le plafond ?
2. a) Prouver que la surface du mur à peindre est d'environ 54 m². b) Combien de litres de peinture faut-il pour peindre les murs ?
3. De combien de pots de peinture l'entreprise doit-elle disposer pour ce chantier ?

Partie B : Pose d'un dallage sur le sol

1. Déterminer le plus grand diviseur commun à 640 et 520.
2. Le sol du local doit être entièrement couvert par des dalles carrées de même dimension. L'entreprise a le choix entre les dalles de dimensions 20 cm, 30 cm, 35 cm, 40 cm ou 45 cm.
   a. Parmi ces dimensions, lesquelles peut-on choisir pour que les dalles puissent être posées sans découpe ?
   b. Dans chacun des cas trouvés, combien faut-il utiliser de dalles ?

Partie C : Coût du dallage

Pour l'ensemble de ses chantiers, l'entreprise se ravitaille auprès de deux grossistes. Les tarifs proposés pour les paquets de 10 dalles sont : Grossiste A : 31 500 F CFA le paquet, livraison gratuite ; Grossiste B : 27 550 F CFA le paquet, livraison 29 520 F CFA quel que soit le nombre de paquets.

1. Quel est le prix d'une commande de 9 paquets : a) avec le grossiste A ? ; b) avec le grossiste B ?
2. Exprimer en fonction du nombre n de paquets :
   a. Le prix P_A d'une commande de n paquets avec le grossiste A ;
   b. Le prix P_B d'une commande de n paquets avec le grossiste B ;
3. Représenter graphiquement chacun de ces deux prix en fonction de n.
4. Quel est, selon le nombre de paquets achetés, le tarif le plus avantageux ?

Session de Avril 2014

CONCOURS **DIRECT** D'ENTREE EN DIVISION
DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour l'épreuve écrite de mathématiques et entre pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé à l'exclusion des calculatrices graphiques.
Tout calcul de limite doit être justifié.

Exercice 1

Un dé cubique pipé a ses faces numérotées de 1 à 6. À chaque jet du dé, la probabilité d'avoir un numéro satisfait aux conditions suivantes :

- l'événement « le numéro obtenu est pair » a la même probabilité que l'événement « le numéro obtenu est impair » ;
- les obtentions des numéros pairs sont équiprobables ;
- la probabilité d'obtenir un numéro impair est proportionnelle à ce numéro.

1) Calculer la probabilité d'obtenir chacun des numéros.
2) Déterminer la probabilité d'obtenir un numéro strictement supérieur à 3.

Exercice 2

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'unité de longueur étant le centimètre, les points A, B, C, D ont pour affixes $3+i\,; 7-i\,; -1-7i\,; 8-4i$ respectivement.

1) a) Placer les points A, B, C, D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$;
   b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
2) Démontrer que les points A, B, C, D sont cocycliques, (on précisera le rayon de ce cercle et l'affixe de son centre).

Scanné avec CamScanner

3) À tout point M d'affixe non nul z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{10}{z}$.

a) Écrire sous forme trigonométrique les affixes $a'; b'$; c' des points A', B', C' respectivement associés à A, B, C.
Placer les points A', B', C' sur la figure de la question 1-a.

b) Vérifier que $\frac{c'-a'}{b'-a'} = 2$;

c) En déduire une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$.

d) Que peut-on en déduire pour les points A', B', C' ?

Exercice 3

Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}$
On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) (unité graphique : 1 cm).

1) Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat ;
2) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation ;
3) Démontrer que l'équation $f(x) = 10$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0; +\infty[$ et encadrer α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2 ;
4) Tracer la courbe (C) ;
5) Calculer l'intégrale $\int_0^3 f(x)dx$.

Partie B

On considère la fonction qui, à tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$ associe $y(t)$, solution de l'équation différentielle (E) :$y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$.

1) Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de (E) ;
2) On se propose de démontrer que f est l'unique solution de (E) sur $[0; +\infty[$ qui prend la valeur 10 à l'instant 0 ;
   a) On note g une solution quelconque de (E) vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + \frac{1}{2}y = 0$;
   b) Résoudre (E').
   c) Conclure.

Session de Avril 2014

CONCOURS **DIRECT** D'ENTREE EN DIVISION
DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE CALCULS NUMERIQUES

Durée : 2 heures

CALCULATRICES AUTORISEES / AUTRES DOCUMENTS NON AUTORISES

xercice 1

1. Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un entier relatif ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n, 3 divise $4^n - 1$.
3. Déterminer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7, pour tout $n \in \mathbb{N}$;
4. Résoudre l'équation (E) $405x - 120y = 15$ d'inconnues $x \in Z$ et $y \in Z$.

xercice 2

1. Une mairie accorde une subvention de 120 000 francs à partager entre deux associations. La première reçoit 60 000 francs de plus que la seconde. Calculer le montant reçu par chaque association.
2. Une mairie décide de partager une subvention entre 4 associations, A, B, C et D. Chaque association doit dépenser cette subvention sur deux postes : une part de la subvention doit servir aux assurances des adhérents et l'autre part doit être utilisée pour l'achat de matériel. A et B reçoivent chacune 1/5 de la subvention. C reçoit 100 000 francs, soit deux fois moins que B. D reçoit le reste. A et B décident de dépenser le quart de leur subvention en matériel et le reste en assurances des adhérents, tandis que C et D décident de dépenser le quart de leur subvention en assurances des adhérents et le reste en matériel.

Utiliser ces informations pour remplir le tableau ci-dessous, après avoir fait les calculs.

	A	B	C	D	Total
Matériel	50000F	50000F	75000F	375 000F	550 000F
Assurances Adhérents	150 000F	150 000F	25000F	125 000F	450 000F
Total	200 000F	200 000F	100 000F	500 000F	1000000F

Problème

Un fournisseur d'accès internet effectue une enquête de satisfaction sur un panel de 2 000 clients, dont l'abonnement a plus de 12 mois d'ancienneté. Parmi eux :

- 900 n'ont jamais subi de coupure prolongée de connexion ;
- 500 clients ont connu leur dernière coupure prolongée de connexion dans les 12 derniers mois ;
- les autres clients ont connu leur dernière coupure prolongée de connexion il y a plus d'un an.

L'enquête révèle que :

- 95% des clients n'ayant jamais subi de coupure prolongée se déclarent satisfaits du service fourni ;
- 50% des clients ayant subi une coupure prolongée de connexion dans les douze derniers mois se déclarent satisfaits du service fourni ;
- 70% des clients ayant subi une coupure prolongée de connexion il y a plus d'un an se déclarent satisfaits du service fourni.

On choisit au hasard un client parmi ceux qui ont été interrogés. On considère les évènements suivants :

J : « le client n'a jamais subi de coupure prolongée de connexion »
R : « la dernière coupure prolongée de connexion du client est survenue au cours des douze derniers mois » (elle est « récente ») ;
A : « la dernière coupure prolongée de connexion du client date d'il y a plus d'un an » (elle est « ancienne ») ;
S : « le client se déclare satisfait » ;
$\bar{S}$ désigne l'évènement contraire de S.

1. a. Calculer les probabilités des évènements J, R et A ;
   b. Construire un arbre pondéré décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité que le client soit satisfait et n'ait jamais subi de coupure prolongée de connexion.
3. Démontrer que la probabilité que le client choisi se déclare satisfait est égale à 0,7625.
4. Le client choisi se déclare satisfait du service fourni. Quelle est la probabilité qu'il ait subi une coupure prolongée de connexion au cours des douze derniers mois (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième) ?
5. On choisit au hasard trois clients parmi ceux du panel interrogé durant l'enquête. On admet que ce panel est suffisamment important pour assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.
   Déterminer la probabilité qu'exactement un des clients choisis se déclare non satisfait du service fourni (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième).

Session de Avril 2015

CONCOURS **DIRECT** D'ENTREE EN DIVISION
DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour l'épreuve écrite de mathématiques et entre pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé à l'exclusion des calculatrices graphiques.
Tout calcul de limite doit être justifié.

Exercice 1

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, y, x', y' sont des nombres réels.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $Re(z'\bar{z}) = 0$.

2. Montrer que les points O, M et M′ sont alignés si et seulement si $Im(z'\bar{z}) = 0$. Applications.

3. N est le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux ?

4. On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\frac{1}{z^2} - 1$. On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés ;
   a. Montrer que $(\frac{1}{z^2} - 1)(\overline{z^2} - 1) = -\bar{z}^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$;
   b. En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

Exercice 2 α

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^{x}}$.

Partie A- Étude de fonctions auxiliaires

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par: $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$;
   a. Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1 ;
   b. Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1\,;+\infty[$;
   c. Étudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$;
   d. Montrer que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique, notée α, dans l'intervalle $[e+1\,;\,e^3+1]$ et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1\,;\alpha\,[$ et $]\alpha\,;+\infty[$.
2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par: $h(x)=\frac{\ln(x^2-1)}{x}$;
   a. Déterminer $\lim_{x\to1}h(x)$ et prouver que $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$;
   b. Calculer $h'(x)$ et montrer que $h'(x)$ est le même signe que $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$;
   c. Montrer que h est croissante sur l'intervalle $]1;\sqrt{\alpha}[$ et décroissante sur l'intervalle $]\sqrt{\alpha}\,;+\infty[$.

Partie B- Étude de la fonction f

1. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a $f(x)=h(e^{x})$;
2. En déduire:
   a. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 ;
   b. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$;
   c. Le sens de variation de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$;
3. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x)\leq\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$;
4. Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée, On prendra 10 comme valeur approchée de α.

N.B. : Re : partie réelle
Im : partie imaginaire

... D'ECONOMIE APPLIQ...
ENSEA
08 BP 03 ABIDJAN 03
Tél. 22 48 32 32/00 / Fax. 22 44 39 88
Email : ensea@ensea.ed.ci – Site Web : www.ensea.ed.ci

Session de Avril 2015

CONCOURS **DIRECT** D'ENTREE EN DIVISION
DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE CALCULS NUMERIQUES

Durée : 2 heures

CALCULATRICES AUTORISEES / AUTRES DOCUMENTS NON AUTORISES

Exercice 1

1. Calculer la somme $S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{30}$.
2. Résoudre dans IR l'équation $-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x = 0$.
3. Déterminer les nombres entiers solution de l'inéquation $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0{,}003$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. Résoudre l'équation (E) $405x - 120y = 15$ d'inconnue $x \in Z$ et $y \in Z$

✗ **Exercice 2**

Compléter ce tableau, sachant que :

- La rémunération des salariés concernés est proportionnelle à leurs indices respectifs ;
- Les retenues au titre des charges sociales représentent 18 % de la rémunération brute ;
- Les primes octroyées sont estimées à 4 % de la rémunération brute.
(arrondir les indices à l'unité près, les autres données au centième près).

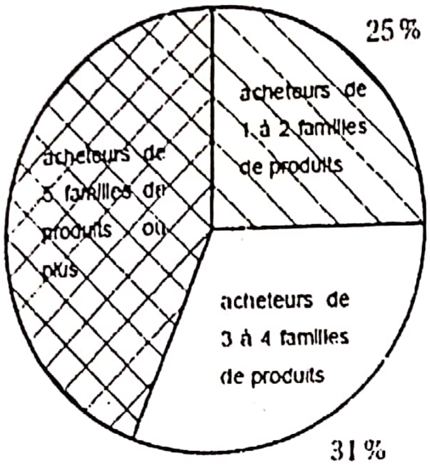
Indice de rémunération	425	462	497	310
Rémunération brute (FCFA)	132 550	134 733	145000	90526
Retenues (FCFA)	23 859	24251	26 100	16295
Primes (FCFA)	5 302	5389	5800	3621
Rémunération nette (FCFA)	151107	153594	165300	103 200

N.B : Faire apparaitre les calculs intermédiaires

on a : $\boxed{\text{Rem brute} = \text{Rem Nette} - \text{ret} + \text{Prim}}$

Problème X

La Fédération e-commerce et Vente à Distance (FEVAD) a effectué en octobre 2013 une enquête auprès de 719 acheteurs à distance âgés de 18 ans et plus. Suivant le questionnaire proposé, ces personnes ont été interrogées sur le nombre de familles de produits (vêtements, matériels informatiques, loisirs, . . .) achetés à distance au cours des 12 derniers mois. L'étude statistique a permis d'obtenir les informations suivantes :



Parmi les acheteurs de 1 à 2 familles de produits, 45 % sont retraités.

Parmi les acheteurs de 3 à 4 familles de produits, 25 % sont retraités.

Le responsable des ventes tire un questionnaire au hasard, chacun ayant la même probabilité d'être tiré. On note :

- A l'évènement : « Le questionnaire tiré est celui d'un achcteur de 1 à 2 familles de produits. »
- B l'évènement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 3 à 4 familles de produits. »
- C l'évènement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 5 familles de produits ou plus. »
- R l'évènement : « Le questionnaire tiré est celui d'un retraité. »

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre.

2. a. Calculer la probabilité $p(A \cap R)$.
   b. Déterminer la probabilité de l'évènement : « Le questionnaire tiré est celui d'un retraité acheteur de 3 à 4 familles de produits. »
   c. On sait de plus que 21,7% des acheteurs interrogés sont des retraités.

3. Vérifier que $p(C \cap R) = 0{,}027$.

4. Le responsable des ventes décide de lancer une campagne publicitaire dès lors que le pourcentage de retraités parmi les acheteurs de 5 familles de produits ou plus est inférieur à 8%. Quelle décision prendra-t-il ?

Session de Avril 2016

CONCOURS DIRECT D'ENTREE EN DIVISION
DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour l'épreuve écrite de mathématiques et entre pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé à l'exclusion des calculatrices graphiques.
Tout calcul de limite doit être justifié.

Exercice 1 α

1) a) Déterminer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7 pour $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$;

b) Calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7 ;

c) De manière générale, comment peut – on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?

d) En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7 ;
En déduire que 3^{n+6} et 3^n ont le même reste dans la division euclidienne par 7.

3) Soit $u_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$;

b) Déterminer les valeurs de n telles que u_n soit divisible par 7 ;

c) Déterminer tous les diviseurs de u_6.

Exercice 2 β

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

On note (S) le système : $\begin{cases} |z| = |z - 4i| \\ \arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ *avec* $(z \in \mathbb{C})$.

1) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\,,\ b = 1 - i\sqrt{3} \text{ et } c = 2 + 2i$$

2) Parmi les complexes a, b et c, lesquels sont solutions de (S) ?

3) On note M le point d'affixe z et A le point d'affixe $4i$.

Traduire géométriquement les deux contraintes de (S).

b) Résoudre (S).

Exercice 3

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{6e^{-x}}{1+e^{-x}}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O , I , J) d'unité 2cm.

1) Étudier f et tracer (C)

2) Pour tout réel x positif ou nul, on note :

- M le point de (C) de coordonnées $(x\,;f(x))$;
- P le point de coordonnées $(x\,;0)$;
- Q le point de coordonnées $(0\,;f(x))$.

Exprimer l'aire du rectangle OPMQ en fonction de x.

Partie B

1) Soit g la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

a) Étudier les variations de la fonction g ;

b) Calculer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$;

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une seule solution. On note α cette solution.

Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α ;

d) Démontrer que : $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$;

e) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Soit h la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{6xe^{-x}}{1+e^{-x}}$

a) Démontrer que pour tout réel x, $h'(x)$ a le même signe de $g(x)$;

b) En déduire les variations de la fonction h.

ENSEA
08 BP 03 ABIDJAN 03
Tél. 22 48 32 32/00 / Fax. 22 44 39 88
Email : ensea@ensea.ed.ci – Site Web : www.ensea.ed.ci

Session de Avril 2017

CONCOURS DIRECT D'ENTREE EN DIVISION DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE CALCULS NUMERIQUES

Durée : 2 heures

CALCULATRICES AUTORISEES / AUTRES DOCUMENTS NON AUTORISES

Exercice 1

Résoudre les problèmes suivants :

A. Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M1 et M2. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc. D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi l'ordinateur M1 et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20 % des clients ayant acheté un ordinateur M2 l'ont choisi de couleur blanche. On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

Calculer la probabilité dans chacune des situations suivantes :

A.1. Un client choisi au hasard achète un ordinateur M2 de couleur noire.
A.2. Un client choisi au hasard achète un ordinateur de couleur noire.
A.3. Le client a choisi un ordinateur de couleur noire, la probabilité qu'il soit de marque M2.

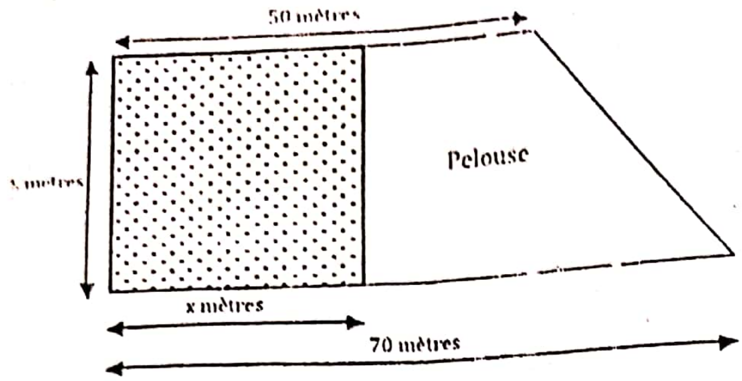
B. Un rectangle est inscrit dans un cercle de rayon égal à 2,5 cm. La largeur du rectangle vaut 3 cm. Quelle peut être la surface du rectangle ?

C. La somme de trois nombres pairs consécutifs est égale à 378. Quels sont ces trois nombres ?

Problème

Consigne : répondre par vraie ou faux pour chaque proposition de réponse en justifiant.

La figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle) est une représentation d'une parcelle de terrain (notée P1) que Monsieur K. souhaite partager en deux parties : une partie en jardin potager (surface grisée) formant un carré de x mètres de côté avec $0 < x \leq 50$ mètres ; l'autre partie en pelouse.



On notera :
S : aire totale de la parcelle de terrain
J : aire du jardin potager
P : aire de la pelouse

1) A partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. S ≥ 3000 m2.
B. Il existe une valeur de x inférieure à 35 telle que J = P.
C. La surface de la pelouse est maximale lorsque $x = 25$ mètres.
D. Le périmètre de cette parcelle de terrain est égal à : $x + (x^2 + 400)*0{,}5 + 120$.

2) Dans cette question, on suppose que x = 21 mètres.

Monsieur K. souhaite délimiter la pelouse avec une clôture en bois dont le prix du mètre est de 30 mille francs après une remise de 20 % sur le prix initial. Sur le métrage dépassant 100 mètres, un rabais supplémentaire de 30 % est accordé.

A partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. Le prix initial d'un mètre de clôture en bois est 36 000 FCFA.
B. Monsieur K. doit acheter moins de 120 mètres de clôture.
C. Le montant réglé par Monsieur K. est égal à 3 588 000 FCFA.
D. Le prix de revient moyen d'un mètre de clôture est égal à 25 000 FCFA.

3) Monsieur K. envisage de produire des fruits ou des légumes sur cette parcelle. On nous précise que pour 220 000 FCFA, Monsieur K. pourrait obtenir 50 plants d'un légume et 40 pieds d'un fruit alors que pour 230 000 FCFA, il aurait 25 plants de ce légume et 60 pieds de ce fruit.
On appelle x_1 le prix d'un plant de légume et x_2 le prix d'un pied de fruit.
Supposons que Monsieur K. choisisse de cultiver des fruits. Le coût total exprimé en FCFA pour y kg de fruits (y > 0) produits en une journée est : $C(y) = 0{,}25y^2 + y + 30$.

1. Quelle est la formule du coût moyen unitaire, exprimé en FCFA par kg, et noté CM(y) :
2. Chaque kg de fruit peut être vendu à 7 500 FCFA. A partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. $x_2 = x_1 + 1$.
B. $x_1 = 3\ 000$ FCFA.
C. Si y = 10, Monsieur K. réalisera un bénéfice de 10 000 sur la journée.
D. Si y = 9, le coût moyen unitaire est minimum.

----

08 BP 03 ABIDJAN 08
Tél. 22 48 32 11/32 / Fax. 22 44 39 88
Email : ensea@ensea.ed.ci Site Web : www.ensea.ed.ci

Session de Avril 2018

CONCOURS DIRECT D'ENTREE EN DIVISION DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

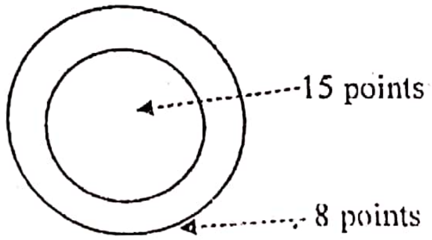
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour l'épreuve écrite de mathématiques et entre pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé à l'exclusion des calculatrices graphiques. Tout calcul de limite doit être justifié.

Exercice 1

1. Trouver une solution particulière dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $(E_1) : 15x + 8y = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E_2) : 15x + 8y = 1000$.
3. De combien de façons peut-on obtenir exactement 1 000 points en lançant des fléchettes sur la cible ci-contre ? (Le nombre de fléchettes n'est pas limité et on suppose qu'elles atteignent toutes les cibles.)



- 15 points pour une fléchette qui atteint le disque central.
- 8 points pour une fléchette qui atteint la couronne.

Exercice 2

Une urne contient cinq dés équilibrés. Trois d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Les deux autres sont truqués : ils possèdent chacune deux faces numérotées 1 et quatre faces portant le numéro 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci. On considère les évènements suivants :

* N : « Le dé tiré est normal » ;
* U : « On obtient 1 au premier lancer » ;
* S_n : « On obtient 6 à chacun des n premiers lancers », avec n entier naturel non nul.

1. Justifier que la probabilité de U est $\frac{7}{30}$.

2. Calculer la probabilité de S_n en fonction de n.
3. Pour n entier naturel non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré un dé truqué, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n premiers lancers.

X a) Justifier que : $p_n = \frac{2}{3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2}$.

b) Déterminer la limite de p_n lorsque n tend vers $(+\infty)$ et donner une interprétation du résultat.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$.

On note (C) la courbe représentative de f et (Γ) la courbe d'équation $y = \ln x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   Préciser les asymptotes à (C).

2) a) Calculer $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \ln x]$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   b) Étudier les positions relatives de (C) et (Γ).

3) a) Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition.
   b) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4) On se propose de chercher les tangentes à la courbe (C) qui passent par le point O.
   a) Soit α un réel strictement positif et différent de 1. Démontrer que la tangente T_α à (C) au point d'abscisse α passe par l'origine du repère si et seulement si $f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0$.
   b) Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[\setminus\{1\}$ par : $g(x) = f(x) - xf'(x)$. Montrer que sur $]0\,;+\infty[\setminus\{1\}$, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ sont équivalentes.
   c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, montrer que l'équation $u(t) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note β cette solution.
   d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe (C) passant par le point O. (On donnera l'abscisse du point de (C) en lequel cette tangente existe).

5) Construire la courbe (Γ) et la courbe (C). Tracer la tangente de la question précédente le plus précisément possible.

6) On considère un réel m et l'équation $f(x) = mx$ d'inconnue x.
   Par lecture graphique, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation.

Tel. 22 48 32 32/00 / Fax. 22 4.
Email : ensea@ensea.ed.ci – Site Web : www.ensea.ed.ci

Session de Avril 2018

CONCOURS **DIRECT** D'ENTREE EN DIVISION
DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE CALCULS NUMERIQUES

Durée : 2 heures

CALCULATRICES AUTORISEES / AUTRES DOCUMENTS NON AUTORISES

Exercice 1

Deux villes A et B ont, au premier janvier 1995, des populations respectives de 100 000 habitants et de 80 000 habitants. La population de A augmente de 1% par an tandis que celle de B augmente de 5 % par an.

1. Calculer la population u_1 de A au premier janvier 1996, c'est-à-dire au bout d'un an. Calculer la population v_1 de B au premier janvier 1996.
2. On note u_n la population de A au bout de n années, et v_n la population de B au bout de n années. Calculer u_5, u_6, v_5, v_6.
3. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'habitants de B dépassera le nombre d'habitants de A ?

Exercice 2

On lance plusieurs fois un dé à six faces (numérotées de 1 à 6) bien équilibré. On s'arrête :

- dès que le chiffre 6 est obtenu ;
- au 4ème lancer au plus tard (même si le chiffre 6 n'a pas été obtenu) ;

1. Représenter cette expérience par un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir le chiffre 6 au cours des 4 lancers.
3. X est la variable aléatoire qui comptabilise le nombre total de lancers avant l'arrêt. Quelles sont les différentes valeurs possibles pour X ? Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 3

Soit la fonction polynôme f définie par : $f(x) = x^3 - 4x + 3$.

1. Calculer $f(1)$;
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x : $f(x) = (x-1)(x^2 + ax + b)$;
3. En déduire les racines de f.

Exercice 4

Au premier janvier 2018, une association sportive comptabilise 900 adhérents. On constate que chaque mois :

- 25% des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 12 nouvelles personnes décident d'adhérer à l'association.

On modélise le nombre d'adhérents à l'association par le nombre (u_n) tel que $u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel n: $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 12$
Le terme u_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents au bout de n mois.

1) Déterminer le nombre d'adhérents au 1er mars 2018.
2) On définit la suite $v_n = u_n - 48$ pour tout entier naturel n.
   a. Montrer que v_n est une suite géométrique de raison 0,75 ;
   b. Préciser v_0 et exprimer v_n en fonction de n ;
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 852 \times 0{,}75^n + 48$.
3) La présidente de l'association déclare qu'elle démissionnera si le nombre d'adhérents devient inférieur à 100. Si on fait l'hypothèse que l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit de la même façon, faudra-t-il que la présidente démissionne ? Si oui, au bout de combien de mois ?
4) Chaque adhérent verse une cotisation de 1 000 FCFA par mois. Le trésorier de l'association souhaite prévoir le montant total des cotisations pour l'année 2018. Quelle est la somme totale des cotisations perçues par l'association en 2018 ?

ENSEA
08 BP 03 ABIDJAN 08
Tél. (225) 22 44 08 42 – 67 23 44 93
Email : ensea@ensea.ed.ci – Site web : www.ensea.ed.ci

Session de Avril 2019

CONCOURS DIRECT D'ENTREE EN DIVISION DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

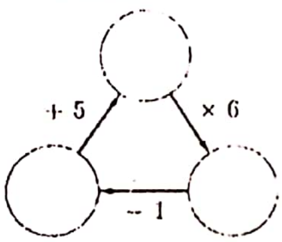
EPREUVE DE CALCULS NUMERIQUES

Durée : 2 heures

CALCULATRICES AUTORISEES – AUTRES DOCUMENTS NON AUTORISES

Exercice 1

1. Quels nombres faut-il mettre dans chaque cercle pour que les calculs « bouclent » bien ? (Détailler le raisonnement et les calculs).



2. On retranche un même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{23}{36}$
Quel est ce nombre sachant que l'on obtient l'inverse de la fraction initiale ?

3. Si on augmente de 5 m un côté d'un carré et si on diminue de 3 m l'autre côté, on obtient un rectangle de même aire que celle du carré. Combien mesure le côté de ce carré ?

4. Si tous les inscrits étaient venus, la sortie en autocar aurait coûté 2 500 FCFA par personne. Mais il y a eu 3 absents et chaque participant a dû payer un supplément de 150 FCFA.
Combien y avait-il d'inscrits ?

Exercice 2

On souhaite stériliser une boîte de conserve. Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25°C$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100°C$. La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°C.

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25°C$. Pour n non nul, la valeur T_n est calculée selon la formule $T_n = 0,85T_{n-1} + 15$

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes. (Arrondir à l'unité).
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 * 0,85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-t-elle ?

Exercice 3

Le virus de la grippe atteint chaque année, à la période fraiche, une partie de la population d'une ville. La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année. L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.

Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période fraiche a permis de constater que :

- 40% de la population est vaccinée ;
- 8% des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20% de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements :
- V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;
- G : « la personne a contracté la grippe ».

1. Donner la probabilité de l'événement G.
2. Tracer l'arbre de probabilité associé au problème en indiquant les valeurs sur chaque branche.
3. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.
4. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville. Après la période fraiche, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

5. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
6. Dans cette question, on suppose que $n=40$.
   a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
   b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

ENSEA

08 BP 03 ABIDJAN 08
Tél. (225) 22 44 08 42 – 67 23 44 93
Email : ensea@ensea.ed.ci – Site web : www.ensea.ed.ci

Session de Avril 2019

CONCOURS DIRECT D'ENTREE EN DIVISION
DES ADJOINTS TECHNIQUES DE LA STATISTIQUE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour l'épreuve écrite de mathématiques et entre pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé à l'exclusion des calculatrices graphiques. Tout calcul de limite doit être justifié.

Exercice 1

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, . . . sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.

Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$N_p = \underbrace{11\ldots1}_{p\ fois} = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{p-1}$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul.

On étudie dans cet exercice la divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers.

1) Justifier que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.
2) Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.

a) Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3\ ;-2\ ;-1\ ;0\ ;1\ ;2\ ;3\}$ tel que $10^m \equiv a\ [7]$.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

b) Soit p un entier naturel non nul.
Montrer que $10^p \equiv 1\ [7]$ si et seulement si p est un multiple de 6.
On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.

c) Justifier que, pour tout entier naturel p non nul, $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$.

d) Démontrer que « 7 divise N_p » si et seulement si « 7 divise $9\,N_p$ ».

e) En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

Exercice 2

Soit (a_n), (b_n) et (c_n), les suites définies sur N par le système suivant :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} = \quad\quad \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{cases}$$

1) On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par : $u_n = a_n - c_n$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   b) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
2) On définit la suite (v_n) par : $v_n = b_n - \frac{4}{7}$ pour tout entier naturel n.
   a) Justifier que pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{6}v_n$.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
3) En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
   $a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$; $b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$ et $c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$
4) Déterminer la limite de chacune de ces trois suites.

Exercice 3

Un pisciculteur élève une population de poisson qui évolue en fonction de la reproduction naturelle et des prélèvements effectués.

La masse initiale de cette population de poissons est estimée à 100 tonnes.

Compte tenu des conditions de reproduction et de prélèvement, on modélise la masse de la population de poissons, exprimée en tonne, en fonction du temps, exprimé en semaine, par la fonction f_m, définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f_m(t) = \frac{100m}{1-(1-m)e^{-mt}}$

où m est un paramètre strictement compris entre 0 et 1 et qui dépend des différentes conditions de vie et d'exploitation des poissons.

1) a) Calculer $f_m(0)$.
   b) Démontrer que : $\forall t \in [0; +\infty[$, $1 - (1 - m)e^{-mt} \geq m$.
   c) En déduire que : $\forall t \in [0; +\infty[$, $0 < f_m(t) \leq 100$.
2) Exprimer en fonction de m la limite de f_m lorsque t tend vers $+\infty$.
3) Dans cette question, on prend $m = 0,9$ et on étudie la fonction $f_{0,9}$ définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f_{0,9}(t) = \frac{90}{1-0,1e^{-0,9t}}$
   a) Étudier les variations de la fonction $f_{0,9}$.
   b) Démontrer $\forall t \in [0; +\infty[$, $f_{0,9}(t) > 90$.
   c) Interpréter les résultats des questions 3)a) et 3)b) dans le contexte de l'exercice.
4) Dans cette question, on prend $m = \frac{1}{2}$.
   a) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :
   $F(t) = 100\ln\left(2e^{\frac{t}{2}} - 1\right)$ est une primitive de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ sur cet intervalle.
   b) En déduire la masse moyenne de crevettes lors des 5 premières semaines d'exploitation. En donner une valeur approchée arrondie à la tonne.
