

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

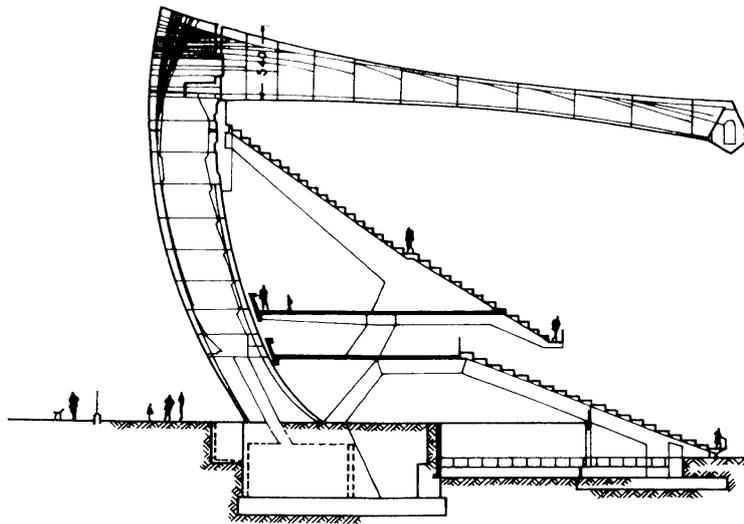
Centre Universitaire de Bechar

Institut de Génie Civil

Mr. Abdelaziz Yazid

Béton précontraint

Cours et exercices



Année Universitaire 2005/2006

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A ma femme

A toute ma famille

A la famille SADKAOUI

A tous mes amis

A la Direction du Centre Universitaire de Bechar

A tous mes collègues de l'institut de Génie Civil

Et à tous ceux qui portent l'Algérie dans leurs cœurs...

Mr. Abdelaziz Yazid

Avant-propos

Ce document est un développement de certaines notes de cours du module TEC 197. Il est destiné, particulièrement, aux étudiants de la 5^{ème} année génie civil comme un support pédagogique au cours « Béton précontraint ».

Certes, que la précontrainte est un sujet très vaste. Seuls sont donc retenus les points importants, sans entrer dans trop de détails et de calculs.

Pour une meilleure compréhension, un langage scientifique assez simple a été utilisé et de nombreuses applications ont été exposées afin d'aider l'étudiant à assimiler le cours et à dégager une idée claire sur les concepts abordés.

Nous souhaiterons que cet effort sera suivi par d'autres. Cela ferait augmenter le nombre de documents didactiques dans le domaine de la précontrainte et contribuera à une plus large diffusion de ce concept en Algérie.

Mr. Abdelaziz Yazid

<i>INTRODUCTION GENERALE</i>	01
<u>CHAP I : GENERALITES SUR LA PRECONTRAINT</u>	
1. <i>INTRODUCTION</i>	04
2. <i>PRINCIPE DE LA PRECONTRAINT</i>	04
3. <i>MODES DE LA PRECONTRAINT</i>	05
3.1. <i>Précontrainte par pré tension</i>	05
3.2. <i>Précontrainte par post tension</i>	06
3.3. <i>Comparaison des deux procédés</i>	08
4. <i>AVANTAGES ET INCONVENIENTS</i>	09
4.1. <i>Avantages</i>	09
4.2. <i>Inconvénients</i>	09
5. <i>SYSTEMES DE PRECONTRAINT</i>	09
6. <i>DOMAINE D'APPLICATION</i>	09
7. <i>REGLEMENTS</i>	10
8. <i>APPLICATIONS</i>	10
<u>CHAP II : CARACTERISTIQUES DES MATERIAUX</u>	
1. <i>CARACTERISTIQUES MECANQUES : BETON</i>	16
1.1. <i>Qualités requises</i>	16
1.2. <i>Résistance à la compression</i>	16
1.3. <i>Résistance à la traction</i>	16
1.4. <i>Déformations longitudinales instantanées</i>	17
1.5. <i>Diagramme contrainte déformation</i>	17
1.6. <i>Déformations différées</i>	18
2. <i>CARACTERISTIQUES MECANQUES : ARMATURES</i>	22
2.1. <i>Armatures passives</i>	22
2.2. <i>Armatures actives</i>	23
3. <i>APPLICATIONS</i>	27
<u>CHAP III : SOLLICITATIONS ET SECTIONS DE CALCUL</u>	
1. <i>PRINCIPE DE JUSTIFICATION</i>	30
1.1 <i>Etat limite ultime (ELU)</i>	30
1.2 <i>Etat limite de service (ELS)</i>	30

2. ACTIONS.....	30
2.1. Définition	30
2.2. Types d'actions	30
2.3. Valeurs représentatives des actions	31
3. SOLLICITATIONS.....	32
3.1. Définition	32
3.2. Sollicitations de calcul à l'ELU	32
3.3. Sollicitations de calcul à l'ELS	33
3.4. Valeurs de Ψ_i	33
3.5. Charges routières	34
4. SECTIONS DE CALCUL	38
4.1. Caractéristiques géométriques des sections	39
4.2. Types de sections	40
5. APPLICATIONS	42

CHAP IV : PERTES DE PRECONTRAINTE

1. DEFINITION	49
2. TYPES DE PERTES	49
3. TENSION A L'ORIGINE	49
4. PERTE DE TENSION (POST - TENSION)	49
4.1. Pertes de tension instantanées	49
4.2. Pertes de tension différées	53
5. APPLICATIONS	55

CHAP V : DIMENSIONNEMENT DE LA PRECONTRAINTE

1. OBJECTIF DU DIMENSIONNEMENT	60
2. DIAGRAMME DE VERIFICATION	60
3. DONNEES DE BASE	61
4. APPROCHE DE LA PRECONTRAINTE	61
4.1. Câble moyen fictif.....	61
4.2. Centre de pression	62
4.3. Noyau limite	62
4.4. Excentricité du câble moyen fictif.....	63

5. FUSEAU DE PASSAGE	64
6. NOTION DE SECTION CRITIQUE	64
6.1. Section sous critique	64
6.2. Section critique	64
6.3. Section sur critique	64
7. EVALUATION DE LA PRECONTRAINTE	65
7.1. Cas de section sous critique et critique	65
7.2. Cas de section sur critique	65
7.3. Cas particulier	66
8. SECTION MINIMALE DE BETON	66
8.1. Cas de section sous critique et critique	66
8.2. Cas de section sur critique	67
9. APPLICATIONS	67
<u>CHAP VI : JUSTIFICATION DES SECTIONS COURANTES</u>	
1. JUSTIFICATION VIS A VIS DES SOLLICITATIONS NORMALES.....	71
1.1. Justification à l'ELS	71
1.2. Justification à l'ELU	74
2. JUSTIFICATION VIS A VIS DES SOLLICITATIONS TANGENTES	75
2.1. Justification à l'ELS	76
2.2. Justification à l'ELU	77
2.3. Justification du béton	79
3. DISPOSTIONS CONSTRUCTIVES	79
4. APPLICATIONS	81
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	85

Introduction générale

L'idée de soumettre le béton à un effort de compression permanent lui permettant de travailler en flexion sans qu'il n'en résulte de traction avait été émise dès la fin du XIX^{ème} siècle. Sa réalisation s'était cependant heurtée aux propriétés mécaniques insuffisantes des aciers de l'époque, ainsi qu'aux conséquences mal maîtrisées des déformations différées du béton soumis à des efforts permanents importants.

*C'est seulement à la fin des années 1920 que les progrès dans la fabrication des aciers durs et une meilleure connaissance du comportement différé du béton ont permis à **Eugène Freyssinet** de mettre au point le béton précontraint, dans lequel les efforts de compression permanents sont obtenus à l'aide d'armatures en acier fortement tendues.*

Dans un élément en béton armé, l'armature en acier est destinée à se substituer entièrement au béton dans les zones tendues, lorsque celui-ci se fissure par suite d'allongement. Sous charge, les allongements communs des armatures du béton deviennent trop grands, le béton se fissure (micro fissures), l'acier supporte alors seul tout l'effort de traction. Dans un élément poutre en béton précontraint, l'acier précontraint équilibre les efforts des charges extérieures et évite ainsi au béton de se fissurer sous les charges d'exploitation. La compression initiale introduite grâce à la précontrainte des poutres s'oppose aux tractions engendrées par les charges et surcharges appliquées.

Par rapport au béton armé classique, le béton précontraint comporte un ajout de câble permettant de réaliser des structures beaucoup plus légères, donc de très grande portée, là où le béton armé se serait écroulé sous son propre poids.

Généralités sur la précontrainte

1. INTRODUCTION

Le béton est un matériau hétérogène qui présente une très bonne résistance à la compression, par contre, il a une très mauvaise résistance à la traction.

C'est ainsi qu'une poutre reposant sur deux appuis, soumise à l'effet de son poids propre (G) et d'une charge d'exploitation (Q), subit des contraintes de flexion qui se traduisent par une zone comprimée en partie supérieure et par une zone tendue en partie inférieure (Figure I.1).

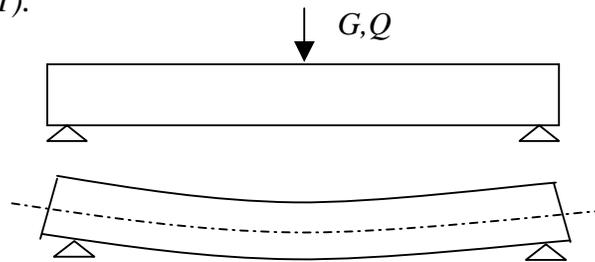


Figure I.1

La poutre subit également des contraintes de cisaillement dues aux efforts tranchants qui se produisent vers les appuis. Ces contraintes occasionnent des fissures à 45° que le béton ne peut reprendre seul.

Dans ce cas de figure, deux solutions sont possibles :

Solution N°1: L'ajout d'une quantité d'armatures capable de reprendre les efforts de traction dans le béton (Principe du béton armé).

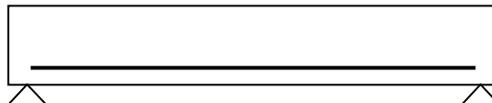


Figure I.2

Solution N°2: L'application d'un effort de compression axial qui s'oppose aux contraintes de traction dues aux chargements (Principe du béton précontraint).

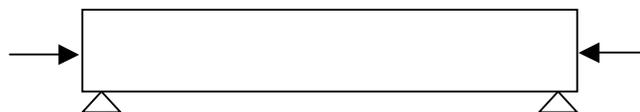


Figure I.3

2. PRINCIPE DE LA PRECONTRAINTE

La précontrainte a pour objectif, en imposant aux éléments un effort de compression axial judicieusement appliqué, de supprimer (ou fortement limiter) les sollicitations de traction dans le béton (Figure I.4).

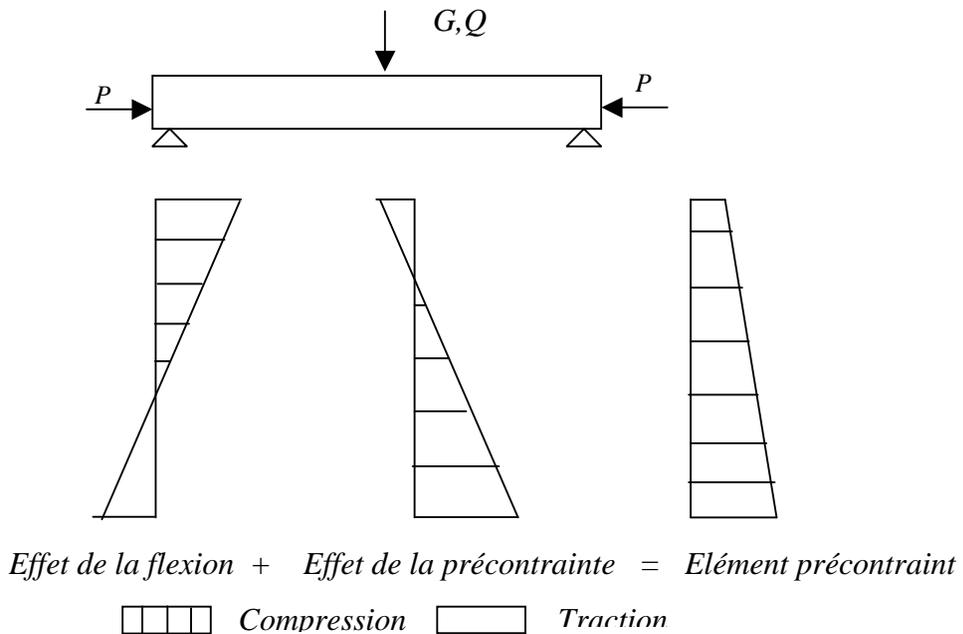


Figure I.4

Cette précontrainte peut être :

- Une précontrainte partielle : autorisation des contraintes de traction limitées.
- Une précontrainte totale : élimination totale des contraintes de traction.

3. MODE DE PRECONTRAINTE

Pour réaliser l'opération de précontrainte, il existe deux possibilités.

3.1. Précontrainte par pré-tension

Dans ce procédé, les câbles de précontrainte sont tendus entre deux massifs solidement ancrés avant le coulage du béton (Figure I.5). Cette technique est surtout employée sur les bancs de préfabrication, pour réaliser des éléments répétitifs.

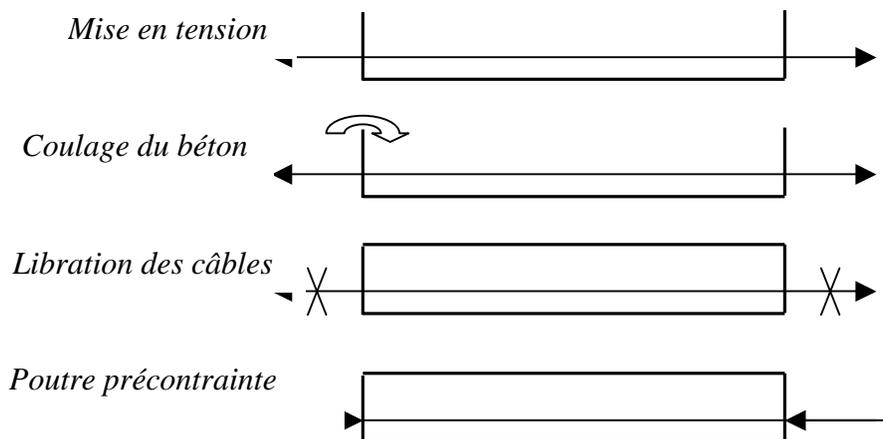


Figure I.5

Etapes générales de réalisation

- ❑ *Mise en tension des câbles.*
- ❑ *Coulage du béton.*
- ❑ *La libration des câbles après le durcissement du béton.*
- ❑ *Par adhérence, la précontrainte de compression est transmise au béton.*

D'une façon plus détaillée, la méthode de précontrainte par pré-tension suit les cycles suivants :

- ❑ *nettoyage des moules ;*
- ❑ *mise en place d'huile de décoffrage sur les moules ;*
- ❑ *déroutement des armatures actives et blocage aux extrémités dans des plaques ;*
- ❑ *mise en place des armatures passives ;*
- ❑ *mise en place des moules dans leur position finale;*
- ❑ *mise en place des déviateurs éventuels ;*
- ❑ *mise en tension des armatures par des vérins ;*
- ❑ *mise en place du béton par pont-roulant ou grue ;*
- ❑ *lissage de la partie supérieure ;*
- ❑ *vibration du béton ;*
- ❑ *étuvage ou chauffage du béton ;*
- ❑ *décoffrage ;*
- ❑ *dé-tension des armatures actives ;*
- ❑ *découpage des fils situés entre deux éléments préfabriqués ;*
- ❑ *manutention et stockage.*

3.2. Précontrainte par post-tension

Ce procédé consiste à tendre les câbles de précontrainte, après coulage et durcissement du béton, en prenant appui sur la pièce à comprimer (Figure I.6). Cette technique est utilisée pour les ouvrages importants est, généralement, mise en oeuvre sur chantier.

La précontrainte par post tension se présente sous deux formes :

- *Une précontrainte par post-tension interne*
- *Une précontrainte par post-tension externe*

Etapes générales de réalisation

- ❑ *Placement des gaines dans le coffrage.*
- ❑ *Coulage du béton.*

- *Après le durcissement du béton, la mise en tension des câbles.*
- *Le blocage se fait par différents systèmes de cales sur une zone de béton fretté.*
- *L'injection d'un coulis de ciment.*

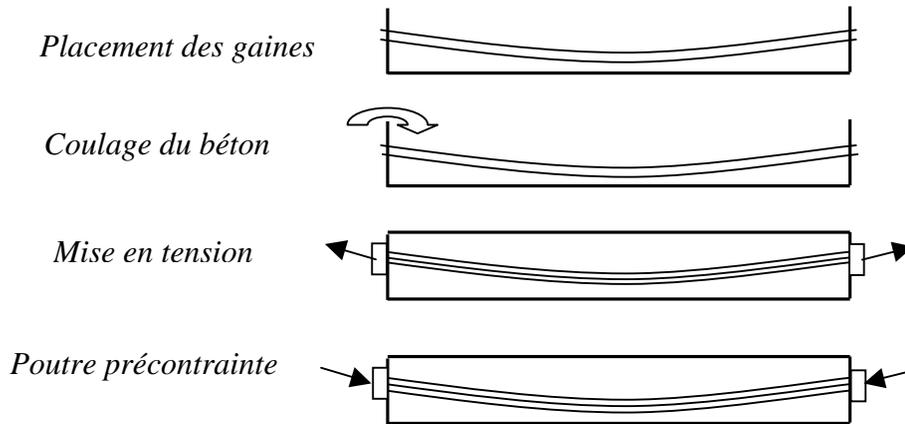


Figure I.6

La mise en tension peut être faite en tendant l'acier aux deux extrémités de la pièce (actif - actif) ou en tendant une seule extrémité uniquement (actif - passif) (Figure I.7).

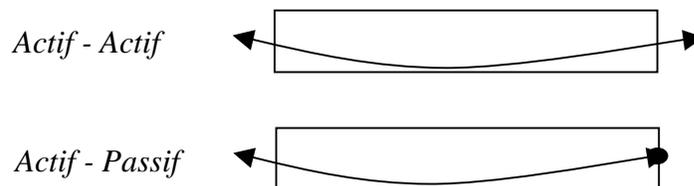


Figure I.7

L'injection est une opération extrêmement importante, car elle assure un double rôle :

- 1) *La protection des armatures de précontrainte contre la corrosion.*
- 2) *L'amélioration de l'adhérence entre les armatures et les gaines.*

L'opération de l'injection doit être réalisée dès que possible après la mise en tension des armatures. Le produit d'injection doit répondre aux impératifs suivants :

- *avoir une assez faible viscosité pour couler facilement et pénétrer dans toutes les ouvertures et entre fils des câbles de précontrainte ;*
- *conserver cette faible viscosité pendant un délai suffisant pour que l'injection puisse s'effectuer dans de bonnes conditions avant le début de prise ;*
- *après durcissement, avoir une résistance suffisante pour assurer efficacement l'adhérence de l'armature au béton ;*
- *présenter un retrait minimal ;*
- *ne pas être agressif vis-vis de l'acier de précontrainte.*

Le produit d'injection était autrefois un mortier formé de ciment, de sable et de l'eau ; aujourd'hui le sable est à peu près complètement abandonné, au profit de coulis de ciment CPA, comportant un adjuvant.

L'ensemble d'un procédé de précontrainte comprend, généralement, les éléments suivants :

a)- Dispositif d'ancrage : *on distingue, principalement, deux types d'ancrage :*

Ancrage actif, situé à l'extrémité de la mise en tension.

Ancrage passif (ancrage mort), situé à l'extrémité opposée à la mise en tension.

b)- Les coupleurs : *dispositif permettant les prolongements des armatures.*

c)- Matériels de mise en tension : *vérins, pompes d'injection, pompe d'alimentation des vérins etc.*

d)- Les accessoires : *gaines, tubes d'injection etc.*

3.3. Comparaison des deux procédés

Une comparaison entre les deux procédés (post-tension et pré-tension) permet de constater les observations suivantes :

Pré-tension

- 1) L'économie des gaines, des dispositifs d'ancrage et de l'opération de l'injection.*
- 2) La nécessité des installations très lourdes ce qui limite, par voie de conséquence, le choix des formes.*
- 3) La simplicité de la réalisation du procédé.*
- 4) Une bonne collaboration du béton et des armatures.*
- 5) La difficulté de réalisation des tracés courbes d'armatures.*
- 6) L'impossibilité de régler l'effort dans les armatures après la mise en tension.*

Post- tension

- 1) Ne demande aucune installation fixe puisque ; c'est sur la pièce elle même que s'appuie le vérin de précontrainte.*
- 2) Elle permet le choix des différentes formes.*
- 3) La possibilité de régler l'effort de précontrainte, ce qui permet d'adapter le procédé à l'évolution de la masse de l'ouvrage.*
- 4) La facilité de réalisation des tracés courbes d'armatures de précontrainte.*

A côté de ces procédés classiques, il existe des procédés spéciaux qui sont réservés à certains ouvrages ou qui font appel à d'autres principes pour la mise en tension :

➤ *Précontrainte par enroulement*

- *Précontrainte par compression externe*
- *Mise en tension par dilatation thermique*
- *Mise en tension par expansion du béton*

4. AVANTAGES ET INCONVENIENTS

4.1. Avantages

- 1) *Une compensation partielle ou complète des actions des charges.*
- 2) *Une économie appréciable des matériaux.*
- 3) *Augmentation des portés économiques.*
- 4) *Une réduction des risques de corrosion.*

4.2. Inconvénients

- 1) *La nécessité de matériaux spécifiques.*
- 2) *La nécessité de main d'œuvre qualifié.*
- 3) *La nécessité d'équipements particuliers.*
- 4) *Risque de rupture à vide par excès de compression.*
- 5) *Un calcul relativement complexe.*

5. SYSTEMES DE PRECONTRAINT

Les systèmes de précontrainte font l'objet de brevet et sont fabriqués par leurs exploitants. Les principaux systèmes sont :

➤ **Système Freyssinet :**

Ce système utilise des câbles composés de torons T 13, T 13 S, T 15 et T 15 S. La lettre T est remplacée par la lettre K (exemple 12 K 15)

➤ **Système PAC :**

Ce système utilise des câbles composés de 1 à 37 T 13, T 13 S, T15 ou T 15 S.

➤ **Système CIPEC :**

Ce système utilise des câbles 4 T 13 à 19 T 13, 4 T 15 à 27 T 15, normaux et super.

➤ **Système VSL :**

Ce système utilise des unités 3 T 12 à 55 T 13 , 3 T 15 à 37 T 15, normales ou super. Leur dénomination est de la forme 5-n pour n T 13 et 6-n pour n T 15.(exemple :6-37 représente un câble ou un ancrage 37 T 15).

6. DOMAINE D'APPLICATION

L'invention du béton précontraint est due à l'ingénieur français Eugène Freyssinet. Les premières applications pratiques sont tentées en 1933. Dans les années qui suivent, les performances exceptionnelles de ce nouveau concept sont brillamment démontrées.

Grâce à ces avantages le béton précontraint est utilisé dans les ouvrages d'art et les bâtiments de dimensions importantes : il est d'utilisation courante pour les ponts et d'un emploi très répandu pour les poutrelles préfabriquées des planchers de bâtiments.

On le retrouve dans de nombreux autres types d'ouvrages, parmi lesquels nous citerons les réservoirs, les pieux de fondation et tirants d'ancrage, certains ouvrages maritimes, les barrages, les enceintes de réacteurs nucléaires...

7. REGLEMENTATIONS

IP1 : Instruction Provisoire n°1 du 12 Août 1965

IP2 : Instruction Provisoire n°2 du 13 Août 1973

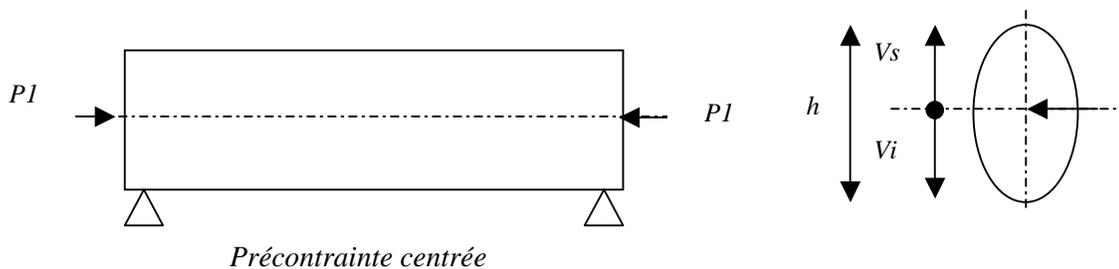
BPEL 91 : Béton précontraint aux états limites

Euro code 2 : (Béton Armé et Béton précontraint).

8. APPLICATIONS

Application 1

Soit une poutre de section B et avec un moment d'inertie I soumise à un moment fléchissant M et à un effort de précontrainte centré P_1 .



- Déterminer le digramme des contraintes.
- Dédire l'expression de l'effort de précontrainte P_1 .

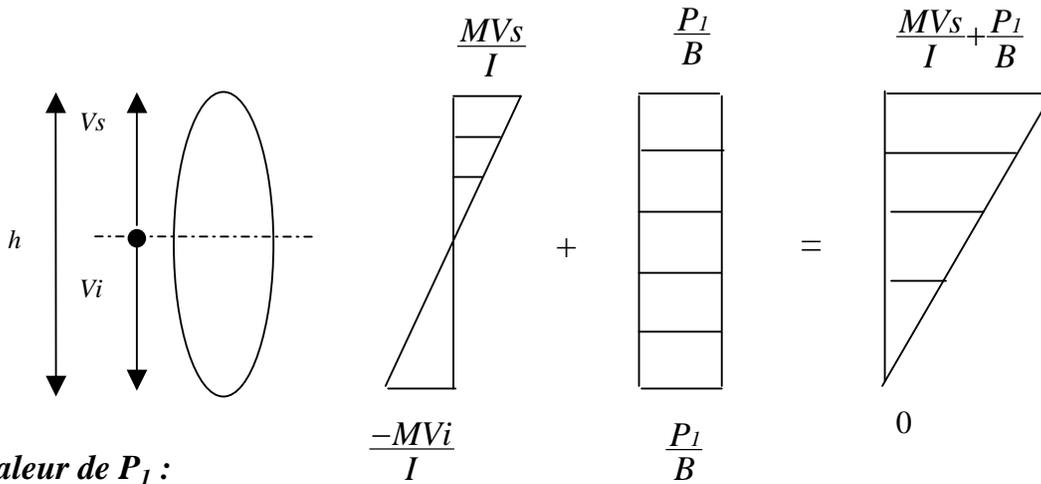
Application numérique

Soit la section rectangulaire (50,120) cm soumise à un moment extérieur $M=0.80$ MNm.

- Déterminer la valeur de P_1 .
- Schématiser le digramme des contraintes.

Solution

1. Diagramme des contraintes

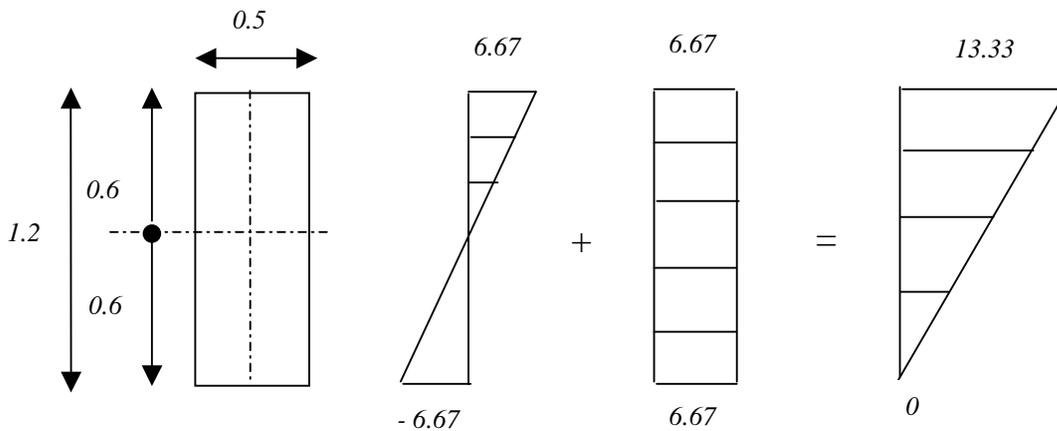


2. Valeur de P_1 :

Du diagramme des contraintes, on a :

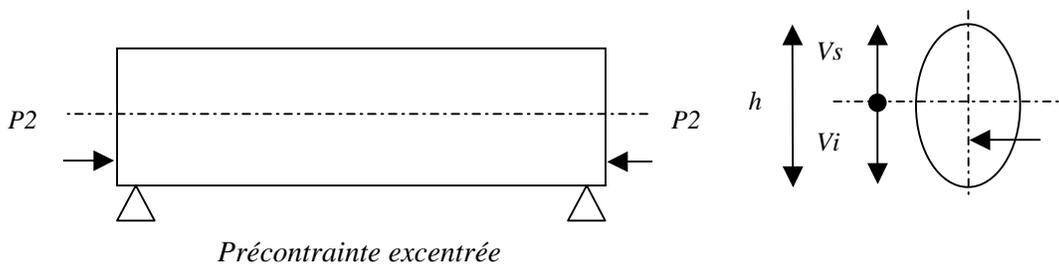
$$-\frac{MVi}{I} + \frac{P_1}{B} = 0 \Rightarrow P_1 = \frac{MVi}{I} B$$

AN : $P_1 = 4MN$



Application 2

Soit une poutre de section B et avec un moment d'inertie I soumise un moment fléchissant M et un effort de précontrainte P_2 excentré de « e ».



- Déterminer le digramme des contraintes.
- Déduire l'expression de l'effort de précontrainte P_2 .

Application numérique

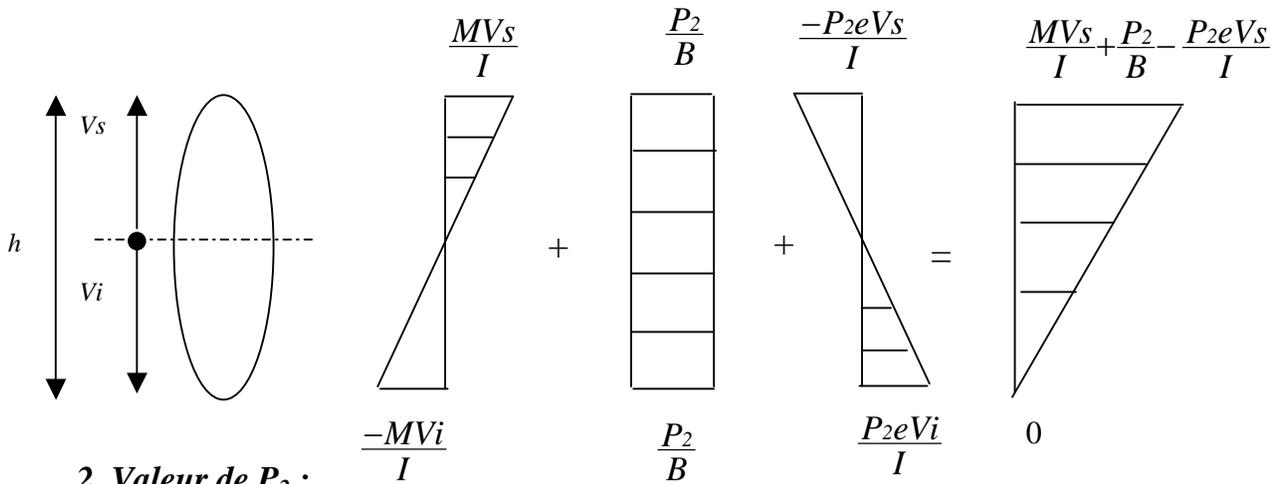
Soit la section rectangulaire (50,120) cm soumise à un moment extérieur $M=0.80\text{ MNm}$.

Dans le deuxième cas de précontrainte excentrée, en supposant que l'on puisse excentrer au maximum de $e= - 0.45\text{ m}$ la position du câble.

- Déterminer la valeur de P_1 .
- Schématiser le digramme des contraintes.

Solution

1. Digramme des contraintes

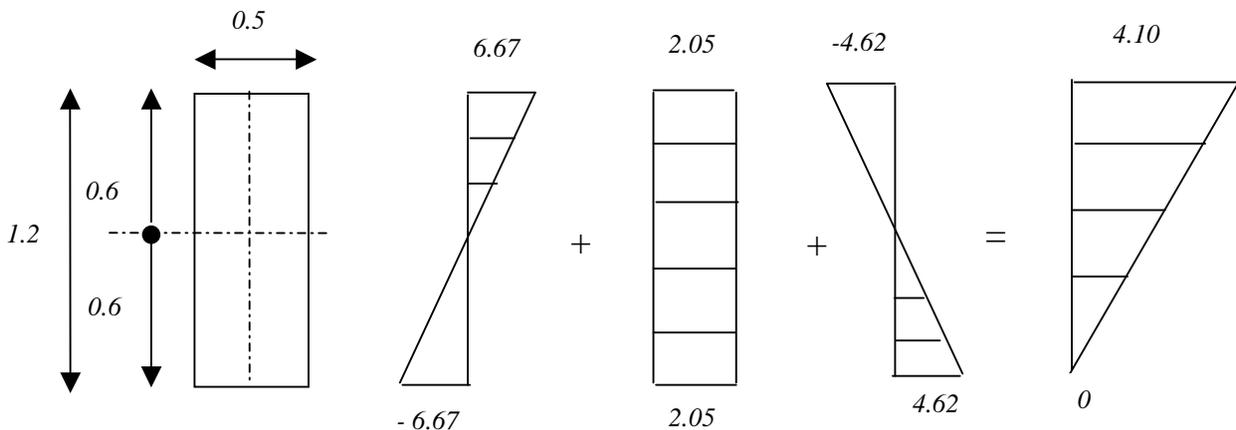


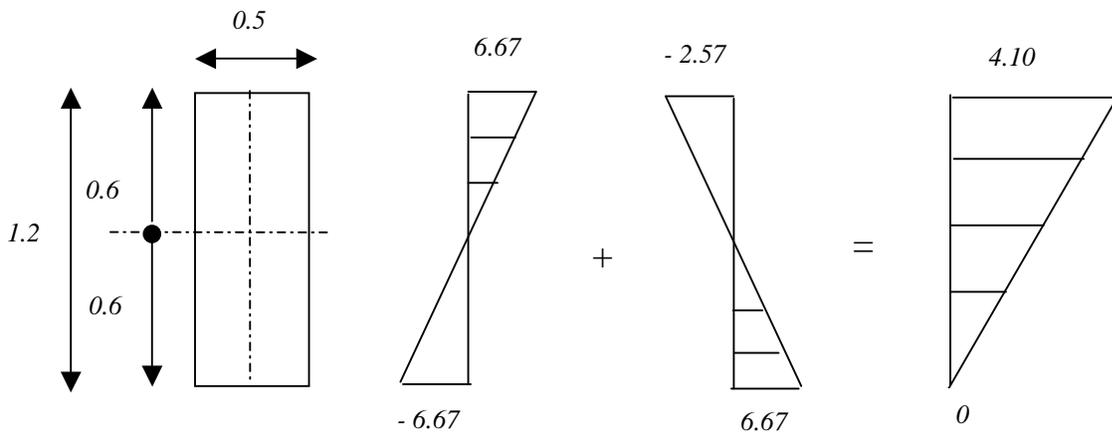
2. Valeur de P_2 :

Du diagramme des contraintes, on a :

$$-\frac{MVi}{I} + \frac{P_2}{B} + \frac{P_2eVi}{I} = 0 \Rightarrow P_2 = \frac{MVi}{\left(\frac{I}{B} + \frac{eVi}{I}\right)}$$

AN : $P_2 = 1.231\text{ MN}$





Constatation :

Il est clair que grâce à l'excentrement de la précontrainte, on a diminué l'effort de précontrainte de 4 à 1.231 MN et la contrainte maximum du béton de 13.34 à 4.1 MPa, d'où une économie substantielle d'acier et de béton.

Application 3

Soit une poutre de section rectangulaire (50x120) cm d'un élément de classe I soumise aux moments $M_{min}=1.25$ MNm et $M_{max}=3.2$ MNm .

La valeur de la précontrainte et de son excentricité sont données égales à $P=5.1$ MN et $e_o= - 0.44$ m.

- Déterminer le diagramme des contraintes sous moments maximum et minimum.

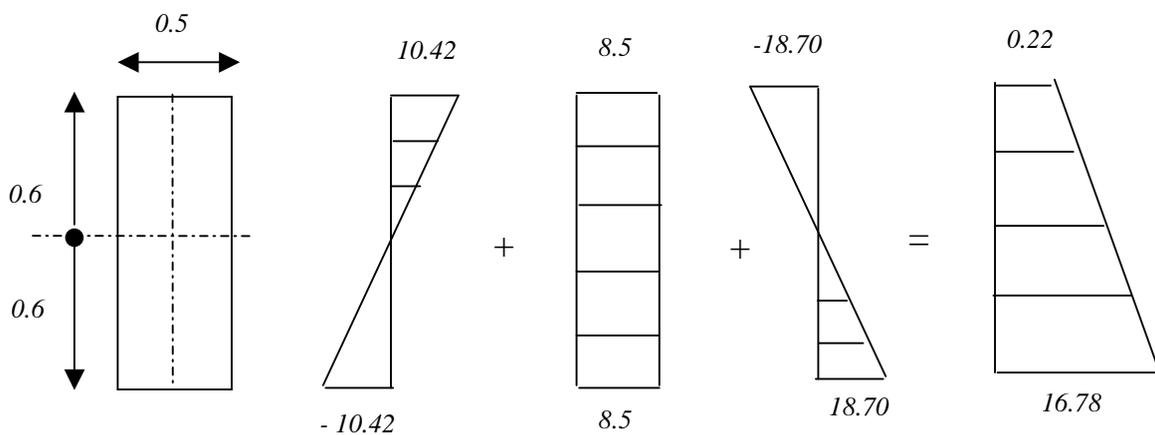
Solution

Sous moment minimum

Effort de précontrainte centré = 8.5 MPa

Effort de précontrainte de flexion = (+ ou -) 18.70 MPa

Effort de flexion du moment min = (+ ou -) 10.42 MPa

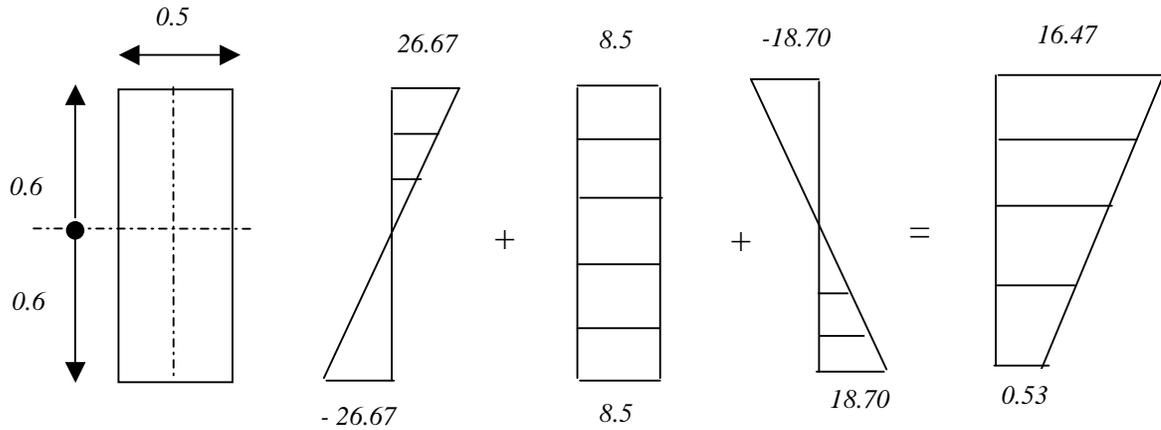


Sous moment maximum

Effort de précontrainte centré = 8.5 MPa

Effort de précontrainte de flexion = (+ ou -) 18.70 MPa

Effort de flexion du moment max = (+ ou -) 26.67 MPa



Application 4

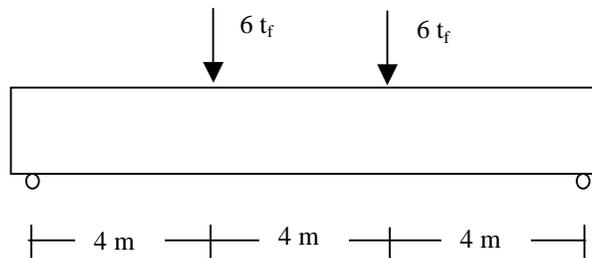
Soit une poutre de section rectangulaire (100, h) cm soumise à la précontrainte.

- Déterminer la hauteur de la poutre.
- Déterminer la force de précontrainte.
- Déterminer l'excentricité de la force de précontrainte.

Contrainte limite du béton :

- ❖ Traction = 0
- ❖ Compression = 1200 t/m²

NB : On néglige le poids propre de la poutre



Caractéristiques des matériaux

1. CARACTERISTIQUES MECANIQUES : BETON

Le béton est un matériau hétérogène composé d'un mélange de liant, granulats, eau et éventuellement d'adjuvants. Sa résistance mécanique est influencée par plusieurs facteurs :

- ❑ *qualité du ciment*
- ❑ *dosage en ciment*
- ❑ *teneur en eau*
- ❑ *l'âge du béton*
- ❑ *la température*
- ❑ *l'humidité*
- ❑ *la durée de chargement*

1.1. Qualités requises

- ❑ *Une résistance élevée en compression.*
- ❑ *L'étanchéité et la non-agressivité chimique.*
- ❑ *Une faible sensibilité aux effets des déformations différées.*
- ❑ *Une bonne maniabilité.*

1.2. Résistance à la compression

Le béton est défini par la valeur de sa résistance à la compression à l'âge de 28 jours, dite «résistance caractéristique spécifiée ». Celle-ci, notée f_{c28} .

Pour les sollicitations qui s'exercent sur un béton âgé de moins de 28 jours, on se réfère à la résistance caractéristique f_{cj} . Les règles BAEL et BPEL donnent, pour un âge $j \leq 28$ jours et pour un béton non traité thermiquement :

si $f_{c28} \leq 40$ MPa

$$f_{cj} = \frac{j}{4,76 + 0,83 j} f_{c28}$$

et si $f_{c28} > 40$ MPa

$$f_{cj} = \frac{j}{1,40 + 0,95 j} f_{c28}$$

Au-delà de $j=28$ jours, on admet pour les calculs que $f_{cj} = f_{c28}$

1.3. Résistance à la traction

La résistance caractéristique à la traction, à l'âge de « j » jours, notée f_{ij} , est conventionnellement définie par la formule :

$$f_{tj} = 0,6 + 0,06 f_{cj}$$

f_{tj} et f_{cj} sont exprimées en MPa (ou N/mm²)

1.4. Déformations longitudinales instantanées

A défaut de résultats expérimentaux probants, on adopte pour le module de déformation longitudinale instantanée du béton noté E_{ij} , une valeur conventionnelle égale à :

$$E_{ij} = 11000 \sqrt[3]{f_{cj}}$$

Le module de déformation longitudinale différée E_{vj} est donné par :

$$E_{vj} = 3700 \sqrt[3]{f_{cj}}$$

1.5. Diagramme Contrainte - Déformation

Le diagramme caractéristique contrainte-déformation du béton a l'allure schématisée sur la figure II.1 dite "parabole - rectangle".

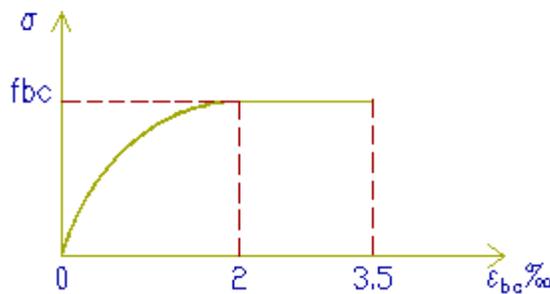


Figure II.1

Le diagramme de calcul comporte un arc de parabole du second degré depuis l'origine des coordonnées et jusqu'à son sommet de coordonnées $\epsilon_{bc} = 2\text{‰}$ et d'une contrainte de compression de béton donnée par : $\sigma_{bc} = 0,85 \cdot f_{cj} / \theta \cdot \gamma_b$

Le coefficient θ prend en compte la durée probable d'application de la combinaison d'actions .

- $\theta = 1$ $t > 24$ heures
- $\theta = 0,9$ $1 \text{ h} \leq t \leq 24 \text{ h}$
- $\theta = 0,85$ $t < 1 \text{ h}$

Lorsqu'on a besoin d'une évaluation plus précise des déformations et à défaut de données expérimentales probantes, il est nécessaire d'adopter le diagramme suivant (Figure II.2) :

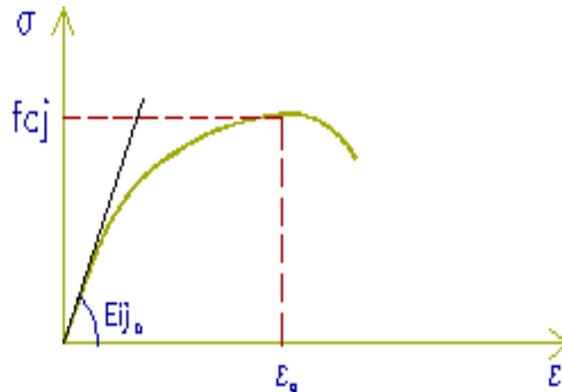


Figure II.2

En prenant en compte :

- la valeur du module tangent à l'origine pour lequel on conserve la formule :

$$E_{ij} = 11000 \sqrt[3]{f_{cj}}$$

- la valeur de la déformation au maximum de contrainte, appelé pic de contrainte, que l'on peut évaluer par la formule : $\varepsilon_{b0} = 0,62 \cdot 10^{-3} \sqrt[3]{f_{cj}}$
- la valeur de la résistance à la compression du béton f_{cj} .

1.6. Déformations différées

1.6.1. Retrait

Le retrait est le raccourcissement du béton non chargé, au cours de son durcissement. Son importance dépend d'un certain nombre de paramètres :

- l'humidité de l'air ambiant ;
- les dimensions de la pièce ;
- la quantité d'armatures ;
- la quantité d'eau ;
- le dosage en ciment ;
- le temps.

La déformation relative de retrait qui se développe dans un intervalle de temps (t_1 , t) peut être évaluée au moyen de la formule :

$$\varepsilon_r(t_1, t) = \varepsilon_r [r(t) - r(t_1)]$$

avec :

ε_r : la déformation finale de retrait

$r(t)$: la loi d'évolution du retrait, qui varie de 0 à 1 lorsque le temps t , compté à partir de la fabrication du béton, varie de zéro à l'infini.

La loi d'évolution du retrait est donnée par:

$$r(t) = \frac{t}{t+9} r_m$$

t : l'âge du béton, en jours, compté à partir du jour de fabrication, et r_m le rayon moyen de la pièce, exprimé en centimètres :

$$r_m = B/u$$

B : L'aire de section

u : Le périmètre de la section

Dans le cas des bétons de structures précontraintes, réalisés avec du ciment Portland, la déformation finale de retrait peut être évaluée par la formule :

$$\varepsilon_r = k_s \varepsilon_0$$

Le coefficient k_s dépend du pourcentage des armatures adhérentes $\rho_s = A_s/B$, rapport de la section des armatures passives longitudinales (et, dans le cas de la pré-tension, des armatures de précontrainte adhérentes) à la section transversale de la pièce.

Il s'exprime par la formule : $k_s = \frac{1}{1+20\rho_s}$

Le coefficient ε_0 dépend des conditions ambiantes et des dimensions de la pièce.

On prendra dans l'eau :

$$\varepsilon_0 = -60 \cdot 10^{-6}$$

et dans l'air :

$$\varepsilon_0 = (100 - \rho_h) \left(6 + \frac{80}{10+3r_m} \right) 10^{-6}$$

où ρ_h est l'hygrométrie ambiante moyenne, exprimée en pourcentage d'humidité relative.

En l'absence de données plus précises, on peut prendre pour des ouvrages à l'air libre :

$\rho_h = 55$ dans le quart Sud-Est de la France

$\rho_h = 70$ dans le reste de la France.

A défaut de résultats expérimentaux le retrait final ε_r est donné par les valeurs forfaitaires suivantes :

En France :

- $1,5 \times 10^{-4}$ dans les climats humides,
- 2×10^{-4} en climat humide, ce qui est le cas en France, sauf en son quart Sud-Est,
- 3×10^{-4} en climat tempéré sec, comme dans le quart Sud-Est de la France,
- 4×10^{-4} en climat chaud et sec,
- 5×10^{-4} en climat très sec ou désertique.

En Algérie :

- 2×10^{-4} en climat humide Zone A de la carte de zonage climatique de l'Algérie
- 3×10^{-4} en climat tempéré sec Zone B
- 4×10^{-4} en climat chaud et sec Zones B', C, D1
- 5×10^{-4} en climat très sec ou désertique Zones D2 et D3.

1.6.2. Fluage

Le fluage correspond à une déformation croissante dans le temps sous contrainte constante. Il dépend d'un certains nombres de paramètres :

- l'épaisseur moyenne de la pièce ;
- la contrainte appliquée ;
- le dosage en ciment ;
- la teneur en eau ;
- l'humidité ;
- la température ;
- l'âge de mise en tension.

La déformation de fluage à l'instant t d'un béton soumis à l'âge $j = t_1 - t_0$ à une contrainte constante σ_1 est exprimée sous la forme :

$$\varepsilon_{fl} = \varepsilon_{ic} K_{fl} (t_1 - t_0) \cdot f(t - t_1)$$

t_0 : date du bétonnage,

t_1 : date de mise en charge ;

ε_{ic} : déformation conventionnelle instantanée sous l'effet de la contrainte σ_1

$$\varepsilon_{ic} = \sigma_1 / E_{i28}$$

K_{fl} : coefficient de fluage, qui dépend notamment de l'âge $(t_1 - t_0)$ du béton au moment où il subit la contrainte σ_1 ;

$f(t - t_1)$: une fonction de la durée du chargement $(t - t_1)$, exprimée en jours, qui varie de 0 à 1 quand cette durée varie de 0 à l'infini.

On peut également mettre ε_{fl} sous la forme :

$$\varepsilon_{fl} = \varepsilon_i \phi(t_1 - t_0) f(t - t_1)$$

ε_i : la déformation réelle instantanée : $\varepsilon_i = \sigma_1 / E_{ij}$;

$\phi = K_{fl} E_{ij} / E_{i28}$ le rapport entre la déformation finale du fluage et la déformation réelle instantanée.

Dans les cas courants, on peut prendre $\phi = 2$. La loi d'évolution de fluage $f(t - t_1)$ est donnée par la formule :

$$f(t-t_1) = \frac{\sqrt{t-t_1}}{\sqrt{t-t_1} + 5\sqrt{r_m}}$$

Dans laquelle la durée de chargement $(t - t_1)$ est exprimée en jours et le rayon moyen r_m en centimètres.

1.6.3. Coefficient de poisson

Le coefficient de poisson du béton est pris égal à :

- 0,20 en zones non fissurées
- zéro en zones fissurées

1.6.4. Coefficient de dilatation thermique

A défaut de résultats expérimentaux, le coefficient de dilatation thermique est pris égal à 10^{-5} par degré C.

NB : pour améliorer la mise en place du béton, ses caractéristiques ou sa durabilité, on peut être amené à ajouter des adjuvants en faible quantité lors de la confection du béton.

On utilise plus spécialement :

- ❖ les accélérateurs de prise
- ❖ les retardateurs de prise
- ❖ les accélérateurs de durcissement
- ❖ les entraîneurs d'air
- ❖ les plastifiants
- ❖ les hydrofuges de masse
- ❖ les antigels.

2. CARACTERISTIQUES MECANIQUES : ARMATURES

Les aciers utilisés en précontrainte sont de deux natures différentes :

- ❖ *les aciers actifs qui créent et maintiennent la précontrainte ;*
- ❖ *les aciers passifs nécessaires pour le montage , pour reprendre les efforts tranchants, et pour limiter la fissuration.*

2.1. Armatures passives

Ce sont des armatures identiques à celles utilisées dans le béton armé, ils ne sont mis en tension que par la déformation de l'élément.

2.1.1. Description des différents types d'aciers

Les aciers généralement utilisés sont classés en plusieurs catégories :

- ❑ *Barres rondes lisses.*
- ❑ *Barres à haute adhérence.*
- ❑ *Fils (Fils à Haute adhérence et fils lisses).*
- ❑ *Treillis soudés.*

D'une façon générale, on distingue pour les armatures passives en béton précontraint :

- *Les aciers passifs longitudinaux*
- *Les aciers passifs transversaux*

2.1.2 Caractères des armatures passives

Les caractères des armatures passives à prendre en compte dans les calculs sont les suivants :

Section nominale de l'armature

Module de déformation longitudinale

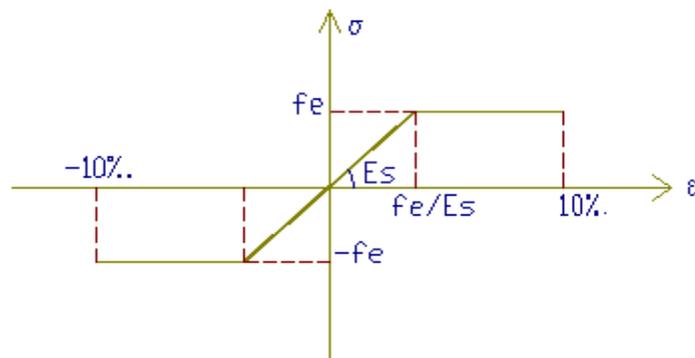
Le module de déformation longitudinale de l'acier E_S est pris égal à 200 000 MPa.

Limite d'élasticité garantie

L'acier est défini par la valeur garantie de sa limite d'élasticité, notée f_e .

Le tableau II.1 donne les désignations conventionnelles , les nuances et les limites d'élasticité actuellement sur le marché.

Type	Désignation	Limite d'élasticité
Ronds lisses	FeE215	215
	FeE235	235
Barres HA	FeE400	400
	FeE500	500
Fils tréfilés HA et Treillis soudés HA	FeTE500 TSHA	500
Treillis soudés lisses	TSL	500

Tableau II.1**Diagramme Contraintes -Déformations****Figure II.3****L'aptitude de l'armature à rester solidaire au béton**

Cette aptitude est caractérisée par les coefficients d'adhérence dits de fissuration et de scellement désignés respectivement par η et ψ .

Coefficients de fissuration : $\eta = 1$ ronds lisses

$$\eta = 1.6 \text{ barres HA ou fils HA de diamètre supérieur ou égal à } 6\text{mm}$$

$$\eta = 1.3 \text{ fils HA de diamètre inférieur à } 6\text{mm}$$

Coefficients de scellement : $\psi = 1$ ronds lisses

$$\psi = 1.5 \text{ barres HA ou de fils HA}$$

2.2. Armatures actives

Les aciers actifs sont les aciers de la précontrainte, ils sont mis à des tensions. A l'inverse des armatures de béton armé qui se contentent d'un acier de qualité courante,

les armatures de précontrainte exige un acier satisfaisant un certain nombre de conditions. Elles ont été classés par :

- catégorie : fils, barres, torons.
- classe de résistance.

2.2.1. Qualités requises

- ❑ Une résistance mécanique élevée.
- ❑ Une ductilité suffisante.
- ❑ Une bonne résistance à la corrosion.
- ❑ Une faible relaxation.
- ❑ Un coût aussi bas que possible.

2.2.2 Caractères géométriques

Les fils

Les fils sont des armatures dont la plus grande dimension transversale est inférieure à 12.5mm ;ils sont livrés en couronnes.

On distingue :

- ❑ les fils d'acier ronds et lisse de symbole L,
- ❑ les fils autres que ronds et lisses de symbole L.

Les fils sont définis par leur diamètre nominal auquel correspond une section nominale conventionnelle, suivant le tableau II.2

<i>Diamètre</i>	4	5	6	7	8	10	12.2
<i>Section</i>	12.6	19.6	28.3	38.5	50.3	78.5	117

Tableau II.2

Les barres

Les barres sont définies comme des armatures rondes et lisses de diamètre supérieur à 12.5mm, ou non rondes ou non lisses ne pouvant être livrées en couronnes.

Les caractères géométriques sont le diamètre et la section conventionnellement définie suivant le tableau II.3.

<i>Diamètre</i>	20	22	26	32	36
<i>Section</i>	314	380	531	804	1018

Tableau II.3

Les torons

Un toron est un assemblage de 3 ou 7 fils enroulés en hélice et répartis en une couche, éventuellement autour d'un fil central.

Les torons sont caractérisés par le nombre de leur fils, par leur diamètre, et par leur section. Le tableau II.4 fournit les valeurs correspondantes.

Type	3fils	7fils	7fils	7fils standard	7fils standard	7fils super	7fils super
Diamètre	5.2	6.85	9.3	12.5	15.2	12.9	15.7
Section	13.6	28.2	52	93	139	100	150

Tableau II.4**2.2.3. Caractères de calcul**

Les caractères des armatures de précontrainte à prendre en compte dans les calculs sont :

- section nominale de l'armature ;
- la contrainte maximale garantie à rupture f_{prg}
- la contrainte à la limite conventionnelle d'élasticité f_{peg}
- coefficient de relaxation ρ_{1000}

$\rho_{1000} = 2,5 \%$ pour la classe TBR (Très Basse Relaxation)

$\rho_{1000} = 8 \%$ pour la classe RN (Relaxation Normale)

- adhérence au béton ;
- coefficient de dilatation thermique 10^{-5} par degré C.
- module de déformation longitudinale :
 - $E_p = 200\,000 \text{ MPa}$ pour les fils et les barres
 - $E_p = 190\,000 \text{ MPa}$ pour les torons
- diagramme efforts-déformations.

Les diagrammes à utiliser conventionnellement pour les calculs sont donnés respectivement :

Pour les fils tréfilés et les torons

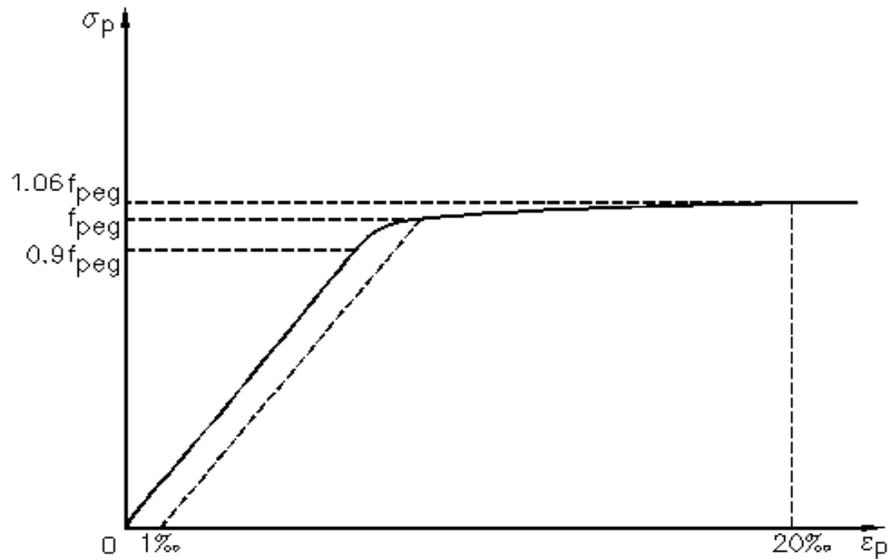


Figure II.4

Pour $\sigma_p \leq 0,9 f_{peg}$ $\epsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p}$

Pour $\sigma_p > 0,9 f_{peg}$ $\epsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 100 \left(\frac{\sigma_p}{f_{peg}} - 0,9 \right)^5$

Pour les fils trempés et revenus et pour les barres :

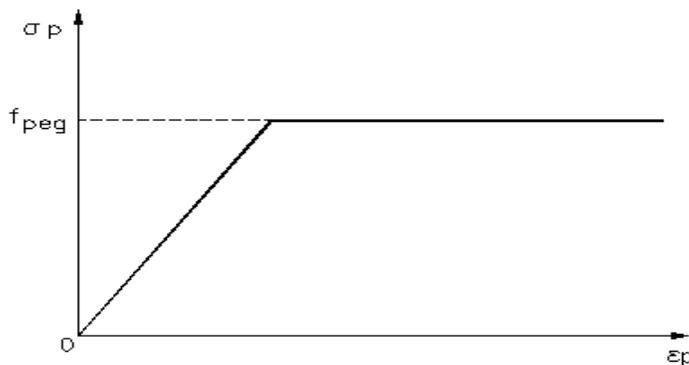


Figure II.5

pour: $\epsilon_p \leq \frac{f_{peg}}{E_p}$ $\sigma_p = E_p \epsilon_p$ si non $\sigma_p = f_{peg}$

Ce dernier diagramme est toléré pour les fils tréfilés et torons si on ne recherche pas une grande précision.

3. APPLICATIONS

Application 1

Déterminer , pour un béton de $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$, les caractéristiques suivantes :

- La résistance à la compression au jour $j= 7$ et 90 jours
- La résistance à la traction au jour $j= 7$ et 90 jours
- Module de déformation longitudinal instantané au jour $j= 7$ et 90 jours
- Module de déformation longitudinal différé au jour $j= 7$ et 90 jours

Solution

- La résistance à la compression au jour $j= 7$ et 90 jours

$$j= 7 \text{ jours} : f_{c7} = \frac{j}{4,76+0,83 j} f_{c28} = 20.04 \text{ MPa}$$

$$j=90 \text{ jours} : f_{c90} = f_{c28} = 30 \text{ MPa}$$

- La résistance à la traction au jour $j= 7$ et 90 jours

$$j= 7 \text{ jours} : f_{t7} = 0.6 + 0.06 f_{c7} = 1.80 \text{ MPa}$$

$$j= 90 \text{ jours} : f_{t90} = f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 2.4 \text{ MPa}$$

- Module de déformation longitudinal instantané au jour $j= 7$ et 90 jours

$$j= 7 \text{ jours} : E_{i7} = 11000 \sqrt[3]{f_{c7}} = 30056.3 \text{ MPa}$$

$$j= 90 \text{ jours} : E_{i90} = 11000 \sqrt[3]{f_{c28}} = 34179.6 \text{ MPa}$$

Application 2

Pour un béton $f_{c28} = 35 \text{ MPa}$:

- Déterminer la contrainte limite de compression ultime en situation courante et accidentelle.
- Déterminer la contrainte limite de compression en service
- Tracer le digramme contrainte – déformation du béton
- A défaut de données expérimentales probantes, dans le cas où on a besoin d'une évaluation plus précise des déformations, tracer le diagramme contrainte – déformation du béton.

Application 3

Pour un acier passif FeE400 :

- ❑ *Déterminer la contrainte limite ultime en situation courante et accidentelle.*
- ❑ *Déterminer la contrainte limite en service dans le cas d'une fissuration préjudiciable et très préjudiciable.*
- ❑ *Tracer le digramme contrainte – déformation de l'acier*

Application 4

Pour un acier actif $f_{peg}=1583\text{MPa}$:

- ❑ *Tracer le digramme contrainte – déformation de l'acier*

Application 5

Déterminer la déformation de retrait d'une poutre de section (0.30, 0.70)m mise en tension à $j=7$ jours dans les conditions suivantes :

- *Un climat humide Zone A*
- *Un climat tempéré sec Zone B*
- *Un climat chaud et sec zones B', C et D1.*
- *Un climat très sec ou désertique zones D2 et D3*

Note : *Voir le règlement algérien CBA93*

Sollicitations et sections de calcul

1. PRINCIPE DE JUSTIFICATION

Les calculs justificatifs sont établis suivant la méthode des états limites. « Un état limite » est un état pour lequel une condition requise d'une construction (ou d'un de ses éléments) est strictement satisfaite et cesserait de l'être en cas de variation défavorable d'une des actions appliquées.

1.1. Etat limite ultime (ELU)

Le dépassement de cet état conduit à la ruine de la structure. Au delà de l'état limite ultime, la résistance des matériaux béton et acier est atteinte, la sécurité n'est plus garantie et la structure risque de s'effondrer. On distingue :

- Etat limite de résistance de l'un des matériaux.
- Etat limite de l'équilibre statique.
- Etat limite de stabilité de forme : flambement

1.2. Etat limite de service (ELS)

L'état limite de service atteint remet en cause l'aptitude au service de la structure (fissures, fuites, désordres divers). Cet état est défini en tenant compte des conditions d'exploitations et /ou de durabilité. On distingue :

- Etat limite d'ouverture des fissures : risque d'ouverture des fissures.
- Etat limite de compression du béton : on limite volontairement la contrainte de compression à une valeur raisonnable.
- Etat limite de déformation : flèche maximale.

NB : Un ouvrage devra satisfaire à la fois à des conditions d'état limite ultime et d'état limite de service.

2. ACTIONS

2.1. Définition

Les actions sont l'ensemble des charges (forces, couples,...) appliquées à la structure, ainsi que les conséquences des déformations statiques ou d'état (retrait, tassement d'appuis, variation de température, etc.) qui entraînent des déformations de la structure.

2.2. Types d'actions

Les trois types d'actions appliquées à la structure sont les suivants :

1) **Actions permanentes** : Les actions permanentes, notées *G*, représentent les actions dont l'intensité est constante ou très peu variable dans le temps. Elles comprennent :

- Le poids propre des éléments de la structure,
- le poids des équipements fixes de toute nature (revêtements de sols et de plafonds ; cloisons etc.),

- les efforts (poids, poussées, pressions) exercés par des terres, par des solides ou par des liquides dont les niveaux varient peu ,
- les déplacements différentiels des appuis,
- les forces dues aux déformations (retrait, fluage,...) imposées en permanence à la construction,

Dans la plupart des cas, le poids propre est représenté par une valeur nominale unique, G_0 , calculée à partir des dessins du projet et des masses volumiques moyennes des matériaux.

2) **Actions variables** : les actions variables, notées Q , représentent les actions dont l'intensité varie fréquemment et de façon importante dans le temps. Elles sont définies par des textes réglementaires en vigueur , on distingue :

- les charges d'exploitation (poids et effets annexes tels que force de freinage, forces centrifuges, effets dynamiques),
- les efforts (poids, poussées, pressions) exercés par des solides ou par des liquides dont le niveau est variable,
- les charges non permanentes appliquées en cours d'exécution (équipements de chantier, engins, dépôts de matériaux, etc.),
- les actions climatiques : neige, vent, température, etc.

Les actions variables sont réparties en deux catégories :

- Une action dite de base notée Q_1
- Les autres actions ,dites d'accompagnement et notées Q_i ($i > 1$)

L'action de base Q_i est :

- L'action unique si c'est le cas

Si non :

- La plus fréquente
- La plus élevée
- L'une ou l'autre action variable

3) **Actions accidentelles** : Les actions accidentelles, notées F_A , provenant de phénomènes rares, et ne sont à considérer que si les documents d'ordre publique ou le marché le prévoient .Exemple : les séismes, les explosions ,les chocs.

2.3. Valeurs représentatives des actions

Les différentes valeurs de l'intensité des actions, dites valeurs représentatives, sont :

- Q_k : valeurs caractéristiques de l'action

- $\psi_{0i} Q_{ik}$: valeurs de combinaison
- $\psi_{1i} Q_{ik}$: valeurs fréquentes
- $\psi_{2i} Q_{ik}$: valeurs quasi-permanentes

La précontrainte est représentée par une valeur de calcul P_d qui est :

- la plus défavorable de deux valeurs caractéristiques P_1 et P_2 pour les justifications vis-à-vis des états limites de service,

$$P_1(x, t) = 1,02 P_0 - 0,80 \Delta P(x, t)$$

$$P_2(x, t) = 0,98 P_0 - 1,20 \Delta P(x, t)$$

- sa valeur probable P_m pour les justifications vis-à-vis des états limites ultimes.

$$P_m(x, t) = P_0 - \Delta P(x, t)$$

P_0 représentant la précontrainte « à l'origine », correspondant à la tension σ_{p0} .

$\Delta P(x, t)$ la perte de précontrainte au point d'abscisse x , à l'instant t .

3. SOLLICITATIONS

3.1. Définition

Les sollicitations sont les effets provoqués, en chaque point et sur chaque section de la structure, par les actions.

3.2. Sollicitations de calcul à l'ELU

1) Combinaisons fondamentales

En règle générale, les sollicitations de calcul à considérer sont les suivantes :

$$\gamma_p \cdot P_m + 1,35 \cdot G_{max} + G_{min} + \gamma_{Q1} Q_{1k} + \Sigma 1,3 \psi_{0i} Q_{ik}$$

avec :

G_{max} : ensemble des actions permanentes défavorables ;

G_{min} : ensemble des actions permanentes favorables ;

Q_{1k} : la valeur caractéristique de l'action de base ;

$\psi_{0i} Q_{ik}$: la valeur de combinaison d'une action d'accompagnement.

$\gamma_p = 1$ dans la plupart des cas

$\gamma_{Q1} = 1,5$ dans le cas général

2) Combinaisons accidentelles

$$P_m + F_A + G_{max} + G_{min} + \psi_{11} Q_{1k} + \Sigma \psi_{2i} Q_{ik}$$

avec :

F_A : la valeur nominale de l'action accidentelle,

$\psi_{11} Q_{1k}$: la valeur fréquente d'une action variable,

$\psi_{2i} Q_{ik}$: la valeur quasi-permanente d'une autre action variable.

3.3. Sollicitations de calcul à l'E.L.S

1) Combinaisons rares

$$P_d + G_{max} + G_{min} + Q_{1k} + \Sigma \psi_{0i} Q_{ik}$$

2) Combinaisons fréquentes

$$P_d + G_{max} + G_{min} + \psi_{11} Q_{1k} + \Sigma \psi_{2i} Q_{ik}$$

3) Combinaisons quasi-permanentes

$$P_d + G_{max} + G_{min} + \Sigma \psi_{2i} Q_{ik}$$

3.4. Valeurs de ψ_i

1) Bâtiments

Coefficients	N°	Nature du local	
ψ_0	1	Tous les locaux, à l'exception des archives et des parcs de stationnement.	0,77
	2	Parcs de stationnement et archives.	0,90
ψ_1	1	Salles de réunions à places assises, halles diverses, salles d'exposition, salles de classe, restaurants, dortoirs.	0,65
	2	Locaux non visés en 1 et 3.	0,75
	3	Archives.	0,90
ψ_2	1	Halles diverses, salles d'exposition, et autres locaux destinés principalement au transit des personnes. Salles de réunions, lieux de culte, salles et tribunes de sport, salles de danse et tout autre lieu avec places debout et utilisation périodique.	0,25
	2	Salles de classe, restaurants, dortoirs, salles de réunions avec places assises.	0,40
	3	Locaux non visés en 1, 2 et 4.	0,65
	4	Archives	0,80

Tableau III.1

2) Pont route

Nature des charges		ψ_0	ψ_1
Charges d'exploitation du système A des ponts	première classe	0	0,6
	deuxième classe	0	0,4
	troisième classe	0	0,2
Vent	en exploitation	0	0,2
	en exécution	1	0
Température	variations uniformes	0,6	0,5
	gradient	0,5	0,5
Charges d'exécution aléatoires		1	0

Tableau III.2

3) Charges climatiques

Nature des charges	ψ_0	ψ_1	ψ_2
Vent	0.77	0.2	0
Neige : altitude < 500m	0.77	0.15	0
Altitude >500m	0.77	0.30	0.1
Température (variation uniforme)	0.6	0.5	0

Tableau III.3

3.5. Charges routières

Les valeurs des charges routières, sont issues du fascicule spécial N° 72- 21 bis ; Cahier des prescriptions communes .

1)- Système de charges A

2)- Système de charges B

Le système de charge B comporte 3 types de systèmes de chargement :

- ❖ système Bc (Figure III.1)
- ❖ système Bt (Figure III.2)
- ❖ système Br (Figure III.3)

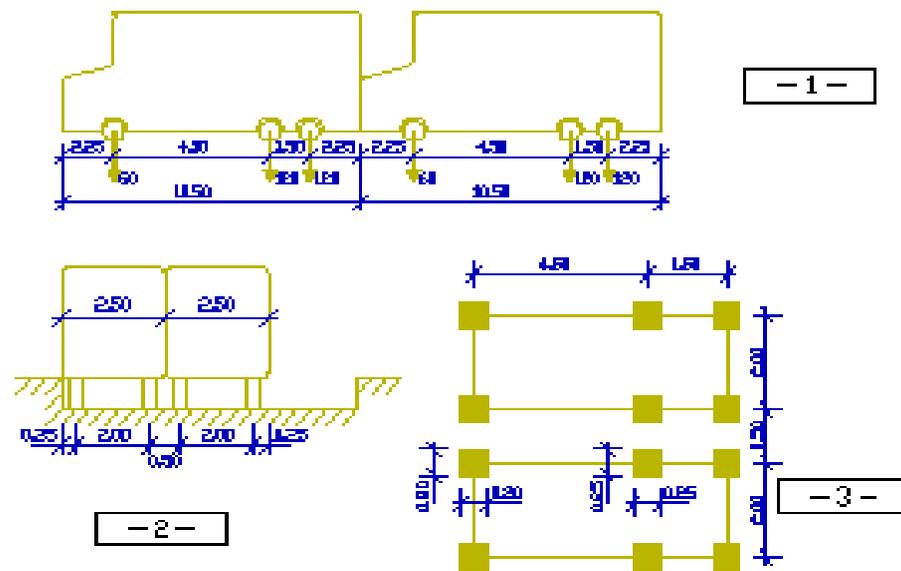


Figure III.1

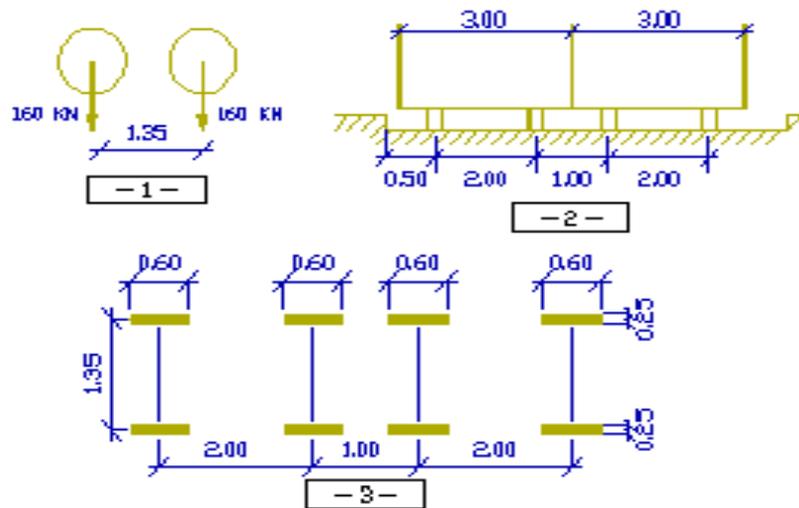


Figure III.2

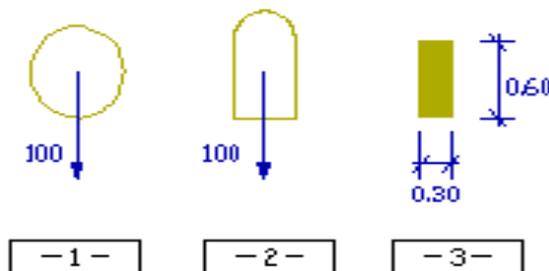


Figure III.3

3)- Efforts de freinage

Les charges de chaussée des systèmes A et Bc sont susceptibles de développer des réactions de freinage, F_f efforts s'exerçant à la surface de la chaussée, dans l'un ou l'autre sens de circulation.

4)- Forces centrifuges

Par convention, les forces centrifuges F_c sont calculées uniquement à partir du système Bc dans certaines conditions.

5)- Charges militaires

Sur les itinéraires classés pour permettre la circulation des convois militaires de l'une des classes M 80 ou 120, les ponts doivent être calculés pour supporter les véhicules types, susceptibles dans certains cas d'être plus défavorables que les surcharges des systèmes A et B.

Le système Mc se compose de véhicules types à chenilles ;

Le système Me se compose d'un groupe de deux essieux.

❖ Convois M 80 :

- ❑ Convoi Mc 80 (Figure III. 4)
- ❑ Convoi Me 80 (Figure III. 5)

❖ Convois M 120 :

- ❑ Convoi Mc 120 (Figure III. 6)
- ❑ Convoi Me 120 (Figure III. 7)

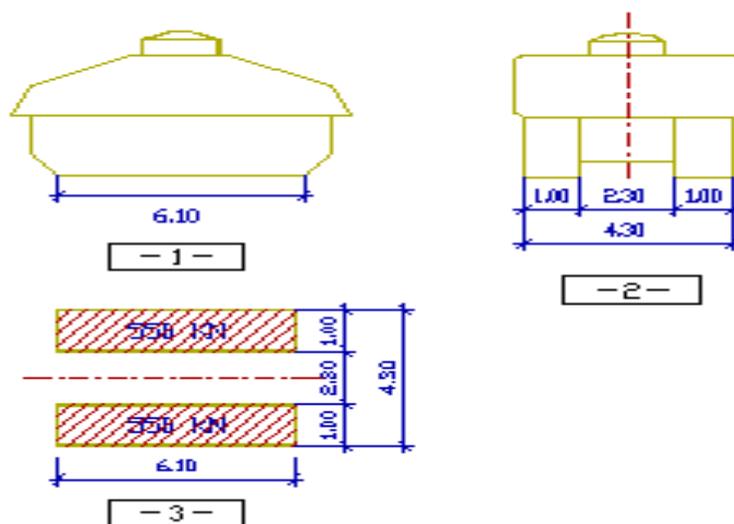


Figure III.4

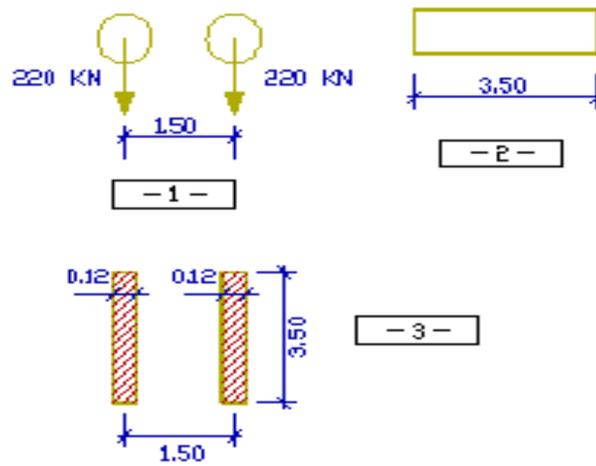


Figure III.5

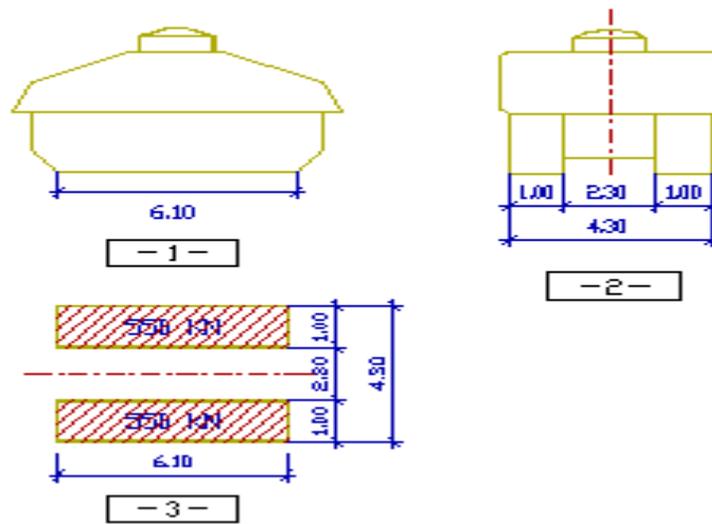


Figure III.6

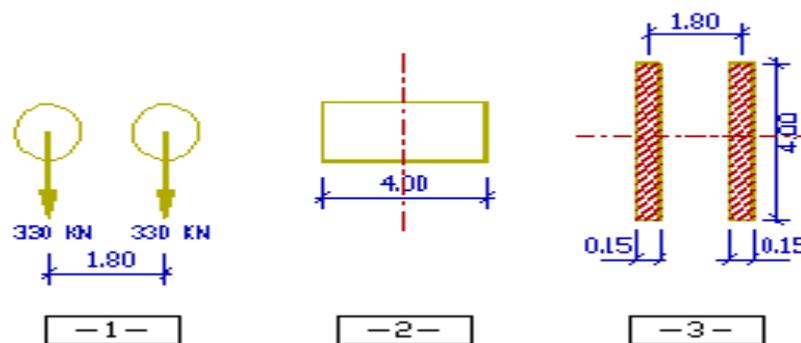


Figure III.7

6)- Charges exceptionnelles

Sur les itinéraires classés pour permettre la circulation de convois lourds exceptionnels de l'un des types D ou E, les ponts doivent être calculés pour supporter le véhicule-type correspondant décrit ci-après, susceptible dans certains cas d'être plus défavorable que les charges des systèmes A et B.

❖ Convoi type D (Figure III.7)

❖ Convoi type E (Figure III.8)

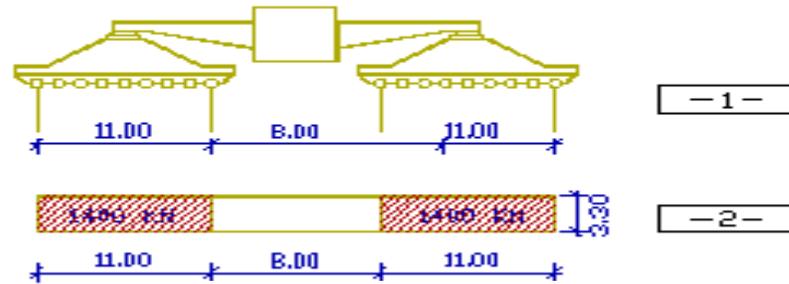


Figure III.8

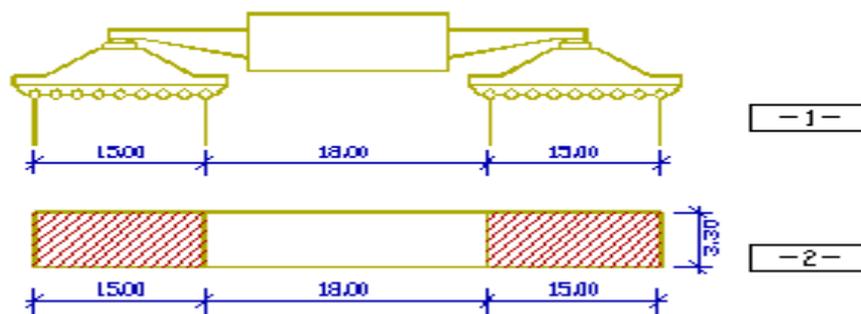


Figure III.9

7)- Charges sur les trottoirs

Les trottoirs et les pistes cyclables, qui leur sont assimilées, supportent des charges différentes selon le rôle de l'élément structural considéré et selon qu'il s'agit de ponts portant à la fois une ou des chaussées et un ou des trottoirs, ou de ponts réservés exclusivement à la circulation des piétons.

❖ Charges locales

❖ Charges générales

4. SECTIONS DE CALCUL

Dans le calcul des caractéristiques géométriques d'une section (position du centre de gravité, aire, moments d'inertie...), on tient compte des dimensions que présente la section dans la phase considérée.

4.1. Caractéristiques géométriques des sections

La résolution des problèmes d'RDM fait appel à des caractéristiques géométriques des section droites des corps étudiés. Le principe fondamental consiste à déterminer les contraintes qui agissent dans une section et de comparer la contrainte maximale avec la contrainte limite : $\sigma \leq [\sigma]$

- ✓ Traction simple $\sigma = F/B$
- ✓ Flexion simple $\sigma = M Y/I$
- ✓ Flexion composée $\sigma = F/B + M Y/I$

Les caractéristiques géométriques à étudier sont :

- Aire de la section B [cm^2]
- Moments statiques S_x et S_y [cm^3]
- Moments d'inertie axiaux I_x et I_y [cm^4]
- Moments d'inertie centrifuges I_{xy} [cm^4]
- Moments d'inertie polaires I_p [cm^4]
- Module de résistance W_x et W_y [cm^3]
- Module de résistance de torsion W_p [cm^3]
- Rayon de giration i_x et i_y [cm]
- Rendement d'une section ρ

a). Moment statique

Les moment statiques de l'aire d'une section par rapport aux axes X et Y sont donnés par les expressions :

$$S_x = \int_A y \, dA \qquad S_y = \int_A x \, dA$$

Si l'axe X ou l'axe Y passe par le centre de gravité de la section, les moments statiques S_x et S_y sont nuls.

b). Moment d'inertie

Les moment d'inertie de l'aire d'une section par rapport aux axes X et Y sont donnés par les formules :

$$I_x = \int_A y^2 \, dA \qquad I_y = \int_A x^2 \, dA \qquad I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

Le moment d'inertie polaire d'une section est donné par :

$$I_p = I_x + I_y$$

Théorème :

Le moment d'inertie axial d'une section par rapport à n'importe quel axe est égal au moment d'inertie de cette section par rapport à l'axe central parallèle plus le produit de l'aire de cette section par la distance au cdg de la section à l'axe considéré.

c). Module de résistance

Le module de résistance est égal au quotient du moment d'inertie axial par la distance de l'axe à la fibre la plus éloignée.

$$W_x = \frac{I_x}{y} \qquad W_y = \frac{I_y}{x}$$

d). Rayon de giration

On appelle rayon de giration la quantité donnée par l'équation :

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{B}} \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{B}}$$

e). Rendement d'une section

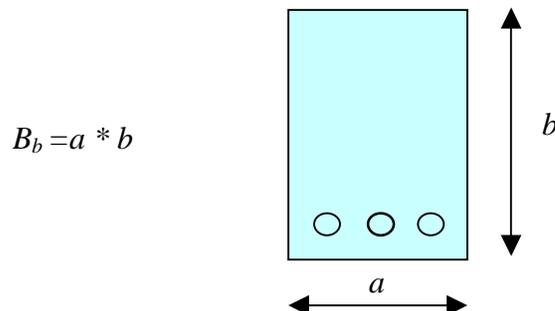
Le rendement d'une section est donné par :

$$\rho = \frac{I}{B V_i V_s}$$

4.2. Types de section**a). Section brute**

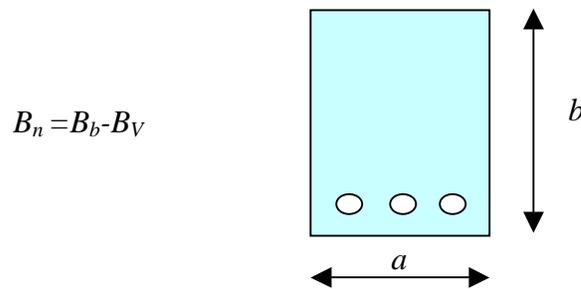
C'est la section du béton seul, telle qu'elle résulte des dessins de coffrage, sans réduction des conduits et ancrages (Figure III.10). Elle est utilisée pour l'évaluation :

- du poids propre d'une structure ;
- des rigidités des différentes pièces constituant la structure (en vue de calculer les sollicitations hyperstatiques) ;
- des déformations pour les parties d'ouvrages respectant les conditions de la classe II .

**Figure III.10**

b). Section nette

C'est la section totale du béton avec déduction des conduits et ancrages (Figure III.11). Elle est utilisée pour le calcul des contraintes à l'ELS en classe I et II.

**Figure III.11****c). Section homogène**

C'est la section obtenue en ajoutant à section nette la section des armatures longitudinales adhérente multipliée par un coefficient d'équivalence convenable « n ».

Section homogène = section nette + (section d'armatures longitudinales adhérentes) x (Coefficient d'équivalence).

$n = 5$: cas des actions de courte durée

$n = 15$: cas des actions de longue durée

d). Section homogène réduite

Pour le calcul des contraintes en classe III, il y a lieu de faire intervenir des sections homogènes réduites, définies à partir :

- de la seule partie comprimée du béton de la section,
- de la section des armatures passives longitudinales multipliée par le coefficient d'équivalence $n_V = 15$,
- de la fraction ρ de la section des armatures longitudinales de précontrainte multipliée par le coefficient d'équivalence $n_V = 15$.

Section homogénéisée et réduite = (Section du béton comprimé seul) + (section d'armatures passives) x (n_V) + (section d'armatures de précontrainte) x (n_V) x (ρ)

avec :

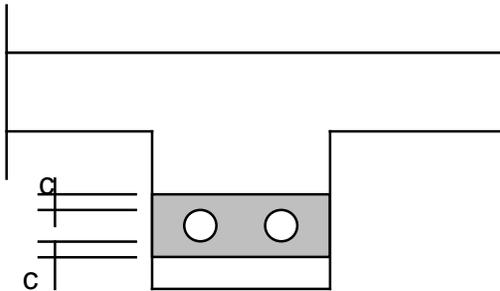
$\rho = 1$: cas de pré-tension

$\rho = 0,5$: cas de post-tension avec injection de coulis

$\rho = 0$: cas de la post-tension lorsque les armatures ne sont pas adhérentes .

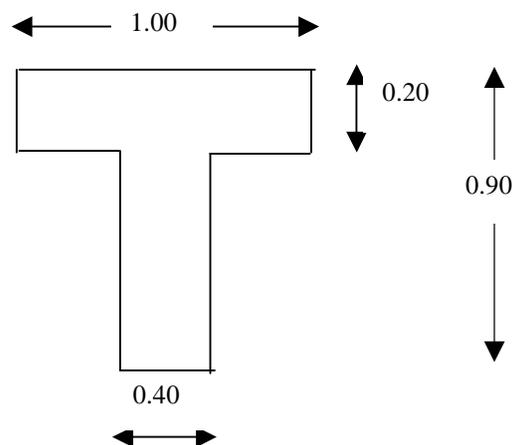
e). Section d'enrobage

C'est la surface délimitée par le contour de la section et deux parallèles à l'axe de flexion considéré encadrant l'ensemble des armatures de précontrainte, à une distance égale minimale admise « c » (Figure III.12). Cette section est utilisée pour certaines vérifications en classe II.

**Figure III.12****5. APPLICATIONS****Application 1**

Déterminer, pour une poutre en T, les caractéristiques géométriques suivantes :

- ❑ L'aire de la section (B)
- ❑ Le moment statique (S)
- ❑ La distance de la fibre supérieure (V_s) et la distance de la fibre inférieure (V_i)
- ❑ Le moment d'inertie (I)
- ❑ Le module de résistance (W)
- ❑ Le rayon de giration (i)
- ❑ Le rendement de la section (ρ)



Solution

- *L'aire de la section*

$$B = \sum B_i = 0.48 \text{ m}^2$$

- *Le moment statique*

$$S = \sum B_i d_i = 0.174 \text{ m}^3$$

- *La distance de la fibre supérieure (V_s)*

$$V_s = S/B = 0.363 \text{ m}$$

- *La distance de la fibre inférieure (V_i)*

$$V_i = h - V_s = 0.537 \text{ m}$$

- *Le moment d'inertie (I)*

$$I = \sum I_i + \sum B_i \Delta_i^2 = 0.03572 \text{ m}^4$$

- *Le module de résistance (W)*

$$W_s = I/V_s = 0.0984 \text{ m}^3$$

$$W_i = I/V_i = 0.0665 \text{ m}^3$$

- *Le rayon de giration (i)*

$$i = \sqrt{\frac{I}{B}} = 0.273 \text{ m}$$

- *Le rendement de la section (ρ)*

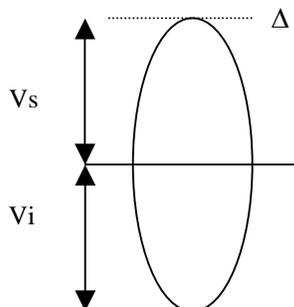
$$\rho = \frac{I}{B V_s V_i} = 0.382$$

Application 2

1). Soit une section avec les caractéristiques suivantes :

hauteur $h = 110 \text{ cm}$; surface $B = 0.3912 \text{ m}^2$

moment statique $S = 0.17315 \text{ m}^3$; moment d'inertie $I_{\Delta} = 0.131944 \text{ m}^4$



1). Déterminer les caractéristiques de la section brute :

- Distance de la fibre supérieure V_s [m]
- Distance de la fibre inférieure V_i [m]
- Moment d'inertie par rapport au centre de gravité I_G [m⁴]
- Rendement de la section ρ

2). Cette section comporte 4 gaines de 70 mm de diamètre situées respectivement à 105 mm et 245 mm de la fibre inférieure. Le centre de gravité des gaines est à 0.925 m de la fibre supérieure.

Déterminer les caractéristiques de la section nette:

- Aire de la section B_n [m²]
- Moment statique S_n [m³]
- Distance de la fibre supérieure V_s [m]
- Distance de la fibre inférieure V_i [m]
- Moment d'inertie par rapport à l'axe « Δ » $I_{n\Delta}$ [m⁴]
- Moment d'inertie par rapport au centre de gravité I_{nG} [m⁴]
- Rendement de la section ρ_n

3). Les gaines contiennent chacune un Câble 9T15 de section 1251 mm². Le coefficient d'équivalence est pris égal à 5.

Déterminer les caractéristiques de la section homogène :

- Aire de la section B_h [m²]
- Moment statique S_h [m³]
- Distance de la fibre supérieure V_{hs} [m]
- Distance de la fibre inférieure V_{hi} [m]
- Moment d'inertie par rapport à l'axe « Δ » $I_{h\Delta}$ [m⁴]
- Moment d'inertie par rapport au centre de gravité I_{hG} [m⁴]
- Rendement de la section ρ_h

Solution

Section brute

- Distance de la fibre supérieure :

$$V_{bs} = S_b / B_b = 0.4426 \text{ m}$$

- *Distance de la fibre inférieure :*

$$V_{bi} = h - V_{bs} = 0.6574 \text{ m}$$

- *Moment d'inertie par rapport au centre de gravité :*

$$I_{bG} = I_{\Delta} - B_b V_{bs}^2 = 0.055310 \text{ m}^4$$

- *Rendement de la section ρ*

$$\rho = I_{bG} / B_b V_{bs} V_{bi} = 0.486$$

Section nette

- *Aire de la section*

$$B_n = B_b - B_{\text{gaines}} = 0.37581 \text{ m}^2$$

- *Moment statique*

$$S_n = S_b - B_{\text{gaines}} V = 0.15891 \text{ m}^3$$

- *Distance de la fibre supérieure*

$$V_{ns} = S_n / B_n = 0.4228 \text{ m}$$

- *Distance de la fibre inférieure*

$$V_{ni} = h - V_{ns} = 0.6772 \text{ m}$$

- *Moment d'inertie par rapport à l'axe « Δ »*

$$I_{n\Delta} = I_{\Delta} - B_{\text{gaines}} V^2 = 0.118776 \text{ m}^4$$

- *Moment d'inertie par rapport au centre de gravité*

$$I_{nG} = I_{\Delta} - B_n V_{ns}^2 = 0.0516 \text{ m}^4$$

- *Rendement de la section ρ_n*

$$\rho = I_{nG} / B_n V_{ns} V_{ni} = 0.479$$

Section homogène

- *Aire de la section*

$$B_h = B_n + n B_p = 0.40083 \text{ m}^2$$

- *Moment statique S_h [m^3]*

$$S_h = S_n + n B_p V = 0.182053 \text{ m}^3$$

- *Distance de la fibre supérieure*

$$V_{hs} = S_h / B_h = 0.45419 \text{ m}$$

- *Distance de la fibre inférieure*

$$V_{hi} = h - V_{hs} = 0.64581 \text{ m}$$

- *Moment d'inertie par rapport à l'axe « Δ »*

$$I_{h\Delta} = I_{n\Delta} + n B_p V^2 = 0.140184 \text{ m}^4$$

- *Moment d'inertie par rapport au centre de gravité*

$$I_{hG} = I_{h\Delta} + B_h V_{hs}^2 = 0.057497 \text{ [m}^4\text{]}$$

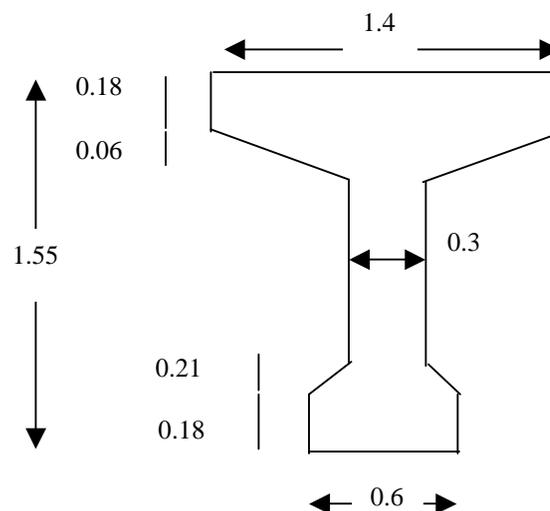
- *Rendement de la section ρ_h*

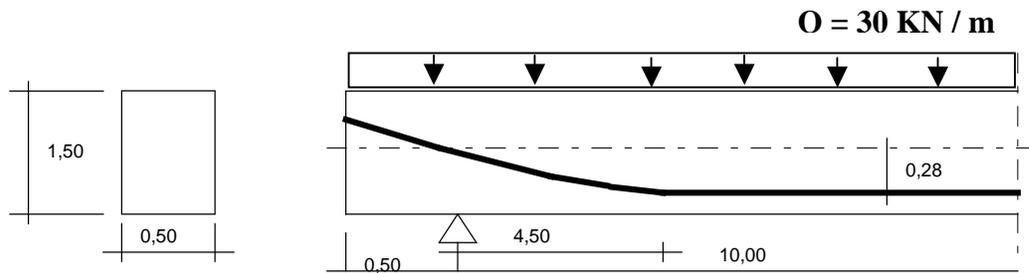
$$\rho = I_{hG} / B_h V_{hs} V_{hi} = 0.489$$

Application 3

Déterminer les caractéristiques géométriques de la section :

- *L'aire de la section (B)*
- *Le moment statique (S)*
- *La distance de la fibre supérieure (V_s) et la distance de la fibre inférieure (V_i)*
- *Le moment d'inertie (I)*
- *Le module de résistance (W)*
- *Le rayon de giration (i)*
- *Le rendement de la section (ρ)*



Application 4

1)- Déterminer les caractéristiques géométriques de la section .

- La section brute du béton (B)
- Le rendement de la section (ρ)
- Le moment quadratique de la section de béton (I)
- Le module de résistance (W)
- Le rayon de giration (i)

2)- Déterminer le moment fléchissant M_{min} et M_{Max}

3)- Déterminer les contraintes limites du béton

- En phase de construction $j = 7$ et 14 jours
- En phases de service

Béton : $f_{c28} = 35 \text{ MPa}$

Pertes de précontrainte

1. DEFINITION

D'une façon générale, on désigne sous le nom «perte de tension» ou «perte de précontrainte» toute différence entre l'effort exercé lors de sa mise en tension et l'effort qui s'exerce en un point donné d'une armature à un instant donné.

En post tension, l'effort de précontrainte varie à la fois :

- dans l'espace, avec l'abscisse le long du câble, du fait de frottement ;
- dans le temps, à cause du retrait et du fluage du béton et de la relaxation des aciers.

En pré tension, l'effort de précontrainte varie principalement dans le temps du fait de l'application successive des actions.

2. TYPES DE PERTES

Les pertes de tension se divisent en deux groupes :

- Les pertes de tension instantanées :se produisant lors de la mise en tension des câbles de précontrainte.
- Pertes de tension différées :se produisant dans un temps plus au moins long après la mise en tension.

3. TENSION A L'ORIGINE

Les efforts de précontrainte sont variables le long des armatures et dans le temps. Ils sont évalués à partir de la valeur probable de la tension à l'origine, notée « σ_{po} ». Ils ne doivent pas non plus dépasser la plus faible des valeurs suivantes :

$$\text{Min} (0,80 f_{prg} , 0,90 f_{peg}) \quad \text{en post-tension}$$

$$\text{Min} (0,85 f_{prg} , 0,95 f_{peg}) \quad \text{en pré-tension}$$

4. PERTES DE TENSION (EN POST-TENSION)

4.1. Pertes de tension instantanées

Dans le cas de la post-tension, les armatures de précontrainte subissent des pertes de tension instantanées qui sont :

- les pertes de tension par frottement ;
- les pertes de tension par recul de l'ancrage ;
- les pertes de tension par déformations instantanées du béton.

La valeur totale de ces pertes de tension instantanées, dans une section d'abscisse « x » de l'armature, est notée $\Delta\sigma_{pi}(x)$.

La tension au point d'abscisse x , après pertes de tension instantanées, appelée tension initiale, est notée : $\sigma_{pi}(x) = \sigma_{po} - \Delta\sigma_{pi}(x)$

4.1.1. Perte de tension par frottement

Ce type de perte se produit par frottement des câbles sur la gaine lors de la mise en tension.

Le tension appliquée σ_{p0} à l'origine diminue entre le point d'application et un point donnée d'abscisse « x » (Figure VI.1), sa nouvelle valeur est donnée par la relation :

$$\sigma_p(x) = \sigma_{p0} e^{-(f\alpha + \varphi x)}$$

σ_{p0} : la tension à l'origine ;

e : la base des logarithmes népériens ;

f : coefficient de frottement en courbe (rd^{-1}) ;

α : somme des déviations angulaires arithmétiques du câble sur la distance x (rd) ;

φ : coefficient de frottement en ligne (m^{-1}) ;

x : la distance de la section considérée (m).

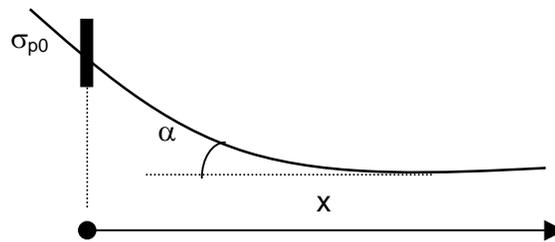


Figure IV.1

La perte de tension par frottement est estimée par la formule:

$$\Delta\sigma_{frot}(x) = \sigma_{p0} - \sigma_p(x) = \sigma_{p0} (1 - e^{-(f\alpha + \varphi x)})$$

Si l'exposant est faible, on peut admettre la relation suivante :

$$\Delta\sigma_{frot}(x) \cong \sigma_{p0} (f\alpha + \varphi x)$$

Cas	Nature des armatures	f		φ
		$3 \leq R \leq 6$ (en m)	$R \geq 6$ (en m)	
I Câbles ne traversant pas des joints ou surfaces de reprise	fils tréfilés ronds et lisses	$22 \cdot R/100$	0,16	0,002
	torons	$24 \cdot R/100$	0,18	
II Câbles traversant de nombreux joints ou reprises de bétonnage	fils tréfilés ronds et lisses	$24 \cdot R/100$	0,18	0,003
	torons	$26 \cdot R/100$	0,20	

Tableau V.1

4.1.2 Perte de tension par recul de l'ancrage

Cette perte de tension résulte du glissement de l'armature par rapport à son ancrage, du tassement ou de la déformation de l'ancrage.

Son influence diminue à partir de l'ancrage jusqu'à s'annuler à une distance « d » à partir de laquelle la tension demeure inchangée.

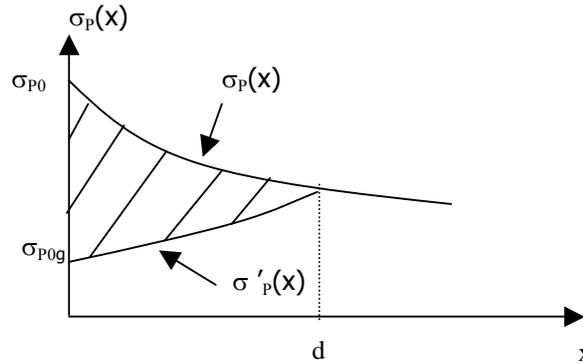


Figure IV.2

Le glissement à l'ancrage « g », qui dépend du type d'ancrage, est donnée par la relation :

$$g = \frac{1}{E_p} \int_0^d [\sigma_p(x) - \sigma'_p(x)] dx$$

En pratique, en assimilant les branches d'exponentielle à des droites, la perte par recul d'ancrage peut être évaluée à partir de l'aire d'un triangle (Figure IV.3).

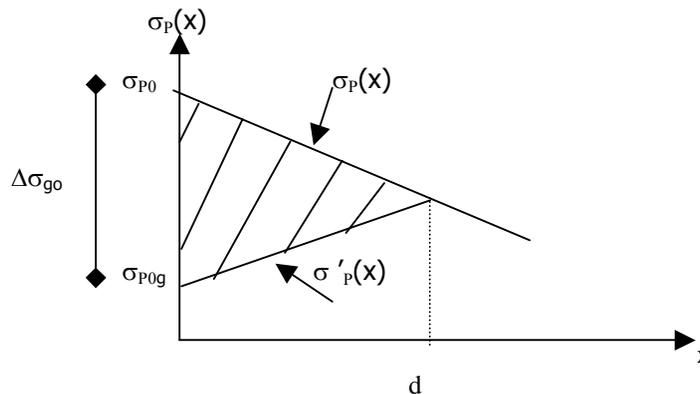
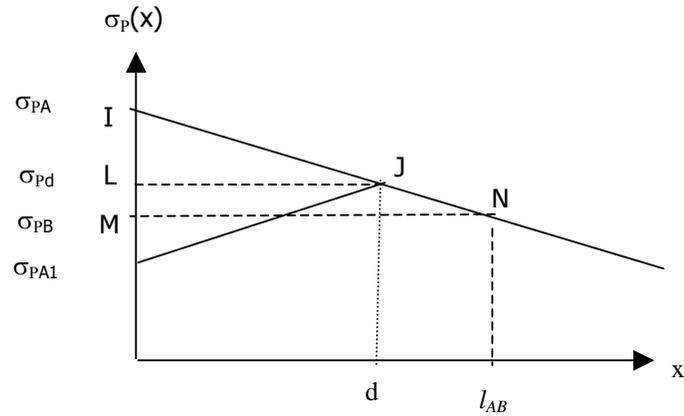


Figure IV.3

Dans ce cas, on a :

$$g E_p = (\sigma_{pA} - \sigma_{pAl}) \frac{d}{2}$$

**Figure IV.4**

D'après la loi des triangles semblables IJL et INM on a :

$$\frac{\sigma_{pA} - \sigma_{pA1}}{2d} = \frac{\sigma_{pA} - \sigma_{pB}}{l_{AB}}$$

La longueur du glissement du bloc d'ancrage est donnée par :

$$d = \sqrt{\frac{gEl_{AB}}{\sigma_{pA} - \sigma_{pB}}}$$

4.1.3 Perte de tension par déformations instantanées du béton

La perte de tension qui résulte des déformations instantanées du béton dues à l'action des armatures de précontrainte et aux autres actions permanentes peut être assimilée à une perte moyenne affectant chacune des armatures et égale dans une section donnée :

$$\Delta\sigma_{racc}(x) = \frac{n-1}{2n} \frac{E_p}{E_{ij}} \sigma_b(x)$$

avec :

n : nombre de gaines

E_p : module d'élasticité des armatures ;

E_{ij} : module instantané du béton au jour « j » ;

$\sigma_b(x)$: contrainte normale du béton :

$$\sigma_b(x) = \frac{P}{B_n} + \frac{Pe^2(x)}{I_n} + \frac{M(x)e(x)}{I_n}$$

$$P = (\sigma_{po} - \Delta\sigma_{frot} - \Delta\sigma_{recu}) A_p$$

$e(x)$: excentricité du câble de précontrainte.

Remarque :

Le BPEL préconise de prendre un coefficient « 2 » pour les variations de contraintes dues à la contrainte relative à la phase de mise en tension et aux actions permanentes appliquées simultanément à cette mise en tension, et la valeur de « 1 » pour les variations de contrainte dues aux actions permanentes postérieures à cette phase de précontrainte, y compris celles dues aux armatures de précontrainte mises en tension ultérieurement.

4.2. Pertes de tension différées

Dans le cas de la post-tension, les armatures de précontrainte subissent des pertes de tension différées qui sont :

- Perte de tension due au retrait du béton
- Perte de tension due au fluage du béton
- Perte de tension due à la relaxation de l'acier

La valeur totale de ces pertes de tension différées, dans une section d'abscisse « x » de l'armature, est notée $\Delta\sigma_{pd}(x)$.

La tension au point d'abscisse x, après pertes de tension instantanées, appelée tension finale, est notée : $\sigma_{pf}(x) = \sigma_{po} - \Delta\sigma_{pi}(x) - \Delta\sigma_{pd}(x)$

4.2.1 Perte de tension due au retrait du béton

La perte finale de tension due au retrait du béton est égale à :

$$\Delta\sigma_r = E_p \varepsilon_r [r(t) - r(t_1)]$$

ε_r : retrait total du béton

t_1 : l'âge du béton au moment de sa mise en précontrainte

$r(t)$: une fonction traduisant l'évolution du retrait en fonction du temps

Très souvent, on peut négliger $r(t_1)$ devant 1, ce qui conduit à la formule simplifiée suivante :

$$\Delta\sigma_r \approx E_p \varepsilon_r$$

4.2.2 Perte de tension due au fluage du béton

Lorsqu'une pièce est soumise, à partir de sa mise en précontrainte, à des actions permanentes subissant des variations dans le temps, la perte finale de tension due au fluage du béton est prise égale à :

$$\Delta\sigma_{fl} = (\sigma_b^M + \sigma_b^F) E_p / E_{ij}$$

σ_b^M : contrainte maximale dans le béton ; après les pertes instantanées

σ_b^F : contrainte finale dans le béton ; après les pertes différées

j : l'âge du béton lors de sa mise en précontrainte.

Si $\sigma_b^M \leq 1,5 \sigma_b^F$, il est loisible, à titre de simplification, d'évaluer la perte finale de tension due au fluage du béton à :

$$\Delta\sigma_{fl} = 2,5 \sigma_b^F E_p / E_{ij}$$

et comme $E_p / E_{ij} \approx 6$, on aura donc :

$$\Delta\sigma_{fl} = 15 \sigma_b^F$$

4.2.3 Perte de tension due à la relaxation de l'acier

La perte finale de tension due à la relaxation de l'acier est donnée par :

$$\Delta\sigma_{rel}(x) = \frac{6\rho_{1000}}{100} \left[\frac{\sigma_{pi}(x)}{f_{prg}} - \mu_0 \right] \sigma_{pi}(x)$$

$\sigma_{pi}(x)$: contrainte dans les armatures de précontrainte ; après les pertes instantanées.

ρ_{1000} : coefficient de relaxation à 1000 h

f_{prg} : contrainte limite garantie à la rupture

μ_0 étant un coefficient pris égal à :

0,43 pour les armatures à très basse relaxation (TBR).

0,30 pour les armatures à relaxation normale (RN).

0,35 pour les autres armatures.

4.2.4 Perte de tension différée totale

La formule donnée pour la relaxation suppose que la longueur de l'armature est constante ; or la perte par relaxation est diminuée par l'effet du raccourcissement due au retrait et fluage du béton.

Pour tenir compte de cette interaction, le BPEL propose de minorer forfaitairement la relation par le coefficient 5/6.

Ainsi, La perte différée finale est prise égale à :

$$\Delta\sigma_d = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{fl} + \frac{5}{6} \Delta\sigma_{rel}$$

Lorsqu'il est nécessaire de tenir compte de l'évolution des pertes de précontrainte en fonction du temps, on peut admettre que la valeur totale des pertes différées $\Delta\sigma_d(t)$, évaluée « j » jours après la mise en tension du groupe d'armatures considéré, suit la loi suivante :

$$\Delta\sigma_d(t) = r(j) \Delta\sigma_d$$

La fonction $r(j)$ étant identique à la fonction $r(t)$

5.APPLICATIONS

Application 1

Soit une poutre de post- tension de longueur de 47.00 m soumise à la précontrainte par 4 câbles de 7T15 à $j = 8$ jours.

Pour la section à mi travée ,déterminer :

- la tension à l'origine
- la perte due au frottement
- la perte due au recul d'ancrage
- la perte due à la déformation instantanée du béton
- la perte instantanée
- la perte due au retrait du béton
- la perte due au fluage du béton
- la perte due à la relaxation des aciers
- la perte différée

Déduire la valeur de :

- ❑ La contrainte finale probable
- ❑ La contrainte finale maximale
- ❑ La contrainte finale minimale

Données :

$\alpha = 0.2984 \text{ rd}$	$f = 0.18 \text{ rd}^{-1}$	$\varphi = 0.002 \text{ m}^{-1}$
$g = 6 \text{ mm}$	$\sigma_{bc} = 12.4 \text{ MPa}$	$\sigma_b^M = 15.3 \text{ MPa}$
$\sigma_b^F = 11.1 \text{ MPa}$	$f_{c28} = 35 \text{ MPa}$	$\epsilon_r = 3.10^{-4}$
$f_{prg} = 1860 \text{ MPa}$	$f_{peg} = 1660 \text{ MPa}$	$\rho_{1000} = 2.5 \%$
$\mu_o = 0.43$	$E_p = 190000 \text{ MPa}$	

Solution

- ❑ La tension à l'origine

$$\sigma_{po} = \text{Min}(0,80 f_{prg} , 0,90 f_{peg}) = 1488 \text{ MPa}$$

- ❑ La perte due au frottement

$$\Delta\sigma_{frot}(x) = \sigma_{po} - \sigma_p(x) = \sigma_{po} (1 - e^{-(f\alpha + \varphi x)}) = 142.57 \text{ Mpa}$$

- La perte due au recul d'ancrage

$$d = \sqrt{\frac{gEx}{\Delta\sigma_{frot}}} = 13.71 \text{ m} < x = 23.5\text{m} \Rightarrow \Delta\sigma_{rec} = 0$$

- La perte due à la déformation instantanée du béton

$$\Delta\sigma_{racc}(x) = \frac{n-1}{2n} \frac{E_p}{E_{ij}} \sigma_b(x) = 27.47 \text{ MPa}$$

- la perte instantanée

$$\Delta\sigma_{pi}(x) = \Delta\sigma_{frot}(x) + \Delta\sigma_{rec}(x) + \Delta\sigma_{racc}(x) = 170.04 \text{ MPa}$$

- La perte due au retrait du béton

$$\Delta\sigma_r \approx E_p \varepsilon_r = 57 \text{ MPa}$$

- La perte due au fluage du béton

$$\Delta\sigma_{fl} = (\sigma_b^M + \sigma_b^F) E_p / E_{ij} = 139.41 \text{ MPa}$$

- La perte due à la relaxation des aciers

$$\Delta\sigma_{rel}(x) = \frac{6\rho_{1000}}{100} \left[\frac{\sigma_{pi}(x)}{f_{prg}} - \mu_0 \right] \sigma_{pi}(x) = 55.07 \text{ MPa}$$

- la perte différée

$$\Delta\sigma_d = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{fl} + \frac{5}{6} \Delta\sigma_{rel} = 242.37 \text{ MPa}$$

- La contrainte finale probable

$$\sigma_p(x) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_p(x) = 1075.59 \text{ MPa}$$

- La contrainte finale maximale

$$\sigma_{p1}(x) = 1.02\sigma_{p0} - 0.8\Delta\sigma_p(x) = 1187.8 \text{ MPa}$$

- La contrainte finale minimale

$$\sigma_{p2}(x) = 0.98\sigma_{p0} - 1.2\Delta\sigma_p(x) = 963.35 \text{ MPa}$$

Application 2

Soit une poutre de pot tension de section rectangulaire (35x72)cm, de longueur de 15m soumise à la précontrainte par 6 câbles à $j = 10$ jours.

Pour la section à mi travée ($e_p = -270$ mm), déterminer :

- la tension à l'origine
- la perte due au frottement

- la perte due au recul d'ancrage
- la perte due à la déformation instantanée du béton
- la perte instantanée
- la perte due au retrait du béton
- la perte due au fluage du béton
- la perte due à la relaxation des aciers
- la perte différée

Déduire la valeur de :

- ❑ La contrainte finale probable
- ❑ La contrainte finale maximale
- ❑ La contrainte finale minimale

Données :

$$\alpha = 0.072 \text{ rd}$$

$$f = 0.18 \text{ rd}^{-1}$$

$$\varphi = 0.002 \text{ m}^{-1}$$

$$g = 1 \text{ mm}$$

$$E_{i10} = 34 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$

$$A_p = 1672.2 \text{ mm}^2$$

$$f_{c28} = 35 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_r = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$f_{prg} = 1720 \text{ MPa}$$

$$f_{peg} = 1460 \text{ MPa}$$

$$\rho_{1000} = 8 \%$$

$$\mu_o = 0.3$$

$$E_p = 190000 \text{ MPa}$$

$$I_n = 1.033 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4$$

$$B_n = 0.250 \cdot 10^6 \text{ mm}^2$$

Application 3

Soit une poutre de 40 m de longueur, précontrainte par des câbles formés de torons à très basse relaxation avec une relaxation garantie à 1000 heures égale à 2.5 %, de limite d'élasticité 1583 MPa et de contrainte de rupture garantie 1770 MPa. La mise en tension a lieu à 12 jours sur un béton de résistance $f_{c28} = 35 \text{ MPa}$.

Le retrait final est égal à $\varepsilon_r = 3 \cdot 10^{-4}$. le glissement de l'ancrage est de 5 mm, les coefficients de frottement valent : $f = 0.17 \text{ m}^{-1}$, $\varphi = 0.0016 \text{ rd}^{-1}$.

La contrainte au centre de gravité des armatures due à l'action des charges permanentes existantes à la mise en tension et à l'action de la précontrainte vaut : 7.5 MPa. La contrainte supplémentaire apportée par les actions permanentes appliquées à 50 jours vaut 1 MPa. La contrainte finale valant 7.2 MPa.

Pour la section à mi travée ($x=20\text{m}$, $\alpha=0.11 \text{ rd}$), déterminer :

- la tension à l'origine
- la perte due au frottement

- *la perte due au recul d'ancrage*
- *la perte due à la déformation instantanée du béton*
- *la perte instantanée*
- *la perte due au retrait du béton*
- *la perte due au fluage du béton*
- *la perte due à la relaxation des aciers*
- *la perte différée*

Déduire la valeur de :

- ❑ *La contrainte finale probable*
- ❑ *La contrainte finale maximale*
- ❑ *La contrainte finale minimale*

Dimensionnement de la précontrainte

1. OBJECTIF DU DIMENSIONNEMENT

L'objectif du dimensionnement de la précontrainte est de déterminer la force effective P (après soustraction des pertes de tension) qui doit régner dans la section étudiée afin que les contraintes limites soient assurées.

2. DIAGRAMME DE VERIFICATION

Les vérifications des contraintes peuvent se ramener aux deux cas suivants :

➤ **Cas 1** : élément soumis à la précontrainte et à un moment minimum M_m

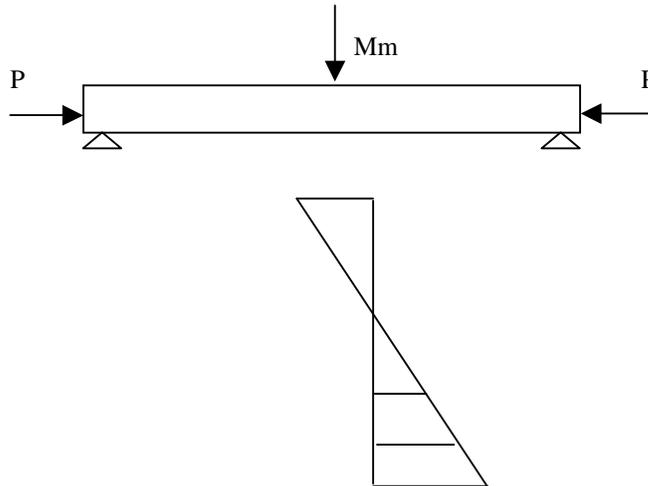


Figure V.1

➤ **Cas 2** : élément soumis à la précontrainte et à un moment maximum M_M

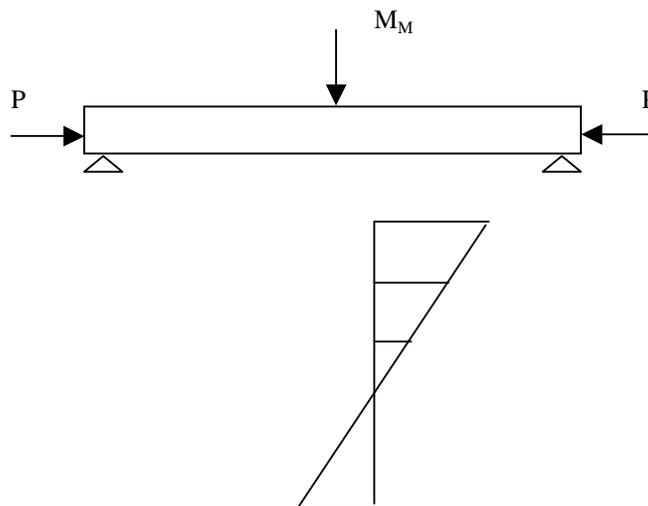


Figure V.2

Ces deux ensembles, un peu contradictoire, peuvent être regroupés sous forme du diagramme de vérification suivant :

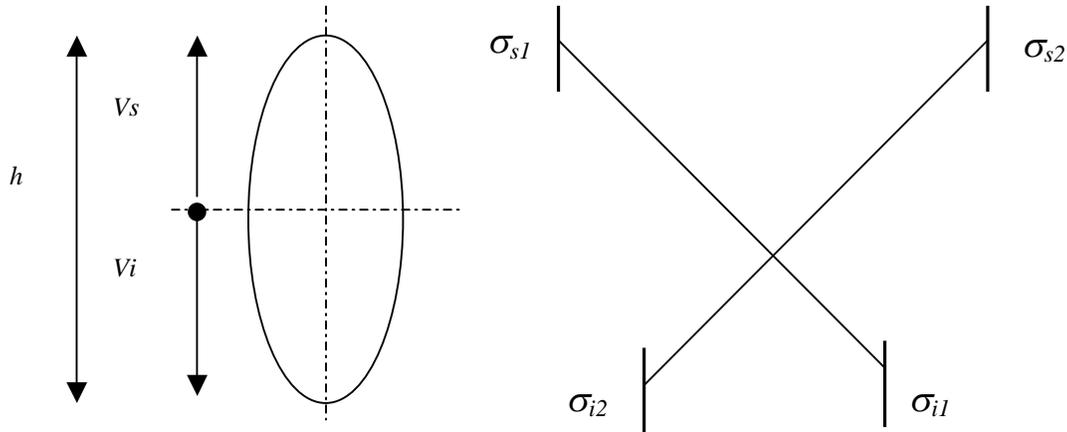


Figure V.3

Avec:

σ_{s1} : contrainte limite à la fibre supérieure sous chargement 1 (P et M_m)

σ_{s2} : contrainte limite à la fibre supérieure sous chargement 2 (P et M_M)

σ_{i1} : contrainte limite à la fibre inférieure sous chargement 1 (P et M_m)

σ_{i2} : contrainte limite à la fibre inférieure sous chargement 2 (P et M_M)

3. DONNEES DE BASE

Les données de base du dimensionnement de la précontrainte sont :

➤ Les données géométriques :

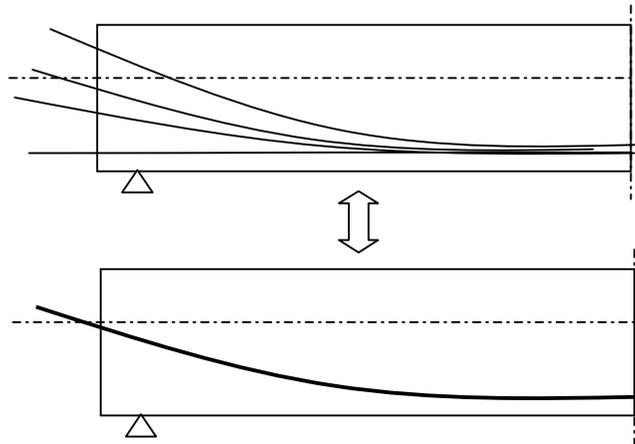
- ❑ La géométrie de la section
- ❑ L'aire de la section « B »
- ❑ Moment d'inertie « I »
- ❑ Distance de la fibre supérieure « V_s »
- ❑ Distance de la fibre inférieure « V_i »
- ❑ Rendement de la section $\rho = I / B V_s V_i$

➤ Les contraintes limites : σ_{s1} , σ_{s2} , σ_{i1} , σ_{i2}

4. APPROCHE DE LA PRECONTRAINTE

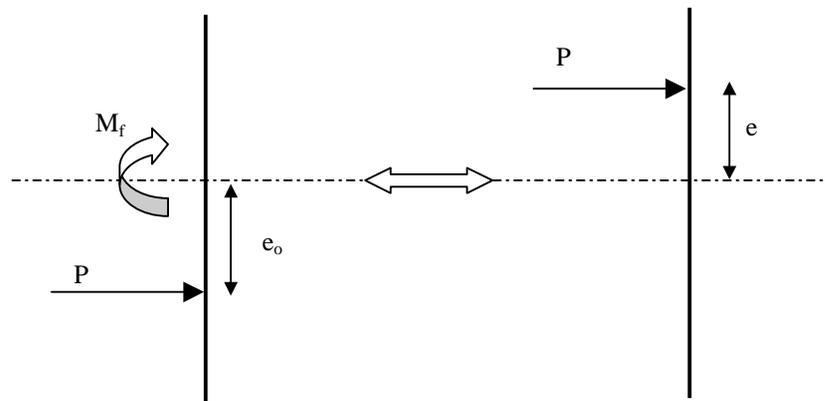
4.1. Câble moyen fictif

Les câbles de précontrainte dans chaque section, forment un ensemble qui peut être assez complexe ; c'est pour quoi, pour les calculs, on remplace souvent cet ensemble par un câble moyen fictif qui aurait, dans chaque section, le même effet des câbles réellement mis en place (Figure V.4).

**Figure V. 4****4.2. Centre de pression**

L'effet d'un effort de précontrainte P excentré de « e_o » et d'un moment fléchissant M_f est équivalent à un effort de précontrainte P , appliqué en point appelé « centre de pression » d'ordonnée :

$$e = e_o + \frac{M_f}{P}$$

**Figure V. 5****4.3. Noyau limite**

La contrainte dans une fibre d'ordonnée « y » s'écrit en valeur algébrique, sous la forme suivante :

$$\sigma(y) = \frac{P}{B} + (Pe_o + M_f) \frac{y}{I} = \frac{P}{B} + Pe \frac{y}{I} = \frac{P}{B} \left(1 + \frac{ey}{\rho V_s V_i} \right)$$

puisque $\rho = I / B V_s V_i$

Dans le cas général, on doit avoir : $\bar{\sigma}_t \leq \sigma(y) \leq \bar{\sigma}_c$

Sur la fibre supérieure $y = (+)$ Vs :

$$\sigma_{S1} \leq \frac{P}{B} \left(1 + \frac{e}{\rho V_i} \right) \leq \sigma_{S2}$$

Sur la fibre inférieure $y = (-) V_i$:

$$\sigma_{i2} \leq \frac{P}{B} \left(1 - \frac{e}{\rho V_s} \right) \leq \sigma_{i1}$$

Ces deux doubles inégalités peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$-\rho V_i \left(1 - \frac{\sigma_{s1} B}{P} \right) \leq e \leq \rho V_i \left(\frac{\sigma_{s2} B}{P} - 1 \right)$$

$$-\rho V_s \left(\frac{\sigma_{i1} B}{P} - 1 \right) \leq e \leq \rho V_s \left(1 - \frac{\sigma_{i2} B}{P} \right)$$

si on pose

$$-B_i = -\rho V_s \left(\frac{\sigma_{i1} B}{P} - 1 \right)$$

$$B_s = \rho V_i \left(\frac{\sigma_{s2} B}{P} - 1 \right)$$

$$-C_i = -\rho V_i \left(1 - \frac{\sigma_{s1} B}{P} \right)$$

$$C_s = \rho V_s \left(1 - \frac{\sigma_{i2} B}{P} \right)$$

- Le segment $[- B_i, B_s]$ est le noyau limite de compression.
- Le segment $[- C_i, C_s]$ est le noyau limite de traction.
- Le segment $[- D_i, D_s] = [- B_i, B_s] \cap [- C_i, C_s]$ est le noyau limite au sens strict.

Remarque

En pratique, le concept de noyau au sens strict est lourd à manier. Au niveau du pré dimensionnement, seule est facilement exploitable la notion de noyau de traction qui permet de définir la précontrainte P et son excentricité e_o .

Le noyau de compression conditionne, pour sa part les caractéristiques à donner aux section droites mais, pour effectuer leurs dimensionnement, il est beaucoup plus simple d'écrire directement, dans les zones déterminantes, le respect des contraintes limites de compression σ_{s2} et σ_{i1} .

4.4. Excentricité du câble moyen fictif

$$\text{On a: } P e = P e_o + M_f \Rightarrow e = e_o + \frac{M_f}{P}$$

$$-C_i \leq e \text{ correspondant au cas de chargement 1 : } M_f = M_m$$

$$-C_i \leq e_o + \frac{M_f}{P} \Rightarrow e_o \geq -C_i - \frac{M_m}{P}$$

$e \leq C_s$ correspondant au cas de chargement 2 : $M_f = M_M$

$$e_o + \frac{M_M}{P} \leq C_s \Rightarrow e_o \leq C_s - \frac{M_M}{P}$$

L'excentricité du câble moyen fictif doit être comprise entre deux bornes :

$$-C_i - \frac{M_m}{P} \leq e_o \leq C_s - \frac{M_M}{P}$$

le câble moyen fictif doit passer à l'intérieure du segment « $e_{o1}e_{o2}$ » appelé segment de passage.

- Le segment $[-B_i - M_m/P, B_s - M_M/P]$ est le noyau de passage de compression
- Le segment $[-C_i - M_m/P, C_s - M_M/P]$ est le noyau de passage de traction
- Le segment $[-D_i - M_m/P, D_s - M_M/P] = [-B_i - M_m/P, B_s - M_M/P] \cap [-C_i - M_m/P, C_s - M_M/P]$ est le noyau de passage au sens strict.

5. FUSEAU DE PASSAGE

La zone qui, sur tout l'élément, est délimité par l'ensemble des segments de passage s'appelle fuseau de passage.

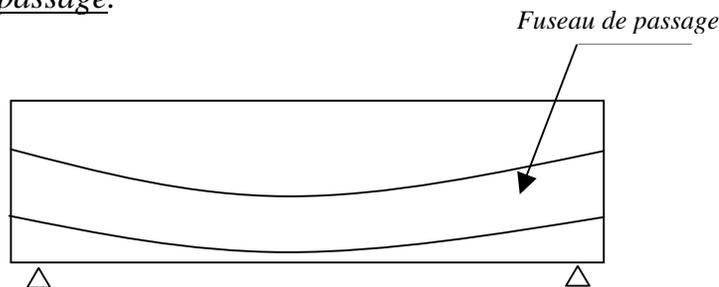


Figure V.6

Pour que la précontrainte d'un élément soit possible, il faut réunir deux conditions :

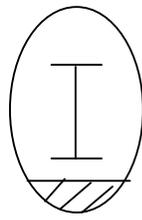
- L'existence du segment de passage
- Un enrobage suffisant

6. NOTION DE SECTION CRITIQUE

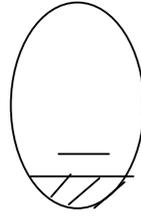
6.1. Section sous critique : Si tout les segment de passage est à l'intérieure de la zone qui permet un enrobage suffisant, la section est dite sous critique.

6.2. Section critique : Dans le cas où ils serait possible que le segment de passage soit réduit à un point, la section est critique.

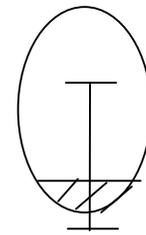
6.3. Section sur critique : Si le segment de passage à une de ses frontières découpe la zone d'enrobage (segment ouvert), la section est dite sur critique.



Section sous critique



Section critique



Section sur critique

Figure V.7**7. EVALUATION DE LA PRECONTRAINTE****7.1. Cas de section sous critique et critique**

Le segment de passages est limité à un point $-C_i - \frac{M_m}{P_I} = e_o = C_s - \frac{M_M}{P_I}$, d'où on tire :

$$P_I = \frac{M_M - M_m}{C_s + C_i} = \frac{\Delta M}{C_s + C_i}$$

et comme :

$$C_s = \rho V_s \left(1 - \frac{B \sigma_{i2}}{P_I} \right)$$

$$C_i = \rho V_i \left(1 - \frac{B \sigma_{s1}}{P_I} \right)$$

on obtient :

$$P_I = \frac{\Delta M + \rho B (V_s \sigma_{i2} V_i \sigma_{s1})}{\rho h}$$

ou encore, puisque $B = \frac{I}{\rho V_s V_i}$:

$$P_I = \frac{\Delta M + \frac{I}{V_i} \sigma_{i2} + \frac{I}{V_s} \sigma_{s1}}{\rho h}$$

7.2. Cas de section sur critique**1) Moment positif :**

$$e_o = C_s - \frac{M_M}{P_{II}} = -(V_i - d_i)$$

$$\text{d'où on tire } P_{II} = \frac{M_M}{C_s + V_i - d_i}$$

$$\text{De même : } P_{II} = \frac{M_M + \frac{I}{V_i} \sigma_{i2}}{V_i + \rho V_s - d_i}$$

2) Moment négatif:

$$e_o = -C_i - \frac{M_m}{P_{II}} = V_s - d$$

D'où :

$$P_{II} = \frac{-M_m}{C_i + V_s - d_s}$$

De même :

$$P_{II} = \frac{-M_m + \frac{I}{V_s} \sigma_{s1}}{V_s + \rho V_i - d_s}$$

Remarque

si $P_I > P_{II}$ la section est sous critique

si $P_I < P_{II}$ la section est sur critique

7.3. Cas particulier

Si on suppose $\sigma_{s1} = \sigma_{i2} = 0$, alors on a:

$$C_s = \rho V_s$$

$$C_i = \rho V_i$$

7.3.1. Section sous critique

$$P_I = \frac{\Delta M}{\rho h}$$

7.3.2. Section sur critique**1) Moment positif**

$$P_{II} = \frac{M_M}{V_i + \rho V_s - d_i}$$

2) Moment négatif

$$P_{II} = \frac{-M_m}{V_s + \rho V_i - d_s}$$

Par comparaison, on peut constater les économies obtenues sur l'effort de précontrainte lorsqu'on tolère des contraintes de traction dans le béton ($\sigma_{s1} = \sigma_{i2} < 0$)

8. SECTION MINIMALE DE BETON**8.1. Cas d'une section sous critique**

$$\frac{I}{V_s} \geq \frac{M_M - M_m}{\sigma_{s2} - \sigma_{s1}} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_s}$$

$$\frac{I}{V_i} \geq \frac{M_M - M_m}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_i}$$

8.2. Cas d'une section sur critique

1) Moment positif

$$\frac{I}{V_s} \geq \frac{\rho Ph}{\sigma_{s2} + \frac{V_s}{V_i} \sigma_{i2}}$$

$$\frac{I}{V_i} \geq \frac{M_M - M_m}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}} = \frac{\Delta M}{\sigma_{fi}}$$

2) Moment négatif

$$\frac{I}{V_s} \geq \frac{M_M - M_m}{\sigma_{s2} - \sigma_{s1}} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_s}$$

$$\frac{I}{V_i} \geq \frac{\rho Ph}{\sigma_{i1} + \frac{V_i}{V_s} \sigma_{s1}}$$

9. APPLICATIONS

Application 1

Soit une poutre de section rectangulaire (50x120)cm soumise aux moments $M_{\min}=1.2 \text{ MNm}$ et $M_{\max}=3.2 \text{ MNm}$ avec une valeur de l'enrobage telle que $d_i=0.15\text{m}$.

- Déterminer la valeur de la précontrainte (P1 et P2).
- Donner une constatation sur la nature de la section.
- Déterminer la valeur de l'excentricité e_0 .

Solution

En section sous critique, la valeur de la précontrainte est déterminée par l'équation :

$$P_I = \frac{\Delta M}{\rho h}$$

avec :

$$\Delta M = 2 \text{ MNm}$$

$$\rho = 1/3$$

$$h = 1.20 \text{ m}$$

$$\text{d'où : } P_I = 5 \text{ MN}$$

En section sur critique (moment positif), la valeur de la précontrainte est déterminée par l'équation :

$$P_{II} = \frac{M_M}{V_i + \rho V_s - d_i}$$

Avec :

$$M_{max} = 3.2 \text{ MNm}$$

$$\rho = 1/3$$

$$V_s = V_i = 0.60 \text{ m}$$

$$d_i = 0.15 \text{ m}$$

$$d'où : P_2 = 4.92 \text{ MN}$$

On constate que $P_1 > P_2$ d'où la section est sous critique

La valeur de l'excentricité e_0 est donnée par :

$$-C_i - \frac{M_m}{P_1} = e_0 = C_s - \frac{M_M}{P_1}$$

avec :

$$C_s = \rho V_s = 0.2 \text{ m}$$

$$P_1 = 5 \text{ MN}$$

$$d'où : e_0 = -0.44 \text{ m}$$

Application 2

Soit une poutre de section rectangulaire (50x120)cm soumise aux moments $M_{min} = 1.9 \text{ MNm}$ et $M_{max} = 2.4 \text{ MNm}$ avec une valeur de l'enrobage telle que $d_i = 0.15 \text{ m}$.

- Déterminer la valeur de la précontrainte (P_1 et P_2).
- Schématiser le diagramme des contraintes

Application 3

Soit une dalle (1m, h) de 15m de portée, soumise à une charge d'exploitation $q = 0.05 \text{ MN/m}^2$ avec une valeur de l'enrobage telle que $d_i = 0.107 \text{ m}$. Le béton utilisé a une résistance de 30 MPa.

Contrainte limite de traction $\sigma_t = 0$

Contrainte limite de compression $\sigma_b = 15 \text{ MPa}$

- Déterminer la hauteur h
- Déterminer la valeur de la précontrainte P et la valeur de l'excentricité e_0 .
- Donner une constatation sur la nature de la section.

Application 4

Soit une dalle (l, h) de 15m de portée, soumise à une charge d'exploitation $q=0.03 \text{ MN/m}^2$ avec une valeur de l'enrobage telle que $d_i=0.107\text{m}$. Le béton utilisé a une résistance de 30 MPa.

Contrainte limite de traction $\sigma_t=0$

Contrainte limite de compression $\sigma_b=15 \text{ MPa}$

- Déterminer la hauteur h
- Déterminer la valeur de la précontrainte P et la valeur de l'excentricité e_0 .
- Donner une constatation sur la nature de la section.

Justification des sections courantes

1. JUSTIFICATION VIS A VIS DES SOLLICITATIONS NORMALES

1.1. Vérification à l'état limite de service

1) Principe de vérification

Cette vérification consiste à calculer les contraintes dans le béton et de les comparer aux contraintes limites autorisées. Elle doit être établie pour chacune des phases de construction et en phase de service.

Le calcul des contraintes se fait par l'application de la formule générale, en valeur algébrique, suivante :

$$\sigma(y) = \frac{P}{B} + (Pe_p + M) \frac{y}{I}$$

Dans le cas général, on doit avoir : $\bar{\sigma}_{\min} \leq \sigma(y) \leq \bar{\sigma}_{\max}$

Les contraintes limites ne sont pas les mêmes pour les différentes combinaisons de charges, pour les vérifications en phase de construction et pour les vérifications en phases de service.

2) Hypothèses de calcul

Les calculs en section courante sont conduits moyennant les deux hypothèses fondamentales suivantes :

- les sections droites restent planes ;
- les contraintes des matériaux sont proportionnelles à leurs déformations.

Selon le type de vérification envisagé, les hypothèses complémentaires sont :

a)- calcul en section non fissurée

- le béton tendu résiste à la traction ;
- les matériaux ne subissent aucun glissement relatif.

Cette dernière hypothèse entraîne que les contraintes normales dues à toutes les actions autres que les actions permanentes peuvent être calculées sur la section entière homogène.

b)- calcul en section fissurée

- le béton tendu est négligé ;
- les matériaux ne subissent aucun glissement relatif ;
- lorsque la déformation du béton s'annule au niveau d'une armature, la tension dans cette dernière vaut :
 - ✓ 0 s'il s'agit d'une armature passive,
 - ✓ $\sigma_{pd} + n_i \sigma_{bpd}$ (avec $n_i = 5$) s'il s'agit d'une armature de précontrainte ;

- la contrainte dans les aciers passifs aussi bien que la variation de surtension dans les aciers de précontrainte qui se manifestent après décompression du béton sont évaluées à partir du coefficient d'équivalence $n_v = 15$.

3) Classe de vérification

le souci de moduler les exigences vis-à-vis de la non - traction du béton a conduit à distinguer trois classes différentes de vérifications des contraintes

Classe I (la plus pénalisante)

Elle n'admet pas les contraintes de traction. Elle concerne les pièces soumises à la traction simple (tirants, parois de réservoir contenant des fluides) et les pièces sollicitées à la fatigue.

Classe II (la plus courante)

Elle admet les contraintes de traction dans le béton , mais pas la formation des fissures. Elle concerne le cas des éléments exposés à des ambiances agressives.

Classe III (la moins pénalisante)

Elle admet une ouverture limité des fissures sous les sollicitations extrêmes. Elle concerne les pièces en atmosphère peu agressive.

4) Limitation des contraintes

Les contrainte limites de calcul sont regroupées sur la figure VI.1

5) Limitation de la variation de tension des armatures

Les limitations de la variation de tension des armatures de précontrainte et de la contrainte des armatures passives, en classe III, sont récapitulées dans le tableau IV.1

6) Armatures Passives longitudinales

Elles résultent de la plus sévère des exigences suivantes :

➤ Armatures de peau

Le but de ces armatures est essentiellement de limiter la fissuration du béton avant l'application de la force de précontrainte sous l'action de phénomène tels que retrait différentiel .

La section des armatures de peau doit être au moins 3cm^2 par mètre de longueur , sans pouvoir être inférieure à 0.10% de la section de béton.

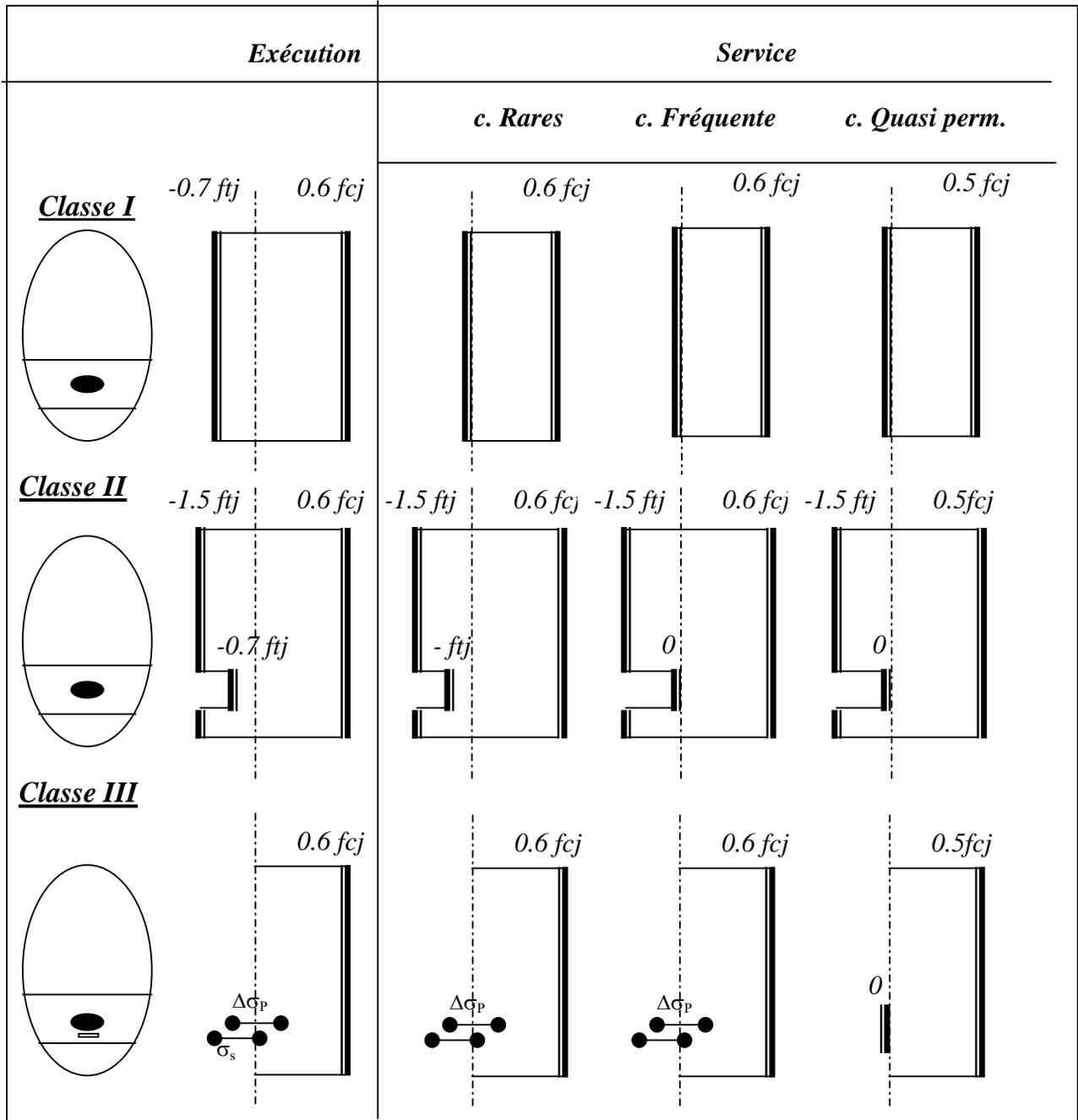


Figure VI.1

Situation et combinaison	Exécution Exploitation : c. rare	Exploitation c. fréquente
$\overline{\Delta\sigma_p}$	Post tension : $0.1f_{prg}$ Pré tension : $\min(0.1f_{prg}, 150 \eta_p)$	100 Mpa
$\overline{\sigma_s}$	$\text{Min}(2/3 f_e, 110 \sqrt{\eta f_{ij}})$	$0.35 f_e$

Tableau VI.1

➤ Armatures des zones tendues

Dans les parties de la section où le béton est tendu, il est nécessaire de disposer une section d'armatures minimale A_s

$$A_s = \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{Bt} f_{tj}}{f_e \sigma_{Bt}}$$

Avec :

B_t : l'aire de la partie du béton tendu

N_{Bt} : la résultante des contraintes de traction correspondantes.

σ_{Bt} : la valeur absolue de la contrainte maximale de traction.

1.2. Vérification à l'état limite ultime

La vérification aux états limites ultime est une vérification de sécurité vis à vis de la rupture soit par allongement critique des aciers, soit par rupture du béton (compression ou traction). Elle consiste à s'assurer que les sollicitations de calcul S_u sont intérieures à un domaine résistant dont la frontière est constituée par l'ensemble des sollicitations résistantes ultimes $S_{lim u}$.

Les hypothèses de calcul sont les suivantes :

- ❖ les sections droites restent planes ;
- ❖ la résistance à la traction du béton est négligée ;
- ❖ les matériaux ne subissent aucun glissement relatif ;
- ❖ le diagramme des déformations de la section est un diagramme limite tel que défini par la règle de trois pivots ;

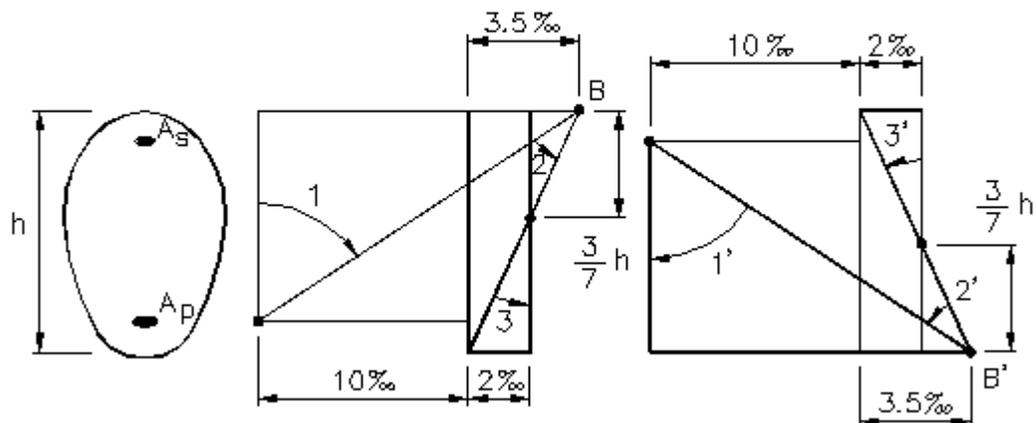


Figure VI.2

- ❖ le diagramme contraintes-déformations du béton est celui de la figure II.1 ;
- ❖ les diagrammes contraintes-déformations de calcul des aciers se déduisent de ceux des figures II.3 , et II.4 .

Le domaine résistant convexe est limité par une courbe (ou une surface, en cas de flexion déviée) dite d'interaction moment - effort normal.

Compte tenu de la convexité de ce domaine, une méthode possible consiste à se fixer $n - 1$ des n paramètres dont dépend la sollicitation ($N = 2$ en cas de flexion composée non déviée) en les prenant égaux à ceux de la sollicitation de calcul S_u et à comparer le n^e paramètre de S_u avec celui des deux points correspondants de la frontière.

Ainsi, sur la figure VI.3 (flexion composée non déviée) s'est-on fixé $N = N_u$. La justification consiste à s'assurer que :

$$M_{lim\ u\ min} \leq M_u \leq M_{lim\ u\ max}$$

En général, pour une sollicitation de calcul donnée, il suffit de vérifier l'une des inégalités, l'autre se trouvant d'évidence satisfaite.

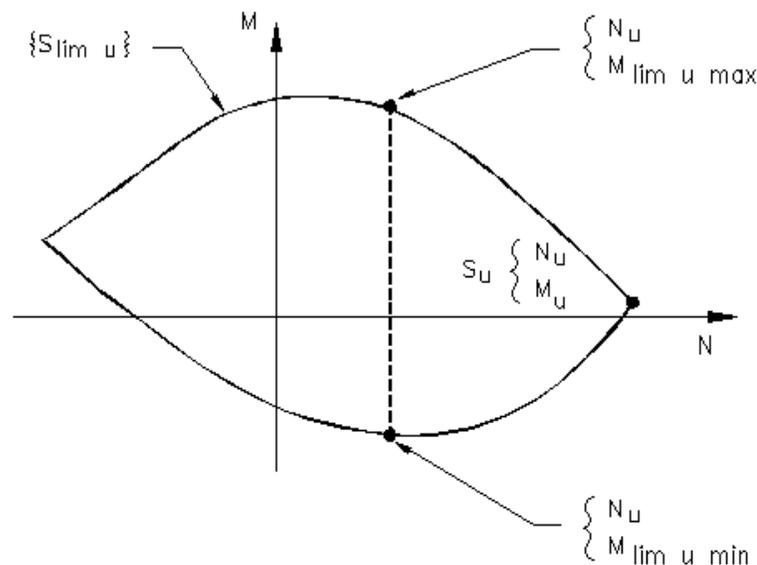


Figure VI.3

2. JUSTIFICATION VIS A VIS DES SOLLICITATIONS TANGENTES

Une poutre soumise à un effort tranchant doit faire l'objet des justifications suivantes :

- dans toutes les zones de la poutre vis-à-vis de :
 - ❑ l'état-limite de service,
 - ❑ l'état-limite ultime
- dans les zones d'appui simple et d'about de la poutre. , justifications complémentaires relatives à l'équilibre de la bielle d'effort tranchant et éventuellement du coin inférieur.

La présence de la précontrainte induit une nouvelle donnée dans le calcul des éléments précontraints. Ainsi aux effets des charges permanentes et des charges d'exploitation s'ajout celui de la précontrainte : $V=Vg+Vq+Vp$

Pour le cas d'une précontrainte de force P inclinée d'un angle « α » par rapport à la fibre moyenne, l'action de l'effort de précontrainte sur la section peut se décomposer en deux forces : l'une « N » normale et l'autre « Vp » perpendiculaire.

$$N=P \cos\alpha \quad N>0$$

$$Vp= - P \sin\alpha \quad Vp<0$$

En conséquence, la valeur de l'effort tranchant à considérer est un effort tranchant réduit défini par : $V_{\text{red}}=(Vg+Vq)-P\sin\alpha$

N.B : En fonction du signe de « $\sin\alpha$ », l'effort tranchant peut être favorable ou défavorable.

2.1. Justification à ELS

Les justifications sont conduites pour une section donnée de la poutre à partir des contraintes σ_x , σ_t et τ , calculées pour l'élément considéré au niveau de la vérification, dans l'hypothèse de déformations élastiques et linéaires des matériaux et en supposant le béton non fissuré.

Dans le cas général d'un élément de poutre comportant des armatures transversales de précontrainte de force de traction unitaire F_t inclinées de α' sur la fibre moyenne et espacées de s_t' (Figure VI.4), on a :

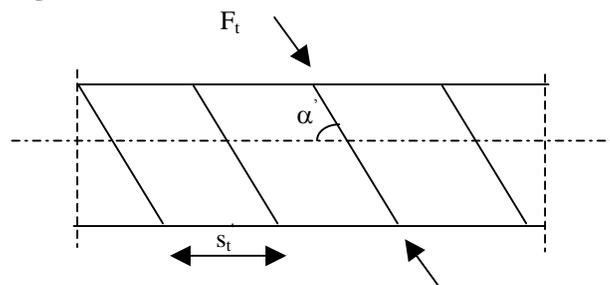


Figure VI.4

$$\sigma_x = \sigma + \frac{F_t}{b_n s_t'} \frac{\cos\alpha'}{\tan\alpha'}$$

$$\sigma_t = \frac{F_t}{b_n s_t'} \sin\alpha'$$

$$\tau = \tau_{\text{red}} - \frac{F_t}{b_n s_t'} \cos\alpha'$$

σ_x : contrainte normale à la section ;

σ_t : contrainte normale à la section transversale ;

τ : contrainte de cisaillement de l'élément ;

$\tau_{\text{réd}}$: contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant réduit l'élément qui peut se calculer par la formule :

$$\tau_{\text{réd}} = \frac{V_{\text{réd}} S}{b_n I}$$

$V_{\text{réd}}$: effort tranchant réduit

S : moment statique

b_n : largeur nette de la section

I_n : moment d'inertie nette de la section

Sous l'effet des sollicitations de service dans le cas de charges les plus défavorables ; et quelque soit les sections considérées, on vérifié les conditions suivantes :

$$\tau^2 - \sigma_x \sigma_t \leq 0.4 f_{ij} \left[f_{ij} + \frac{2}{3} (\sigma_x + \sigma_t) \right]$$

$$\tau^2 - \sigma_x \sigma_t \leq 2 \frac{f_{ij}}{f_{cj}} [0.6 f_{cj} - \sigma_x - \sigma_t] \left[f_{ij} + \frac{2}{3} (\sigma_x + \sigma_t) \right]$$

2.2. Justification à ELU

Les justifications des éléments d'une poutre vis-à-vis de l'état-limite ultime comportent la vérification, d'une part , de la résistance des armatures transversale et , d'autre part, celle des bielles comprimées.

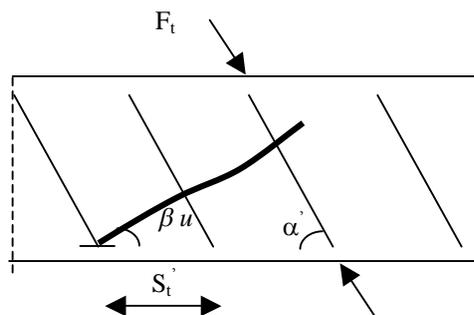


Figure VI.5

La première étape consiste à déterminer l'angle β_u que froment les billes de béton avec la fibre moyenne de la poutre ,cette angle est donnée par :

$$\text{tg} 2\beta_u = \frac{2\tau_u}{\sigma_{xu} - \sigma_{tu}}$$

β_u étant toutefois borné inférieurement à 30° .

Les règles PBEL définissent ensuite la contrainte de cisaillement ultime τ_{uilm} correspondant à la pleine utilisation de la résistance des armatures transversale , actives et passives :

$$\tau_{u\lim} = \frac{A_t}{b_n s_t \gamma_s} \frac{f_e \sin(\alpha + \beta_u)}{\sin \beta_u} + \frac{F_{tu}}{b_n s_{t'}} \frac{\sin(\alpha' + \beta_u)}{\sin \beta_u}$$

Avec les notations suivantes

A_t : aire totale des sections d'un cours d'armatures passives transversales ;

s_t : espacement de deux cours de ces armatures, mesuré suivant la fibre moyenne de la poutre ;

f_e : limite d'élasticité de l'acier ;

α : angle de ces armatures avec la fibre moyenne de la poutre (angle compris entre 45° et 90°) ;

F_{tu} : effort résistant des aciers d'un cours d'armatures transversales de précontrainte ;

$s_{t'}$: espacement de deux cours de ces armatures, mesuré suivant la fibre moyenne de la poutre ;

α' : angle de ces armatures avec la fibre moyenne de la poutre (angle compris entre 45° et 90°).

Avec :

$\gamma_p = \gamma_s = 1,15$ pour les justifications vis-à-vis des combinaisons fondamentales.

$\gamma_p = \gamma_s = 1$ pour les justifications vis-à-vis des combinaisons accidentelles.

On doit vérifier que $\tau_u \leq \tau_{u\lim}$

Il est d'autre part loisible, dans le cas d'une section non entièrement tendue, d'ajouter à $\tau_{u\lim}$ le terme complémentaire $f_{tj} / 3$. Ce terme tient compte du fait qu'une partie de l'effort tranchant est équilibrée par la partie comprimée de la poutre.

Dans le cas, très fréquent, où l'âme ne comporte que des armatures passives perpendiculaires à la fibre moyenne de la poutre, on aura l'inégalité suivante :

$$\frac{A_t}{b_n s_t \gamma_s} f_e \geq \left(\tau_u - \frac{f_{tj}}{3} \right) \operatorname{tg} \beta_u$$

Les règles BPEL imposent en outre des dispositions constructives :

➤ Un minimum d'armatures d'âme est exigé dans toutes les zones de la poutre. Il est donné par la condition que la quantité $\frac{A_t}{b_n s_t \gamma_s} f_e \sin \alpha + \frac{F_{tu}}{b_n s_{t'}} \sin \alpha'$ soit au moins 0,4 MPa.

➤ L'espacement $s_{t'}$ des armatures transversales d'âme de précontrainte doit être au plus égal à 0,8 h.

➤ L'espacement s_t des armatures transversales d'âme passives doit être au plus égal à la plus petite des trois valeurs 0,8 h, $3 b_0$ et un mètre ; h désignant la hauteur totale

de la section et b_0 l'épaisseur brute minimale de l'âme.

Ces dispositions ont pour objectif d'éviter une trop grande fragilité du béton de l'âme de la poutre .

2.3. Justification du béton

La justification concernant le béton consiste à vérifier que la contrainte de compression σ_b des bielles de béton demeure inférieure la contrainte ultime du béton . Cette vérification se traduit par le fait que la contrainte de cisaillement $\tau_{red, u}$ doit être au plus égale à : $\frac{0.85f_{cj}}{3\gamma_b} \sin 2\beta_u$

3. DISPOSITIONS CONSTRUCTIVES

a)- En précontrainte par post tension

Groupement des armatures de précontrainte

Le groupement des armatures de précontrainte doit satisfaire aux conditions suivantes : le nombre de conduits dans chaque paquet est limité :

dans le sens horizontal à :

$$q = 2 \text{ si } \phi \leq 5 \text{ cm}$$

$$q = 1 \text{ si } \phi > 5 \text{ cm}$$

dans le sens vertical à :

$$p = 3 \text{ si } \phi \leq 5 \text{ cm}$$

$$p = 2 \text{ si } 5 \text{ cm} < \phi < 10 \text{ cm}$$

$$p = 1 \text{ si } \phi \geq 10 \text{ cm}$$

ϕ le diamètre d'encombrement maximal des conduits

Espacement des armatures de précontrainte

En section courante l'espacement horizontal e_h et l'espacement vertical e_v des conduits isolés ou des paquets de conduits doit satisfaire aux conditions suivantes (Figure VI.6):

$$e_h \geq : \quad \phi \text{ si } p \leq 2$$

$$1,5 \phi \text{ si } p = 3$$

$$1,5 \phi \text{ si } q = 2$$

$$5 \text{ cm}$$

$$e_v \geq : \quad \phi \text{ si } q = 1$$

$$1,2 \phi \text{ si } q = 2$$

$$4 \text{ cm}$$

avec :

p : nombre de ligne de conduits ($p \leq 3$)

q : nombre de colonne de conduits ($q \leq 2$)

Distance des armatures de précontrainte aux parements

La distance minimale c entre un conduit ou un paquet de conduits et un parement doit satisfaire aux conditions ci-après :

$$c \geq: \quad 3/4 a$$

ϕ limité à 80 mm

$d=3$ cm : cas d'ouvrages à l'abri des intempéries

$d=4$ cm : cas les ouvrages courants

$d=5$ cm : cas d'ouvrages exposés à une atmosphère agressive

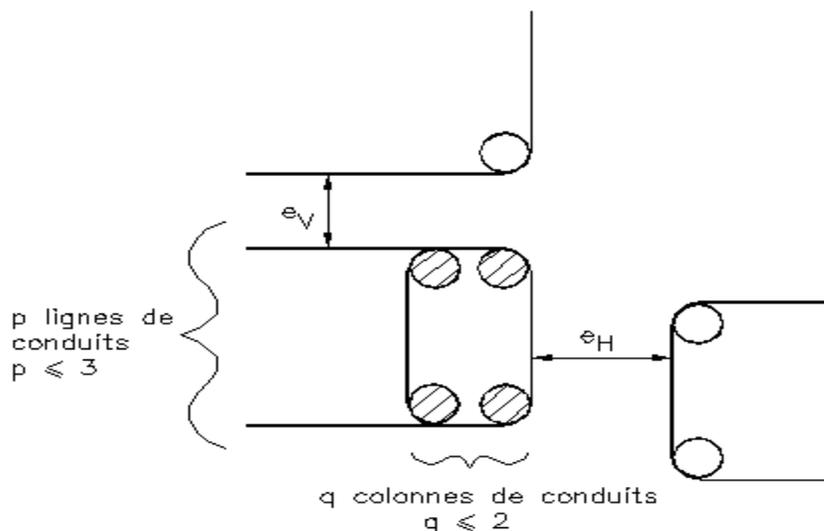


Figure VI.6

b)- Précontrainte par Pré tension

Groupement des armatures de précontrainte

Les armatures de précontrainte par pré-tension ne doivent pas être groupées en paquets

Espacement des armatures de précontrainte

L'entre axe minimal à prévoir entre les armatures (fils ou torons) ne doit pas être inférieur à trois fois leur diamètre.

Distance des armatures de précontrainte aux parements

La distance de l'axe de ces armatures au parement le plus proche ne doit pas être inférieure à 2,5 fois leur diamètre.

En outre, l'enrobage doit être au moins égal à :

➤ 1 cm pour les parois coffrées qui sont situées dans les locaux couverts et clos et qui ne sont pas exposées aux condensations ;

- 3 cm pour les parois coffrées exposées aux intempéries ou susceptibles de l'être, exposées aux condensations, ou au contact d'un liquide ;
- 3 et 4 cm, respectivement, pour les parois non coffrées, dans les cas définis dans les deux cas qui précèdent ;
- 5 cm pour les ouvrages exposés à une atmosphère agressive.

Enrobage des armatures passives

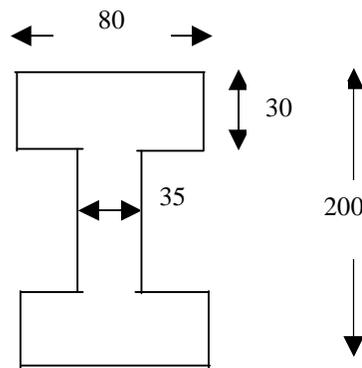
L'enrobage de toute armature doit être au moins égal à :

- 1 cm pour les parois qui sont situées dans des locaux couverts et clos et qui ne sont pas exposées aux condensations ;
- 3 cm pour les parois coffrées ou non qui sont soumises (ou sont susceptibles de l'être) à des actions agressives, ou des intempéries, ou des condensations, ou au contact d'un liquide ;
- 5 cm pour les ouvrages à la mer ou exposés aux embruns ou aux brouillards salins, ainsi que pour les ouvrages exposés à une atmosphère agressive .

4. APPLICATIONS

Application 1

On considère une poutre isostatique de longueur 20 m, précontrainte par deux câbles de diamètre 70 mm :



Données :

$$G=51 \text{ KN/m}$$

$$Q=148 \text{ KN/m}$$

$$f_{cj}=30 \text{ MPa}$$

$$P=7.45 \text{ MN}$$

$$Z=1.484 \text{ m}$$

1. Déterminer à une distance de 1m de l'appui ($\alpha=7^\circ 69'$):

- ❑ L'effort tranchant ELS V_G
- ❑ L'effort tranchant ELS V_Q

- L'effort tranchant réduit V_{r1} en ELS
- L'effort tranchant réduit V_{r2} en ELS
- Contrainte du cisaillement ELS
- Contrainte de compression

2. Déterminer à une distance de 1m de l'appui ($\alpha=7^{\circ}69$):

- L'effort tranchant ultime V_{ru}
- L'effort tranchant ultime V'_{ru}
- Contrainte de cisaillement ultime
- Angle d'inclinaison des bielles

Solution

- L'effort tranchant V_G en ELS

$$V_G = G\left(\frac{l}{2} - x\right) = 0.459 \text{ MN}$$

- L'effort tranchant V_Q en ELS

$$V_Q = Q\left(\frac{l}{2} - x\right) = 1.332 \text{ MN}$$

- L'effort tranchant réduit V_{r1} en ELS

$$V_{r1} = V_G + V_Q - P \sin \alpha = 0.794 \text{ MN}$$

- L'effort tranchant réduit V_{r2} en ELS

$$V_{r2} = V_G - P \sin \alpha = -0.538 \text{ MN}$$

- Contrainte du cisaillement ELS

$$\tau = \frac{V_{r1}}{b_n Z} = 1.91 \text{ MPa}$$

- Contrainte de compression

$$\sigma_x = \frac{P}{B} = 7.68 \text{ MPa}$$

- L'effort tranchant ultime V_{ru}

$$V_{ru} = 1.35 V_G + 1.5 V_Q - P \sin \alpha = 1.621 \text{ MN}$$

- L'effort tranchant ultime V'_{ru}

$$V'_{ru} = V_{r2} = -0.538 \text{ MN}$$

- *Contrainte de cisaillement ultime*

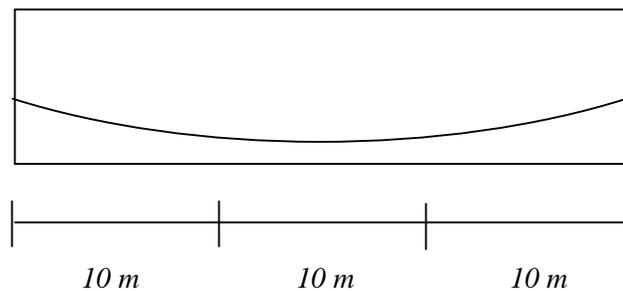
$$\tau = \frac{V_{ru}}{b_n Z} = 3.90 \text{ MPa}$$

- *Angle d'inclinaison des bielles*

$$\text{tg} 2\beta_u = \frac{2\tau_u}{\sigma_{xu}} = 1.016 \Rightarrow = 22.7^\circ$$

Application 2

On considère une poutre isostatique de 30 m de portée. Elle est précontrainte par 6 câbles de type 12T13 dont le tracé est défini par le schéma suivant :



Outre son poids propre, la poutre est soumise à une charge permanente de 2 t/ml et à une surcharge de 2.7 t/ml.

Les câbles sont mis en tension alors que le béton est âgé de plus de 28 jours.

Caractéristiques géométriques des sections :

	$B [m^2]$	$I [m^4]$	$V_s [m]$	$V_i [m]$
<i>Brute</i>	0.76	0.3971	0.93	1.07
<i>Nette</i>	0.7364	0.3786	0.91	1.09
<i>Homogène</i>	0.7642	0.3937	0.94	1.06

Valeurs de l'effort de précontrainte

	à la mise en tension	au temps infini
$x = 10 \text{ m}$	620 t	520 t
$x = 15 \text{ m}$	600 t	500 t

Caractéristique du béton

$$f_{c28} = 35 \text{ MPa}$$

$$f_{t28} = 2.7 \text{ MPa}$$

1. Déterminer la valeur du moment aux abscisses $x=10\text{m}$ et $x=15\text{m}$.
2. Vérifier les contraintes aux abscisses $x=10\text{m}$ et $x=15\text{m}$ à la mise en tension.
3. Vérifier les contraintes aux abscisses $x=10\text{m}$ et $x=15\text{m}$ en service
4. Calculer le ferrailage passif aux abscisses $x=10\text{m}$ et $x=15\text{m}$.

Application 3

On considère une poutre de section rectangulaire de hauteur $h=1m$ et d'épaisseur nette $b_n=45\text{ cm}$. Elle est soumise aux effort tranchants suivants :

Charge permanente = 30 t

Surcharge = 27 t

La contrainte normale au centre de gravité est égale à 3 MPa .

$f_{c28}=30\text{ MPa}$

$f_{t28}=2.4\text{ MPa}$

La poutre ne comporte que des étriers passifs.

Vérifier les contrainte dans le béton et déterminer les étriers à mettre en ouvre.

Références Bibliographiques

- [1]. THONIER, H. « *Le béton précontraint aux états limites* ». Presses de l'école nationale des ponts et chaussées (1992).
- [2]. CHAUSSIN, R. et al. « *La précontrainte* ». Presses de l'école nationale des ponts et chaussées (1992).
- [3]. NAAMAN, A.E « *Prestressed concrete analysis and design* ». Mac Graw Hill (1983).
- [4]. FUENTES, J. « *La précontrainte dans le bâtiment* ». Eyrolles (1983).
- [5]. DREUX, G. « *Pratique du béton précontraint* ». Eyrolles (1975).
- [6]. LACROIX, R « *Projet de béton précontraint* ». Eyrolles (1981).
- [7]. FIP « *Practical design of prestressed concrete structures* ». Recommendations FIP (1990).
- [8]. CHERAIT, Y « *Le béton précontraint aux états limites* ». OPU (2004).
- [9]. GERWICK, B. « *Construction of prestressed concrete structures* ». Morris NY (1971).

