

Exercice N° 55

Énoncé

On considère un producteur caractérisé par une fonction de production $Q = f(K, L)$ où K représente la quantité de facteur capital utilisée, et L la quantité de facteur travail utilisée.

On appelle r le coût d'une unité de facteur capital et w le taux de salaire. Soit F les coûts fixes de l'entreprise.

- 1 Écrire la fonction de coût de l'entreprise (C).
- 2 En déduire l'équation de la droite d'isocoût.
- 3 Représenter sur un graphique cette droite d'isocoût quand :
 - a $F = 20, r = 1, w = 1$ et $C = 40$;
 - b $F = 20, r = 1, w = 3$ et $C = 40$.

Corrigé

- 1 Écrivons la fonction de coût de l'entreprise:

Si nous notons C la fonction de coût de l'entreprise :

$$C = r.K + w.L + F$$

- 2 Déduisons-en l'équation de la droite d'isocoût :

Nous savons que la droite d'isocoût représente, dans l'espace des facteurs, l'ensemble des combinaisons correspondant à un niveau de dépense donné.

Or ici les deux facteurs sont K et L , les prix unitaires de ces inputs sont respectivement r et w , les coûts fixes sont F et enfin le niveau de dépense est C .

Comme nous l'avons vu à la question 1, $C = r.K + w.L + F$ (a).

$$(a) \Rightarrow \boxed{K = \frac{-w \cdot L}{r} + \frac{C - F}{r}} \quad (b).$$

L'équation (b) est celle de la droite d'isocoût.

Elle admet pour pente : $\frac{-w}{r} < 0$ car $w > 0$ et $r > 0$.

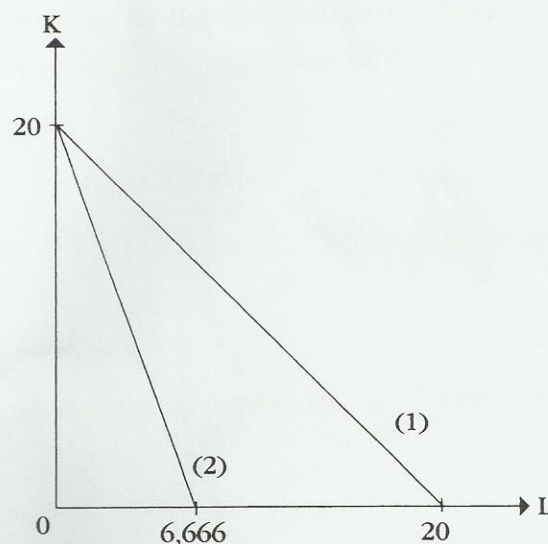
3 Représentations graphique :

a Si $F = 20$, $r = 1$, $w = 1$ et $C = 40$ alors : $\boxed{K = -L + 20}$ (1).

b Si $F = 20$, $r = 1$, $w = 3$ et $C = 40$ alors : $\boxed{K = -3L + 20}$ (2).

La pente de l'équation (2) est, en valeur absolue, plus grande que celle de l'équation (1) : $|-3| > |-1|$.

D'où le graphique :



Exercice N° 56

Énoncé

On considère la fonction de production suivante : $Q = 2K.L$.

K et L représentent les quantités de travail et de capital utilisées.
On note r et w leur prix respectif.

- 1 L'entrepreneur désire maximiser sa production pour un niveau de coût donné C_0 .
 - a Déterminer les fonctions de demande du producteur.
 - b Vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum.
- 2 À présent l'entrepreneur souhaite minimiser sa dépense pour un niveau de production donné Q_0 .
 - a Déterminer les fonctions de demande du producteur.
 - b Vérifier qu'il s'agit bien d'un minimum.

Corrigé

- 1 a Déterminons les fonctions de demande du producteur :
Pour l'entrepreneur, il s'agit de résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \text{Max } Q \\ \text{sous la contrainte} \end{cases} \quad C_0 = C, \text{ avec } C = r.K + w.L.$$

Le lagrangien s'écrit : $L = Q + \lambda.(C_0 - C)$, λ étant le multiplicateur de Lagrange.

$$\text{D'où } L = 2K.L + \lambda.(C_0 - r.K - w.L).$$

À l'optimum (conditions nécessaires ou conditions du 1^{er} ordre) nous avons :

$$\begin{cases} L'_L = 0 \\ L'_K = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2K - w.\lambda = 0 \\ 2L - r.\lambda = 0 \\ C_0 - r.K - w.L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2K = w.\lambda & (1) \\ 2L = r.\lambda & (2) \\ C_0 = r.K + w.L & (3) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{2K}{2L} = \frac{w.\lambda}{r.\lambda} \Leftrightarrow \frac{K}{L} = \frac{w}{r} \text{ (a)} \Leftrightarrow \boxed{\frac{Q'_L}{Q'_K} = \frac{w}{r}}$$

À l'optimum, le rapport des productivités marginales des facteurs est égal au rapport de leurs prix.

ite d'isocoût. Demandes d'inputs. Sentier d'expansion. Fonction de coût total. (Exercices 55 à 61)

(a) $\Rightarrow K = \frac{w \cdot L}{r}$ (b) ; en remplaçant K par cette expression dans l'équation (3), nous obtenons :

$$(3) \Leftrightarrow C_0 = r \cdot \left(\frac{w \cdot L}{r} \right) + w \cdot L \Rightarrow \boxed{L^* = \frac{C_0}{2w}}$$

$$\text{D'où (b)} \Rightarrow K^* = \frac{w}{r} \cdot L^* \Rightarrow K^* = \frac{w}{r} \cdot \left(\frac{C_0}{2w} \right) \Rightarrow \boxed{K^* = \frac{C_0}{2r}}$$

Au total, L^* et K^* sont les fonctions de demande en travail et en capital du producteur.

Leurs propriétés sont :

α Elles sont toutes les deux des fonctions croissantes du niveau de coût donné :

$$\frac{\delta L^*}{\delta C_0} = \frac{1}{2w} > 0 \text{ et } \frac{\delta K^*}{\delta C_0} = \frac{1}{2r} > 0.$$

β La quantité utilisée de travail est une fonction décroissante de son prix unitaire w :

$$\frac{\delta L^*}{\delta w} = \frac{-C_0}{2w^2} < 0.$$

γ La quantité utilisée de capital est une fonction décroissante de son prix unitaire r :

$$\frac{\delta K^*}{\delta r} = \frac{-C_0}{2r^2} < 0.$$

b Vérifions qu'il s'agit bien d'un maximum :

Il s'agit d'un maximum ssi le Hessian Bordé (HB) est positif.

$$\text{Or HB} = \begin{vmatrix} L''_{LL} & L''_{LK} & L''_{L\lambda} \\ L''_{KL} & L''_{KK} & L''_{K\lambda} \\ L''_{\lambda L} & L''_{\lambda K} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}.$$

Application numérique :

$$\text{HB} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -w \\ 2 & 0 & -r \\ -w & -r & 0 \end{vmatrix} = -2(-w \cdot r) - w(-2r).$$

D'où $\text{HB} = 4w \cdot r > 0$ car $w > 0$ et $r > 0$.

Les demandes optimales d'inputs L^* et K^* correspondent donc bien à un maximum de production. Les conditions suffisantes ou conditions du second ordre sont ainsi vérifiées.

De plus, nous pouvons dire que le niveau maximum de production est :

$$Q^* = 2K^* \cdot L^* \quad (1),$$

$$(1) \Leftrightarrow Q^* = 2 \left(\frac{C_0}{2r} \right) \cdot \left(\frac{C_0}{2w} \right) \Rightarrow \boxed{Q^* = \frac{C_0^2}{2rw}}.$$

2 a Déterminons les fonctions de demande du producteur :

Pour l'entrepreneur, il s'agit de résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } C = r \cdot K + w \cdot L \\ \text{sous la contrainte} \quad Q_0 = Q. \end{cases}$$

Le lagrangien s'écrit : $L = C + \lambda \cdot (Q_0 - Q)$, λ étant le multiplicateur de Lagrange.

$$\text{D'où } L = r \cdot K + w \cdot L + \lambda \cdot (Q_0 - 2KL).$$

À l'optimum (conditions du 1^{er} ordre ou conditions nécessaires) nous avons :

$$\begin{cases} L'_L = 0 \\ L'_K = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w - 2K\lambda = 0 \\ r - 2L\lambda = 0 \\ Q_0 - 2KL = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 2K\lambda & (1) \\ r = 2L\lambda & (2) \\ Q_0 = 2KL & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{2K\lambda}{2L\lambda} \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{K}{L} \quad (a) \Leftrightarrow \boxed{\frac{w}{r} = \frac{Q'_L}{Q'_K}}. \\ (2) &\end{aligned}$$

À l'optimum, le rapport des prix des inputs est égal au rapport des productivités marginales de ces inputs.

(a) $\Rightarrow K = \frac{w \cdot L}{r}$ (b) ; en remplaçant K par cette expression dans l'équation (3), nous obtenons :

$$(3) \Leftrightarrow Q_0 = 2 \left(\frac{w \cdot L}{r} \right) \cdot L \Leftrightarrow Q_0 = \frac{2 \cdot w L^2}{r} \Rightarrow \boxed{L^* = \left(\frac{r \cdot Q_0}{2w} \right)^{1/2}}.$$

$$\text{D'où (b)} \Rightarrow K^* = \frac{w}{r} \cdot L^* \Rightarrow K^* = \frac{w}{r} \cdot \left(\frac{r \cdot Q_0}{2w} \right)^{1/2} \quad (c),$$

$$(c) \Rightarrow K^* = \left(\frac{w \cdot Q_0}{2r} \right)^{1/2}.$$

Au total, L^* et K^* sont les fonctions de demande en travail et capital du producteur.

Leurs propriétés sont :

- α Elles sont toutes les deux des fonctions croissantes du niveau d'output donné Q_0 :

$$\frac{\delta L^*}{\delta Q_0} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r \cdot Q_0}{2w} \right)^{-1/2} \cdot \frac{r}{2w} > 0,$$

$$\text{et } \frac{\delta K^*}{\delta Q_0} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{w \cdot Q_0}{2r} \right)^{-1/2} \cdot \frac{w}{2r} > 0.$$

- β La quantité utilisée de travail est une fonction décroissante de son prix unitaire :

$$\frac{\delta L^*}{\delta w} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r \cdot Q_0}{2w} \right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{-r \cdot Q_0}{2w^2} \right) < 0.$$

- γ La quantité utilisée de capital est une fonction décroissante de son prix unitaire :

$$\frac{\delta K^*}{\delta r} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{w \cdot Q_0}{2r} \right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{-w \cdot Q_0}{2r^2} \right) < 0.$$

- δ La quantité utilisée de l'input i ($i = K, L$) est d'autant plus élevée que le prix unitaire de l'autre facteur est plus élevé :

$$\frac{\delta L^*}{\delta r} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r \cdot Q_0}{2w} \right)^{-1/2} \cdot \frac{Q_0}{2w} > 0 \text{ et } \frac{\delta K^*}{\delta w} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{w \cdot Q_0}{2r} \right)^{-1/2} \cdot \frac{Q_0}{2r} > 0.$$

β Vérifions qu'il s'agit bien d'un minimum :

Il s'agit d'un minimum ssi le Hessian Bordé (HB) est négatif.

$$\text{Or HB} = \begin{vmatrix} L''_{LL} & L''_{LK} & L''_{L\lambda} \\ L''_{KL} & L''_{KK} & L''_{K\lambda} \\ L''_{\lambda L} & L''_{\lambda K} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}.$$

Application numérique :

$$\text{HB} = \begin{vmatrix} 0 & -2\lambda & -2K \\ -2\lambda & 0 & -2L \\ -2K & -2L & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda \cdot (-4KL) - 2K \cdot (4\lambda L).$$

D'où $HB = -16\lambda KL < 0$ car $\lambda > 0$, $K > 0$ et $L > 0$.

Les demandes optimales d'inputs L^* et K^* correspondent donc bien à un minimum de dépense (ou minimum de coût). Les conditions suffisantes ou conditions du second ordre sont ainsi vérifiées.

De plus, nous pouvons dire que le niveau du coût minimum est :

$$C^* = r.K^* + w.L^*,$$

$$C^* = r.\left(\frac{wQ_0}{2r}\right)^{1/2} + w.\left(\frac{rQ_0}{2w}\right)^{1/2},$$

$$C^* = \left(\frac{r.w.Q_0}{2}\right)^{1/2} + \left(\frac{r.w.Q_0}{2}\right)^{1/2},$$

$$\text{d'où : } C^* = 2\left(\frac{r.w.Q_0}{2}\right)^{1/2}.$$

C^* est le coût minimum que doit supporter l'entrepreneur pour réaliser chaque volume de production Q_0 .

Exercice N° 57

Énoncé

Une entreprise ne fabrique qu'un seul produit et a comme fonction de production : $Q = 3K^{1/4}L^{1/4}$, où K représente la quantité de facteur capital utilisée et L la quantité de facteur travail utilisée. On note r et w leur prix respectif.

- 1 Déterminer les demandes d'inputs qui permettent de maximiser l'output de l'entreprise, à coût donné C_0 (on ne vérifiera pas les conditions suffisantes).
- 2 Interpréter le multiplicateur de Lagrange.

3 Si $r = 1$, $w = 1$ et $C_0 = 10$, calculer L^* , K^* , Q^* et λ^* .

4 En déduire la valeur du coût marginal.

Corrigé

1 Déterminons les demandes d'inputs qui permettent de maximiser l'output de l'entreprise, à coût donné C_0 :

Pour l'entrepreneur, il s'agit de résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \text{Max } Q \\ \text{sous la contrainte} \end{cases} \quad C_0 = C, \text{ avec } C = rK + wL.$$

Le lagrangien s'écrit : $L = Q + \lambda(C_0 - C)$, λ étant le multiplicateur de Lagrange.

D'où $L = 3K^{1/4}L^{1/4} + \lambda(C_0 - rK - wL)$.

À l'optimum nous avons :

$$\begin{cases} L'_L = 0 \\ L'_K = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}K^{1/4}L^{-3/4} - w\lambda = 0 \\ \frac{3}{4}K^{-3/4}L^{1/4} - r\lambda = 0 \\ C_0 - rK - wL = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}K^{1/4}L^{-3/4} = w\lambda \quad (1) \\ \frac{3}{4}K^{-3/4}L^{1/4} = r\lambda \quad (2) \\ C_0 = rK + wL \quad (3) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{4}K^{1/4}L^{-3/4}}{\frac{3}{4}K^{-3/4}L^{1/4}} = \frac{w\lambda}{r\lambda} \Leftrightarrow \frac{K}{L} = \frac{w}{r} \text{ (a)} \Rightarrow \boxed{\frac{Q'_L}{Q'_K} = \frac{w}{r}}.$$

À l'optimum, le rapport des productivités marginales des facteurs est égal au rapport de leurs prix.

(a) $\Rightarrow K = \frac{wL}{r}$ (b) ; en remplaçant K par cette expression dans l'équation (3), nous obtenons :

$$(3) \Leftrightarrow C_0 = r\left(\frac{wL}{r}\right) + wL \Rightarrow \boxed{L^* = \frac{C_0}{2w}}.$$

$$\text{D'où (b)} \Rightarrow K^* = \frac{wL^*}{r} \Rightarrow K^* = \frac{w}{r}\left(\frac{C_0}{2w}\right) \Rightarrow \boxed{K^* = \frac{C_0}{2r}}.$$

$C_0 = 10$, calculer L^* , K^* , Q^* et λ . K^* et L^* sont les demandes d'inputs permettant la maximisation de la production de l'entreprise et cela, à dépense C_0 donnée.

du coût marginal.

propriétés de K^* et L^* sont :

et L^* sont des fonctions croissantes du niveau de coût donné :

quantités d'inputs qui permettent de maximiser la production, à coût donné C_0 :

$$\frac{\partial L^*}{\partial C_0} = \frac{1}{2w} > 0 \text{ et } \frac{\partial K^*}{\partial C_0} = \frac{1}{2r} > 0.$$

et de résoudre le programme suivant :

quantité utilisée de l'input i ($i = K, L$), est d'autant plus élevée que le prix de ce facteur est plus faible :

$$\frac{\partial L^*}{\partial w} = \frac{-C_0}{2w^2} < 0 \text{ et } \frac{\partial K^*}{\partial r} = \frac{-C_0}{2r^2} < 0.$$

$$C_0 = C, \text{ avec } C = rK + wL.$$

et λ étant le multiplicateur de Lagrange :

la combinaison optimale (L^* , K^*) est :

$$Q = 3 \left(\frac{C_0}{2r} \right)^{1/4} \left(\frac{C_0}{2w} \right)^{1/4}.$$

$$-rk - wL).$$

$$\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} K^{1/4} L^{-3/4} = w\lambda & (1) \\ \frac{3}{4} K^{-3/4} L^{1/4} = r\lambda & (2) \\ C_0 = rK + wL & (3) \end{cases}$$

$$\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} K^{-3/4} L^{1/4} = r\lambda & (2) \\ C_0 = rK + wL & (3) \end{cases}$$

$$C_0 = rK + wL \quad (3)$$

$$\frac{K}{L} = \frac{w}{r} \quad (a) \Rightarrow \frac{Q'_L}{Q'_K} = \frac{w}{r}.$$

productivités marginales des facteurs :

remplaçant K par cette expression :

$$L^* = \frac{C_0}{2w}.$$

$$\frac{w}{r} \left(\frac{C_0}{2w} \right) \Rightarrow K^* = \frac{C_0}{2r}.$$

interprétons λ :

cela calculons la différentielle totale de Q et la différentielle de C .

$$Q'_L \cdot dL + Q'_K \cdot dK \text{ car } Q = f(L, K).$$

$$r \cdot dK + K \cdot dr + w \cdot dL + L \cdot dw \text{ car } C = r \cdot K + w \cdot L.$$

supposons que les prix des facteurs sont constants, d'où $dr = 0$ et $dw = 0$.

$$\text{conséquent, } dC = r \cdot dK + w \cdot dL.$$

$$\text{à l'optimum, nous avons : } \begin{cases} Q'_L = \lambda \cdot w & (1) \\ Q'_K = \lambda \cdot r & (2) \end{cases}$$

$$dQ = \lambda \cdot w dL + \lambda \cdot r dK = \lambda \cdot (w \cdot dL + r \cdot dK) = \lambda \cdot dC.$$

$$\text{d'où : } \lambda = \frac{dQ}{dC} = \frac{1}{dC/dQ} = \frac{1}{C_m}.$$

donc l'inverse du coût marginal, le coût marginal étant le supplément de coût résultant de la fabrication d'une unité supplémentaire d'input. $\lambda > 0$.

3 Calculons L^* , K^* , Q^* et λ^* avec $r = w = 1$ et $C_0 = 10$:

Application numérique :

$$L^* = 5, K^* = 5, Q^* = 6,70$$

Pour calculer λ^* , il suffit de prendre l'équation (1) de l'optimum :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{4} K^{1/4} \cdot L^{-3/4} = w \cdot \lambda \Rightarrow \lambda^* = \frac{3K^{*1/4} \cdot L^{*-3/4}}{4w}$$

$$\text{D'où } \lambda^* = \frac{3(5)^{1/4} \cdot (5)^{-3/4}}{4} = \frac{3}{4} \cdot (5)^{-1/2}$$

$$\text{Au total : } \lambda^* = 0,335$$

4 Dédisons-en la valeur du coût marginal :

$$\text{Nous savons que } \lambda = \frac{1}{Cm} \Rightarrow Cm = \frac{1}{\lambda}, Cm \text{ étant le coût marginal.}$$

Application numérique :

$$Cm = 2,985$$

Exercice N° 58

Énoncé

Une entreprise ne fabrique qu'un seul produit et a comme fonction de production : $Q = K^{1/4} \cdot L^{1/2}$, où K représente la quantité de facteur capital utilisée et L la quantité de facteur travail utilisée. On note r et w respectivement les prix du capital et du travail.

- 1** Calculer la combinaison d'inputs L^* et K^* qui permet d'assurer à l'entreprise la moindre dépense (on ne vérifiera pas les conditions suffisantes).

- 2 En déduire l'équation du sentier d'expansion. Faire une représentation graphique de ce dernier si $w = 1$ et $r = 2$.
- 3 Déterminer la moindre dépense ainsi que la fonction de coût total qui lui est associée.
- 4 Interpréter le multiplicateur de Lagrange et le calculer de deux façons différentes.

Corrigé

- 1 Calculons la combinaison L^* et K^* qui minimise la dépense de l'entreprise :

Soit Q_0 un niveau d'output donné, il s'agit pour l'entrepreneur de résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } C = r.K + w.L \\ \text{sous la contrainte } Q_0 = Q. \end{cases}$$

Le lagrangien s'écrit : $L = C + \lambda.(Q_0 - Q)$, λ étant le multiplicateur de Lagrange.

$$\text{D'où } L = r.K + w.L + \lambda.(Q_0 - K^{1/4} \cdot L^{1/2}).$$

À l'optimum nous avons :

$$\begin{cases} L'_L = 0 \\ L'_K = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w - \frac{1}{2} \lambda.K^{1/4} \cdot L^{-1/2} = 0 \\ r - \frac{1}{4} \lambda.K^{-3/4} \cdot L^{1/2} = 0 \\ Q_0 - K^{1/4} \cdot L^{1/2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{1}{2} \lambda.K^{1/4} \cdot L^{-1/2} \quad (1) \\ r = \frac{1}{4} \lambda.K^{-3/4} \cdot L^{1/2} \quad (2) \\ Q_0 = K^{1/4} \cdot L^{1/2} \quad (3) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{\frac{1}{2} \lambda.K^{1/4} \cdot L^{-1/2}}{\frac{1}{4} \lambda.K^{-3/4} \cdot L^{1/2}} \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{2K}{L} \quad (a) \Rightarrow \boxed{\frac{w}{r} = \frac{Q'_L}{Q'_K}}$$

À l'optimum, le rapport des prix des inputs est égal au rapport des productivités marginales de ces inputs.

(a) $\Rightarrow K = \frac{w.L}{2r}$ (b) ; en remplaçant K par cette expression dans l'équation (3), nous obtenons :

$$(3) \Leftrightarrow Q_0 = \left(\frac{w \cdot L}{2r}\right)^{1/4} \cdot L^{1/2} \Leftrightarrow Q_0 = \left(\frac{w}{2r}\right)^{1/4} \cdot L^{3/4}$$

$$\Rightarrow L^* = \left(Q_0 \cdot \left(\frac{2r}{w}\right)^{1/4}\right)^{4/3}.$$

D'où $L^* = Q_0^{4/3} \cdot \left(\frac{2r}{w}\right)^{1/3}.$

Par conséquent, (b) $\Rightarrow K^* = \left(\frac{w}{2r}\right) \cdot L^* \Rightarrow K^* = Q_0^{4/3} \cdot \left(\frac{w}{2r}\right)^{2/3}.$

L^* et K^* représentent les demandes optimales d'inputs qui assurent à l'entreprise la moindre dépense.

Les propriétés sont :

α Elles sont croissantes avec le niveau d'output donné :

$$\frac{\delta L^*}{\delta Q_0} = \frac{4}{3} Q_0^{1/3} \cdot \left(\frac{2r}{w}\right)^{1/3} > 0,$$

$$\text{et } \frac{\delta K^*}{\delta Q_0} = \frac{4}{3} Q_0^{1/3} \cdot \left(\frac{w}{2r}\right)^{2/3} > 0.$$

β La quantité utilisée de travail est une fonction décroissante de son prix unitaire :

$$\frac{\delta L^*}{\delta w} = \frac{1}{3} Q_0^{4/3} \cdot \left(\frac{2r}{w}\right)^{-2/3} \cdot \left(\frac{-2r}{w^2}\right) < 0.$$

γ La quantité utilisée de capital est une fonction décroissante de son prix unitaire :

$$\frac{\delta K^*}{\delta r} = \frac{2}{3} Q_0^{4/3} \cdot \left(\frac{w}{2r}\right)^{-1/3} \cdot \left(\frac{-w}{2r^2}\right) < 0.$$

δ La quantité utilisée de l'input i ($i = K, L$) est d'autant plus élevée que le prix unitaire de l'autre facteur est plus élevé :

$$\frac{\delta L^*}{\delta r} = \frac{1}{3} Q_0^{4/3} \cdot \left(\frac{2r}{w}\right)^{-2/3} \cdot \left(\frac{2}{w}\right) > 0,$$

$$\text{et } \frac{\delta K^*}{\delta w} = \frac{2}{3} Q_0^{4/3} \cdot \left(\frac{w}{2r}\right)^{-1/3} \cdot \left(\frac{1}{2r}\right) > 0.$$

2 Déduisons-en l'équation du sentier d'expansion :

Nous savons que le sentier d'expansion représente, dans l'espace des facteurs, l'ensemble des combinaisons permettant de produire à un

moindre coût quand le niveau de production varie, les prix des inputs restant constants.

Pour déterminer son équation, il suffit de prendre les conditions d'optimalité.

En effet, nous savons qu'à l'optimum : $\frac{w}{r} = \frac{Q'_L}{Q'_K}$ (d) ;

$$\text{d'où (d)} \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{\frac{1}{2} \lambda \cdot K^{1/4} \cdot L^{-1/2}}{\frac{1}{4} \lambda \cdot K^{-3/4} \cdot L^{1/2}} \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{2K}{L} \text{ (f).}$$

$$\text{(f)} \Rightarrow K = \left(\frac{w}{2r} \right) \cdot L \text{ (4).}$$

(4) est l'équation du sentier d'expansion.

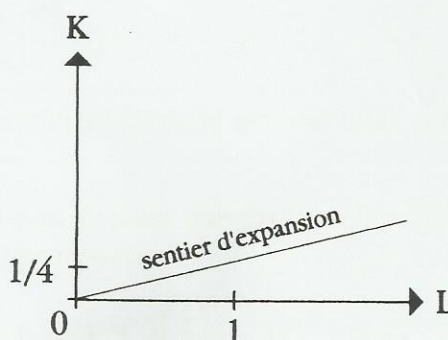
Nous remarquons qu'elle est de la forme $K = a \cdot L$, il s'agit donc d'une droite passant par l'origine.

De plus, $\frac{dK}{dL} = \frac{w}{2r} > 0$ car $w > 0$ et $r > 0$, K est donc une fonction croissante de L .

Application numérique :

L'équation du sentier d'expansion, si $r = 2$ et $w = 1$, est : $K = \frac{L}{4}$.

D'où le graphique :



3 Déterminons la moindre dépense et la fonction de coût total :

La moindre dépense ou coût minimum que doit supporter l'entrepreneur pour réaliser chaque volume de production Q_0 est :

$$C^* = r.K^* + w.L^* \quad (5),$$

$$(5) \Leftrightarrow C^* = r.\left(Q_0^{4/3} \cdot \left(\frac{w}{2r}\right)^{2/3}\right) + w.\left(Q_0^{4/3} \cdot \left(\frac{2r}{w}\right)^{1/3}\right) \quad (6),$$

$$(6) \Leftrightarrow C^* = Q_0^{4/3} \cdot \left(\left(\frac{r^{3/2} \cdot w}{2r}\right)^{2/3} + \left(\frac{2r \cdot w^3}{w}\right)^{1/3}\right) \quad (7),$$

$$(7) \Leftrightarrow C^* = Q_0^{4/3} \cdot \left(\left(\frac{r^{1/2} \cdot w}{2}\right)^{2/3} + (2r \cdot w^2)^{1/3}\right) \quad (8),$$

$$(8) \Leftrightarrow C^* = Q_0^{4/3} \cdot \left(\left(\frac{r^{1/3} \cdot w^{2/3}}{4^{1/3}}\right) + (2^{1/3} \cdot r^{1/3} \cdot w^{2/3})\right) \quad (9),$$

$$(9) \Leftrightarrow C^* = Q_0^{4/3} \cdot r^{1/3} \cdot w^{2/3} \cdot \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} + (2)^{1/3}\right)$$

$$\text{or } (2)^{1/3} = \left(\frac{8}{4}\right)^{1/3} = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3},$$

$$\text{d'où au total : } C^* = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} \cdot Q_0^{4/3} \cdot r^{1/3} \cdot w^{2/3}.$$

La fonction de coût total qui mesure, quand le niveau de production d'une entreprise varie, la dépense minimum qu'il faut engager en combinant au mieux les facteurs de production, les prix de ces derniers restant constants, est :

$$C(Q) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} \cdot Q^{4/3} \cdot r^{1/3} \cdot w^{2/3}.$$

Pour déterminer cette fonction de coût total, nous avons remplacé Q_0 par Q dans C^* .

De plus, il est bon de noter que $C(Q)$ est homogène de degré 1 par rapport aux prix des inputs.

$$\text{En effet, } C(t.w, t.r) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} \cdot Q^{4/3} \cdot (t.r)^{1/3} \cdot (t.w)^{2/3},$$

$$= t^1 \cdot \left(3\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} \cdot Q^{4/3} \cdot r^{1/3} \cdot w^{2/3}\right) = t^1 \cdot C(Q).$$

Donc si on multiplie simultanément les prix unitaires des inputs par un même paramètre $t > 0$, alors le coût total sera lui aussi multiplié par t .

4 a Interprétons λ :

Pour cela calculons la différentielle totale de Q et la différentielle totale de C .

$$dQ = Q'_L dL + Q'_K dK \text{ car } Q = f(L, K).$$

$$dC = r dK + w dL + K dr + L dw, \text{ car } C = rK + wL.$$

Or on suppose que les prix des facteurs sont constants, d'où $dr = 0$ et $dw = 0$.

$$\text{Par conséquent, } dC = r dK + w dL.$$

$$\text{Or à l'optimum, nous avons : } \begin{cases} w = \lambda \cdot Q'_L & (1) \\ r = \lambda \cdot Q'_K & (2) \end{cases}$$

$$\text{D'où } dQ = \frac{w}{\lambda} dL + \frac{r}{\lambda} dK = \frac{1}{\lambda} (w dL + r dK).$$

$$\text{Au total : } dQ = \frac{1}{\lambda} dC \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{dC}{dQ} = Cm}.$$

λ est donc le coût marginal, c'est-à-dire le supplément de coût résultant de la fabrication d'une unité supplémentaire d'output. $\lambda > 0$.

b Calculons λ de deux façons différentes :

1) Première façon :

$$\text{Nous savons que } Cm = \frac{\delta C(Q)}{\delta Q}.$$

$$\text{Or } C(Q) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} \cdot Q^{4/3} \cdot r^{1/3} \cdot w^{2/3},$$

$$\text{d'où } \boxed{Cm = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} \cdot Q^{1/3} \cdot r^{1/3} \cdot w^{2/3}}.$$

2) Seconde façon :

$$\text{Nous savons que } \lambda^* = Cm.$$

Pour calculer λ^* , il suffit de prendre l'équation (1) de l'optimum :

$$(1) \Leftrightarrow w = \frac{1}{2} \cdot \lambda K^{1/4} \cdot L^{-1/2} \Rightarrow \lambda^* = 2 \cdot w \cdot L^{1/2} K^{-1/4}.$$

$$\text{D'où } \lambda^* = 2w \cdot \left(Q_0^{4/3} \cdot \left(\frac{2r}{w} \right)^{1/3} \right)^{1/2} \cdot \left(Q_0^{4/3} \cdot \left(\frac{w}{2r} \right)^{2/3} \right)^{-1/4},$$

$$\lambda^* = 2w \cdot \left(Q_0^{2/3} \cdot \left(\frac{2r}{w} \right)^{1/6} \right) \cdot \left(Q_0^{-1/3} \cdot \left(\frac{w}{2r} \right)^{-1/6} \right),$$

$$\lambda^* = 2w \cdot Q_0^{1/3} \cdot \left(\frac{2r}{w} \right)^{1/6} \cdot \left(\frac{2r}{w} \right)^{1/6},$$

$$\lambda^* = 2w \cdot Q_0^{1/3} \cdot \left(\frac{2r}{w} \right)^{1/3},$$

$$\lambda^* = 4 \left(\frac{1}{4} \right)^{1/3} \cdot Q_0^{1/3} \cdot r^{1/3} \cdot w^{2/3} \text{ car } 2^{1/3} = \left(\frac{8}{4} \right)^{1/3} = 2 \left(\frac{1}{4} \right)^{1/3}.$$

En posant $Q_0 = Q$, nous obtenons bien :

$$\lambda^* = Cm = 4 \left(\frac{1}{4} \right)^{1/3} \cdot Q^{1/3} \cdot r^{1/3} \cdot w^{2/3}.$$

Exercice N° 59

Énoncé

Déterminer l'équation du sentier d'expansion dans les cas suivants :

a $Q = K \cdot L,$

b $Q = K^2 + L,$

c $Q = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta, A > 0, \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0,$

d $Q = aK^3 + bL^2, a > 0 \text{ et } b > 0.$

Corrigé

Déterminons l'équation du sentier d'expansion :

Nous savons que le sentier d'expansion représente, dans l'espace des inputs, l'ensemble des combinaisons permettant de produire à un moindre coût quand le niveau de production varie, les prix des facteurs de production étant constants.

Si nous notons w et r les prix unitaires respectifs du travail et du capital, nous savons qu'à l'optimum d'un programme de minimisation des coûts, à niveau donné d'output, nous avons :

$$\frac{w}{r} = \frac{Q'_L}{Q'_K} \quad (1).$$

C'est à partir de la relation (1) que nous pouvons déterminer l'équation du sentier d'expansion.

a Si $Q = K \cdot L$:

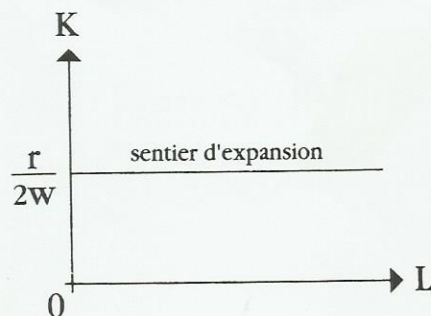
$$(1) \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{K}{L} \Rightarrow K = \left(\frac{w}{r}\right) \cdot L \quad (2).$$

(2) représente l'équation du sentier d'expansion quand $Q = K \cdot L$. Comme elle est de la forme : $K = a \cdot L$, il s'agit d'une droite passant par l'origine.

b Si $Q = K^2 + L$:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{1}{2K} \Rightarrow K = \frac{r}{2w} \quad (3).$$

(3) représente l'équation du sentier d'expansion quand $Q = K^2 + L$. Comme elle est de la forme : $K = a = \text{constante}$, il s'agit d'une droite horizontale qui coupe l'axe des ordonnées au point $K = \frac{r}{2w}$:



c Si $Q = A.K^\alpha.L^\beta$:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{A.\beta.K^\alpha.L^{(\beta-1)}}{A.\alpha.K^{(\alpha-1)}.L^\beta} \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{K}{L} \Rightarrow K = \left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right).L \quad (4).$$

(4) représente l'équation du sentier d'expansion quand $Q = A.K^\alpha.L^\beta$. Comme elle est de la forme : $K = a.L$, il s'agit d'une droite passant par l'origine.

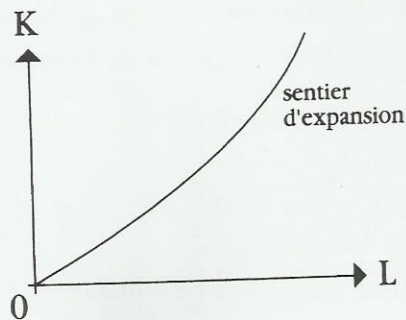
d Si $Q = aK^3 + bL^2$:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{2b.L}{3a.K^2} \Rightarrow K = \left(\left(\frac{2b.r}{3a.w}\right)L\right)^{1/2} \quad (5),$$

car $K \geq 0$ et donc la solution $K = -\left(\left(\frac{2b.r}{3a.w}\right)L\right)^{1/2}$ est à rejeter.

(5) représente l'équation du sentier d'expansion quand $Q = aK^3 + bL^2$.

Graphiquement, le sentier d'expansion peut être représenté ici par :



Exercice N° 60

Énoncé

On considère un producteur caractérisé par une fonction de production : $Q = 2K + K.L$.

K représente la quantité de facteur capital utilisée, et L la quantité de facteur travail utilisée.

On appelle r le coût d'une unité de facteur capital et w le taux de salaire unitaire.

- 1 Tracer l'isoquante associée au niveau d'output $Q_0 = 10$.
- 2 Déterminer les demandes optimales d'inputs qui permettent de minimiser les coûts de l'entreprise tout en assurant un niveau de production $Q_0 = 10$. Commenter.
- 3 En déduire le coût minimum de l'entreprise.

Corrigé

- 1 Traçons l'isoquante associée au niveau d'output $Q_0 = 10$:

Nous savons qu'une isoquante est l'ensemble des combinaisons d'inputs K et L qui permettent, lorsqu'elles sont utilisées de la façon la plus efficace possible, la réalisation d'un niveau d'output donné Q_0 .

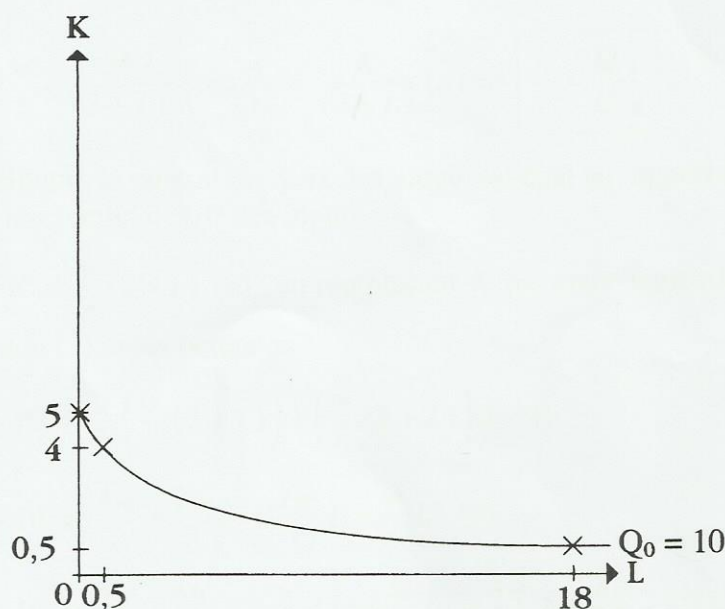
Or ici $Q_0 = 10$, d'où $Q = Q_0 \Leftrightarrow 2K + K.L = 10$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow K.(L + 2) = 10 \Rightarrow K = \frac{10}{L + 2} \quad (2).$$

(2) représente l'équation de l'isoquante associée au niveau d'output $Q_0 = 10$.

Prenons 3 points : **a** si $L = 0$, $K = 5$.
b si $L = 0,5$, $K = 4$.
c si $L = 18$, $K = 0,5$.

D'où le graphique suivant :



Il est bon de remarquer que l'isoquante est convexe par rapport à l'origine et que tout le long de cette isoquante, le niveau de production est constant et est égal à $Q_0 = 10$.

De plus, nous pouvons noter que l'isoquante coupe l'axe des ordonnées au point $(0,5)$.

2 Déterminons K^* et L^* qui permettent de minimiser les coûts de l'entreprise et d'assurer $Q_0 = 10$:

Il s'agit pour l'entrepreneur de résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } C = r.K + w.L \\ \text{sous la contrainte} & 10 = Q. \end{cases}$$

Le lagrangien s'écrit :

$$L = C + \lambda.(10 - Q), \lambda \text{ étant le multiplicateur de Lagrange.}$$

$$\text{D'où } L = r.K + w.L + \lambda.(10 - 2K - K.L).$$

À l'optimum nous avons :

$$\begin{cases} L'_L = 0 \\ L'_K = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w - K \cdot \lambda = 0 \\ r - (2 + L) \cdot \lambda = 0 \\ 10 - 2K - K \cdot L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = K \cdot \lambda \\ r = (2 + L) \cdot \lambda \\ 10 = 2K + K \cdot L \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{K \cdot \lambda}{(2 + L) \cdot \lambda} \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{K}{(2 + L)} \quad (a) \Rightarrow \boxed{\frac{w}{r} = \frac{Q'_L}{Q'_K}}$$

À l'optimum, le rapport des prix des inputs est égal au rapport des productivités marginales de ces inputs.

(a) $\Rightarrow K = \frac{w}{r}(2 + L)$ (b) ; en remplaçant K par cette expression dans l'équation (3), nous obtenons :

$$(3) \Leftrightarrow 10 = 2 \cdot \left(\frac{w}{r} \cdot (2 + L) \right) + \left(\frac{w}{r} \cdot (2 + L) \right) \cdot L \quad (4),$$

$$(4) \Leftrightarrow 10 = \frac{4w}{r} + \frac{2w}{r} \cdot L + \frac{2w}{r} \cdot L + \frac{w}{r} \cdot L^2 \quad (5),$$

$$(5) \Leftrightarrow 10 = \frac{4w}{r} + \frac{4w}{r} \cdot L + \frac{w}{r} \cdot L^2 \Rightarrow \frac{w}{r} \cdot L^2 + \frac{4w}{r} \cdot L + \frac{4w}{r} - 10 = 0.$$

Posons $x = \frac{w}{r}$, nous obtenons ainsi une équation du second degré en L :

$$x \cdot L^2 + 4x \cdot L + (4x - 10) = 0.$$

$$\Delta = 16x^2 - 4x \cdot (4x - 10) = 16x^2 - 16x^2 + 40x.$$

$$\text{D'où } \Delta = 40x > 0 \text{ car } x = \frac{w}{r} > 0.$$

D'où deux solutions :

$$L_1 = \frac{-4x - (40x)^{1/2}}{2x} < 0 \text{ donc à rejeter car } L \geq 0.$$

$$L_2 = \frac{-4x + (40x)^{1/2}}{2x}; \text{ cette solution peut être positive, négative ou nulle.}$$

$$\text{Discutons la solution } L = L_2 = \frac{-4x + (40x)^{1/2}}{2x}.$$

Notons que : $\frac{-4x + (40x)^{1/2}}{2x} = \frac{-2x + (10x)^{1/2}}{x}$.

Distinguons 3 cas :

α $\frac{-2x + (10x)^{1/2}}{x} < 0 \Leftrightarrow -2x + (10x)^{1/2} < 0 \text{ car } x > 0,$

$$\Leftrightarrow (10x)^{1/2} < 2x$$

$$\Leftrightarrow 10x < 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 10 < 4x \Rightarrow \boxed{x > \frac{5}{2}}.$$

Donc si $\boxed{\frac{w}{r} > \frac{5}{2}}$, $L^* < 0$.

Or cela n'a pas de signification économique. En fait, cela veut dire que le producteur n'utilisera pas de facteur travail pour produire car son prix unitaire est trop élevé. Il n'utilisera que du capital.

Dans ces conditions, $\boxed{L^* = 0 \text{ et } K^* = 5}$.

Nous sommes donc en présence d'un optimum en coin.

β $\frac{-2x + (10x)^{1/2}}{x} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}}.$

Dans ce cas, $\boxed{\frac{w}{r} = \frac{5}{2}, L^* = 0 \text{ et } K^* = 5}$.

Comme précédemment, l'entrepreneur n'utilisera pas de facteur travail pour produire car son prix unitaire est trop élevé. Il n'utilisera que l'input capital en quantité $K^* = 5$.

Nous sommes en présence d'un optimum en coin.

γ $\frac{-2x + (10x)^{1/2}}{x} > 0 \Rightarrow \boxed{x < \frac{5}{2}}.$

Donc si $\boxed{\frac{w}{r} < \frac{5}{2}}$,

$$\boxed{L^* = \frac{-2\left(\frac{w}{r}\right) + \left(\frac{10w}{r}\right)^{1/2}}{\frac{w}{r}} > 0} \text{ et } \boxed{K^* = \left(\frac{10w}{r}\right)^{1/2} > 0}.$$

L^* et K^* représentent les demandes optimales d'inputs qui assurent à l'entreprise la moindre dépense.

3 Déduisons-en le coût minimum :

Nous savons que la moindre dépense ou coût minimum que doit supporter l'entrepreneur pour réaliser un volume de production $Q_0 = 10$ est : $C^* = r.K^* + w.L^*$.

Application numérique :

α Si $\frac{w}{r} \geq \frac{5}{2}$, $C^* = 5r$.

β Si $\frac{w}{r} < \frac{5}{2}$, $C^* = \frac{-2\left(\frac{w}{r}\right) + \left(\frac{10w}{r}\right)^{1/2}}{\frac{1}{r}} + (10 r.w)^{1/2}$,

$$C^* = -2(w) + (10r.w)^{1/2} + (10r.w)^{1/2},$$

$$C^* = -2w + 2(10r.w)^{1/2}.$$

Exercice N° 61

Énoncé

Nous savons qu'à l'optimum, le rapport des prix des inputs est égal au rapport des productivités marginales de ces inputs.

Supposons que le TMST de K à L d'une entreprise soit égal à 7 avec $Q'_L = 21$ et $Q'_K = 3$.

On donne $w = 12$ et $r = 3$, que conseiller à cette entreprise ?

Corrigé

Déterminons ce que nous devons conseiller à cette entreprise :

D'après l'énoncé, le TMST de K à L est égal à 7 :

$$TMST = 7 \Rightarrow \frac{Q'_L}{Q'_K} = 7.$$

De plus, $w = 12$ et $r = 3$: $\frac{w}{r} = \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{w}{r} = 4.$

D'où $\frac{Q'_L}{Q'_K} \neq \frac{w}{r}$ et plus exactement $\frac{Q'_L}{Q'_K} > \frac{w}{r}.$

Dans ces conditions, si l'entreprise utilise 1 unité supplémentaire de capital, la production augmente de 3 unités (car $Q'_K = 3$) et cela lui coûte $3(1 \times r = 1 \times 3).$

De même, si l'entreprise utilise 1 unité supplémentaire de travail, la production augmente de 21 unités (car $Q'_L = 21$) et cela lui coûte $12(1 \times w = 1 \times 12).$

Supposons que l'entreprise augmente le travail d'une unité et, pour compenser, diminue de 7 unités la quantité de capital.

Le résultat de cette opération est le suivant :

- la production reste constante car $1 \times 21 - 7 \times 3 = 0$;
- la dépense en travail augmente de $1 \times 12 = 12$;
- la dépense en capital diminue de $7 \times 3 = 21$;
- la dépense totale diminue donc de $21 - 12 = 9$.

Donc cette entreprise peut produire la même quantité d'output mais à moindre coût.

En résumé, pour produire à moindre coût, c'est-à-dire à dépense mini-

male, il faut que : $\boxed{\frac{Q'_L}{Q'_K} = \frac{w}{r} \Leftrightarrow TMST = \frac{w}{r}}.$

Exercice N° 62

Énoncé

Soit la fonction de production $Q = A.K^\alpha.L^\beta$, où $A > 0$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Que représentent α et β ?

Corrigé

Interprétons économiquement les paramètres α et β :

α et β représentent respectivement l'élasticité de l'output par rapport au capital et l'élasticité de l'output par rapport au travail.

$$\text{L'in effet : } e_{Q/L} = \frac{\delta Q}{\delta L} \times \frac{L}{Q} = A.\beta.K^\alpha.L^{(\beta-1)} \times \frac{L}{A.K^\alpha.L^\beta} = \beta.$$

$$e_{Q/K} = \frac{\delta Q}{\delta K} \times \frac{K}{Q} = A.\alpha.K^{(\alpha-1)}.L^\beta \times \frac{K}{A.K^\alpha.L^\beta} = \alpha.$$

Donc α est bien l'élasticité de la production par rapport au capital, c'est-à-dire la variation de la production exprimée en pourcentage sur la variation du capital exprimée en pourcentage.

De même β est bien l'élasticité de la production par rapport au travail, c'est-à-dire la variation de la production exprimée en pourcentage sur la variation du travail exprimée en pourcentage.

Exercice N° 63

Énoncé

Calculer l'élasticité de substitution des fonctions de production suivantes :

a $Q_1 = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$, où $A > 0$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ (TMST = $\frac{\beta K}{\alpha L}$),

b $Q_2 = a \cdot K + b \cdot L$, $a > 0$ et $b > 0$ (TMST = $\frac{b}{a}$),

c $Q_3 = A [\alpha L^{-\partial} + (1 - \alpha) K^{-\partial}]^{-\frac{1}{\partial}}$, $\partial > -1$ et $\alpha \in]0, 1[$ (C.E.S.)
(TMST = $\frac{\alpha}{(1 - \alpha)} \left(\frac{K}{L}\right)^{\partial+1}$).

Corrigé

Calculons l'élasticité de substitution (σ) des trois fonctions de production :

Nous savons que $\frac{1}{\sigma}$ correspond à la variation du TMST de K à L exprimée en pourcentage sur la variation du rapport K/L exprimée en pourcentage.

Mathématiquement, si σ est l'élasticité de substitution de K à L , nous avons :

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\delta \text{ TMST}}{\delta (K/L)} \times \frac{(K/L)}{\text{TMST}}.$$

D'où :

a $\frac{1}{\sigma_1} = \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{K/L}{\frac{\beta}{\alpha} (K/L)} = 1 \Rightarrow \sigma_1 = 1.$

b $\frac{1}{\sigma_2} = 0 \times \frac{K/L}{b/a} = 0 \Rightarrow \sigma_2 = \infty.$

c $\frac{1}{\sigma_3} = (\partial + 1) \cdot \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right) \cdot (K/L)^\partial \times \frac{(K/L)}{\left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right) \cdot (K/L)^{(\partial+1)}}.$

D'où : $\frac{1}{\sigma_3} = \partial + 1 \Rightarrow \sigma_3 = \frac{1}{\partial + 1}.$

Il est bon de noter que la fonction de production Q_3 est appelée fonction C.E.S. (Constant Elasticity of Substitution). Son élasticité de substitution est constante (mais pas forcément égale à 1 comme c'est le cas pour les Cobb-Douglas) ∂ s'appelle paramètre de substitution.

Énoncé

Soit un produit de type Cobb-Douglas et un capital utilisé à un prix de K .

1 On se donne le coût unitaire $\bar{K} = 1$.

2 À partir de ce coût unitaire, on détermine le coût de production.

Corrigé

1 a Détaillons la fonction de production.

Nous sommes dans le cas d'un produit de type Cobb-Douglas.

D'où $Q = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$.

(1) $\Rightarrow \frac{Q}{K} = \frac{A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta}{K} = A \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^\beta.$

Or le coût unitaire est égal à 1.

Ici $K^* = \frac{L^\beta}{A}$.

d'où $C(Q) = \frac{Q^{1+\frac{1}{\alpha}}}{A^{\frac{1}{\alpha}}}.$

Exercice N° 64

Énoncé

Soit un producteur dont la fonction de production de type Cobb-Douglas est : $Q = 3K^{1/4} \cdot L^{1/4}$, K étant la quantité de facteur capital utilisée et L la quantité de facteur travail utilisée. Les prix de K et L sont r et w .

- I On se situe en courte période, le stock de capital est fixé à $K = 16$. Déterminer la fonction de coût total, le coût moyen et le coût marginal.
- II À présent, on se situe en longue période. Déterminer la fonction de coût total, le coût moyen et le coût marginal de l'entreprise.

Corrigé

- I ■ Déterminons la fonction de coût total (C) de courte période :
Nous sommes en courte période, le stock de capital est fixé à $\bar{K} = 16$.

$$\text{D'où } Q = 3K^{1/4} \cdot L^{1/4} \Rightarrow 3(16)^{1/4} \cdot L^{1/4} \Rightarrow \boxed{Q = 6L^{1/4}} \quad (1).$$

$$(1) \Rightarrow \boxed{L^* = \left(\frac{Q}{6}\right)^4}.$$

Or le coût total s'écrit : $C = r \cdot K^* + w \cdot L^*$.

Application numérique :

$$\text{Soit } K^* = \bar{K} = 16 \text{ et } L^* = \frac{Q^4}{1296},$$

$$\text{d'où } \boxed{C(Q) = \left(\frac{w}{1296}\right) \cdot Q^4 + 16r}.$$

$C(Q)$ représente la fonction de coût total de l'entreprise en courte période, c'est-à-dire la dépense minimum qu'elle doit envisager pour atteindre un certain niveau de production, les prix des inputs restant constants.

b) Déterminons le coût moyen de courte période :

Le coût moyen nous est donné par la formule :

$$CM = \frac{C(Q)}{Q}$$

Application numérique :

$$CM = \left(\frac{w}{1296} \right) \cdot Q^3 + \frac{16r}{Q}$$

c) Déterminons le coût marginal de courte période :

Nous savons que le coût marginal est le supplément de coût résultant de la fabrication d'une unité supplémentaire d'output.

Mathématiquement, il nous est donné par la formule :

$$Cm = \frac{\delta C(Q)}{\delta Q}$$

Application numérique :

$$Cm = 4 \left(\frac{w}{1296} \right) \cdot Q^3,$$

$$Cm = \frac{w}{324} \cdot Q^3$$

2 a) Déterminons la fonction de coût total de longue période :

Il s'agit pour l'entreprise de résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } C = r.K + w.L \\ \text{sous la contrainte} \end{cases} \quad Q_0 = Q, Q_0 \text{ étant un niveau d'output donné.}$$

Le lagrangien s'écrit :

$$L = C + \lambda \cdot (Q_0 - Q), \lambda \text{ étant le multiplicateur de Lagrange.}$$

D'où $L = r.K + w.L + \lambda.(Q_0 - 3K^{1/4}.L^{1/4})$.

À l'optimum nous avons :

$$\begin{cases} L'_L = 0 \\ L'_K = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w - 3\lambda \cdot \frac{1}{4} K^{1/4} \cdot L^{-3/4} = 0 \\ r - 3\lambda \cdot \frac{1}{4} K^{-3/4} \cdot L^{1/4} = 0 \\ Q_0 - 3K^{1/4} \cdot L^{1/4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{3}{4} \lambda \cdot K^{1/4} \cdot L^{-3/4} \quad (1) \\ r = \frac{3}{4} \lambda \cdot K^{-3/4} \cdot L^{1/4} \quad (2) \\ Q_0 = 3K^{1/4} \cdot L^{1/4} \quad (3) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{\frac{3}{4} \lambda \cdot K^{1/4} \cdot L^{-3/4}}{\frac{3}{4} \lambda \cdot K^{-3/4} \cdot L^{1/4}} \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{K}{L} \quad (a) \Rightarrow \boxed{\frac{w}{r} = \frac{Q'_L}{Q'_K}}$$

À l'optimum, le rapport des prix des inputs est égal au rapport des productivités marginales de ces inputs.

(a) $\Rightarrow K = \frac{wL}{r}$ (b) ; en remplaçant K par cette expression dans l'équation (3), nous obtenons :

$$(3) \Leftrightarrow Q_0 = 3 \left(\frac{wL}{r} \right)^{1/4} \cdot L^{1/4} \Leftrightarrow Q_0 = 3 \left(\frac{w}{r} \right)^{1/4} \cdot L^{1/2} \quad (c),$$

$$(c) \Rightarrow L^* = \left[\frac{Q_0}{3} \cdot \left(\frac{r}{w} \right)^{1/4} \right]^2 \Rightarrow \boxed{L^* = \frac{Q_0^2}{9} \cdot \left(\frac{r}{w} \right)^{1/2}}$$

$$\text{D'où (b)} \Rightarrow K^* = \frac{wL^*}{r} \Rightarrow K^* = \frac{w}{r} \cdot \left(\frac{Q_0^2}{9} \cdot \left(\frac{r}{w} \right)^{1/2} \right) \quad (d)$$

$$(d) \Rightarrow \boxed{K^* = \frac{Q_0^2}{9} \cdot \left(\frac{w}{r} \right)^{1/2}}$$

L^* et K^* sont les demandes optimales en travail et capital qui assurent, au producteur, la moindre dépense.

(on ne vérifiera pas ici les conditions suffisantes).

Leurs propriétés sont :

☐ Elles sont croissantes du niveau d'output donné Q_0 :

$$\frac{\partial L^*}{\partial Q_0} = \frac{2}{9} \cdot Q_0 \cdot \left(\frac{r}{w} \right)^{1/2} > 0,$$

$$\text{et } \frac{\delta K^*}{\delta Q_0} = \frac{2}{9} \cdot Q_0 \cdot \left(\frac{w}{r}\right)^{1/2} > 0.$$

B La quantité utilisée de travail est décroissante de son prix unitaire :

$$\frac{\delta L^*}{\delta w} = \frac{Q_0^2}{18} \cdot \left(\frac{r}{w}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{-r}{w^2}\right) < 0.$$

X La quantité utilisée de capital est décroissante de son prix unitaire :

$$\frac{\delta K^*}{\delta r} = \frac{Q_0^2}{18} \cdot \left(\frac{w}{r}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{-w}{r^2}\right) < 0.$$

δ La quantité utilisée de l'input $i (i = K, L)$ est d'autant plus élevée que le prix unitaire de l'autre facteur est plus élevé :

$$\frac{\delta L^*}{\delta r} = \frac{Q_0^2}{18} \cdot \left(\frac{r}{w}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{1}{w}\right) > 0,$$

$$\text{et } \frac{\delta K^*}{\delta w} = \frac{Q_0^2}{18} \cdot \left(\frac{w}{r}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{1}{r}\right) > 0.$$

Le coût minimum est donc :

$$C^* = r \cdot K^* + w \cdot L^*,$$

$$C^* = r \cdot \left(\frac{Q_0^2}{9} \cdot \left(\frac{w}{r}\right)^{1/2}\right) + w \cdot \left(\frac{Q_0^2}{9} \cdot \left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}\right),$$

$$C^* = \frac{2}{9} \cdot Q_0^2 \cdot (rw)^{1/2}.$$

Pour déterminer la fonction de coût total qui indique la dépense minimum que l'entreprise doit envisager pour atteindre un certain niveau de production, les prix des inputs restant constants, il suffit de remplacer Q_0 par Q .

Nous obtenons ainsi : $C(Q) = \frac{2}{9} \cdot Q^2 \cdot (rw)^{1/2}.$

b Déterminons le coût moyen de longue période :

Le coût moyen nous est donné par la formule : $CM = \frac{C(Q)}{Q}.$

Application numérique :

$$CM = \frac{2}{9} \cdot Q \cdot (rw)^{1/2}.$$

Nous
de la 1
Mathe

Cm

Cm

Soit

Q ét

1

2

3

Co

1

a 1

Nous
nive

c Déterminons le coût marginal de longue période :

Nous savons que le coût marginal est le supplément de coût résultant de la fabrication d'une unité supplémentaire d'output.

Mathématiquement, il nous est donné par la formule :

$$C_m = \frac{\delta C(Q)}{\delta Q}$$

Application numérique :

$$C_m = \frac{4}{9} \cdot Q \cdot (rw)^{1/2}$$

Exercice N° 65

Énoncé

Soit la fonction de coût total : $C(Q) = 3Q^2 + 2Q + 1$,

Q étant le niveau de production d'une entreprise.

- 1 Calculer les fonctions suivantes :
CF, CFM, CV, CVM, CM, C_m .
- 2 Représenter graphiquement le coût moyen, le coût marginal et le coût total de l'entreprise. Commenter.
- 3 Définir et calculer les seuils de rentabilité et de fermeture.

Corrigé

- 1 Calculons CF, CFM, CV, CVM, CM et C_m :

- a Les coûts fixes CF :

Nous savons que les coûts fixes sont ceux qui ne dépendent pas du niveau de l'output choisi par l'entreprise.

Ici : $CF = 1$.

b Les coûts fixes moyens CFM :

Ils nous sont donnés par la formule : $CFM = \frac{CF}{Q}$.

Application numérique :

$$CFM = \frac{1}{Q}.$$

c Les coûts variables CV :

Nous savons que les coûts variables sont ceux qui dépendent du niveau de l'output choisi par l'entreprise.

Ici : $CV = 3Q^2 + 2Q$.

Il est bon de noter que le coût total est égal à la somme des coûts fixes et des coûts variables.

d Les coûts variables moyens CVM :

Ils nous sont donnés par la formule : $CVM = \frac{CV}{Q}$.

Application numérique :

$$CVM = 3Q + 2.$$

e Le coût moyen CM :

Il nous est donné par la formule : $CM = \frac{C(Q)}{Q}$.

Application numérique :

$$CM = 3Q + 2 + \frac{1}{Q}.$$

f Le coût marginal Cm :

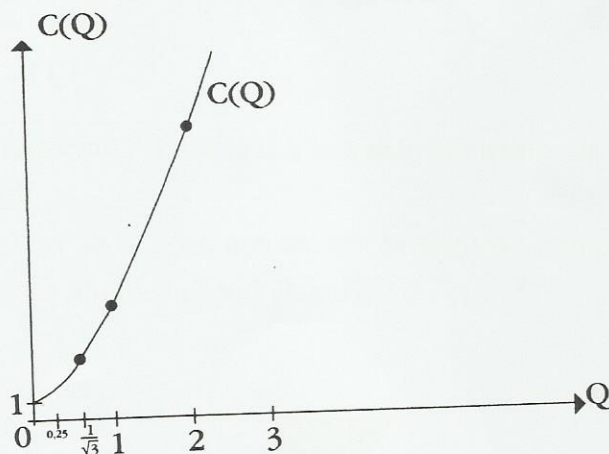
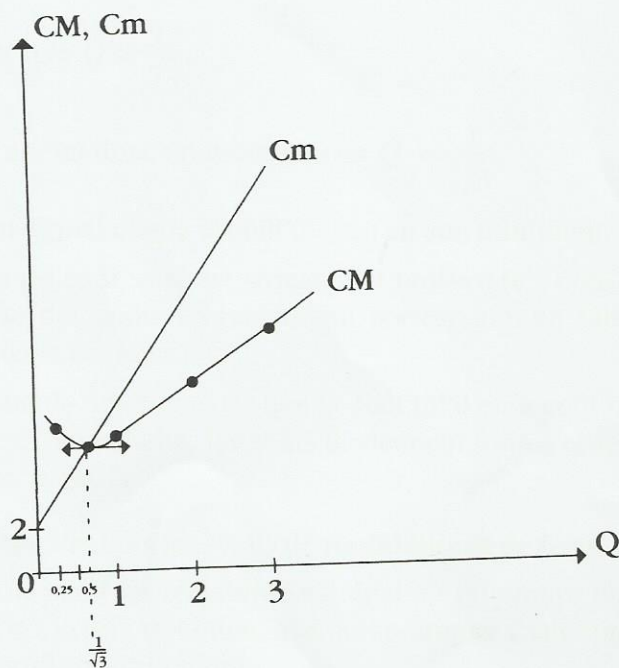
Nous savons que le coût marginal est le supplément de coût résultant de la fabrication d'une unité supplémentaire d'output.

Il nous est donné par la formule : $Cm = \frac{\delta C(Q)}{\delta Q}$.

Application numérique :

$$Cm = 6Q + 2.$$

2 Représentons graphiquement CM , Cm et $C(Q)$:



Commentaire :

Nous remarquons que la fonction de coût marginal est une droite. Son minimum est atteint au point de coordonnées $(0, 2)$.

De plus, le Cm est strictement croissant quand $Q > 2$.

La fonction de coût moyen, quant à elle, a une forme en U . Elle est

VI. Coûts. Seuil de rentabilité. Seuil de fermeture. (Exercices 64 à 68)

Quantités produites Q	Coûts totaux
1	100
2	130
3	155
4	170
5	183,33
6	220
7	350

- 1 Calculer les coûts moyens et les coûts marginaux de cette entreprise. Faire un tableau.
- 2 Représenter sur un graphique CM , C_m et $C(Q)$. Commenter.
- 3 Quel est le seuil de rentabilité ?

Corrigé

- 1 Calculons les coûts moyens et les coûts marginaux de cette entreprise :

Nous savons d'une part que le coût moyen (CM) nous est donné par la

formule : $CM = \frac{C(Q)}{Q}$.

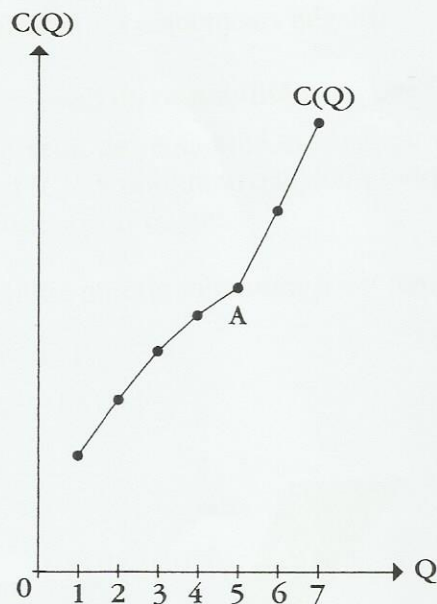
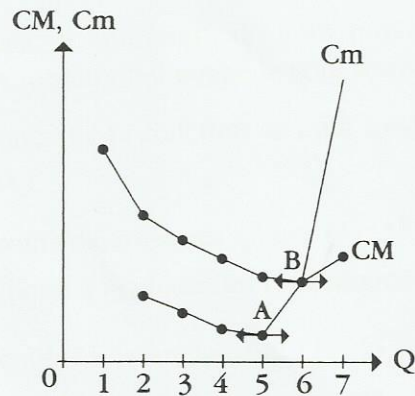
D'autre part, le coût marginal (C_m), qui correspond au supplément de coût résultant de la fabrication d'une unité supplémentaire d'output,

nous est donné par la formule : $C_m = \frac{\Delta C(Q)}{\Delta Q}$.

Application numérique :

Q	CM	C_m
1	100	—
2	65	30
3	51,67	25
4	42,5	15
5	36,67	13,33
6	36,67	36,67
7	50	130

2 Représentation graphique :



Commentaire :

La fonction de coût marginal et la fonction de coût moyen ont une forme en U.

En ce qui concerne le coût marginal, il est décroissant jusqu'au point de coordonnées (5 ; 13,33) et croissant dès lors que $Q > 5$. Le coût marginal atteint son minimum au point A qui correspond au point d'inflexion de la courbe de coût total.

En ce qui concerne le coût moyen, il est décroissant jusqu'au point B de coordonnées (6 ; 36,67) et croissant au-delà.

Le point B est donc le minimum du coût moyen et nous pouvons remarquer que le coût marginal coupe le coût moyen en ce point.

Enfin, en ce qui concerne la fonction de coût total, nous pouvons distinguer trois phases :

a La phase des coûts décroissants quand $Q \in [1,5[$.

Cette phase correspond à la phase des rendements croissants.

b La phase des coûts croissants quand $Q \in [5,7[$.

Cette phase correspond à la phase des rendements décroissants.

c La phase des coûts infinis quand $Q \geq 7$. En effet dès que $Q > 6$, le coût total et le coût marginal ont une allure exponentielle. Les coûts deviennent alors infinis et les rendements négatifs.

3 Déterminons le seuil de rentabilité :

Nous savons que le seuil de rentabilité est égal au minimum du coût moyen. En fait, c'est le prix minimum que doit pratiquer l'entrepreneur pour dégager un profit positif ou nul.

Ici le seuil de rentabilité ou prix minimum p est donc :

$$p = CM(6) = 36,67$$

Exercice N° 67

Énoncé

Soit la fonction de production suivante :

$$Q = \begin{cases} (K - 5)^{1/4} L^{1/4} & \text{pour } K > 5 \\ 0 & \text{pour } K \leq 5 \end{cases}$$

La fonction de coût total associée à cette fonction de production s'écrit : $C(Q) = 20Q^2 + 20$.

- 1 Calculer le coût marginal et le coût moyen.
- 2 En déduire la valeur du seuil de rentabilité ainsi que la nature des rendements.

Corrigé

- 1 Calculons le coût marginal et le coût moyen :

- a Nous savons que le coût marginal est le supplément de coût résultant de la fabrication d'une unité supplémentaire d'output.

Il nous est donné par la formule : $C_m = \frac{\partial C(Q)}{\partial Q}$.

Application numérique :

$$C_m = 40Q$$

- b Nous savons que le coût moyen nous est donné par la formule :

$$CM = \frac{C(Q)}{Q}$$

Application numérique :

$$CM = 20Q + \frac{20}{Q}$$

- 2 Déduisons-en la valeur du seuil de rentabilité ainsi que la nature des rendements :

- a Nous savons que le seuil de rentabilité SR est égal ou minimum du coût moyen. En fait, c'est le prix minimum que doit pratiquer l'entrepreneur pour dégager un profit positif ou nul.

SR est la valeur particulière de p telle que : $p = C_m = CM$.

$$C_m = CM \Leftrightarrow 40Q = 20Q + \frac{20}{Q} \Leftrightarrow Q^2 = 1 \Rightarrow Q = 1 \text{ car } Q \geq 0.$$

D'où $SR = Cm(1) = CM(1) \Rightarrow SR = 40$.

Le seuil de rentabilité est donc : $SR = 40$.

b Nous savons que lorsque :

- le coût moyen est décroissant, les rendements sont croissants ;
- le coût moyen est croissant, les rendements sont décroissants ;
- le coût moyen est constant, les rendements sont constants.

Or ici : $\frac{\delta CM}{\delta Q} = 20 - \frac{20}{Q^2}$.

Distinguons 3 cas :

- si $20 - \frac{20}{Q^2} > 0$ c'est-à-dire si $Q > 1$, alors le coût moyen est croissant et les rendements sont décroissants ;
- si $20 - \frac{20}{Q^2} < 0$ c'est-à-dire si $Q < 1$, alors le coût moyen est décroissant et les rendements sont croissants ;
- si $20 - \frac{20}{Q^2} = 0$ c'est-à-dire si $Q = 1$, alors le coût moyen est constant ainsi que les rendements.

Exercice N° 68

Énoncé

La fonction de coût total d'une firme s'écrit :

$$C(Q) = \frac{3}{2}Q^2 + Q + \frac{3}{2}.$$

Déterminer la nature des rendements de cette firme.

Corrigé

Déterminons la nature des rendements de cette firme :

Nous savons que lorsque :

- le coût moyen est décroissant, les rendements sont croissants ;
- le coût moyen est croissant, les rendements sont décroissants ;
- le coût moyen est constant, les rendements sont constants.

Le coût moyen est donné par la formule : $CM = \frac{C(Q)}{Q}$.

Application numérique :

$$CM = \frac{3}{2}Q + 1 + \frac{3}{2Q}$$

De plus, $\frac{\delta CM}{\delta Q} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2Q^2}$.

Distinguons 3 cas :

- si $\frac{3}{2} - \frac{3}{2Q_2} > 0 \Leftrightarrow Q > 1$, alors le coût moyen est croissant et les rendements sont décroissants ;
- si $\frac{3}{2} - \frac{3}{2Q_2} < 0 \Leftrightarrow Q < 1$, alors le coût moyen est décroissant et les rendements sont croissants ;
- si $\frac{3}{2} - \frac{3}{2Q_2} = 0 \Leftrightarrow Q = 1$, alors le coût moyen est constant ainsi que les rendements.

Nou
Q =
s'éc

C(Q

et l

C(Q

On
pri

1

2

a

b

c

1

co

Il :

Il

tic

D'

Exercice N° 69

Énoncé

Nous savons que dans le cas d'une fonction de production $Q = 3K^{1/4}.L^{1/4}$, la fonction de coût total de courte période s'écrit :

$$C(Q)_{CP} = \left(\frac{w}{1296}\right).Q^4 + 16r,$$

et la fonction de coût total de longue période s'écrit :

$$C(Q)_{LP} = \frac{2}{9}.Q^2(rw)^{1/2}.$$

On suppose que le prix unitaire du capital est $r = 1$, et que le prix unitaire du travail est $w = 4$. On note P le prix de l'output.

- 1 En courte période, déterminer le niveau de l'output qui maximise le profit de l'entreprise.
- 2 Même question en longue période en procédant par :
 - a Une maximisation indirecte du profit ;
 - b Une maximisation directe du profit.

Corrigé

- 1 Déterminons le niveau de l'output qui maximise le profit en courte période :

Il s'agit pour l'entrepreneur de maximiser son profit Π .

$\Pi = P.Q - C(Q)_{CP}$, P étant le prix de l'output et $C(Q)_{CP}$ la fonction de coût total de courte période.

$$\text{D'où } \Pi = P.Q - \frac{Q^4}{324} - 16, \text{ car } r = 1 \text{ et } w = 4.$$

Or à l'optimum nous avons :

$$\Pi'_Q = 0 \Leftrightarrow P - \frac{Q^3}{81} = 0 \Leftrightarrow P = \frac{Q^3}{81} \Leftrightarrow \boxed{P = Cm} \quad (1).$$

De plus, il s'agit d'un maximum de profit car $\Pi''_{QQ} = -\frac{Q^2}{27} < 0$.

Par conséquent, (1) $\Rightarrow \boxed{Q^* = (81P)^{1/3}}$.

Au total, en produisant $Q^* = (81P)^{1/3}$, l'entreprise maximise son profit.

2 Déterminons le niveau de l'output qui maximise le profit en longue période :

a Maximisation indirecte du profit :

La maximisation indirecte du profit consiste, dans un premier temps à déterminer la fonction de coût total via une minimisation des coûts de l'entreprise pour un niveau d'output donné.

Or nous savons que ce programme admet pour solution :

$$C(Q) = \frac{2}{9} \cdot Q^2 \cdot (rw)^{1/2}.$$

Dans un second temps, on maximise le profit de la firme en tenant compte de cette fonction de coût total.

Il s'agit pour l'entrepreneur de maximiser son profit :

$$\Pi = P \cdot Q - C(Q), \quad P \text{ étant le prix de l'output.}$$

$$\text{D'où } \Pi = P \cdot Q - \frac{4}{9} \cdot Q^2, \text{ car } r = 1 \text{ et } w = 4.$$

Or à l'optimum nous avons :

$$\Pi'_Q = 0 \Leftrightarrow P - \frac{8}{9} \cdot Q = 0 \Leftrightarrow P = \frac{8}{9} \cdot Q \Leftrightarrow \boxed{P = Cm} \quad (1).$$

De plus, il s'agit d'un maximum de profit car $\Pi''_{QQ} = -\frac{8}{9} < 0$.

Par conséquent, (1) $\Rightarrow \boxed{Q^* = \frac{9P}{8}}$.

Au total, en produisant $Q^* = \frac{9P}{8}$, l'entreprise maximise son profit.

b M

La m

$\Pi =$

Nous

or à l

$\left\{ \begin{array}{l} \Pi' \\ \Pi' \end{array} \right.$

(I)

D'o
tion
leur

$\boxed{Q'}$

$\left(\frac{1}{2} \right)$

(a

En
no

(1

(3

(4

C

b) Maximisation directe du profit :

La maximisation directe du profit consiste à maximiser :

$$\Pi = P \cdot (3K^{1/4} \cdot L^{1/4}) - r \cdot K - w \cdot L, K \text{ et } L \text{ étant les variables.}$$

Nous avons donc : $\Pi = 3P \cdot K^{1/4} \cdot L^{1/4} - r \cdot K - w \cdot L$;

or à l'optimum, nous avons :

$$\begin{cases} \Pi'_L = 0 \\ \Pi'_K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} P \cdot K^{1/4} \cdot L^{-3/4} - w = 0 \\ \frac{3}{4} P \cdot K^{-3/4} \cdot L^{1/4} - r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} P \cdot K^{1/4} \cdot L^{-3/4} = w \quad (1) \\ \frac{3}{4} P \cdot K^{-3/4} \cdot L^{1/4} = r \quad (2) \end{cases} \quad (I).$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} P \cdot Q'_L = w \\ P \cdot Q'_K = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q'_L = \frac{w}{P} \quad (1) \\ Q'_K = \frac{r}{P} \quad (2) \end{cases}.$$

D'où pour maximiser son profit, la firme choisit ses facteurs de production tels que les productivités marginales de ces derniers soient égales à leur prix unitaire réel :

$$\boxed{Q'_L = w/P \text{ et } Q'_K = r/P}.$$

$$\begin{aligned} (1) & \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{4} P \cdot K^{1/4} \cdot L^{-3/4}}{\frac{3}{4} P \cdot K^{-3/4} \cdot L^{1/4}} = \frac{w}{r} \Leftrightarrow \frac{K}{L} = 4 \quad (a) \text{ car } r = 1 \text{ et } w = 4. \\ (2) & \end{aligned}$$

$$(a) \Rightarrow K = 4L \quad (b).$$

En remplaçant K par cette expression dans l'équation (1), nous obtenons :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{4} P \cdot (4L)^{1/4} \cdot L^{-3/4} = 4 \quad (3),$$

$$(3) \Leftrightarrow 4^{1/4} \cdot L^{-1/2} = \frac{16}{3P} \quad (4),$$

$$(4) \Rightarrow L = \left(\frac{4^{1/4} \cdot 3P}{16} \right)^2 \Rightarrow \boxed{L^* = \frac{9}{128} \cdot P^2}.$$

$$\text{D'où } (b) \Rightarrow K^* = 4L^* \Rightarrow \boxed{K^* = \frac{9}{32} \cdot P^2}.$$

Par conséquent, le niveau de l'output qui maximise le profit est :

$$Q^* = 3K^{1/4} \cdot L^{1/4},$$

$$Q^* = 3\left(\frac{9}{32} \cdot P^2\right)^{1/4} \cdot \left(\frac{9}{128} \cdot P^2\right)^{1/4},$$

$$Q^* = P \cdot \left(\frac{729}{32}\right)^{1/4} \cdot \left(\frac{9}{128}\right)^{1/4},$$

$$\text{d'où } Q^* = \frac{9P}{8}.$$

De plus, il s'agit d'un maximum de profit car :

$$\Pi''_{LL} = \frac{-9}{16} P \cdot K^{1/4} \cdot L^{-7/4} < 0$$

$$\begin{aligned} \text{et : } \begin{vmatrix} \Pi''_{LL} & \Pi''_{LK} \\ \Pi''_{KL} & \Pi''_{KK} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{-9}{16} P \cdot K^{1/4} \cdot L^{-7/4} & \frac{3}{16} P \cdot K^{-3/4} \cdot L^{-3/4} \\ \frac{3}{16} P \cdot K^{-3/4} \cdot L^{-3/4} & \frac{-9}{16} P \cdot K^{-7/4} \cdot L^{1/4} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{-9}{16}\right)^2 P^2 \cdot K^{-3/2} \cdot L^{-3/2} - \frac{9}{256} P^2 \cdot K^{-3/2} \cdot L^{-3/2} \\ &= \frac{72}{256} P^2 \cdot K^{-3/2} \cdot L^{-3/2} > 0 \text{ car } P > 0, K > 0 \text{ et } L > 0. \end{aligned}$$

Exercice N° 70

Énoncé

Une entreprise a comme fonction de production $Q = K^{1/2} \cdot L^{1/3}$,
 K étant le capital et L le travail.

On suppose que le prix unitaire du capital est $r = 1$, et que le
 prix unitaire du travail est $w = 1$. On note P le prix de l'output.

On procède à une maximisation directe du profit.

- 1 Déterminer les demandes de chaque input (on ne vérifiera pas les conditions suffisantes).
- 2 En déduire la fonction d'offre de l'entreprise.
- 3 Si $P = 2$, quelle est la quantité de l'output qui maximise le profit de la firme ? Quel est ce profit ?

Corrigé

1 Déterminons les demandes de chaque input :

Il s'agit pour l'entreprise de maximiser son profit Π .

$$\text{Or } \Pi = P \cdot (K^{1/2} \cdot L^{1/3}) - r \cdot K - w \cdot L.$$

Or à l'optimum, nous avons :

$$\begin{cases} \Pi'_L = 0 \\ \Pi'_K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} P \cdot K^{1/2} \cdot L^{-2/3} - w = 0 \\ \frac{1}{2} P \cdot K^{-1/2} \cdot L^{1/3} - r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} P \cdot K^{1/2} \cdot L^{-2/3} = w \quad (1) \\ \frac{1}{2} P \cdot K^{-1/2} \cdot L^{1/3} = r \quad (2) \end{cases} \quad (I).$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} P Q'_L = w \\ P Q'_K = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q'_L = w/P \quad (1) \\ Q'_K = r/P \quad (2) \end{cases}.$$

D'où pour maximiser son profit, la firme choisit ses facteurs de production tels que les productivités marginales de ces derniers soient égales à leur prix unitaire réel :

$$\boxed{Q'_L = w/P \text{ et } Q'_K = r/P}.$$

$$\begin{aligned} (1) & \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3} P \cdot K^{1/2} \cdot L^{-2/3}}{\frac{1}{2} P \cdot K^{-1/2} \cdot L^{1/3}} = \frac{w}{r} \Leftrightarrow \frac{2K}{3L} = 1 \quad (\text{a}) \text{ car } r = w = 1. \\ (2) & \end{aligned}$$

$$(a) \Rightarrow K = \frac{3L}{2} \quad (b).$$

En remplaçant K par cette expression dans l'équation (1), nous obtenons :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{3} P \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot L\right)^{1/2} \cdot L^{-2/3} = 1 \quad (3),$$

$$(3) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \cdot L^{-1/6} = \frac{3}{P} \quad (4),$$

$$(4) \Rightarrow L = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \cdot \frac{P}{3}\right)^6 \Rightarrow \boxed{L^* = \frac{P^6}{216}}.$$

$$\text{D'où (b)} \Rightarrow K^* = \frac{3}{2} L^* \Rightarrow \boxed{K^* = \frac{P^6}{144}}.$$

K^* et L^* correspondent aux demandes de chaque input qui maximise le profit de l'entreprise.

2 Déduisons-en la fonction d'offre de l'entreprise :

La fonction d'offre de l'entreprise Q^S est telle que :

$$Q^S = K^{*1/2} L^{*1/3} \Leftrightarrow Q^S = \left(\frac{P^6}{144}\right)^{1/2} \left(\frac{P^6}{216}\right)^{1/3} \quad (5),$$

$$(5) \Rightarrow \boxed{Q^S = \frac{P^5}{72}}.$$

3 Si $P = 2$, déterminons la quantité de l'output qui maximise le profit :

Application numérique :

$$\boxed{Q^* = \frac{4}{9}}.$$

Au total, si $P = 2$, l'entreprise produira $\frac{4}{9}$ unités d'output pour maximiser son profit.

Le profit qu'elle réalisera sera : $\Pi^* = P \cdot (K^{*1/2} \cdot L^{*1/3}) - rK^* - wL^*$.

Application numérique :

$$\Pi^* = 2 \left(\frac{8}{12} \cdot \frac{4}{9} \right) - \frac{64}{144} - \frac{64}{216},$$

$$\Pi^* = \frac{64}{72} - \frac{32}{72} - \frac{8}{27},$$

$$\Pi^* = \frac{32}{72} - \frac{8}{27} \Rightarrow \boxed{\Pi^* = 0,148}.$$

Exercice N° 71

Énoncé

Une entreprise a comme fonction de production : $Q = 4K^{1/3} \cdot L^{1/3}$, K étant le capital et L le travail.

On suppose que le prix unitaire du capital est $r = 1$, et que le prix unitaire du travail est $w = 1$. On note P le prix de l'output. On procède à une maximisation indirecte du profit.

- 1 Déterminer la fonction d'offre de l'entreprise.
- 2 Si $P = 3$, quelle est la quantité de l'output qui maximise le profit ?
- 3 Même question si : a $P = 9$;
b $P = 12$.

Corrigé

- 1 Déterminons la fonction d'offre de l'entreprise :

Nous allons procéder à une maximisation indirecte du profit, d'où deux étapes.

Étape n° 1 : détermination de la fonction de coût total de la firme.

Il s'agit pour l'entreprise de résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } C = rK + wL \\ \text{sous la contrainte} \end{cases} \quad Q_0 = Q, Q_0 \text{ étant un niveau d'output donné.}$$

Le lagrangien s'écrit :

$L = C + \lambda \cdot (Q_0 - Q)$, λ étant le multiplicateur de Lagrange.

D'où $L = rK + wL + \lambda \cdot (Q_0 - 4K^{1/3} \cdot L^{1/3})$.

À l'optimum, nous avons :

$$\begin{cases} L'_L = 0 \\ L'_K = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w - \frac{4}{3}\lambda \cdot K^{1/3} \cdot L^{-2/3} = 0 \\ r - \frac{4}{3}\lambda \cdot K^{-2/3} \cdot L^{1/3} = 0 \\ Q_0 - 4K^{1/3} \cdot L^{1/3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{4}{3}\lambda \cdot K^{1/3} \cdot L^{-2/3} \quad (1) \\ r = \frac{4}{3}\lambda \cdot K^{-2/3} \cdot L^{1/3} \quad (2) \\ Q_0 = 4K^{1/3} \cdot L^{1/3} \quad (3) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{\frac{4}{3}\lambda \cdot K^{1/3} \cdot L^{-2/3}}{\frac{4}{3}\lambda \cdot K^{-2/3} \cdot L^{1/3}} \Leftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{K}{L} \quad (a) \Rightarrow \boxed{\frac{w}{r} = \frac{Q'_L}{Q'_K}}$$

À l'optimum, le rapport des prix des facteurs est égal au rapport des productivités marginales de ces facteurs.

$$(a) \Rightarrow 1 = \frac{K}{L} \quad (b) \text{ car } r = w = 1.$$

(b) $\Rightarrow K = L$; en remplaçant K par cette expression dans l'équation (3), nous obtenons :

$$(3) \Leftrightarrow Q_0 = 4L^{2/3} \Rightarrow \boxed{L^* = \left(\frac{1}{4} Q_0\right)^{3/2}}$$

$$\text{Par conséquent, } \boxed{K^* = \left(\frac{1}{4} Q_0\right)^{3/2}}$$

L^* et K^* sont les demandes optimales en travail et capital qui assurent, au producteur, la moindre dépense.

Le coût minimum est donc : $C^* = rK^* + wL^*$,

$$C^* = \left(\frac{1}{4} Q_0\right)^{3/2} + \left(\frac{1}{4} Q_0\right)^{3/2} \text{ car } r=w=1,$$

$$C^* = 2\left(\frac{1}{4} Q_0\right)^{3/2},$$

$$\boxed{C^* = \frac{1}{4} Q_0^{3/2}}$$

Pour déterminer le coût minimum qu'il faut dépenser pour produire Q_0 par

Nous obtenons

$$\boxed{C(Q)}$$

Étape 1

Il s'agit

Or $\Pi =$

$\Pi =$

Or à l'équilibre

$\Pi'_Q =$

De plus

Par conséquent

ce qui

Pour condition

En effet, la position d'équilibre est

Rapport du coût

Pour déterminer la fonction de coût total qui indique la dépense minimum que l'entreprise doit envisager pour atteindre un certain niveau de production, les prix des inputs restant constants, il suffit de remplacer Q_0 par Q .

Nous obtenons ainsi :

$$C(Q) = \frac{1}{4} Q^{3/2}.$$

Étape n° 2 : maximisation du profit de la firme.

Il s'agit pour l'entreprise de maximiser son profit Π .

$$\text{Or } \Pi = P \cdot Q - C(Q),$$

$$\Pi = P \cdot Q - \frac{1}{4} Q^{3/2}.$$

Or à l'optimum, nous avons :

$$\Pi'_Q = 0 \Leftrightarrow P - \frac{3}{8} Q^{1/2} = 0 \Leftrightarrow P = \frac{3}{8} Q^{1/2} \Leftrightarrow \boxed{P = C_m} \quad (1).$$

De plus, il s'agit d'un maximum de profit car :

$$\Pi''_{QQ} = -\frac{3}{16} Q^{-1/2} < 0.$$

$$\text{Par conséquent, } (1) \Rightarrow Q^* = \left(\frac{8P}{3}\right)^2,$$

$$\text{ce qui implique : } \boxed{Q^* = \frac{64}{9} P^2}.$$

Pour que Q^* soit l'offre de l'entreprise, nous devons imposer une condition : $P \geq CM_{\min}$, $CM_{\min}$ étant le minimum du coût moyen.

En effet, l'entreprise offrira son output tant qu'elle réalisera un profit positif ou nul, c'est-à-dire tant que le prix de l'output sera supérieur ou égal au seuil de rentabilité.

Rappelons que le seuil de rentabilité (SR) est égal au minimum du coût moyen.

Or le coût moyen est : $CM = \frac{C(Q)}{Q}$, c'est-à-dire $CM = \frac{1}{4} \cdot Q^{1/2}$,

et il est minimum quand $Q = 0 \Rightarrow SR = CM(0) = 0$.

Le seuil de rentabilité est donc $SR = 0$.

En conclusion, l'offre de l'entreprise est donc :

$$Q^s = \frac{64}{9} \cdot P^2 \text{ avec } P \geq 0.$$

2 Si $P = 3$, déterminons la quantité d'output qui maximise le profit :

Application numérique :

$$Q^* = 64.$$

En produisant $Q^* = 64$, si $P = 3$, la firme maximisera son profit.

3 a Si $P = 9$, déterminons la quantité d'output qui maximise le profit :

Application numérique :

$$Q^* = 576.$$

En produisant $Q^* = 576$, si $P = 9$, la firme maximisera son profit.

b Si $P = 12$, déterminons la quantité d'output qui maximise le profit :

Application numérique :

$$Q^* = 1024.$$

En produisant $Q^* = 1024$, si $P = 12$, la firme maximisera son profit.