Séries entières

Exercice 1. Soit

Fomesoutra.com ça soutra ! Docs à portée de main

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Une série entière. On suppose qu'elle diverge pour $z = 3 + 4i$ et qu'elle converge pour $z = 5i$. Quel est son rayon de convergence ?

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+3)!\, z^n\,; \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n\,; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n\,; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n\,; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n\,; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1}\,; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n-1) 2^n z^n\,; \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{3^n} z^n\,; \quad f_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$f_4(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2} z^n\,; \quad f_5(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2+1} z^n\,; \quad f_6(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$$

$$f_7(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1}\,; \quad f_8(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n\,; \quad f_9(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha z^n\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R

Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Etudier la convergence en $-R$ et en R.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Développer les fonctions suivantes en séries entières de x :

1. $f: x \to \frac{1}{(1-x)(2+x)}$

2. $f : x \to \frac{1}{1+x+x^2}$
3. $f : x \to \ln(x^2 + x + 1)$

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soit f définie sur $]-1,1[$ par

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Justifier que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.
3. Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

1. Déterminer f solution de l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = 0$
2. Reconnaitre f.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière dont le rayon de convergence est strictement positif. On note f sa somme sur $]-R, R[$.

1. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coefficients a_n pour que f satisfasse l'équation différentielle
$$xf''(x) + 2f'(x) + xf(x) = 0$$
2. On suppose ces conditions vérifiées. Déterminer les a_n lorsque $a_0 = 1$.
3. Quelle est la valeur de R ? Quelle est la fonction f obtenue ?

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

On considère la série complexe de somme

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$$

Où les a_n sont définis par :

$$a_0 = 1, a_1 = 3, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$.
2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < R$
$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$
3. En déduire la valeur de, R, ainsi que l'expression de a_n en fonction de n.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

On définit la suite (a_n) par $a_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$$

Et on pose $b_n = \frac{a_n}{n!}$

1. Montrer que $|a_n| \leq \frac{n!}{2^n}$, en déduire que le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n x^n$ n'est pas nul.
2. On appelle $S(x)$ la somme de cette série, calculer $S'(x)$ en fonction de $S(x)$.
3. En déduire $S(x)$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12. Intégration

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$$

Allez à : Correction exercice 12

Corrections

Correction exercice 1.

La série entière diverge pour $z = 3 + 4i$ donc son rayon de converge $R \leq |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

La série entière converge pour $z = 5i$ donc son rayon de converge $R \geq |5i| = 5$

Donc $R = 5$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

- $a_n = (-1)^n (n+3)!$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+4)!}{(n+3)!} = n + 4 \to +\infty$$

Donc $R = 0$

Allez à : Exercice 2

- $a_n = n^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n \to +\infty$$

Donc $R = 0$

Allez à : Exercice 2

- $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2n+2)!\, n!\, n!}{(n+1)!\,(n+1)!\,(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!\, n!\, n!}{(n+1)n!\,(n+1)n!\,(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \to 4$$

Donc $R = \frac{1}{4}$

Allez à : Exercice 2

- $a_n = \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}}{\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}} = \frac{(\ln(n+1))^2}{\ln(n)\ln(n+2)}$$

Il est presque évident que la limite est 1, on va quand même faire un effort

$$\ln(n+1)=\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n)\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)\sim\ln(n)$$

De même

$$\ln(n+2)\sim\ln(n)$$

Donc

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\sim\frac{(\ln(n))^2}{\ln(n)\ln(n)}=1\to 1$$

Donc $R=\frac{1}{1}=1$

Allez à : Exercice 2

- $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{1+o(1)}\to e$$

Donc $R=\frac{1}{e}$

Allez à : Exercice 2

- $a_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$, notons que $1+\frac{(-1)^n}{n}\geq 0$

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e^{(-1)^n+o(1)}}$$

Cette expression n'a pas de limite, on voit bien qu'il va falloir séparer les n pairs et les n impairs

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{p=1}^{+\infty}a_{2p}x^{2p}+\sum_{p=0}^{+\infty}a_{2p+1}x^{2p+1}=\sum_{p=1}^{+\infty}a_{2p}(x^2)^p+x\sum_{p=0}^{+\infty}a_{2p+1}(x^2)^p$$

On pose

$$\alpha_p=a_{2p}=\left(1+\frac{(-1)^{2p}}{2p}\right)^{(2p)^2}=\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{4p^2}$$

$$\beta_p=a_{2p+1}=\left(1+\frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1}\right)^{(2p+1)^2}=\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p+1}=\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p}$$
$$=\frac{2p}{2p+1}\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p}$$

Cherchons les rayons de convergence de ces deux séries

$$\sqrt[n]{\alpha_p}=\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{4p}=e^{4p\ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)}=e^{4p\left(\frac{1}{2p}+o\left(\frac{1}{p}\right)\right)}=e^{2+o(1)}\to e^2$$

Le rayon de convergence de la série entière de terme général α_pX^p est $\frac{1}{e^2}$, donc le rayon de convergence de la série entière de terme général α_px^{2p} est $R_1=\frac{1}{e}$.

$$\sqrt[p]{\beta_p}=\left(\frac{2p}{2p+1}\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p+4}$$
$$=\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^4\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p}$$

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}=1$$

$$\lim_{p\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^4=1$$

$$\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p}=e^{4p\ln\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)}=e^{4p\left(-\frac{1}{2p+1}+o\left(\frac{1}{p}\right)\right)}=e^{\frac{-4p}{2p+1}+o\left(\frac{1}{p}\right)}\to\frac{1}{e^2}$$

Donc $\sqrt[p]{\beta_p}\to\frac{1}{e^2}$

Le rayon de convergence de la série entière de terme général $\beta_p X^p$ est e^2, donc le rayon de convergence de la série entière de terme général $\alpha_p x^{2p}$ est $R_2=e$.

La série entière de terme général $a_n x^n$ est la somme de ces deux séries donc son rayon de convergence est

$$R=\min(R_1,R_2)=\frac{1}{e}$$

Allez à : Exercice 2

- $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}z^{3n+1}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}(z^3)^n$$

On va chercher le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}X^n$$

$a_n=\frac{(-2)^n}{n+1}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\left|\frac{(-2)^{n+1}}{n+2}\right|}{\left|\frac{(-2)^n}{n+1}\right|}=\frac{n+1}{n+2}\to 1$$

La série entière de terme général $a_n X^n$ a pour rayon de convergence $R=\frac{1}{1}=1$

La série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}(z^3)^n$$

Converge pour $|z^3|<1\Leftrightarrow |z|<1$ et diverge pour $|z^3|>1\Leftrightarrow |z|>1$

Son rayon de convergence est 1.

Allez à : Exercice 2

- $a_n=(1+i)^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|(1+i)^{n+1}|}{|(1+i)^n|}=|1+i|=\sqrt{2}\to\sqrt{2}$$

Le rayon de convergence de la série entière de terme général $(1+i)^n z^n$ est $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. Soit $a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\left|(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}n2^{n+1}\right|}{\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n\right|}=\frac{n2^{n+1}}{(n-1)2^n}=2\frac{n}{n-1}\to 2$$

Donc le rayon de convergence est $R=\frac{1}{2}$

Allez à : Exercice 3

2. Soit $a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\left|(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}n2^{n+1}\right|}{\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n\right|}=\frac{n2^{n+1}}{(n-1)2^n}=2\frac{n}{n-1}\to 2$$

Donc le rayon de convergence est $R=\frac{1}{2}$.

Allez à : Exercice 3

3. Soit $a_n=\frac{1}{n!}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\to 0$$

Donc le rayon de convergence est $R=+\infty$

$$f_3(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n=e^z$$

Allez à : Exercice 3

4. Soit $a_n=e^{-n^2}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}}=e^{n^2-(n+1)^2}=e^{-2n-1}\to 0$$

Donc le rayon de convergence est $R=+\infty$.

Ou

$$\sqrt[n]{|a_n|}=e^{-n}\to 0$$

Allez à : Exercice 3

5. Soit $a_n=\frac{n-1}{n^2+1}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\frac{n}{(n+1)^2+1}}{\frac{n-1}{n^2+1}}=\frac{n(n^2+1)}{((n+1)^2+1)(n-1)}\to 1$$

Donc le rayon de convergence est $R=1$.

Allez à : Exercice 3

6. Soit $a_n=\frac{\ln(n)}{n^2}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{\ln(n)}{n^2}}=\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\times\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)}\times\frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$=\frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\times\frac{n^2}{(n+1)^2}\to 1$$

Donc le rayon de convergence est $R=\frac{1}{1}=1$.

Allez à : Exercice 3

7.

$$f_7(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{2n+1}=z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{2n}=z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}X^n$$

Avec $x=z^2$

Soit $a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{[a_n|}=\frac{\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+2}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|}=\frac{n+1}{n+2}\to 1$$

Donc le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1}X^n$ est $R=\frac{1}{1}$

Et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{2n}$ est $R'^2=R=1$, donc $R'=1$.

Allez à : Exercice 3

8. Soit $a_n=\frac{(3n)!}{(n!)^3}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{[a_n|}=\frac{\left|\frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3}\right|}{\left|\frac{(3n)!}{(n!)^3}\right|}=\frac{(3(n+1))!}{(3n)!}\times\frac{(n!)^3}{((n+1)!)^3}=\frac{(3n+3)!}{(3n)!}\times\frac{(n!)^3}{((n+1)n!)^3}=$$

$$=\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(3n)!}\times\frac{(n!)^3}{(n+1)^3(n!)^3}=\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3}$$

$$\to 3^3=27$$

Donc

$$R=\frac{1}{27}$$

Allez à : Exercice 3

9. Soit $a_n=n^\alpha$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha\to 1$$

Donc le rayon de convergence est $R=\frac{1}{1}$.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n$$

Cette série entière converge pour $|X|<R$ et diverge pour $|X|>R$, autrement dit cette série converge pour $|z^2|<R$ et diverge pour $|z^2|>R$ donc le rayon de convergence est $\sqrt{R}$.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1. Si $|x|<1$

$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\right|\le x^n$$

Et la série de terme général x^n converge.

Si $|x|>1$

$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\right|\sim\frac{1}{\sqrt{n}}|x|^n=\frac{1}{\sqrt{n}}e^{n\ln|x|}\to+\infty$$

Le terme général de la série ne tend pas vers 0 donc la série diverge

Donc le rayon de convergence de la série entière de terme général $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$ a pour rayon de convergence $R=1$.

2. Si $x=1$

La série numérique de terme général $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une suite de Riemann diverge avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$, la série diverge.

Si $x = -1$

$(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est le terme général d'une série alternée, manifestement la suite $\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ est décroissante car si on pose

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sin\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Alors

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\cos\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) < 0$$

De plus elle tend vers 0, d'après le TSSA, la série de terme général $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est convergente.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

Dans cet exercice on ne s'intéresse pas aux rayons de convergence (pourtant il y aurait à dire) donc les égalités seront à l'intérieur du rayon de convergence que l'on espérera non nul.

1.

$$\frac{1}{(1-x)(2+x)} = \frac{\frac{1}{3}}{1-x} + \frac{\frac{1}{3}}{2+x} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-x} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2^n}\right)x^n$$

2.

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{(x-j)(x-j^2)} = \frac{a}{x-j} + \frac{\overline{a}}{x-j^2}$$

$$a = \left[\frac{1}{x-j^2}\right]_{x=j} = \frac{1}{j-j^2} = \frac{1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{i\sqrt{3}} = -\frac{i\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{-\frac{i\sqrt{3}}{3}}{x-j} + \frac{\frac{i\sqrt{3}}{3}}{x-j^2} = -\frac{i\sqrt{3}}{3}\frac{1}{j(xj^2-1)} + \frac{i\sqrt{3}}{3}\frac{1}{j^2(xj-1)} = -\frac{ij^2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{xj^2-1} + \frac{ij\sqrt{3}}{3}\frac{1}{xj-1}$$
$$= \frac{ij^2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{1-xj^2} - \frac{ij\sqrt{3}}{3}\frac{1}{1-xj} = \frac{ij^2\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(xj^2)^n - \frac{ij\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(xj)^n$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(ij^2(j^2)^n - ijj^n)x^n = \frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(i(j^2)^{n+1} - ij^{n+1})x^n$$

On peut arranger $i(j^2)^{n+1} - ij^{n+1}$

$$i(j^2)^{n+1} - ij^{n+1} = i((j^2)^n - j^n) = i\left(e^{-i\frac{2(n+1)\pi}{3}} - e^{i\frac{2(n+1)\pi}{3}}\right) = i\left(-2i\pi\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 2\pi\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n$$

3. $f(x) = \ln(x^2+x+1)$ entraine que

$$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}=2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n$$

D'après la question précédente, alors

$$f'(x)=2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}2\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n\right)$$

Dans la première somme on pose $n'=n+1$, $n=0\Rightarrow n'=1$,

$$f'(x)=2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sum_{n'=1}^{+\infty}2\sin\left(\frac{2n'\pi}{3}\right)x^{n'}+\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n\right)$$

Puis on change n' en n

$$f'(x)=2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}2\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n\right)$$

$$=2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)\right)x^n\right)$$

On en déduit que

$$f(x)=f(0)+2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)x+2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

On a $f(0)=0$ et on fait un changement de varible $n'=n+1$, puis on rechange n' par n

$$f(x)=-2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(2\sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)\frac{x^n}{n}$$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1.

$$X\to(1-X)^{-\frac{1}{2}}$$

Est une fonction qui admet un développement en série entière sur $|X|<1$, donc

$$x\to\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Est une fonction qui admet un développement en série entière sur $|x^2|<1$, donc sur $|x|<1$

$$x\to\arcsin(x)$$

A pour dérivée $x\to\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ qui admet un développement en séries entières sur $|x|<1$ donc arcsin admet un développement en séries entières sur $|x|<1$, pour finir le produit de deux séries admettant des développements en séries entières sur $|x|<1$ admet un développement en séries entières sur $|x|<1$.

Allez à : Exercice 7

2.

$$f(x)=\arcsin(x)\times(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\times(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+\arcsin(x)\times\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{1-x^2}+\arcsin(x)\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{1-x^2}+f(x)\frac{x}{1-x^2}$$

Par conséquent

$$(1-x^2)f'(x)=1+xf(x)$$

C'est bien ce que demandait de montrer l'énoncé.

Allez à : Exercice 7

3. On pose

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1\Leftrightarrow f'(x)-x^2f'(x)+xf(x)=1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-x^2\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}-x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=1\quad(*)$$

Le but va être un « x » dans chaque somme

Dans la seconde somme on pose $n'=n+1$, $n=0\Rightarrow n'=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n+1}=\sum_{n'=1}^{\infty}(n'-1)a_{n'-1}x^{n'}$$

Puis on remplace n' par n

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n$$

Dans la troisième somme on pose $n'=n+1$, $n=0\Rightarrow n'=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{n'=1}^{\infty}a_{n'-1}x^{n'}$$

Puis on remplace n' par n

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

On remplace tout cela dans $(*)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=1$$

On réunit ces trois sommes à partir de $n=1$, pour cela on va séparer le terme $n=0$ de la première somme des autres termes

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=1$$

Donc

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)a_{n+1}-(n-1)a_{n-1}-a_{n-1}\big)x^n=1\Leftrightarrow a_1+\sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)a_{n+1}-na_{n-1}\big)x^n=1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\forall n\geq 1,(n+1)a_{n+1}-na_{n-1}=0\\ a_1=1\end{cases}$$

$$n\geq 1,\qquad (n+1)a_{n+1}-na_{n-1}=0\Leftrightarrow n\geq 2,\qquad na_n-(n-1)a_{n-2}=0\quad(**)$$

On va distinguer n pair et n impair

- $n=2p$

$$(**)\Leftrightarrow 2pa_{2p}=(2p-1)a_{2(p-1)}$$

Comme $f(0)=0$ on a $a_0=0$, puis par une récurrence très simple, a_{2p} est nul.

- $n=2p+1$

$$(**)\Leftrightarrow(2p+1)a_{2p+1}=2pa_{2p-1}\Leftrightarrow a_{2p+1}=\frac{2p}{2p+1}a_{2p-1}$$

Comme on connait $a_1=1$, on peut en déduire $a_3=\frac{2\times 1}{2\times 1+1}a_{2\times 1-1}=\frac{2}{3}a_1$,etc…

Il reste à trouver la « formule » donnant a_{2p+1} pour tout $p \geq 0$
$$a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} a_{2p-1}$$
Si on remplace p par $p-1$
$$a_{2p-1} = \frac{2(p-1)}{2p-1} a_{2p-3}$$
Puis par $p-2$
$$a_{2p-3} = \frac{2(p-2)}{2p-3} a_{2p-5}$$
Jusqu'à $p = 2$
$$a_5 = \frac{2 \times 2}{2 \times 2 + 1} a_3$$
Puis $p = 1$
$$a_3 = \frac{2 \times 1}{2 \times 1 + 1} a_1$$
On n'a plus qu'à multiplier toutes ces égalités, les termes en « a_{2p-k} » s'éliminent
$$a_{2p+1} = \frac{2^p p!}{(2p+1)(2p-1) \dots 5 \times 3} a_1$$
On peut améliorer ce résultat en multipliant en haut et en bas par
$$2p(2p-2) \dots 4 \times 2 = 2^p p!$$
De façon à « boucher » les trous en bas pour reconstituer $(2p+1)!$
$$a_{2p+1} = \frac{2^p p!\, 2^p p!}{(2p+1)2p(2p-1)(2p-2) \dots 5 \times 4 \times 3 \times 2} a_1 = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$
Il reste à écrire le développement en série entière
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$
Il faut quand même vérifier que cette égalité est valable sur tout $]-1,1[$, pour cela il faut trouver le rayon de convergence de la série, reprendre $\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$, c'est assez maladroit, il vaut mieux reprendre l'égalité
$$a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} a_{2p-1} \Leftrightarrow \frac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}} = \frac{2p}{2p-1} \to 1$$
Donc $R = \frac{1}{1} = 1$.

Ce n'est pas exactement $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ mais pour une série lacunaire (qui a des trous, c'est-à-dire les a_{2p} ici) c'est bien ainsi que cela marche.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. On pose
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$
$$\Rightarrow f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$
Pour obtenir un x^n dans $x^2 f''(x)$ on va utiliser la première expression de la dérivée seconde.

Pour obtenir un x^n dans $xf'(x)$ on va utiliser la première expression de la dérivée.
Pour $f(x)$ on n'a pas le choix

$$x^2f''(x)+4xf'(x)-(2-x^2)f(x)-1=0 \Leftrightarrow x^2f''(x)+4xf'(x)+2f(x)-x^2f(x)-1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+4x\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n-x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^n+4\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^n+2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+2}-1=0$$

Pour les trois premières sommes tout va bien on a des « x^n », pour la dernière, c'est plus compliqué, on pose $n'=n+2$, $n=0\Rightarrow n'=2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+2}=\sum_{n'=2}^{\infty} a_{n'-2}x^{n'}$$

Puis on remplace n' par n

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+2}=\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

On remplace

$$x^2f''(x)+4xf'(x)-(2-x^2)f(x)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^n+4\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^n+2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n-\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n-1=0$$

Pour réunir ces quatre sommes en une seule, il va falloir partir de $n=2$, donc isoler les termes en $n=0$ et $n=1$ dans les trois premières sommes

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^n=0\times(-1)\times a_0x^0+1\times 0\times a_1x+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^n=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^n=0\times a_0x^0+1\times a_1x+\sum_{n=2}^{\infty} na_nx^n=a_1x+\sum_{n=2}^{\infty} na_nx^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n=a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n$$

On remplace

$$x^2f''(x)+4xf'(x)-(2-x^2)f(x)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^n+4\left(a_1x+\sum_{n=2}^{\infty} na_nx^n\right)+2\left(a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n\right)-\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}(n(n-1)a_n+4na_n+2a_n-a_{n-2})x^n+4a_1x+2a_0+2a_1x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\big((n^2-n+4n+2)a_n-a_{n-2}\big)x^n+6a_1x+2a_0-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\big((n^2+3n+2)a_n-a_{n-2}\big)x^n+6a_1x+2a_0-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\big((n+1)(n+2)a_n-a_{n-2}\big)x^n+6a_1x+2a_0-1=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n\geq 2, (n+1)(n+2)a_n-a_{n-2}=0 \quad (*)\\ 6a_1=0\\ 2a_0-1=0\end{cases}$$

On va distinguer deux cas, n pair et n impair

- $n = 2p + 1$

$$(*) \Leftrightarrow (2p + 2)(2p + 3)a_{2p+1} = a_{2p-1}$$

Comme $a_1 = 0$ tous les a_{2p+1} sont nuls.

- $n = 2p$

$$(*) \Leftrightarrow (2p + 1)(2p + 2)a_{2p} = a_{2(p-1)}$$
$$\Leftrightarrow a_{2p} = \frac{1}{(2p + 2)(2p + 1)} a_{2(p-1)}$$

Puis on remplace p par $p - 1$

$$a_{2(p-1)} = \frac{1}{2p(2p - 1)} a_{2(p-2)}$$

Puis par $p - 2$

$$a_{2(p-2)} = \frac{1}{(2p - 2)(2p - 3)} a_{2(p-3)}$$

Jusqu'à $p = 2$

$$a_4 = \frac{1}{6 \times 5} a_2$$

Et enfin $p = 1$

$$a_2 = \frac{1}{4 \times 3} a_0 = \frac{1}{4 \times 3 \times 2}$$

On multiplie toutes ces lignes, les « $a_{2(p-k)}$ » se simplifient

$$a_{2p} = \frac{1}{(2p + 2)!}$$

Il reste à écrire le développement en série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p + 2)!} x^{2p}$$

Il faut quand même regarder où cette égalité est valable

$$a_{2p} = \frac{1}{(2p + 2)(2p + 1)} a_{2(p-1)} \Leftrightarrow \frac{a_{2p}}{a_{2(p-1)}} = \frac{1}{(2p + 2)(2p + 1)} \to 0$$

Donc $R = +\infty$.

Ce n'est pas exactement $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ mais pour une série lacunaire (qui a des trous, c'est-à-dire les a_{2p} ici) c'est bien ainsi que cela marche.

Allez à : Exercice 8

2. Si $x \neq 0$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p + 2)!} x^{2p} = \frac{1}{x^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p + 2)!} x^{2p+2} = \frac{1}{x^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p!} x^{2p}$$

En posant $p' = p + 1$, puis en renommant p' par p.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p!} x^{2p} = \frac{1}{x^2} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p!} x^{2p} - 1 \right) = \frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2}$$

Si $x = 0$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p + 2)!} 0^{2p} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$\Rightarrow f''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

Pour obtenir un « x^n » dans $f'(x)$ on va prendre la seconde expression

Pour obtenir un « x^n » dans $xf''(x)$ on va utiliser la seconde expression

$$xf''(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n$$

$$xf(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}$$

On pose $n'=n+1$, $n=0\Rightarrow n'=1$

$$xf(x)=\sum_{n'=1}^{\infty}a_{n'-1}x^{n'}$$

Puis on change n' en n

$$xf(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

On remplace cela dans

$$xf''(x)+2f'(x)+xf(x)=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0$$

On va pouvoir regrouper ces trois sommes à partir de $n=1$, donc dans les deux premières on va isoler les termes pour $n=0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n=1\times 0\times a_1x^0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=1\times a_1x^0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

On remplace

$$xf''(x)+2f'(x)+xf(x)=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n+2a_1+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)na_{n+1}+2(n+1)a_{n+1}+a_{n-1}\big)x^n+2a_1=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)(n+2)a_{n+1}+a_{n-1}\big)x^n+2a_1=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\forall n\geq 1,(n+1)(n+2)a_{n+1}+a_{n-1}=0\\ 2a_1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \geq 1, a_{n+1} = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)} \\ 2a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \geq 2, a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n(n+1)} \\ 2a_1 = 0 \end{cases}$$

On va distinguer le cas n pair et le cas n impair.

- Si $n = 2p + 1$, comme $a_1 = 0$ tous les termes $a_{2p+1} = 0$
- Si $n = 2p$

$$\forall n \geq 2, a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)} \Leftrightarrow \forall p \geq 1, a_{2p} = -\frac{a_{2(p-1)}}{2p(2p+1)}$$

$$a_{2p} = -\frac{a_{2(p-1)}}{2p(2p+1)}$$

On change p en $p - 1$

$$a_{2(p-1)} = -\frac{a_{2(p-2)}}{(2p-2)(2p-1)}$$

En $p - 2$

$$a_{2(p-2)} = -\frac{a_{2(p-3)}}{(2p-4)(2p-3)}$$

$p = 2$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4 \times 5}$$

$p = 1$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \times 3} = -\frac{1}{2 \times 3}$$

On multiplie ces p lignes, les $a_{2(p-k)}$ s'éliminent

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}$$

Il reste à écrire le développement en série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$$

Allez à : Exercice 9

2.

$$|a_{2p}| = \frac{|a_{2(p-1)}|}{2p(2p+1)} \Leftrightarrow \frac{|a_{2p}|}{|a_{2(p-1)}|} = \frac{1}{2p(2p+1)} \to 0$$

Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Si $x \neq 0$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p} = \frac{1}{x} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} = \frac{\sin(x)}{x}$$

Si $x = 0$,

$$f(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} 0^{2p} = \frac{(-1)^0}{(2 \times 0 + 1)!} = 1$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1. Montrons par récurrence que $|a_n| < 4^n$

   L'inégalité est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, supposons la vraie pour a_{n-2} et a_{n-1} alors

$$|a_n| = |3a_{n-1} - 2a_{n-2}| < 3|a_{n-1}| + 2|a_{n-2}| < 3 \times 4^{n-1} + 2 \times 4^{n-2} = 4^{n-2}(3 \times 4 + 2)$$
$$= 4^{n-2} \times 14 < 4^{n-2} \times 16 = 4^n$$

On pose $b_n = 4^n$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4 \to 4$$

Donc le rayon de converge de la série entière de terme général $b_n z^n$ est $\frac{1}{4}$, comme $|a_n| < b_n$ le rayon de converge de la série entière de terme général $a_n z^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

2.

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n = 1 + 3z + \sum_{n=2}^{+\infty} (3a_{n-1} - 2a_{n-2}) z^n =$$
$$= 1 + 3z + 3\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} z^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} z^n$$

Dans la première somme on pose $n' = n - 1$, $n = 2 \Rightarrow n' = 1$, dans la deuxième on pose $n'' = n - 2$, $n = 2 \Rightarrow n'' = 0$

$$f(z) = 1 + 3z + 3\sum_{n'=1}^{+\infty} a_{n'} z^{n'+1} - 2\sum_{n''=0}^{+\infty} a_{n''} z^{n''+2}$$

Puis on change n' et n'' en n

$$f(z) = 1 + 3z + 3\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n+1} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n+2} = 1 + 3z + 3z\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n - 2z^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
$$= 1 + 3z + 3z\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n - a_0\right) - 2z^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n =$$
$$= 1 + 3z + 3z(f(z) - 1) - 2z^2 f(z) = 1 + 3z f(z) - 2z^2 f(z)$$

D'où l'on déduit que

$$f(z) - 3z f(z) + 2z^2 f(z) = 1$$

Ce qui équivaut à

$$f(z)(1 - 3z + 2z^2) = 1$$

Ou encore

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$

3.

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{1}{2(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{z-1} + \frac{-1}{z - \frac{1}{2}} = \frac{-1}{1-z} + \frac{2}{1-2z}$$
$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n$$

On pose $\alpha_n = 1$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 \to 1$$

Donc le rayon de convergence de la série de terme général z^n est $R_1 = \frac{1}{1} = 1$

On pose $\beta_n = 2^n$

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \to 2$$

Donc le rayon de convergence de la série de terme général z^n est $R_2 = \frac{1}{2}$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1 + 2^{n+1}) z^n$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière de terme général $(-1 + 2^{n+1})z^n$ est

$$R = \min(R_1, R_2) = \frac{1}{2}$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. $|a_n| \le \frac{n!}{2^n}$ est vraie pour $n = 0$, supposons que l'inégalité est vraie pour tout $k' \in \{0,1, \dots, n\}$, alors

$$2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k} \le \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{2^k} \frac{(n-k)!}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{k!}{2^k} \frac{(n-k)!}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{2^n} = \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 1$$
$$= \frac{n!}{2^n}(n+1) = \frac{(n+1)!}{2^n}$$

Puis on divise par 2

$$a_{n+1} \le \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$$

Ce qui achève la récurrence.

$$|b_n| = \frac{|a_n|}{n!} \le \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{n!} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

On pose

$$\alpha_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$
$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{n+2}{2^{n+2}}}{\frac{n+1}{2^{n+1}}} = \frac{n+2}{n+1} \times \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$$

Donc le rayon de convergence de la série entière de terme général $\alpha_n x^n$ est 2, comme $|b_n| \le \alpha_n$ le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n x^n$ est supérieur ou égal à 2.

2.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$$

On pose $n' = n - 1$ dans la somme, $n = 1 \Rightarrow n' = 0$

$$S(x) = b_0 + \sum_{n'=0}^{+\infty} b_{n'+1} x^{n'+1}$$

Puis on change n' en n

$$S(x) = b_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n+1} x^{n+1}$$

Cette petite manipulation permet de faire apparaitre $b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n!}$ Ce qui est suggéré par l'énoncé puisque l'on a a_{n+1} en fonction d'autres « $a_{k'}$ »

$$S(x) = \frac{a_0}{0!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}\, x^{n+1} \right)$$

Allons-y maintenant on peut dériver, on aurait pu le faire avant mais là, on est bien

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(n+1)\binom{n}{k}a_k a_{n-k}\,x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k}\,x^n\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k}\,x^{n-k}x^k\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,(n-k)!}a_k a_{n-k}x^{n-k}x^k\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k x^k}{k!}\frac{a_{n-k}x^{n-k}}{(n-k)!}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}b_k x^k b_{n-k}x^{n-k}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n\right)=\frac{1}{2}\big(S(x)\big)^2$$

Car ces séries convergent absolument à l'intérieur du cercle de convergence.

3. Cela donne

$$\frac{S'(x)}{\big(S(x)\big)^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{S(x)}=\frac{1}{2}x+K,\quad K\in\mathbb{R}$$

Soit

$$S(x)=-\frac{1}{\frac{1}{2}x+K}$$

Or

$$s(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n=b_0=\frac{a_0}{0!}=1$$

Ce qui entraine que $K=-1$ et finalement

$$S(x)=\frac{-1}{\frac{1}{2}x-1}=\frac{1}{2-x}$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

Il faut faire attention au fait que l'intégrale est une intégrale généralisée en 0, avec les règles de Riemann en 0 avec $\alpha=\frac{1}{2}<1$

$$\sqrt{x}\,\frac{\ln(x)}{1+x^2}\to 0$$

Montre que l'intégrale est convergente

D'autre part

$$\forall x\in[0,1[,\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Pour pouvoir appliquer la formule qui permet d'invertir les symboles $\int$ et $\sum$ il faut se placer sur un intervalle borné où la fonction est continue et où on peut appliquer la formule ci-dessus, on pose

$$I(\epsilon,X)=\int_\epsilon^X\frac{\ln(x)}{1+x^2}dx=\int_\epsilon^X\left(\ln(x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\right)dx=\int_\epsilon^X\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\ln(x)\right)dx$$

C'est faisable mais pas simple du tout, alors on va faire autrement en faisant une intégration par partie de

$\int_\epsilon^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$	
$u'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$u(x)=\arctan(x)$
$v(x)=\ln(x)$	$v'(x)=\frac{1}{x}$
$\int_\epsilon^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx=[\ln(x)\arctan(x)]_0^1-$	$\int_\epsilon^1 \frac{\arctan(x)}{x}dx$

$$\int_\epsilon^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx=[\ln(x)\arctan(x)]_\epsilon^1-\int_\epsilon^1 \frac{\arctan(x)}{x}dx$$

On vérifie que ces trois termes sont bien convergents.

$$[\ln(x)\arctan(x)]_\epsilon^1=\ln(1)\arctan(1)-\ln(\epsilon)\arctan(\epsilon)=-\ln(\epsilon)\arctan(\epsilon)\sim-\epsilon\ln(\epsilon)\to 0$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx=\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}dx$$

Le développement en série entière de $\arctan(x)$ est

$$\forall x\in]-1,1[,\qquad \arctan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

On a un problème en $x=1$, la série est alternée, $\frac{1}{2n+1}$ tend vers 0 en étant décroissante donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge on a donc

$$\forall x\in]-1,1],\qquad \arctan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Et

$$\forall x\in]-1,1],\frac{\arctan(x)}{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$$

Il faut montrer la convergence uniforme de la série de fonction de terme général $\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$ sur $[0,1]$. Il s'agit d'une série alternée, on va utiliser la majoration du reste du TSSA

$$\forall x\in[0,1],\qquad |R_n(x)|\le\frac{x^{2(n+1)}}{2n+3}\le\frac{1}{2n+3}\to 0$$

Cela montre la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général $\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$ sur $[0,1]$.

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx=\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}dx$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Allez à : Exercice 12