

Séries de fonctions

Exercice 1.

On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$

1. Etudier la convergence simple de cette série sur $[0,1[$.
2. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, a]$ où $a \in]0,1[$.
3. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,1[$.

Allez à : [Correction exercice 1](#)

Exercice 2.

On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx} \sin(nx)}{\ln(n+1)}$$

1. Etudier la convergence simple de cette série sur $]0, +\infty[$.
2. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

Allez à : [Correction exercice 2](#)

Exercice 3. Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonction $\sum f_n$ dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0, +\infty[$, puis sur $[0,1]$, puis sur $[0, a]$ avec $a \in]0,1[$.
2. $f_n(x) = \frac{x^2}{n^3+x^3}$ sur $[0, +\infty[$, puis sur $[0, a]$ avec $a > 0$.
3. $f_n(x) = \frac{x}{n^3+x^3}$ sur $[0, +\infty[$.

Allez à : [Correction exercice 3](#)

Exercice 4. On considère la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 1} f_n \quad \text{avec} \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2}{x^4 + n}$$

1. Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que cette série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle cette série est normalement convergente.
4. Montrer que cette série est continue.

Allez à : [Correction exercice 4](#)

Exercice 5. Montrer que la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Allez à : [Correction exercice 5](#)

Exercice 6.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$ converge uniformément sur tout intervalle $[-a, a]$ où $a > 0$.
2. Montrer que cette série est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Allez à : [Correction exercice 6](#)

Exercice 7. Montrer que la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \sin(n^2 x)$$

Est dérivable.

Allez à : [Correction exercice 7](#)

Exercice 8. On considère la série de fonction $\sum_{n \geq 1} f_n$ avec

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est une fonction continue.
3. Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

4. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

- 5.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Allez à : [Correction exercice 8](#)

Exercice 9. Soit une suite de fonctions réelles définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(x+1)}$.

1. Montrer que la série de fonctions associée converge simplement vers une fonction f .
2. Montrer que cette série de converge uniformément sur $[0,1]$.
3. La série converge-t-elle normalement ?

Allez à : [Correction exercice 9](#)

Exercice 10.

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{k e^{-kx}}{k^2 + 1}$$

Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que f est continue sur D .

2. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{-kx}}{k^2 + 1}$$

Déterminer le domaine de définition D' de g et montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D' .

Allez à : [Correction exercice 10](#)

Exercice 11.

Soit $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ pour x un réel positif.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, $a > 0$. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[0, +\infty[$ ou sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Allez à : [Correction exercice 11](#)

Exercice 12. Continuité

Montrer que les fonctions suivantes sont définies et continues :

$$f: x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \sin(nx)} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$g: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$h: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx + 1} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}$$

Allez à : [Correction exercice 12](#)

Exercice 13. Dérivation

Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$ avec $]0, +\infty[$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f .
2. Montrer que

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Allez à : [Correction exercice 13](#)

Exercice 14. Limite

On fixe $\alpha > 0$ et on pose

$$f_n(x) = e^{-n^\alpha x} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

1. Quel est le domaine de définition de f .
2. Continuité de f .
3. Etudier

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Allez à : [Correction exercice 14](#)

Exercice 15.

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

On pourra faire intervenir la série de fonctions (f_n) avec $f_n(x) = e^{-(n+1)x} \sin(x)$

Allez à : [Correction exercice 15](#)

Corrections

Correction exercice 1.

1. Pour tout $x \in [0,1[, x^2 \neq 1$

$$\sum_{n=0}^N x^{2n} = \sum_{n=0}^N (x^2)^n = \frac{1 - (x^2)^{N+1}}{1 - x^2} \rightarrow \frac{1}{1 - x^2}$$

Cette série de fonctions converge simplement vers la fonction $S: x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

2. $\forall x \in [0,1[, |x^{2n}| \leq a^{2n}$, or la série de terme général a^{2n} converge (voir 1.) donc la série de fonction de terme général x^{2n} est normalement convergente sur $[0, a]$ par conséquent elle converge uniformément sur $[0, a]$.
3. Supposons que cette série de fonctions converge uniformément sur $[0,1[$ alors elle converge uniformément vers sa limite simple $S: x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^N x^{2n} \right| = \left| \frac{1}{1-x^2} - \sum_{n=0}^N x^{2n} \right| = \left| \frac{1}{1-x^2} - \frac{1 - (x^2)^{N+1}}{1 - x^2} \right| = \frac{x^{2N+2}}{1 - x^2}$$

On considère la suite de terme général

$$x_N = 1 - \frac{1}{N}$$

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2N+2}}{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2} = \frac{e^{(2N+2)\ln\left(1 - \frac{1}{N}\right)}}{1 - \left(1 - \frac{2}{N} + \frac{1}{N^2}\right)} = \frac{e^{(2N+2)\left(-\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)}}{\frac{2}{N} - \frac{1}{N^2}} = N^2 \frac{e^{-2+o(1)}}{2N-1} \sim \frac{N}{2e} \rightarrow +\infty$$

Donc

$$\sup_{x \in [0,1[} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^N x^{2n} \right| = \sup_{x \in [0,1[} \left| \frac{x^{2N+2}}{1 - x^2} \right| \geq \frac{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2N+2}}{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2} \rightarrow +\infty$$

Ce qui montre qu'il n'y a pas convergence uniforme de la série de fonction de terme général x^{2n} .

Allez à : [Exercice 1](#)

Correction exercice 2.

1. On va appliquer les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

$$n^2 \frac{e^{-nx} \sin(nx)}{\ln(n+1)} \rightarrow 0$$

Donc la série (numérique) de terme général $\frac{e^{-nx} \sin(nx)}{\ln(n+1)}$ converge, autrement dit la série de fonction de terme général $f_n: x \mapsto \frac{e^{-nx} \sin(nx)}{\ln(n+1)}$ converge simplement.

- 2.

$$\left| \frac{e^{-nx} \sin(nx)}{\ln(n+1)} \right| < \frac{e^{-na} |\sin(nx)|}{\ln(n+1)} \leq \frac{e^{-na}}{\ln(n+1)}$$

On applique les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

$$n^2 \frac{e^{-na}}{\ln(n+1)} \rightarrow 0$$

Donc la série numérique de terme général $\frac{e^{-na}}{\ln(n+1)}$ converge, par conséquent la série fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a, +\infty[$, ce qui entraîne que la série fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Allez à : [Exercice 2](#)

Correction exercice 3.

1. Sur $[0,1[$, $x^n \rightarrow 0$ donc $f_n(x) \rightarrow 0$

$$\text{Si } x = 1, f_n(1) = \frac{1}{2}$$

Si $x \in]1, +\infty[$, $x^n \rightarrow +\infty$ donc $f_n(x) \rightarrow 1$

Revenons à la série de fonctions de terme général f_n :

- Sur $[0, +\infty[$, il y a des valeurs pour lesquelles $f_n(x)$ ne tend pas vers 0 donc la série ne converge pas simplement sur $[0, +\infty[$, donc elle ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.
- Sur $[0,1]$, il y a un problème en $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0 donc la série ne converge pas simplement sur $[0,1]$, donc elle ne converge pas normalement sur $[0,1]$.
- Sur $[0, a]$, pour tout $x \in [0, a]$ $f_n(x) \rightarrow 0$ mais cela ne suffit pas à assurer la convergence simple de la série de fonctions de terme général f_n (avec $f_n(x) > 0$)

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$

x^n est le terme général d'une série géométrique de raison dans $] -1, 1[$ donc convergente, ce qui entraîne que la série numérique de terme général converge, autrement dit la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $[0, a]$.

$$\forall x \in [0, a], \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right| \leq \frac{a^n}{1+0} = a^n$$

a^n est le terme général d'une série géométrique convergente car $a \in]0, 1[$ donc la série de fonction de terme général f_n converge normalement.

2. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$, la série nulle converge.

Si $x > 0$, $f_n(x) = \frac{x^2}{n^3+x^3} \sim \frac{x^2}{n^3}$, ce qui est le terme général d'une série numérique de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$

Donc la série de fonction f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$.

$$f'_n(x) = \frac{2x(n^3 + x^3) - x^2 \times 3x^2}{(n^3 + x^3)^2} = \frac{2nx^3 - x^4}{(n^3 + x^3)^2} = \frac{x^3(2n - x)}{(n^3 + x^3)^2}$$

Manifestement les fonctions f_n admettent un maximum en $x = 2n$ (il faut faire un tableau de variation)

$$f_n(2n) = \frac{(2n)^2}{n^3 + (2n)^3} = \frac{4n^2}{9n^3} = \frac{4}{9n}$$

On a donc

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(2n) = \frac{4}{9n}$$

Il s'agit d'une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leq 1$)

Donc la série ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

Sur $[0, a]$ le maximum est en $f_n(a)$ (au moins pour n assez grand)

$$f_n(a) = \frac{a^2}{n^3 + a^3} \sim \frac{a^2}{n^3}$$

ce qui est le terme général d'une série numérique de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$, par conséquent elle converge normalement sur $[0, a]$.

3. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$, la série nulle converge.

Si $x > 0$, $f_n(x) = \frac{x}{n^3+x^3} \sim \frac{x}{n^3}$, ce qui est le terme général d'une série numérique de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$

Donc la série de fonction f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$.

$$f'_n(x) = \frac{n^3 + x^3 - x \times 3x^2}{(n^3 + x^3)^2} = \frac{n^3 - 2x^3}{(n^3 + x^3)^2}$$

Il est à peu près clair que les fonctions f_n atteignent leur maximum là où la dérivée s'annule, c'est-à-dire pour

$$x^3 = \frac{n^3}{2} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{1}{3}}n$$

$$f_n\left(2^{-\frac{1}{3}}n\right) = \frac{2^{-\frac{1}{3}}n}{n^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}n\right)^3} = \frac{2^{-\frac{1}{3}}n}{\frac{3}{2}n^3} = \frac{2^{-\frac{4}{3}}}{3n^2}$$

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| = \frac{2^{-\frac{4}{3}}}{3n^2}$$

Il s'agit d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$, donc la série de fonction de terme général f_n converge normalement sur $[0, +\infty[$.

Allez à : **Exercice 3**

Correction exercice 4.

1. Si $x \neq 0$

$$|f_n(x)| \sim \frac{x^2}{n}$$

c'est insuffisant pour la convergence de la série, mais il s'agit d'une série alternée.

On pose $g_n(x) = \frac{x^2}{x^4+n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, pour un x fixé, cette suite est décroissante, d'après le TSSA, la suite numérique de terme général $\frac{x^2}{x^4+n}$ converge, au moins pour $x \neq 0$, mais pour $x = 0$, tout est nul, il y a convergence aussi.

2. Il faut utiliser le théorème du TSSA sur la majoration du reste

$$R_n(x) \leq |f_n(x)| = g_{n+1}(x) = \frac{x^2}{x^4 + n + 1}$$

Il suffit de montrer que cette expression tend vers 0 indépendamment de x .

$$g'_{n+1}(x) = \frac{2x(x^4 + n + 1) - x^2 \times 4x^3}{(x^4 + n + 1)^2} = \frac{2x(-2x^4 + n + 1)}{(x^4 + n + 1)^2}$$

Les fonctions g_n sont positives, donc elles atteignent leur max quand la dérivée s'annule.

$$g'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 = \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow x = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$g_{n+1}\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{\frac{n+1}{2} + n + 1} = \frac{\sqrt{\frac{n+1}{2}}}{\frac{3}{2}(n+1)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0$$

Ce qui entraîne que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} R_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0$$

Cela montre la convergence uniforme de la série de fonctions f_n .

3. Examinons la convergence normale sur un intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$
Etudions la suite de fonctions

$$|f_n(x)| = g_n(x) = \frac{x^2}{x^4 + n}$$

L'étude de cette fonction a déjà été faite au 2. en remplaçant $n + 1$ par n

Sur $[a, b]$, le maximum est

soit

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Soit

$$\frac{a^2}{a^4 + n} \sim \frac{a^2}{n}$$

Soit

$$\frac{b^2}{b^4 + n} \sim \frac{b^2}{n}$$

Qui sont les termes généraux de séries divergentes avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ et $\alpha = 1 \leq 1$, ce qui montre que la série de fonctions de terme général f_n n'est pas absolument convergente, sur un intervalle $[a, b]$.

Pour les intervalles du même type dans $\mathbb{R}^-$ cela ne change rien puisque les fonctions f_n sont paires.

4. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$ donc la somme est continue sur $\mathbb{R}$.

Allez à : **Exercice 4**

Correction exercice 5.

Il s'agit d'une série alternée mais le « $(n + 1)^3$ » au dénominateur va permettre de montrer la convergence normale sur $\mathbb{R}$

$$|u(x)| = \frac{e^{-nx^2}}{(n + 1)^3} \leq \frac{1}{(n + 1)^3} < \frac{1}{n^3}$$

$\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$ donc la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément sur $\mathbb{R}$, comme les fonctions u_n sont continues la fonction somme est continue.

Allez à : **Exercice 5**

Correction exercice 6.

1.

$$\forall x \in [-a, a], \left| \frac{x}{(x^2 + n^2)^2} \right| \leq \frac{a}{(x^2 + n^2)^2} \leq \frac{a}{n^4}$$

$\frac{1}{n^4}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$ donc la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $[-a, a]$, donc uniformément sur $[-a, a]$.

2. Les fonctions $x \mapsto \frac{x}{(x^2 + n^2)^2}$ sont continues, la série converge uniformément donc la somme est continue.
3. On appelle f_n les fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$$

$$f'_n(x) = -2 \times \frac{x}{(x^2 + n^2)^2}$$

Les fonctions f_n sont dérivables

La série de fonctions f'_n converge uniformément sur tout intervalle $[-a, a]$ (voir 1.)

La série numérique $f_n(0) = \frac{1}{n^2}$ converge (c'est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)

Donc la série est dérivable en tout point de $[-a, a]$ (donc sur $\mathbb{R}$) et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} \right)' = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + n^2)^2}$$

Allez à : **Exercice 6**

Correction exercice 7.

On pose $f_n(x) = e^{-n} \sin(n^2 x)$, ces fonctions sont dérivable et $f'_n(x) = n^2 e^{-n} \cos(n^2 x)$

La série numérique de terme général $f_n(0) = 0$ converge et enfin

$$|f'_n(x)| \leq n^2 e^{-n}$$

$$n^2 (n^2 e^{-n}) = n^4 e^{-n} \rightarrow 0$$

La suite numérique de terme général $n^2 e^{-n}$ converge grâce aux règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

Cela montre que la série de fonctions f'_n converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Les trois conditions qui entraînent que la série de fonction de terme général f_n est dérivable sont réunies.

Allez à : **Exercice 7**

Correction exercice 8.

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{\sin(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$$

Comme $\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$, on vient de montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et par conséquent simplement sur $\mathbb{R}$

2. Les fonctions f_n sont continues, elles convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ donc f est une fonctions continue.

3. La convergence étant uniforme sur $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$ et les fonctions f_n étant continues donc intégrables on a

$$\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi \sum_{n \geq 1} f_n(x) dx = \sum_{n \geq 1} \int_0^\pi f_n(x) dx = \sum_{n \geq 1} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3} dx$$

On calcule

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3} dx = \frac{1}{n^3} \int_0^\pi \sin(nx) dx = \frac{1}{n^3} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi = \frac{1}{n^4} (-\cos(n\pi) + 1) = \frac{1}{n^4} (1 - (-1)^n)$$

Selon que n est pair ou impair $1 - (-1)^n$ est nul ou vaut 2, on va couper la somme en deux

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1 - (-1)^n}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{2p}}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{2p+1}}{(2p+1)^4} = 0 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)^4}$$

Puis on pose $n = p + 1, p = 0 \Rightarrow n = 1$

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n-1)^4}$$

C'est bien l'égalité demandé.

4. Les fonctions f_n sont dérivables, $f'_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, la série de fonctions de terme général f_n converge simplement il reste à montrer que la série de fonction de terme général f'_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

La série de fonction de terme général f'_n converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc converge uniformément sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de dérivation des séries

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Remarque : il n'était pas nécessaire de montrer la convergence uniforme de la série de fonction de terme général f'_n sur $\mathbb{R}$, sur un intervalle $[a, b]$ cela suffit.

5. D'après la question précédente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = f'(x)$$

Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{n^3}$$

Pour les valeurs paires $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc on va distinguer les valeurs paires de valeurs impaires

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3} &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(2p\frac{\pi}{2}\right)}{(2p)^3} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^3} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin(p\pi)}{(2p)^3} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^3} \\ &= 0 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^3} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}\end{aligned}$$

Puis on pose $n = p$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Allez à : **Exercice 8**

Correction exercice 9.

1. On pose $g_n(x) = |f_n(x)| = \frac{1}{(n+1)(x+1)}$

La série de fonctions de terme général f_n est une série alternée, on va appliquer le TSSA

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)(x+1)} = 0$$

La suite $\left(\frac{1}{(n+1)(x+1)}\right)_n$ est décroissante, d'après le TSSA la série de fonctions f'_n converge simplement.

2. D'après le TSSA le reste de la série vérifie

$$\forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| \leq g_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+2)(x+1)} \leq \frac{1}{(n+2)(1+1)} = \frac{1}{2(n+2)}$$

Ce reste est majoré indépendamment de x et tend vers 0, cela montre que la série de fonctions f_n converge uniformément.

- 3.

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{1}{(n+1)(x+1)} = \frac{1}{2(n+1)} \sim \frac{1}{2n}$$

La valeur maximum est atteint pour $x = 1$

$\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$ donc la série ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

Allez à : **Exercice 9**

Correction exercice 10.

1. Il s'agit de trouver le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où la série converge simplement,

Si $x < 0$ alors $\frac{ke^{-kx}}{k^2+1} \rightarrow +\infty$ lorsque $k \rightarrow +\infty$ il n'y a pas convergence.

Si $x = 0$ alors $\left|(-1)^k \frac{k}{k^2+1}\right| \sim \frac{1}{k}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$, il n'y a pas de convergence absolue, mais la série est alternée

$$\left|(-1)^k \frac{k}{k^2+1}\right| = \frac{k}{k^2+1} \rightarrow 0$$

Il faut voir si la suite $\left(\frac{k}{k^2+1}\right)$ est décroissante, on pose $a(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $a'(x) = \frac{x^2+1-x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0$

pour $x > 1$, cela montre que la suite $\left(\frac{k}{k^2+1}\right)$ est décroissante, d'après le TSSA la série numérique de terme général $(-1)^k \frac{k}{k^2+1}$ est convergente

Si $x \geq 0$ alors

$$\left|(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}\right| \leq \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$$

Avec les règles de Riemann et $\alpha = 2 > 1$

$$k^2 \times \frac{ke^{-kx}}{k^2 + 1} = \frac{k^3 e^{-kx}}{k^2 + 1} \rightarrow 0$$

Lorsque $k \rightarrow +\infty$, donc la série numérique de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2 + 1}$ est absolument convergente pour $x > 0$, autrement dit la série de fonctions de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2 + 1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Conclusion : la série de fonctions de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2 + 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et $D = [0, +\infty[$.

On tenter une méthode qui va échouée

Montrons que la convergence est normal sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

$$\left| (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2 + 1} \right| \leq \frac{ke^{-ka}}{k^2 + 1}$$

Avec les règles de Riemann et $\alpha = 2 > 1$

$$k^2 \times \frac{ke^{-ka}}{k^2 + 1} = \frac{k^3 e^{-ka}}{k^2 + 1} \rightarrow 0$$

Lorsque $k \rightarrow +\infty$, donc la série numérique de terme général $\frac{ke^{-ka}}{k^2 + 1}$ est convergente ce qui montre que la série de fonctions de terme général $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2 + 1}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, et donc uniformément sur $[a, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2 + 1}$ étant continues, la somme f est continue sur $[a, +\infty[$, par conséquent la somme est continue sur $]0, +\infty[$. L'ennui c'est que l'on n'a pas la continuité en 0.

Autre méthode en utilisant le TSSA, la série est alternée, il faut montrer que la suite $\left(\frac{ke^{-kx}}{k^2 + 1}\right)$ est décroissante et qu'elle tend vers 0

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{ke^{-kx}}{k^2 + 1} = 0$$

Ensuite on pose

$$\begin{aligned} b(x) &= \frac{x}{x^2 + 1} e^{-kx} \\ b'(x) &= \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' e^{-kx} - k \frac{x}{x^2 + 1} e^{-kx} = \left(\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} - k \frac{x}{x^2 + 1}\right) e^{-kx} \\ &= \frac{1 - x^2 - kx(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} e^{-kx} = \frac{-kx^3 - x^2 - kx + 1}{(x^2 + 1)^2} e^{-kx} < 0 \end{aligned}$$

Au moins dès que x est un peu grand, donc la série numérique de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2 + 1}$ converge et le reste vérifie

$$|R_n(x)| \leq \frac{(k+1)e^{-(k+1)x}}{(k+1)^2 + 1} \leq \frac{(k+1)}{(k+1)^2 + 1} \rightarrow 0$$

On a majoré le reste par une expression indépendante de x et qui tend vers 0 donc la convergence de la série de fonctions de terme général $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2 + 1}$ est uniforme sur $[0, +\infty[$.

Les fonctions $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2 + 1}$ sont continues sur $[0, +\infty[$, la convergence est uniforme sur $[0, +\infty[$ donc la somme f est continue.

2. Il s'agit de trouver le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où la série converge simplement. On pose

$$g_k: x \mapsto (-1)^k \frac{e^{-kx}}{k^2 + 1}$$

Si $x < 0$ alors $\frac{e^{-kx}}{k^2+1} \rightarrow +\infty$ lorsque $k \rightarrow +\infty$ il n'y a pas convergence.

Si $x \geq 0$ alors

$$\left| (-1)^k \frac{e^{-kx}}{k^2+1} \right| \leq \frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2}$$

$\frac{1}{k^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, cela montre, la convergence normale, donc uniforme et par conséquent la convergence simple de la série de fonctions de terme général g_k .

$$D' = \mathbb{R}^+$$

$$g'_k(x) = -(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$$

On a vu dans la première question 1. que la série de fonctions de terme général $x \rightarrow (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ convergeait uniformément sur $[0, +\infty[$ donc la série de fonctions de terme général g'_k converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Résumons

Les fonctions g_k sont continues

La série de fonctions de terme général g_k converge simplement sur $[0, +\infty[$

La série de fonctions de terme général g'_k converge uniformément sur $[0, +\infty[$

Donc la somme g est dérivable, il reste à montrer que la dérivée est continue

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g'_k(x)$$

Les fonctions g'_k sont continues, la série de fonction de terme général g'_k converge uniformément sur $[0, +\infty[$ donc la somme g' est continue, par conséquent g est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

Allez à : **Exercice 10**

Correction exercice 11.

1. Si $x = 0$, $f_n(0) = \frac{(-1)^n}{n+1}$

Il s'agit d'une série alternée, la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ tend vers 0 en décroissant donc la série numérique de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1}$ converge.

Si $x > 0$,

$$n^2 |f_n(x)| = \frac{n^2 e^{-nx}}{n+1} \rightarrow 0$$

La série numérique de terme général $f_n(x)$ converge absolument donc elle converge, autrement dit la série de fonctions de terme général f_n converge simplement.

Conclusion : la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2. $x \geq a$

$$|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+1} \leq \frac{e^{-na}}{n+1} = \alpha_n$$
$$n^2 \frac{e^{-na}}{n+1} \rightarrow 0$$

Avec les règles de Riemann avec $\alpha > 1$, cela montre que la série numérique de terme général α_n converge donc la série de fonction de terme général f_n converge normalement sur $[a, +\infty[$.

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, +\infty[} \frac{e^{-nx}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Or $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$, donc la série de fonctions de terme général f_n ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

$$\sup_{x \in]0, +\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x \in]0, +\infty[} \frac{e^{-nx}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Cela ne change rien si on ouvre l'intervalle.

3. On va utiliser la majoration du reste du TSSA

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+1} < \frac{1}{n+1}$$

Donc

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^N f_n(x) \right| = \sup_{x \in [0, +\infty[} |R_N(x)| < \frac{1}{N+1} \rightarrow 0$$

La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Allez à : **Exercice 11**

Correction exercice 12.

- On pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + \sin(nx)}$$

Pour $n \geq 2$

$$f_n(x) \leq \frac{1}{n^2 - 1} \sim \frac{1}{n^2}$$

Or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$. Cela montre que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'autre part les fonctions f_n sont continues donc f est continue.

- On pose

$$g_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Pour $n \geq 2$

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

Or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$. Cela montre que la série de fonctions de terme général g_n converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'autre part les fonctions g_n sont continues donc g est continue.

- On pose

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx+1}$$

Il s'agit d'une série alternée la suite $\left(\frac{1}{nx+1}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0 car $x > 0$ donc la série de fonctions de terme général h_n converge simplement vers 0. Grâce aux TSSA nous allons montrer la convergence uniforme de cette série sur $[a, b]$ avec $a > 0$. Le reste vérifie

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)x+1} \leq \frac{1}{(n+1)a+1}$$

Donc

$$\sup_{x \in [a, b]} \left| h(x) - \sum_{n=0}^N h_n(x) \right| \leq \frac{1}{(n+1)a+1} \rightarrow 0$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$

Cela montre que la série de fonction de terme général h_n converge uniformément sur $[a, b]$.

En un point $x > 0$, on choisit a et b tels que $a < x < b$, la série de fonction de terme général h_n converge uniformément sur $[a, b]$ et les fonctions h_n sont continues donc h est continue en x et ceci pour tout $x > 0$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1. Il s'agit d'une série alternée, pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| = \frac{1}{n+x}$ tend vers 0 en décroissant, d'après le TSSA, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge, autrement dit la série de fonction de terme général f_n converge simplement.
2. $f'_n(x) = -\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ donc

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1}{(n+x)^2} < \frac{1}{n^2}$$

$\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$ donc la série de fonctions de terme général f'_n converge normalement sur $]0, +\infty[$, donc uniformément sur $]0, +\infty[$, comme les fonctions f_n sont dérivable, le théorème de dérivation des série entraîne que la somme est dérivable et que

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. Pour $x \leq 0$, $e^{-n^\alpha x}$ ne tend pas vers 0 donc la série diverge.
Pour $x > 0$
D'après les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-n^\alpha x} = 0$$

Entraîne que la série numérique de terme général $e^{-n^\alpha x}$ converge, autrement dit la série de fonctions de terme général f_n converge simplement, donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Nous allons montrer la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général f_n sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

$$|f_n(x)| \leq e^{-n^\alpha a}$$

D'après les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-n^\alpha a} = 0$$

Entraîne que la série numérique de terme général $e^{-n^\alpha a}$ converge, ce qui montre que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a, +\infty[$, donc uniformément sur $[a, +\infty[$.
Pour un $x > 0$ on choisit a tel que $0 < a < x$, il y a donc convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ et les fonctions f_n sont continues en x donc la somme f est continue en x donc sur $]0, +\infty[$.

3. La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$ et

$$\forall n \geq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 1$$

Entraîne que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

Convergence de l'intégrale

$$\frac{\sin(x)}{e^x - 1} \sim_0 \frac{x}{x} = 1$$

Donc l'intégrale est convergente en 0

$$x^2 \left| \frac{\sin(x)}{e^x - 1} \right| \rightarrow 0 \quad \text{si } x \rightarrow +\infty$$

Donc, d'après les règles de Riemann avec $\alpha > 2$ l'intégrale est absolument convergente donc convergente.

Pour utiliser le théorème d'interversion des symboles $\int$ et $\sum$ on va se placer sur un intervalle $[\epsilon, X]$ et on pose

$$I(\epsilon, X) = \int_{\epsilon}^X \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx$$

Autre part

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N f_n(x) &= \sum_{n=0}^N e^{-(n+1)x} \sin(x) = e^{-x} \sin(x) \sum_{n=0}^N e^{-nx} = e^{-x} \sin(x) \frac{1 - e^{-(N+1)x}}{1 - e^{-x}} \\ &= \sin(x) \frac{1 - e^{-(N+1)x}}{e^x(1 - e^{-x})} = \sin(x) \frac{1 - e^{-(N+1)x}}{e^x - 1} \end{aligned}$$

Et

$$\forall x \in [\epsilon, X], \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N f_n(x) = \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$$

Les fonctions f_n sont continues sur $[\epsilon, X]$, il suffit que la série de terme général f_n converge uniformément sur $[\epsilon, X]$.

$$|f_n(x)| = e^{-(n+1)x} |\sin(x)| < e^{-(n+1)\epsilon}$$

$e^{-(n+1)\epsilon} = \left(\frac{1}{e^\epsilon}\right)^{n+1}$ est le terme général d'une série géométrique convergente car $\frac{1}{e^\epsilon} \in]-1, 1[$.

Cela montre que la série de terme général f_n converge normalement sur $[\epsilon, X]$ donc uniformément.

$$I(\epsilon, X) = \int_{\epsilon}^X \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \int_{\epsilon}^X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\epsilon}^X f_n(x) dx \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\epsilon}^X e^{-(n+1)x} \sin(x) dx \right)$$

Il existe une primitive de f_n de la forme

$$\begin{aligned} F_n(x) &= (A_n \cos(x) + B_n \sin(x)) e^{-(n+1)x} \\ F'_n(x) &= ((-(n+1)A_n + B_n) \cos(x) + (-A_n - (n+1)B_n) \sin(x)) e^{-(n+1)x} \\ F'_n(x) &= e^{-(n+1)x} \sin(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -(n+1)A_n + B_n = 0 \\ -A_n - (n+1)B_n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_n = \frac{-1}{1 + (n+1)^2} \\ B_n = \frac{-n-1}{1 + (n+1)^2} \end{cases} \\ \int_{\epsilon}^X e^{-(n+1)x} \sin(x) dx &= \left[\left(\frac{-1}{1 + (n+1)^2} \cos(x) + \frac{-n-1}{1 + (n+1)^2} \sin(x) \right) e^{-(n+1)x} \right]_{\epsilon}^X \\ &= \left(\frac{-1}{1 + (n+1)^2} \cos(X) + \frac{-n-1}{1 + (n+1)^2} \sin(X) \right) e^{-(n+1)X} \\ &\quad - \left(\left(\frac{-1}{1 + (n+1)^2} \cos(\epsilon) + \frac{-n-1}{1 + (n+1)^2} \sin(\epsilon) \right) e^{-(n+1)\epsilon} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(\epsilon, X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2} \cos(X) + \frac{-n-1}{1+(n+1)^2} \sin(X) \right) e^{-(n+1)X} \right. \\
&\quad \left. - \left(\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2} \cos(\epsilon) + \frac{-n-1}{1+(n+1)^2} \sin(\epsilon) \right) e^{-(n+1)\epsilon} \right) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{1+(n+1)^2} \cos(X) + \frac{-n-1}{1+(n+1)^2} \sin(X) \right) e^{-(n+1)X} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+(n+1)^2} \cos(\epsilon) + \frac{n+1}{1+(n+1)^2} \sin(\epsilon) \right) e^{-(n+1)\epsilon}
\end{aligned}$$

Maintenant il faut faire tendre X vers l'infini dans

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{1+(n+1)^2} \cos(X) + \frac{-n-1}{1+(n+1)^2} \sin(X) \right) e^{-(n+1)X}$$

Et ϵ vers 0 dans

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+(n+1)^2} \cos(\epsilon) + \frac{n+1}{1+(n+1)^2} \sin(\epsilon) \right) e^{-(n+1)\epsilon}$$

En faisant attention car il s'agit de somme infini

Pour la première limite, on se place sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

$$\left| \left(\frac{-1}{1+(n+1)^2} \cos(X) + \frac{-n-1}{1+(n+1)^2} \sin(X) \right) e^{-(n+1)X} \right| \leq \left(\frac{1}{1+(n+1)^2} + \frac{n+1}{1+(n+1)^2} \right) e^{-(n+1)a}$$

Avec les règles de Riemann

$$n^2 \left(\frac{1}{1+(n+1)^2} + \frac{n+1}{1+(n+1)^2} \right) e^{-(n+1)a} \rightarrow 0$$

Donc la série de terme général $\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2} \cos(X) + \frac{-n-1}{1+(n+1)^2} \sin(X) \right) e^{-(n+1)X}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, donc uniformément sur $[a, +\infty[$, les fonctions $\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2} \cos(X) + \frac{-n-1}{1+(n+1)^2} \sin(X) \right) e^{-(n+1)X}$ tendent les 0 lorsque X tend vers l'infini, d'après le théorème de la double limite et

$$\begin{aligned}
\lim_{X \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{1+(n+1)^2} \cos(X) + \frac{-n-1}{1+(n+1)^2} \sin(X) \right) e^{-(n+1)X} \\
= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{1+(n+1)^2} \cos(X) + \frac{-n-1}{1+(n+1)^2} \sin(X) \right) e^{-(n+1)X} \right) = 0
\end{aligned}$$

Pour la seconde cela se complique un peu, et on prend $\epsilon \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par exemple

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+(n+1)^2} \cos(\epsilon) + \frac{n+1}{1+(n+1)^2} \sin(\epsilon) \right) e^{-(n+1)\epsilon} \\
= \cos(\epsilon) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+(n+1)^2} e^{-(n+1)\epsilon} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{1+(n+1)^2} \sin(\epsilon) e^{-(n+1)\epsilon}
\end{aligned}$$

Pour la première série

$$\frac{1}{1+(n+1)^2} e^{-(n+1)\epsilon} < \frac{1}{1+(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

Cette série est normalement convergente sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, donc uniformément convergente, les fonctions « à l'intérieur » sont continue donc la somme est continue et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+(n+1)^2} e^{-(n+1)\epsilon} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1+(n+1)^2} e^{-(n+1)\epsilon} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+(n+1)^2} = \sum_{n'=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n'^2}$$

Par conséquent

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\cos(\epsilon) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + (n+1)^2} e^{-(n+1)\epsilon} \right) = \sum_{n'=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n'^2}$$

Pour la somme suivante, on va chercher un maximum des fonctions $g_n(x) = \sin(x) e^{-(n+1)x}$

$$g'_n(x) = \cos(x) e^{-(n+1)x} - (n+1) \sin(x) e^{-(n+1)x} = \cos(x) e^{-(n+1)x} (1 - (n+1) \tan(x))$$

Cette dérivée est positive avant $x = \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$ et négative après pour des petites valeurs de x , elles atteignent leur maximum en $x = \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$

Donc

$$\begin{aligned} 0 < \frac{n+1}{1 + (n+1)^2} \sin(\epsilon) e^{-(n+1)\epsilon} &\leq \frac{n+1}{1 + (n+1)^2} g_n\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= \frac{n+1}{1 + (n+1)^2} \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)} \end{aligned}$$

On pose $n' = n+1$ pour simplifier

$$\begin{aligned} 0 < \frac{n+1}{1 + (n+1)^2} \sin(\epsilon) e^{-(n+1)\epsilon} &\leq \frac{n'}{1 + n'^2} \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n'}\right)\right) e^{-n' \arctan\left(\frac{1}{n'}\right)} \\ &= \frac{n'}{1 + n'^2} \sin\left(\frac{1}{n'} + o\left(\frac{1}{n'}\right)\right) e^{-n' \left(\frac{1}{n'} + o\left(\frac{1}{n'}\right)\right)} = \frac{n'}{1 + n'^2} \left(\frac{1}{n'} + o\left(\frac{1}{n'}\right)\right) e^{-1 + o(1)} \sim \frac{1}{n'^2} \end{aligned}$$

La série de fonctions terme général $\frac{n+1}{1+(n+1)^2} \sin(\epsilon) e^{-(n+1)\epsilon}$ converge normalement sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ donc uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, ces fonctions sont continues donc la somme est continue et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{1 + (n+1)^2} \sin(\epsilon) e^{-(n+1)\epsilon} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{n+1}{1 + (n+1)^2} \sin(\epsilon) e^{-(n+1)\epsilon} = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$$

Finalement

$$\lim_{\substack{X \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} I(\epsilon, X) = \sum_{n'=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n'^2}$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx$ est convergente donc

$$\lim_{\substack{X \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} I(\epsilon, X) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n'=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n'^2}$$

Allez à : **Exercice 15**