

Formule de Taylor-Lagrange

Exercice 1.

Soit x un réel strictement positif et f une fonction sur $[0, x]$.

1. Quelles sont les hypothèses qui permettent d'écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f sur $[0, x]$ à l'ordre 3 (c'est-à-dire avec un reste où intervient la dérivée troisième de f) ? Ecrire cette formule.
2. On pose $f(t) = \ln(1 + t)$. Justifier la possibilité d'écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre 3, et écrire cette formule.

Allez à : [Correction exercice 1](#)

Exercice 2.

Soit a un réel strictement positif.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cosinus hyperbolique, sur l'intervalle $[0, a]$, avec le reste à l'ordre 5.
2. Montrer que

$$0 \leq \operatorname{ch}(a) - 1 - \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \leq \frac{a^5}{5!} \operatorname{sh}(a)$$

3. En déduire que :

$$\frac{433}{384} \leq \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{433}{384} + \frac{1}{3840}$$

Allez à : [Correction exercice 2](#)

Exercice 3.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 de f entre 16 et 17.
2. En déduire que

$$\frac{8317}{4096} < 17^{\frac{1}{4}} < \frac{65}{32}$$

Allez à : [Correction exercice 3](#)

Exercice 4. (Hors programme)

Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$:

$$x \leq \operatorname{argth}(x) \leq x + \frac{x^3}{3} \frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$$

Allez à : [Correction exercice 4](#)

Exercice 5.

A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 montrer que 10^{-2} est une valeur approchée à 5×10^{-5} de $\sin(10^{-2})$.

Allez à : [Correction exercice 5](#)

Exercice 6.

1. Enoncer le théorème de Taylor-Lagrange, on notera $n + 1$ l'ordre du reste dans la formule.
2. Ecrire la conclusion de ce théorème lorsqu'on l'applique à la fonction $f: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, entre 100 et 101 et avec un reste à l'ordre 2.
3. En déduire un nombre décimal qui approche $\frac{1}{\sqrt{101}}$ avec une précision inférieure à 5×10^{-6} près.

Allez à : [Correction exercice 6](#)

Exercice 7.

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

1. Montrer que

$$0 < e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} < \frac{x^3}{6} e^x$$

2. En déduire une valeur approchée de $e^{0,1}$ à 5×10^{-4} près.

Allez à : [Correction exercice 7](#)

Exercice 8.

Montrer que pour tout $t \in I =]1, +\infty[$,

$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t - 1$$

On pourra utiliser la formule de Taylor Lagrange entre 1 et t .

Allez à : [Correction exercice 8](#)

Exercice 9.

1. Énoncé le théorème de Taylor-Lagrange.
2. Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \ln(1+t)$.
Calculer les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 4.
3. En utilisant Taylor-Lagrange, en déduire l'encadrement de $\ln(2)$ suivant :

$$\frac{7}{12} \leq \ln(2) \leq \frac{157}{192}$$

Allez à : [Correction exercice 9](#)

Exercice 10.

1. Soit $a > 0$. Démontrer que

$$\left| \cos(a) - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| \leq \frac{a^5}{5!}$$

2. En déduire que

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$$

Allez à : [Correction exercice 10](#)

Exercice 11.

Démontrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$

Allez à : [Correction exercice 11](#)

Exercice 12.

Démontrer que

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \right) \right| \leq \frac{3}{9!}$$

En déduire une valeur approchée de e à 10^{-5} près.

Allez à : [Correction exercice 12](#)

Exercice 13.

Inégalités de Kolmogorov

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 . On suppose que f et f'' sont bornées, et on pose :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$$

(M_0 et M_2 sont donc des nombres réels tels que, pour tout x réel, on a $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$. Le but de cet exercice est de prouver que f' est bornée, et de majorer $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$ en fonction de M_0 et M_2 . Soit $x \in \mathbb{R}$, et $h > 0$.

1. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à f entre x et $x + h$ à l'ordre 2.
2. En déduire l'inégalité :

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

En particulier, si on choisit $h = 1$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$$

Ce qui prouve que f' est bornée, avec $M_1 \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$. On se propose de trouver une meilleure majoration :

3. Etudier la fonction $h \rightarrow \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$

Allez à : [Correction exercice 13](#)

Exercice 14.

Soit $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

Indication, on pourra appliquer la formule de Taylor-Lagrange entre 0 et $\frac{1}{2}$, puis entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Allez à : [Correction exercice 14](#)

Exercice 15.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ vérifiant la propriété suivante : il existe un polynôme de degré impair tel que pour tout $n \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$$

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$.
2. En déduire que f est identiquement nulle.
3. Le résultat subsiste-t-il si on suppose que P est de degré pair ?

Allez à : [Correction exercice 15](#)

Exercice 16.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et $\lambda > 0$ vérifiant :

$$\begin{cases} f^{(n)}(0) = 0, \forall n \geq 0 \\ \sup_{\mathbb{R}} |f^{(n)}(x)| \leq \lambda^n n! \end{cases}$$

1. Montrer que $f = 0$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$.
2. Montrer que $f = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Allez à : [Correction exercice 16](#)

Exercice 17.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f \in C^3([a, b])$.

1. Montrer qu'il existe $c_1 \in \left]\frac{a+b}{2}, b\right[$ tel que :

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{48} f'''(c_1)$$

2. Montrer qu'il existe $c_2 \in]a, \frac{a+b}{2}[$ tel que :

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_2)$$

3. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f'''(c)$$

On utilisera bien sur les questions 1. et 2. et on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f''' .

Allez à : [Correction exercice 17](#)

CORECTIONS

Correction exercice 1.

1. Si f est de classe C^2 sur $[0, x]$ et de classe C^3 sur $]0, x[$ on peut appliquer la formule de Taylor à l'ordre 3.

Il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f^{(3)}(c)$$

2. f est $C^{+\infty}$ sur $] -1, +\infty[$ donc sur $[0, x]$, on peut écrire la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre.

$$f(0) = 0, f'(t) = \frac{1}{1+t} \Rightarrow f'(0) = 1, f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} \Rightarrow f''(0) = -1 \text{ et } f^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$$

Il existe $c \in]0, x[$.

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \times \frac{2}{(1+c)^3} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}$$

Allez à : [Exercice 1](#)

Correction exercice 2.

1. Les dérivées de ch sont

$$\text{ch}'(t) = \text{sh}(t), \text{ch}''(t) = \text{ch}(t), \text{ch}^{(3)}(t) = \text{sh}(t), \text{ch}^{(4)}(t) = \text{ch}(t) \text{ et } \text{ch}^{(5)}(t) = \text{sh}(t)$$

ch est une fonction de classe C^5 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, a]$. Il existe $c \in]0, a[$ tel que :

$$\text{ch}(a) = \text{ch}(0) + \text{sh}(0)a + \text{ch}(0)\frac{a^2}{2!} + \text{sh}(0)\frac{a^3}{3!} + \text{ch}(0)\frac{a^4}{4} + \frac{a^5}{5!}\text{sh}(c) = 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} + \frac{a^5}{120}\text{sh}(c)$$

2. D'après la question précédente

$$\text{ch}(a) - 1 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24} = \frac{a^5}{120}\text{sh}(c)$$

Or sh est une fonction croissante sur $[0, a]$, donc $\text{sh}(0) < \text{sh}(c) < \text{sh}(a)$

Donc, puisque $a > 0$:

$$\frac{a^5}{120}\text{sh}(0) < \frac{a^5}{120}\text{sh}(c) < \frac{a^5}{120}\text{sh}(a) \Leftrightarrow 0 < \text{ch}(a) - 1 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24} < \frac{a^5}{120}\text{sh}(a)$$

On a même des inégalités strictes.

3. On prend $a = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} 0 &< \text{ch}\left(\frac{1}{2}\right) - 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24} < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120}\text{sh}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24} &< \text{ch}\left(\frac{1}{2}\right) < 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120}\text{sh}\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{384} = \frac{384 + 48 + 1}{384} = \frac{433}{384}$$

Et

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120} = \frac{1}{32 \times 120} = \frac{1}{3840}$$

De plus

$$\frac{1}{2} < \ln(2) \Rightarrow \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right) < \operatorname{sh}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} < 1$$

Donc

$$\frac{433}{384} < \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{433}{384} + \frac{1}{3840} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{433}{384} + \frac{1}{3840}$$

Allez à : **Exercice 2**

Correction exercice 3.

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow f(16) = (16)^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2 \\ f'(x) &= \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \Rightarrow f'(16) = \frac{1}{4} \times (2^4)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \times 2^{-3} = \frac{1}{32} \\ f''(x) &= -\frac{3}{16} x^{-\frac{7}{4}} \Rightarrow f''(c) = -\frac{3}{16} c^{-\frac{7}{4}} \end{aligned}$$

Il existe $c \in]16, 17[$ tel que

$$f(17) = f(16) + f'(16)(17 - 16) + f''(c) \frac{(17 - 16)^2}{2!} \Leftrightarrow 17^{\frac{1}{4}} = 2 + \frac{1}{32} - \frac{3}{32} c^{-\frac{7}{4}}$$

2.

$$\begin{aligned} 16 < c < 17 &\Rightarrow 2 < c^{\frac{1}{4}} < 17^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 2^7 < c^{\frac{7}{4}} < 17^{\frac{7}{4}} \Rightarrow 17^{-\frac{7}{4}} < c^{-\frac{7}{4}} < 2^{-7} \\ \Rightarrow -\frac{3}{32} 2^{-7} < -\frac{3}{32} c^{-\frac{7}{4}} < -\frac{3}{32} \times 17^{-\frac{7}{4}} &\Rightarrow -\frac{3}{32 \times 128} < -\frac{3}{32} c^{-\frac{7}{4}} < 0 \\ \Rightarrow 2 + \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} < 2 + \frac{1}{32} - \frac{3}{32} c^{-\frac{7}{4}} < 2 + \frac{1}{32} \\ \Rightarrow \frac{8192 + 128 - 3}{4096} < 17^{\frac{1}{4}} < \frac{65}{32} \\ \Rightarrow \frac{8317}{4096} < 17^{\frac{1}{4}} < \frac{65}{32} \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 3**

Correction exercice 4. (Hors programme)

argth est une fonction de classe C^2 sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3. Pour $x > 0$

$$f(t) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \frac{1}{2} \ln(1+t) - \frac{1}{2} \ln(1-t), \text{ d'où } f(0) = 0$$

$$\text{Donc } f'(t) = \frac{1}{2} (1+t)^{-1} + \frac{1}{2} (1-t)^{-1}, \text{ d'où } f'(0) = 1$$

$$f''(t) = -\frac{1}{2} (1+t)^{-2} + \frac{1}{2} (1-t)^{-2} \text{ d'où } f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(t) = (1+t)^{-3} + (1-t)^{-3}, \text{ d'où}$$

$$f^{(3)}(c) = \frac{1}{(1+c)^3} + \frac{1}{(1-c)^3} = \frac{(1+c)^3 + (1-c)^3}{(1-c^2)^3} = \frac{1+3c+3c^2+c^3+1-3c+3c^2-c^3}{(1-c^2)^3} = 2 \frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3}$$

Il existe c dans l'intervalle $]0, x[$ tel que :

$$\operatorname{argth}(x) = x + \frac{x^3}{6} 2 \frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3} = x + \frac{x^3}{3} \frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3}$$

$$0 < c < x \text{ donc } 0 < c^2 < x^2 \text{ d'où } 1 + 3c^2 < 1 + 3x^2$$

$$\text{Et } 0 < 1 - x^2 < 1 - c^2 < 1 \text{ entraîne que } 1 < \frac{1}{1-c^2} < \frac{1}{1-x^2} \text{ et que donc } 1 < \frac{1}{(1-c^2)^3} < \frac{1}{(1-x^2)^3}$$

$$\text{On en déduit que } 0 < \frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3} < \frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$$

On multiplie ces inégalité par $\frac{x^3}{3} > 0$, $0 < \frac{x^3}{3} \frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3} < \frac{x^3}{3} \frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$, il ne reste qu'à ajouter x à ces inégalités pour conclure.

Si $x = 0$ les égalités sont vérifiées trivialement.

Allez à : **Exercice 4**

Correction exercice 5.

$$f(t) = \sin(t) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(t) = \cos(t) \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(t) = -\sin(t)$$

f est C^1 sur $[0, 10^{-2}]$ et C^2 sur $]0, 10^{-2}[$ car f est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Il existe $c \in]0, 10^{-2}[$

$$\sin(10^{-2}) = \sin(0) + (10^{-2} - 0) \cos(0) + \frac{(10^{-2} - 0)^2}{2} (-\sin(c)) \Leftrightarrow \sin(10^{-2})$$

$$= 10^{-2} - \frac{10^{-4}}{2} \sin(c) \Leftrightarrow \sin(10^{-2}) - 10^{-2} = -5 \times 10^{-5} \sin(c)$$

$$\Rightarrow |\sin(10^{-2}) - 10^{-2}| = 5 \times 10^{-5} |\sin(c)| \Rightarrow |\sin(10^{-2}) - 10^{-2}| \leq 5 \times 10^{-5}$$

Donc 10^{-2} est une valeur approchée de $\sin(10^{-2})$ à 5×10^{-5}

Allez à : **Exercice 5**

Correction exercice 6.

1. Si f est une application de classe C^n sur $[a, b]$ et de classe C^{n+1} sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

2.

$$f(t) = t^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f(100) = \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$$

$$f'(t) = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{t\sqrt{t}} \Rightarrow f'(100) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{100 \times \sqrt{100}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1000} = -\frac{1}{2000}$$

$$f''(t) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) t^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{t^2 \sqrt{t}} \Rightarrow f''(c) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{c^2 \sqrt{c}}$$

Il existe $c \in]100, 101[$

$$\frac{1}{\sqrt{101}} = \frac{1}{10} + (101 - 100) \times \left(-\frac{1}{2000}\right) + \frac{(101 - 100)^2}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{c^2 \sqrt{c}} = \frac{1}{10} - \frac{1}{2000} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{c^2 \sqrt{c}}$$

3.

$$\left| \frac{1}{\sqrt{101}} - \frac{1}{10} + \frac{1}{2000} \right| = \frac{3}{8} \times \frac{1}{c^2 \sqrt{c}}$$

$$100 < c < 101 \Leftrightarrow 100^2 \sqrt{100} < c^2 \sqrt{c} < 101^2 \sqrt{101} \Rightarrow 10^5 < c^2 \sqrt{c} \Rightarrow \frac{1}{c^2 \sqrt{c}} < 10^{-5} \Rightarrow \frac{3}{8} \times \frac{1}{c^2 \sqrt{c}}$$

$$< \frac{3}{8} \times 10^{-5} < 5 \times \frac{3}{40} \times 10^{-5} < 5 \times \frac{4}{40} \times 10^{-5} = 5 \times 10^{-6}$$

Donc

$$\left| \frac{1}{\sqrt{101}} - \frac{1}{10} + \frac{1}{2000} \right| < 5 \times 10^{-5}$$

Une valeur approchée à 5×10^{-5} de $\frac{1}{\sqrt{101}}$ est

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{2000} = \frac{199}{2000} = 0,0995$$

Allez à : **Exercice 6**

Correction exercice 7.

1. L'exponentielle est une fonction C^∞ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 3. Il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$e^x = e^0 + xe^0 + \frac{x^2}{2!}e^0 + \frac{x^3}{3!}e^c = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}e^c$$

$$0 < e^c < e^x \Rightarrow 0 < \frac{x^3}{6}e^c < \frac{x^3}{6}e^x$$

Car l'exponentielle est croissante et que $x > 0$, par conséquent

$$1 + x + \frac{x^2}{2} < 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}e^c < 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}e^x$$

Ce qui entraîne que

$$1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}e^x$$

Soit encore

$$0 < e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} < \frac{x^3}{6}e^x$$

2. On pose $x = 0,1 = 10^{-1}$

$$0 < e^{0,1} - 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{200} < \frac{10^{-3}}{6}e^{0,1} < \frac{10^{-3}}{6} \times 3 = 0,5 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-4}$$

Donc

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} = 1 + 0,1 + 0,005 = 1,105$$

Est une valeur approchée de $e^{0,1}$ à 5×10^{-4} près.

Allez à : **Exercice 7**

Correction exercice 8.

La formule de Taylor Lagrange pour la fonction $\ln$ entre 1 et $t > 1$ dit qu'il existe $c \in]1, t[$ tel que

$$\ln(t) = \ln(1) + (t-1)\ln'(1) + \frac{(t-1)^2}{2}\ln''(c) \Leftrightarrow \ln(t) = t-1 - \frac{(t-1)^2}{2c^2}$$

$$1 < c < t \Leftrightarrow 1 < c^2 < t^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} < \frac{1}{c^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{2t^2} < \frac{(t-1)^2}{2c^2} < \frac{(t-1)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(t-1)^2}{2} < -\frac{(t-1)^2}{2c^2} < -\frac{(t-1)^2}{2t^2} \Leftrightarrow t-1 - \frac{(t-1)^2}{2} < t-1 - \frac{(t-1)^2}{2c^2} < t-1 - \frac{(t-1)^2}{2t^2}$$

$$\Leftrightarrow t-1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t-1 - \frac{(t-1)^2}{2t^2}$$

Comme $t-1 - \frac{(t-1)^2}{2t^2} < t-1$, on a bien

$$t-1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t-1$$

Allez à : **Exercice 8**

Correction exercice 9.

1. Si f est une application de classe C^n sur $[a, b]$ et de classe C^{n+1} sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

2.

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{1}{1+t} = (1+t)^{-1} \\f''(t) &= -(1+t)^{-2} = -\frac{1}{(1+t)^2} \\f'''(t) &= -(-2)(1+t)^{-3} = \frac{2}{(1+t)^3} \\f^{(4)}(t) &= 2(-3)(1+t)^{-4} = -\frac{6}{(1+t)^4}\end{aligned}$$

Remarque :

Il est très maladroit de dériver ces fonctions comme des quotients et donc d'utiliser la formule $\left(\frac{u}{v}\right)'$, il est bien préférable de s'apercevoir que ces fonctions sont de la forme u^α et que leur dérivée sont de la forme $\alpha u^{\alpha-1}u'$.

3. On va utiliser la formule avec $a = 0$, $b = 1$ et $n = 3$ (donc le reste est à l'ordre 4)Il existe $c \in]0,1[$

$$\begin{aligned}f(1) &= f(0) + (1-0)f'(0) + \frac{(1-0)^2}{2!}f''(0) + \frac{(1-0)^3}{3!}f'''(0) + \frac{(1-0)^4}{4!}f^{(4)}(c) \\ \ln(2) &= \ln(1) + 1 + \frac{1}{2!} \times (-1) + \frac{1}{3!} \times 2 + \frac{1}{4!} \times \left(-\frac{6}{(1+c)^4}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1+c)^4} \\ &= \frac{6-3+2}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1+c)^4} = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1+c)^4} \\ 0 < c < 1 &\Rightarrow 1 < 1+c < 2 \Rightarrow 1 < (1+c)^4 < 2^4 = 16 \Rightarrow \frac{1}{16} < \frac{1}{(1+c)^4} < 1 \Rightarrow \frac{1}{64} < \frac{1}{4(1+c)^4} \\ &< \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{4} < -\frac{1}{(1+c)^4} < -\frac{1}{64} \Rightarrow \frac{5}{6} - \frac{1}{4} < \frac{5}{6} - \frac{1}{(1+c)^4} < \frac{5}{6} - \frac{1}{64} \\ &\Rightarrow \frac{10-3}{12} < \ln(2) < \frac{5 \times 32}{6 \times 32} - \frac{3}{64 \times 3} \Rightarrow \frac{7}{12} < \ln(2) < \frac{157}{192}\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1. $\cos$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre et sur n'importe quel intervalle, on va l'appliquer entre 0 et $a > 0$ avec un reste à l'ordre 5. On pose $f(t) = \cos(t)$

Il existe $c \in]0, a[$ tel que :

$$\begin{aligned}f(a) &= f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2!}f''(0) + \frac{a^3}{3!}f^{(3)}(0) + \frac{a^4}{4!}f^{(4)}(0) + \frac{a^5}{5!}f^{(5)}(c) \\ f(0) &= \cos(0) = 1 \\ f'(t) &= -\sin(t) \Rightarrow f'(0) = 0 \\ f''(t) &= -\cos(t) \Rightarrow f''(0) = -1 \\ f^{(3)}(t) &= \sin(t) \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0 \\ f^{(4)}(t) &= \cos(t) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1 \\ f^{(5)}(t) &= -\sin(t) \\ \cos(a) &= 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^5}{5!}\sin(c)\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\cos(a) - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} = -\frac{a^5}{5!} \sin(c)$$

Maintenant on peut prendre la valeur absolue puis majorer la valeur absolue du sinus par 1.

$$\left| \cos(a) - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| = \left| -\frac{a^5}{5!} \sin(c) \right| = \frac{a^5}{5!} |\sin(c)| \leq \frac{a^5}{5!}$$

2. On prend bien sur $a = \frac{1}{2}$

$$\left| \cos\left(\frac{1}{2}\right) - 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} \right| \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} \Leftrightarrow -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right) - 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!}$$

Il reste à simplifier les fractions

$$1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{16 \times 24} = \frac{384 - 48 + 1}{384} = \frac{337}{384}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} = \frac{1}{32 \times 120} = \frac{1}{3840}$$

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$$

Allez à : **Exercice 10**

Correction exercice 11.

Soit $x > 0$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{3}}$$

Pour $t > -1$ cette fonction est C^∞ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre et sur n'importe quel intervalle, on va l'appliquer entre 0 et $x > 0$ avec un reste à l'ordre 3. Il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(c)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(t) = \left(-\frac{1}{3}\right)(1+t)^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{3}$$

$$f''(t) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(1+t)^{-\frac{7}{3}} \Rightarrow f''(0) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

$$f^{(3)}(t) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)(1+t)^{-\frac{10}{3}} \Rightarrow f^{(3)}(c) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)(1+c)^{-\frac{10}{3}}$$

$$= -\frac{28}{27}(1+c)^{-\frac{10}{3}}$$

$$(1+t)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{4}{9} \times \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \times \frac{28}{27}(1+c)^{-\frac{10}{3}} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81}(1+c)^{-\frac{10}{3}}$$

$$0 < c < x \Rightarrow 1 < 1+c < 1+x \Rightarrow 1 < (1+c)^{\frac{10}{3}} < (1+x)^{\frac{10}{3}} \Rightarrow (1+x)^{-\frac{10}{3}} < (1+c)^{-\frac{10}{3}} < 1$$

$$\Rightarrow -\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}} > -\frac{14x^3}{81}(1+c)^{-\frac{10}{3}} > -\frac{14x^3}{81}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}} > 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81}(1+c)^{-\frac{10}{3}} > 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} (1+x)^{-\frac{10}{3}} > \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} > 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} < \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} < 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} (1+x)^{-\frac{10}{3}} < 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$

Car

$$-\frac{14x^3}{81} (1+x)^{-\frac{10}{3}} < 0$$

Si $x = 0$ alors les trois termes de ces inégalités sont nuls et dans ce cas il y a égalité. Pour tout $x \geq 0$

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$

Allez à : [Exercice 11](#)

Correction exercice 12.

$f: t \rightarrow e^t$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre et sur n'importe quel intervalle, on va l'appliquer entre 0 et 1 > 0 avec un reste à l'ordre 9.

Il existe $c \in]0,1[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + (1-0)f'(0) + \frac{(1-0)^2}{2!}f''(0) + \frac{(1-0)^3}{3!}f^{(3)}(0) + \frac{(1-0)^4}{4!}f^{(4)}(0) \\ &+ \frac{(1-0)^5}{5!}f^{(5)}(0) + \frac{(1-0)^6}{6!}f^{(6)}(0) + \frac{(1-0)^7}{7!}f^{(7)}(0) + \frac{(1-0)^8}{8!}f^{(8)}(0) \\ &+ \frac{(1-0)^9}{9!}f^{(9)}(c) \end{aligned}$$

Or pour tout $k \geq 0$, $f^{(k)}(t) = e^t$ donc $f^{(k)}(0) = 1$, on a donc

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!}e^c$$

Ce qui entraîne que

$$e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}\right) = \frac{1}{9!}e^c$$

Puis on prend la valeur absolue et on majore e^c par $e^1 = e$, puis e par 3

$$\begin{aligned} \left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}\right) \right| &= \left| \frac{1}{9!}e^c \right| = \frac{1}{9!}e^c < \frac{1}{9!}e < \frac{3}{9!} \\ \frac{3}{9!} &= \frac{3}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} = \frac{1}{2 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} = \frac{1}{2 \times 5} \times \frac{1}{4 \times 6} \times \frac{1}{7 \times 8 \times 9} \\ &< \frac{1}{10} \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{7 \times 8 \times 9} = \frac{1}{10} \times \frac{5}{100} \times \frac{1}{7 \times 8 \times 9} = 10^{-3} \times \frac{5}{7 \times 8 \times 9} = 10^{-3} \times \frac{5}{504} \\ &< 10^{-3} \times \frac{5}{500} = 10^{-3} \times \frac{1}{100} = 10^{-5} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}$$

Est une valeur approchée de e à 10^{-5} près.

Allez à : [Exercice 12](#)

Correction exercice 13.

1. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2.

Il existe $c \in]x, x+h[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + (x+h-x)f'(x) + \frac{(x+h-x)^2}{2!}f''(c) \Leftrightarrow f(x+h) \\ &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(c) \end{aligned}$$

2. D'après 1. :

$$\begin{aligned}
 f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(c) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{h} \left(f(x+h) - f(x) - \frac{h^2}{2}f''(c) \right) \\
 \Rightarrow |f'(x)| &= \frac{\left| f(x+h) - f(x) - \frac{h^2}{2}f''(c) \right|}{h} = \frac{\left| f(x+h) + (-f(x)) + \left(-\frac{h^2}{2}f''(c) \right) \right|}{h} \\
 &\leq \frac{|f(x+h)| + |-f(x)| + \left| -\frac{h^2}{2}f''(c) \right|}{h} = \frac{|f(x+h)| + |f(x)| + \frac{h^2}{2}|f''(c)|}{h} \\
 &\leq \frac{M_0 + M_0 + \frac{h^2}{2}M_2}{h} = \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}
 \end{aligned}$$

Franchement j'ai fait des chichis parce que l'on peut très bien écrire directement que :

$$\left| f(x+h) - f(x) - \frac{h^2}{2}f''(c) \right| \leq |f(x+h)| + |f(x)| + \frac{h^2}{2}|f''(c)|$$

On rappelle l'inégalité triangulaire

$$|A + B + C| \leq |A| + |B| + |C|$$

On rappelle que l'inégalité suivante est en générale très fausse

$$|A - B| \leq |A| - |B|$$

Et puisqu'on est dedans rappelons que

$$||A| - |B|| \leq |A - B|$$

3. Posons $g(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$, pour $h > 0$.

$$g'(h) = -\frac{2M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2} = \frac{-4M_0 + h^2M_2}{2h^2} = \frac{M_2}{2h^2} \left(h^2 - \frac{4M_0}{M_2} \right) = \frac{M_2}{2h^2} \left(h - 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}} \right) \left(h + 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}} \right)$$

Cette dérivée s'annule pour

$$h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$$

Elle négative pour

$$0 < h < h_0$$

Et positive pour

$$h > h_0$$

Elle admet un minimum en h_0

$$g(h_0) = \frac{2M_0}{h_0} + \frac{h_0M_2}{2} = \frac{2M_0}{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}} + \frac{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}M_2}{2} = \sqrt{M_0M_2} + \sqrt{M_0M_2} = 2\sqrt{M_0M_2}$$

On déduit de cela que pour tout h

$$g(h) \leq 2\sqrt{M_0M_2}$$

Or $|f'(x)| \leq g(h)$ donc pour tout x

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}$$

Par conséquent

$$M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}$$

Allez à : **Exercice 13**

Correction exercice 14.

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 entre 0 et $\frac{1}{2}$

Il existe $c_1 \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) + \left(\frac{1}{2} - 0\right)f'(0) + \frac{\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2}{2!}f''(c_1)$$

Ce qui équivaut à

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}f''(c_1)$$

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 entre $\frac{1}{2}$ et 1

Il existe $c_2 \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + \left(\frac{1}{2} - 1\right)f'(1) + \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2}{2!}f''(c_2)$$

On rappelle que la formule « marche » aussi si $b = \frac{1}{2} < a = 1$

Ce qui équivaut à

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{8}f''(c_2)$$

On en déduit que

$$\frac{1}{8}f''(c_1) = 1 + \frac{1}{8}f''(c_2)$$

D'où

$$f''(c_1) - f''(c_2) = 8$$

Si $-4 < f''(c_1) < 4 \Leftrightarrow |f''(c_1)| < 4$ et $-4 < f''(c_2) < 4 \Leftrightarrow |f''(c_2)| < 4$ alors $-4 < -f''(c_2) < 4$ et $-8 < f''(c_1) - f''(c_2) < 8$, l'inégalité de droite contredit $f''(c_1) - f''(c_2) = 8$, par conséquent soit $|f''(c_1)| \geq 4$, soit $|f''(c_2)| \geq 4$, il existe bien une valeur $c \in]0, 1[$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

Allez à : **Exercice 14**

Correction exercice 15.

1. P est un polynôme de degré impair donc P admet une racine réelle (c'est une conséquence quasi-évidente du théorème des valeurs intermédiaire puisque les limites en $\pm\infty$ d'un polynôme sont $\pm\infty$ et que les polynômes sont des fonctions continues), appelons a cette racine

$$|f^{(n)}(a)| \leq |P(a)| = 0$$

2. On applique la formule de Taylor-Lagrange, avec reste à l'ordre $n+1$, sur $]a, x[$ ou $]x, a[$, selon que $a < x$ ou que $x < a$, intervalle que l'on nomme I , il existe $c \in I$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \end{aligned}$$

Donc

$$|f(x)| = \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(c)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}|P(c)|$$

L'inégalité vient de l'hypothèse de l'énoncé. Puis comme P est une fonction continue sur un intervalle fermé borné, il existe M tel que pour tout $c \in I$, $|P(c)| \leq M$, par conséquent

$$|f(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}M$$

Et enfin on fait tendre n vers l'infini, comme M ne dépend pas de n , $\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$ tend vers 0, on en déduit que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Non, il suffit de prendre une fonction à dérivée bornée comme $f = \cos$, les dérivées successives de cette fonction sont $\pm \cos$ et $\pm \sin$ donc

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1$$

1 étant le polynôme constant égal à 1 (il s'agit donc d'un polynôme de degré pair), et pourtant $f \neq 0$.

Allez à : **Exercice 15**

Correction exercice 16.

1. On applique la formule de Taylor-Lagrange, avec reste à l'ordre n , sur $]0, x[$ ou $]x, 0[$, selon que $0 < x$ ou que $x < 0$, intervalle que l'on nomme I , il existe $c \in I$ tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c) = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

On prend $x \in]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lambda}$

$$|f(x)| = \left| \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c) \right| = \frac{|x|^n}{n!}|f^{(n)}(c)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \sup_{\mathbb{R}} |f^{(n)}(x)| \leq (\lambda|x|)^n$$

Comme $\lambda|x| \in]0, 1[$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda|x|)^n = 0$$

Cela montre que $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$. Comme $f^{(0)} = f$ la première condition entraîne que $f(0) = 0$. On aurait pu conclure aussi en invoquant la continuité de f en 0.

2. Soit

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{2\lambda}\right)$$

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}\left(x + \frac{1}{2\lambda}\right)$$

C'est évident, il faut quand même noter que la dérivée de g est la dérivée composée de f avec la fonction $x \rightarrow x + \frac{1}{2\lambda}$, dont la dérivée est 1, et que donc que $g'(x) = f'\left(x + \frac{1}{2\lambda}\right) \times 1$, les dérivées suivantes s'en déduisent par une récurrence bien évidente.

Reprenons

$$g^{(n)}(0) = f^{(n)}\left(\frac{1}{2\lambda}\right) = 0$$

Car $\frac{1}{2\lambda} \in]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[$, en utilisant la question 1°) pour g (au lieu de f) $g = 0$ sur $] -\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[$, comme

$$-\frac{1}{\lambda} < x < \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow -\frac{1}{2\lambda} < x + \frac{1}{2\lambda} < \frac{3}{2\lambda}$$

On en déduit que $f = 0$ sur $] -\frac{1}{2\lambda}, \frac{3}{2\lambda}[$, et donc sur $] -\frac{1}{\lambda}, \frac{3}{2\lambda}[$, ce qui signifie que l'on a « agrandi »

l'intervalle où f est nulle de $\frac{1}{2\lambda}$ à droite. Cela doit vous convaincre qu'en recommençant on pourra agrandir l'intervalle autant qu'on le souhaite à droite, et évidemment on peut faire pareil à gauche. Pour cela considérons les fonctions

$$g_p(x) = f\left(x + \frac{p}{2\lambda}\right), p \in \mathbb{N}$$

Et faisons un raisonnement par récurrence

$$H_p: \forall x \in]-\frac{1}{\lambda}, \frac{p+2}{2\lambda}[, f(x) = 0$$

H_0 est vraie c'est le 1°), H_1 , c'est ce que nous venons de montrer.

Montrons que pour $p \geq 0$, $H_p \Rightarrow H_{p+1}$

Comme ci-dessus

$$g_{p+1}^{(n)}(x) = f^{(n)}\left(x + \frac{p+1}{2\lambda}\right)$$

Par conséquence

$$g_{p+1}^{(n)}(0) = f^{(n)}\left(\frac{p+1}{2\lambda}\right) = 0$$

Car $\frac{p+1}{2\lambda} \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{p+2}{2\lambda}\right]$ et d'après l'hypothèse de récurrence.

En utilisant le 1°) pour la fonction g_{p+1} au lieu de la fonction f

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[, g_{p+1}(x) = 0$$

Ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[, f\left(x + \frac{p+1}{2\lambda}\right) &= 0 \\ -\frac{1}{\lambda} < x < \frac{1}{\lambda} &\Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda} + \frac{p+1}{2\lambda} < x + \frac{p+1}{2\lambda} < \frac{1}{\lambda} + \frac{p+1}{2\lambda} \Leftrightarrow \frac{p-1}{2\lambda} < x + \frac{p+1}{2\lambda} < \frac{p+3}{2\lambda} \end{aligned}$$

On en déduit que f est nulle sur $\left]\frac{p-1}{2\lambda}, \frac{p+3}{2\lambda}\right]$, comme f était déjà nulle sur $\left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{p+2}{2\lambda}\right]$, f est nulle sur $\left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{p+3}{2\lambda}\right]$

C'est bien la proposition H_{p+1} .

Ceci étant vraie pour tout p on en déduit que f est nulle sur

$$\left]-\frac{1}{\lambda}, +\infty\right[$$

Par un raisonnement analogue on en déduit que f est nulle sur $\left]-\infty, \frac{1}{\lambda}\right]$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Allez à : **Exercice 16**

Correction exercice 17.

1.

f est C^2 sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ et C^3 sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

$$\begin{aligned} f(b) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(b - \frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3}{3!}f'''(c_1) \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_1) \end{aligned}$$

2. f est C^2 sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et C^3 sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(a - \frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3}{3!}f'''(c_2) \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{a-b}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(a-b)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(a-b)^3}{48}f'''(c_2) \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_2) \end{aligned}$$

3.

$$f(b) - f(a)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{48} f'''(c_1) \right) \\
 &\quad - \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^3}{48} f'''(c_2) \right) \\
 &= (b-a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{48} (f'''(c_1) + f'''(c_2)) \\
 &= (b-a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} \times \frac{f'''(c_1) + f'''(c_2)}{2}
 \end{aligned}$$

$\frac{f'''(c_1) + f'''(c_2)}{2}$ est le milieu de $f'''(c_1)$ et de $f'''(c_2)$ donc $\frac{f'''(c_1) + f'''(c_2)}{2}$ est compris entre $f'''(c_1)$ et $f'''(c_2)$, autrement dit

Si $f'''(c_1) < f'''(c_2)$

$$\frac{f'''(c_1) + f'''(c_2)}{2} \in]f'''(c_1), f'''(c_2)[$$

Et si $f'''(c_2) < f'''(c_1)$

$$\frac{f'''(c_1) + f'''(c_2)}{2} \in]f'''(c_2), f'''(c_1)[$$

Comme f''' est continue sur $[a, b]$ donc sur $[c_1, c_2]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaire il existe $c \in [c_1, c_2]$ tel que

$$\frac{f'''(c_1) + f'''(c_2)}{2} = f'''(c)$$

Par conséquent

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f'''(c)$$

Je n'ai pas traité le cas où $f'''(c_1) = f'''(c_2)$, mais dans ce cas $c = c_1$ ou $c = c_2$ convient de manière évidente.

Allez à : **Exercice 17**