

**Exercice 1 :**

Soient  $A = \{1,2,3\}$  et  $B = \{0,1,2,3\}$ . Décrire les ensembles  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  et  $A \times B$ .

Allez à : [Correction exercice 1](#) :

**Exercice 2 :**

Soient  $A = [1,3]$  et  $B = [2,4]$ . Déterminer  $A \cap B$  et  $A \cup B$ .

Allez à : [Correction exercice 2](#) :

**Exercice 3 :**

1. Déterminer le complémentaire dans  $\mathbb{R}$  des parties suivantes :

$$A_1 = ] - \infty, 0]; A_2 = ] - \infty, 0[; A_3 = ]0, +\infty[; A_4 = [0, +\infty[; A_5 = ]1,2[; A_6 = [1,2[.$$

2. Soient  $A = ] - \infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$ ,  $B = ] - \infty, 1[$  et  $C = [2, +\infty[$ . Comparer les ensembles suivants :

$$C_{\mathbb{R}}A \quad \text{et} \quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$$

Allez à : [Correction exercice 3](#) :

**Exercice 4 :**

Soient  $A = ] - \infty, 3]$ ,  $B = ] - 2,7]$  et  $C = ] - 5, +\infty[$  trois parties de  $\mathbb{R}$ .

Déterminer  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $B \cap C$ ,  $B \cup C$ ,  $\mathbb{R} \setminus A$ ,  $A \setminus B$ ,  $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$ ,  $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B))$ ,  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$  et  $A \cap (B \cup C)$ .

Allez à : [Correction exercice 4](#) :

**Exercice 5 :**

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois parties d'un ensemble  $E$ . Montrer que :

$$1. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$2. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Allez à : [Correction exercice 5](#) :

**Exercice 6 :**

Soient  $E$  un ensemble et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On suppose que :

$$A \cap B \neq \emptyset; A \cup B \neq E; A \not\subseteq B; B \not\subseteq A$$

On pose

$$A_1 = A \cap B; A_2 = A \cap C_E B; A_3 = B \cap C_E A; A_4 = C_E (A \cup B)$$

1. Montrer que  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  sont non vides.

2. Montrer que  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  sont deux à deux disjoints.

3. Montrer que  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E$ .

Allez à : [Correction exercice 6](#) :

**Exercice 7 :**

1. Déterminer le complémentaire dans  $\mathbb{R}$  des parties suivantes :

$$A_1 = ] - \infty, 0]; A_2 = ] - \infty, 0[; A_3 = ]0, +\infty[; A_4 = [0, +\infty[; A_5 = ]1,2[; A_6 = [1,2[.$$

2. Soient  $A = ] - \infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$ ,  $B = ] - \infty, 1[$  et  $C = [2, +\infty[$ . Comparer les ensembles suivants :

$$C_{\mathbb{R}}A \quad \text{et} \quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$$

Allez à : [Correction exercice 7](#) :

**Exercice 8 :**

Justifier les énoncés suivants.

- Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . Si  $A$  est inclus dans  $B$ , alors le complémentaire de  $B$  dans  $E$  est inclus dans le complémentaire de  $A$  dans  $E$ .
- Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . Si  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors tout élément de  $E$  est soit dans  $C_E^A$  soit dans  $C_E^B$ .
- Soient  $E$  un ensemble,  $A$  un sous-ensemble de  $E$ . Déterminer les ensembles suivants :  
 $C_E(C_E A)$  ;  $A \cap C_E A$  ;  $A \cup C_E A$  ;  $C_E \emptyset$  ;  $C_E E$

Allez à : **Correction exercice 8 :**

**Exercice 9 :**

- Montrer que  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
- Montrer que  $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Allez à : **Correction exercice 9 :**

**Exercice 10 :**

On rappelle que l'on note

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- Montrer que

$$(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$$

$$(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap C \cap \overline{B}$$

- En déduire que

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$$

Allez à : **Correction exercice 10 :**

**Exercice 11 :**

On rappelle que pour toutes parties  $U$  et  $V$  d'un ensemble  $E$ , on note

$$U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$$

- Montrer que pour toutes parties  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'un ensemble  $E$ .

$$(A \cup B) \cap (\overline{A \cup C}) = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$$

$$(A \cup C) \cap (\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap C \cap \overline{B}$$

- En déduire que

$$(A \cup B) \Delta (A \cup C) = \overline{A} \cap (B \Delta C)$$

Allez à : **Correction exercice 11 :**

**Exercice 12 :**

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois parties d'un ensemble  $E$ .

- Que pensez-vous de l'implication

$$A \cup B \not\subseteq C \Rightarrow (A \not\subseteq C \text{ ou } B \not\subseteq C) ?$$

Justifiez (on pourra utiliser la contraposée).

- On suppose que l'on a les inclusions suivantes :  $A \cup B \subset A \cup C$  et  $A \cap B \subset A \cap C$ . Montrer que  $B \subset C$ .
- 

Allez à : **Correction exercice 12 :**

**Exercice 13 :**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ . Démontrer les égalités suivantes :

- $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

2.  $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$   
 Si  $A \subset B$ , montrer  $C_E B \subset C_E A$

Allez à : [Correction exercice 13](#) :

**Exercice 14 :**

Soit  $E$  un ensemble et  $F$  et  $G$  deux parties de  $E$ . Démontrer que :

1.  $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$
2.  $F \subset G \Leftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$

Allez à : [Correction exercice 14](#) :

**Exercice 15 :**

Soit  $E$  un ensemble et soit  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ . Pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{P}(E)$ , on appelle différence symétrique de  $A$  par  $B$  l'ensemble, noté  $A\Delta B$  défini par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1. Montrer que  $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .
2. Calculer  $A\Delta A$ ,  $A\Delta \emptyset$  et  $A\Delta E$ .
3. Montrer que pour tous  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans  $\mathcal{P}(E)$ , on a :
  - a) Montrer que :  $\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap A)$
  - b) Montrer que :  $(A\Delta B)\Delta C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (C \cap B \cap A)$
  - c) Montrer que  $A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta B)\Delta A$
  - d) A l'aide du b), montrer que  $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$ ,
  - e) En déduire que :  $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

Allez à : [Correction exercice 15](#) :

**Exercice 16 :**

Soit  $f: I \rightarrow J$  définie par  $f(x) = x^2$

1. Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles  $I$  et  $J$  tels que  $f$  soit injective et surjective.

Allez à : [Correction exercice 16](#) :

**Exercice 17 :**

Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$	$f: [0,1] \rightarrow [0,2]$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^2$
$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x + x^3$	$x \mapsto x^2 + x^3$	$x \mapsto x + x^4$

Allez à : [Correction exercice 17](#) :

**Exercice 18 :**

Soit  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  définie pour tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  par  $f(n, m) = mn$

Soit  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $g(n) = (n, (n + 1)^2)$

1.  $f$  est-elle injective ?
2.  $f$  est-elle surjective ?
3.  $g$  est-elle injective ?
4.  $g$  est-elle surjective ?

Allez à : [Correction exercice 18](#) :

**Exercice 19 :**

Soient

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto 2n$$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$$

Où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ Les fonctions sont-elles injectives, surjective ? Comparer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .Allez à : [Correction exercice 19 :](#)**Exercice 20 :**Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $E$  telle que :

$$f(f(E)) = E$$

Montrer que  $f$  est surjective.Allez à : [Correction exercice 20 :](#)**Exercice 21 :**On considère l'application  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $f(n) = n^2$ 

1. Existe-t-il  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$  ?
2. Existe-t-il  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$  ?

Allez à : [Correction exercice 21 :](#)**Exercice 22 :**Soit  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $f(n) = 2n$ 

1. Existe-t-il une fonction  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que  $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$  ?
2. Existe-t-il une fonction  $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que  $h \circ f = Id_{\mathbb{Z}}$  ?

Allez à : [Correction exercice 22 :](#)**Exercice 23 :**Soit  $f: E \rightarrow F$  une application, où  $Card(E) = Card(F)$ 

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

- (i)  $f$  est injective
- (ii)  $f$  est surjective
- (iii)  $f$  est bijective

Allez à : [Correction exercice 23 :](#)**Exercice 24 :**

Répondre aux questions qui suivent, en justifiant, le cas échéant, votre réponse par un bref argument, un calcul ou un contre-exemple.

1. Si les applications  $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  et  $v: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  sont bijectives, alors l'application  $u \circ v \circ u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  est aussi bijective. Vrai ou Faux, justifier.
2. L'application  $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}: (a, b, c) \mapsto 2^a 3^b 5^c$  est une application
  - (i) bijective
  - (ii) injective et pas surjective
  - (iii) surjective et pas injective
  - (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

3. Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ . L'application  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  qui à l'entier  $l \in \mathbb{Z}$  associe le reste de la division euclidienne de  $l$  par  $n$  est une application.
  - (i) bijective
  - (ii) injective et pas surjective
  - (iii) surjective et pas injective
  - (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

5. Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  tels que  $ad - bc = 1$ . Déterminer l'application réciproque de la bijection

$$f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$(u, v) \mapsto (au + bv + 1, cu + dv - 1)$$

Allez à : [Correction exercice 24](#) :

### Exercice 25 :

Soit  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ . Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective  $f: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ .

Considérer la partie  $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$ .

Allez à : [Correction exercice 25](#) :

### Exercice 26 :

Pour un entier  $n \in \mathbb{N}$  on désigne par  $I_n$  l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

1. On suppose  $n \geq 2$ . Combien y-a-t-il d'application injectives  $f: I_2 \rightarrow I_n$  ?

2. A quelle condition portant sur les entiers  $m$  et  $n$  peut-on définir une application  $f: I_m \rightarrow I_n$  qui soit injective, surjective, bijective ?

Allez à : [Correction exercice 26](#) :

### Exercice 27 :

Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensemble et soient  $f: E \rightarrow F$  et  $g: F \rightarrow G$  deux applications.

1. Montrer que si  $f$  et  $g$  sont injectives alors  $g \circ f$  est injective.

2. Montrer que si  $f$  et  $g$  sont surjectives alors  $g \circ f$  est surjective.

3. Que peut-on conclure sur  $g \circ f$  si  $f$  et  $g$  sont bijectives ?

4. Montrer que si  $g \circ f$  est injective alors  $f$  est injective.

5. Montrer que si  $g \circ f$  est surjective alors  $g$  est surjective.

6. Si à présent  $f: E \rightarrow F$  et  $g: F \rightarrow E$ , déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :

a.  $g \circ f = Id_E$

b.  $f \circ g = Id_F$

c.  $f \circ f = Id_E$

Allez à : [Correction exercice 27](#) :

### Exercice 28 :

Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles non vides et  $f$  une application de  $X$  dans  $Y$ . Une application  $s$ , de  $Y$  dans  $X$ , telle que  $f \circ s = Id_Y$  s'appelle une section de  $f$ .

1. Montrer que si  $f$  admet au moins une section alors  $f$  est surjective.

2. Montrer que toute section de  $f$  est injective.

Une application  $r$ , de  $Y$  dans  $X$ , telle que  $r \circ f = Id_X$  s'appelle une rétraction de  $f$ .

3. Montrer que si  $f$  possède une rétraction alors  $f$  est injective.

4. Montrer que si  $f$  est injective alors  $f$  possède une rétraction.

5. Montrer que toute rétraction de  $f$  est surjective.

6. En déduire que si  $f$  possède à la fois une section  $s$  et une rétraction  $r$ , alors  $f$  est bijective et l'on a :  
 $r = s (= f^{-1}$  par conséquent).

Allez à : [Correction exercice 28](#) :

### Exercice 29 :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ , montrer que :

1.  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2.  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte. Montrer alors que  $f$  est injective si et seulement si pour toute partie  $A$  de  $E$  et pour toute partie  $B$  de  $E$ , on a  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .

Allez à : [Correction exercice 29](#) :

### Exercice 30 :

1. Soit  $f$  l'application de l'ensemble  $\{1,2,3,4\}$  dans lui-même définie par :

$$f(1) = 4, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 2, \quad f(4) = 2.$$

Déterminer  $f^{-1}(A)$  lorsque  $A = \{2\}$ ,  $A = \{1,2\}$ ,  $A = \{3\}$ .

2. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ . Déterminer  $f^{-1}(A)$  lorsque  $A = \{1\}$ ,  $A = [1,2]$ .

Allez à : [Correction exercice 30](#) :

### Exercice 31 :

1. Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x$ . Déterminer  $f([0,1] \times [0,1])$ ,  $f^{-1}([-1,1])$ .
2. Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$  définie par  $f(x) = \cos(\pi x)$ , déterminer  $f(\mathbb{N})$ ,  $f(2\mathbb{N})$ ,  $f^{-1}(\{\pm 1\})$ .

Allez à : [Correction exercice 31](#) :

### Exercice 32 :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Soient  $A'$  et  $B'$  deux parties quelconques de  $F$ , non vides. Montrer que :

- $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
- $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

Allez à : [Correction exercice 32](#) :

### Exercice 33 :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

- Montrer que pour toute partie  $A$  de  $E$ , on a  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .
- Montrer que pour toute partie  $B$  de  $F$ , on a  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .
- Montrer que  $f$  est injective si et seulement si pour toute partie  $A$  de  $E$  on a  $A = f^{-1}(f(A))$ .
- Montrer que  $f$  est surjective si et seulement si pour toute partie  $B$  de  $F$  on a  $f(f^{-1}(B)) = B$ .

Allez à : [Correction exercice 33](#) :

### Exercice 34 :

Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x \leq y\}$

Soit  $f: D \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$

- Représenter  $D$  dans le plan.
- a. Montrer que si deux couples de réels  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  vérifient

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

Alors  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  (autrement dit  $x_1 = x_2$  et  $y_1 = y_2$ ).

- b. Montrer que  $f$  est injective, on pourra se ramener au système du 2.a..
- Est-ce que  $f$  est surjective ?

Allez à : [Correction exercice 34](#) :

## CORRECTIONS

### Correction exercice 1 :

$$A \cap B = \{1,2,3\}; \quad A \cup B = \{0,1,2,3\}$$

Remarque :

Comme  $A \subset B$  on a  $A \cap B = A$  et  $A \cup B = B$

$$A \times B = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

Remarque :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 3 \times 4 = 12$$

Allez à : Exercice 1 :

### Correction exercice 2 :

$$A \cap B = [2,3]; \quad A \cup B = [1,4]$$

Allez à : Exercice 2 :

### Correction exercice 3 :

1.

$$C_{\mathbb{R}}A_1 = ]0, +\infty[; \quad C_{\mathbb{R}}A_2 = [0, +\infty[; \quad C_{\mathbb{R}}A_3 = ]-\infty, 0]; \quad C_{\mathbb{R}}A_4 = ]-\infty, 0[; \\ C_{\mathbb{R}}A_5 = ]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[; \quad C_{\mathbb{R}}A_6 = ]-\infty, 1[ \cup [2, +\infty[$$

2.

$$C_{\mathbb{R}}A = [1,2]; \quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = [1, +\infty[ \cap ]2, +\infty[ = [1,2]$$

Remarque :

$$C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = C_{\mathbb{R}}(B \cup C) = C_{\mathbb{R}}A$$

Allez à : Exercice 3 :

### Correction exercice 4 :

$$A \cap B = ]-2,3]$$

$$A \cup B = ]-\infty, 7]$$

$$B \cap C = ]-2,7]$$

$$B \cup C = ]-5, +\infty[$$

$$\mathbb{R} \setminus A = ]3, +\infty[$$

$$A \setminus B = ]-\infty, -2]$$

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) = ]3, +\infty[ \cap (]-\infty, -2] \cup ]7, +\infty[) = (]3, +\infty[ \cap ]-\infty, -2]) \cup (]3, +\infty[ \cap ]7, +\infty[) \\ = \emptyset \cup ]7, +\infty[ = ]7, +\infty[$$

Ou mieux

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus (A \cup B) = ]7, +\infty[$$

$$(\mathbb{R} \setminus (A \cup B)) = ]7, +\infty[$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = ]-2,3] \cup ]-5,3] = ]-5,3]$$

Ou

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C) = ]-\infty, 3] \cap ]-5, +\infty[ = ]-5,3]$$

$$A \cap (B \cup C) = ]-\infty, 3] \cap ]-5, +\infty[ = ]-5,3]$$

Allez à : Exercice 4 :

### Correction exercice 5 :

Il s'agit de résultats du cours que l'on peut utiliser sans démonstration mais cet exercice demande de les redémontrer.

1. Si  $x \in A \cup (B \cap C)$

Alors  $(x \in A \text{ ou } x \in (B \cap C))$

Alors  $(x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C))$

Si  $x \in A$  alors  $x \in A \cup B$  et  $x \in A \cup C$ , par conséquent  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

Si  $(x \in B \text{ et } x \in C)$  alors  $(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C)$

Donc si  $(x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C))$  alors  $(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C)$

On a montré que  $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Si  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$  alors  $(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C)$ .

$$(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C) \Leftrightarrow ((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C))$$

Si  $(x \in A \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C))$  alors  $x \in A \cap A \text{ ou } x \in A \cap C$

Si  $(x \in B \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C))$  alors  $x \in B \cap A \text{ ou } x \in B \cap C$

Alors  $x \in A \text{ ou } x \in A \cap C \text{ ou } x \in B \cap A \text{ ou } x \in B \cap C$

Alors  $x \in A \text{ ou } x \in A \cap C \subset A \text{ ou } x \in B \cap A \subset A \text{ ou } x \in B \cap C$

Alors  $x \in A \text{ ou } x \in B \cap C$

Alors  $x \in A \cup (B \cap C)$

On a montré que  $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

Finalement  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. Si  $x \in A \cap (B \cup C)$

Alors  $(x \in A \text{ et } x \in B \cup C)$

Alors  $(x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C))$

Alors  $(x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)$

Alors  $x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C$

Alors  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

On a montré que  $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Si  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Alors  $x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C$

Alors  $(x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)$

Alors  $(x \in A \text{ ou } x \in A) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C) \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in A) \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)$

Alors  $x \in A \text{ et } x \in A \cup C \text{ et } x \in B \cup A \text{ et } x \in B \cup C$

Comme  $x \in A \text{ et } x \in A \cup C \text{ et } x \in B \cup A$  entraîne que  $x \in A$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \text{ et } x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

On a montré que  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

Et finalement  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Allez à : **Exercice 5 :**

**Correction exercice 6 :**

1.

$$A_1 = A \cap B \neq \emptyset$$

D'après l'énoncé

$$A_2 = A \cap C_E B = A \setminus B \neq \emptyset$$

Car  $A \not\subseteq B$ .

$$A_3 = B \cap C_E A = B \setminus A \neq \emptyset$$

Car  $B \not\subseteq A$

$$A_4 = C_E(A \cup B) = E \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$$

Car  $A \cup B \neq E$ , en fait  $A \cup B \not\subseteq E$  car  $A \subset E$  et  $B \subset E$ .

2.

$$A_1 \cap A_2 = (A \cap B) \cap (A \cap C_E B) = A \cap B \cap A \cap C_E B = (A \cap A) \cap (B \cap C_E B) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A_1 \cap A_3 = (A \cap B) \cap (B \cap C_E A) = A \cap B \cap B \cap C_E A = (B \cap B) \cap (A \cap C_E A) = B \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_4 &= (A \cap B) \cap (C_E(A \cup B)) = (A \cap B) \cap (C_E A \cap C_E B) = A \cap B \cap C_E A \cap C_E B \\ &= (A \cap C_E A) \cap (B \cap C_E B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

$$A_2 \cap A_3 = (A \cap C_E B) \cap (B \cap C_E A) = A \cap C_E B \cap B \cap C_E A = (A \cap C_E A) \cap (B \cap C_E B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A_2 \cap A_4 = (A \cap C_E B) \cap C_E(A \cup B) = (A \cap C_E B) \cap (C_E A \cap C_E B) = A \cap C_E B \cap C_E A \cap C_E B$$

$$= (A \cap C_E A) \cap (C_E B \cap C_E B) = \emptyset \cap C_E B = \emptyset$$

$$A_3 \cap A_4 = (B \cap C_E A) \cap C_E(A \cup B) = (B \cap C_E A) \cap (C_E A \cap C_E B) = B \cap C_E A \cap C_E A \cap C_E B$$

$$= (B \cap C_E B) \cap (C_E A \cap C_E A) = \emptyset \cap C_E A = \emptyset$$

3.  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  sont deux à deux disjoints.

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cap A_4 = (A \cap B) \cup (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A) \cup C_E(A \cup B)$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A) \cup (C_E A \cap C_E B)$$

$$= [(A \cap B) \cup (A \cap C_E B)] \cup [(B \cap C_E A) \cup (C_E A \cap C_E B)]$$

$$= [(A \cup A) \cap (A \cup C_E B) \cap (B \cup A) \cap (B \cup C_E B)]$$

$$\cup [(B \cup C_E A) \cap (B \cup C_E B) \cap (C_E A \cup C_E A) \cap (C_E A \cup C_E B)]$$

$$= [A \cap (A \cup C_E B) \cap (A \cup B) \cap E] \cup [(B \cup C_E A) \cap E \cap C_E A \cap (C_E A \cup C_E B)]$$

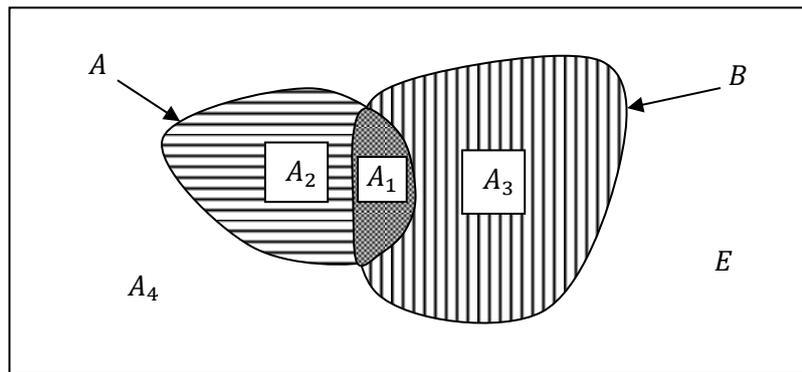
$$= [A \cap \{(A \cup C_E B) \cap (A \cup B)\}] \cup [C_E A \cap \{(B \cup C_E A) \cap (C_E A \cup C_E B)\}]$$

$$= [A \cap \{A \cup (C_E B \cap B)\}] \cup [C_E A \cap \{C_E A \cup (B \cap C_E B)\}]$$

$$= [A \cap \{A \cup \emptyset\}] \cup [C_E A \cap \{C_E A \cup \emptyset\}] = [A \cap A] \cup [C_E A \cap C_E A] = A \cup C_E A = E$$

Remarque :

$(A_1, A_2, A_3, A_4)$  est une partition de  $E$ .



Sur un schéma c'est une évidence ( $E$  est le carré sur le schéma).

Allez à : **Exercice 6 :**

**Correction exercice 7 :**

1.

$$C_{\mathbb{R}} A_1 = ]0, +\infty[; C_{\mathbb{R}} A_2 = [0, +\infty[; C_{\mathbb{R}} A_3 = ]-\infty, 0]; C_{\mathbb{R}} A_4 = ]-\infty, 0];$$

$$C_{\mathbb{R}} A_5 = ]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[; C_{\mathbb{R}} A_6 = ]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$$

2.

$$C_{\mathbb{R}} A = [1, 2]; C_{\mathbb{R}} B \cap C_{\mathbb{R}} C = [1, +\infty[ \cap ]2, +\infty[ = [1, 2]$$

Remarque :

$$C_{\mathbb{R}} B \cap C_{\mathbb{R}} C = C_{\mathbb{R}}(B \cup C) = C_{\mathbb{R}} A$$

Allez à : **Exercice 7 :**

**Correction exercice 8 :**

a) Soit  $x \in \overline{B} = C_E^B$ ,  $x \notin B$ , comme  $A \subset B$ ,  $x \notin A$ , autrement dit  $x \in \overline{A} = C_E^A$  ce qui montre que si  $x \in \overline{B}$  alors  $x \in \overline{A}$ .

b) Si  $x \in A$  alors  $x \notin B$  (car  $A \cap B = \emptyset$ ) donc  $x \in \overline{B} = C_E^B$ .

Si  $x \notin A$  alors  $x \in \overline{A} = C_E^A$

c)  $C_E(C_E A) = A$ ,  $A \cap C_E A = \emptyset$ ,  $A \cup C_E A = E$ ,  $C_E \emptyset = E$  et  $C_E E = \emptyset$

Allez à : **Exercice 8 :**

**Correction exercice 9 :**

- $(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \setminus (B \cup C)$
- $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap \overline{B}) \cap (C \cap \overline{D}) = (A \cap C) \cap (\overline{B} \cap \overline{D}) = (A \cap C) \cap \overline{(B \cup D)} = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Allez à : **Exercice 9 :**

**Correction exercice 10 :**

1.

$$(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) = (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = \emptyset \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = A \cap B \cap \overline{C}$$

Pour la seconde il suffit d'invertir  $B$  et  $C$ .

2.

$$\begin{aligned} (A \cap B) \Delta (A \cap C) &= ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B)) \\ &= ((A \cap B) \cap \overline{(A \cap C})) \cup ((A \cap C) \cap \overline{(A \cap B)}) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \\ &= A \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})) = A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) = A \cap (B \Delta C) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 10 :**

**Correction exercice 11 :**

1.

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (\overline{A \cup C}) &= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{C}) = (A \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \\ &= (A \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) = \emptyset \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) = B \cap \overline{A} \cap \overline{C} = \overline{A} \cap B \cap \overline{C} \end{aligned}$$

Pour la seconde égalité il suffit d'invertir les rôles de  $B$  et  $C$ .

2.

$$\begin{aligned} (A \cup B) \Delta (A \cup C) &= (A \cup B) \setminus (A \cup C) \cup (A \cup C) \setminus (A \cup B) = (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap C \cap \overline{B}) \\ &= \overline{A} \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})) = \overline{A} \cap (B \setminus C \cup C \setminus B) = \overline{A} \cap (B \Delta C) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 11 :**

**Correction exercice 12 :**

1. La contraposée de cette implication est :

$$(A \subset C \text{ et } B \subset C) \Rightarrow A \cup B \subset C$$

Cette implication est vraie.

2. Prenons  $x \in B$ .

Alors  $x \in A \cup B$ , alors  $x \in A \cup C$  d'après l'hypothèse.

Si  $x \in C$  c'est fini. Si  $x \in A \setminus C$  alors  $x \in A \cap B$  (puisque l'on a pris  $x \in B$ ), d'après l'hypothèse  $x \in A \cap C$  ce qui entraîne que  $x \in C$ .

On a bien montré que  $B \subset C$ .

Allez à : **Exercice 12 :**

**Correction exercice 13 :**

Il s'agit de résultats du cours, on peut les utiliser sans démonstration mais c'est l'objet de cet exercice.

1. Soit  $x \in C_E(A \cap B)$ ,  $x \notin A \cap B$  et donc  $x \notin A$  ou  $x \notin B$ , ce qui signifie que  $x \in C_E A \cup C_E B$

Cela montre que  $C_E(A \cap B) \subset C_E A \cup C_E B$ .

Soit  $x \in C_E A \cup C_E B$ ,  $x \notin A$  ou  $x \notin B$  donc  $x \notin A \cap B$  ce qui entraîne que  $x \in C_E(A \cap B)$ .

Cela montre que  $C_E A \cup C_E B \subset C_E(A \cap B)$ .

Et finalement

$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$$

Remarque :

On aurait raisonner par équivalence.

2. Soit  $x \in C_E(A \cup B)$ ,  $x \notin A \cup B$  et donc  $x \notin A$  et  $x \notin B$ , ce qui signifie que  $x \in C_E A \cap C_E B$ .  
Cela montre que  $C_E(A \cup B) \subset C_E A \cap C_E B$ .  
Soit  $x \in C_E A \cap C_E B$ ,  $x \notin A$  et  $x \notin B$  donc  $x \notin A \cup B$  ce qui entraine que  $x \in C_E(A \cup B)$ .  
Cela montre que  $C_E A \cap C_E B \subset C_E(A \cup B)$ .  
Et finalement

$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$$

Remarque :

On aurait pu raisonner par équivalence.

Allez à : **Exercice 13 :**

### Correction exercice 14 :

Il s'agit de résultats du cours, on peut les utiliser sans démonstration mais c'est l'objet de cet exercice.

1. Supposons que  $F \subset G$ .  
Si  $x \in F \cup G$  alors  $x \in F \subset G$  ou  $x \in G$  alors  $x \in G$ . Donc  $F \cup G \subset G$ .  
Si  $x \in G$  alors  $x \in F \cup G$ , par conséquent  $F \cup G = G$ .  
On a montré que  $F \subset G \Rightarrow F \cup G = G$   
Supposons que  $F \cup G = G$ .  
Soit  $x \in F$ ,  $x \in F \cup G = G$  donc  $x \in G$ .  
On a montré que  $F \cup G = G \Rightarrow F \subset G$ .  
Finalement  $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$ .
2. Supposons que  $F \subset G$ .  
Si  $x \in F \cap C_E G$ ,  $x \in F$  et  $x \notin G \supset F$  donc  $x \in F$  et  $x \notin F$  ce qui est impossible par conséquent  $F \cap C_E G = \emptyset$ .  
On a montré que  $F \subset G \Rightarrow F \cap C_E G = \emptyset$   
Supposons que  $F \cap C_E G = \emptyset$ .  
Soit  $x \in F$ , supposons que  $x \notin G \Leftrightarrow x \in C_E G$  ce qui signifie que  $x \in F \cap C_E G = \emptyset$ , c'est impossible donc l'hypothèse  $x \notin G$  est fautive, par conséquent  $x \in G$  et  $F \subset G$ .  
On a montré que  $F \cap C_E G = \emptyset \Rightarrow F \subset G$ .  
Finalement  $F \subset G \Leftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$ .

Allez à : **Exercice 14 :**

### Correction exercice 15 :

1.

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) = \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup \emptyset \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A \Delta A &= (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset \\ A \Delta \emptyset &= (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A \\ A \Delta E &= (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = \overline{A} \end{aligned}$$

3.

a)

$$\begin{aligned} \overline{(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})} &= \overline{A \cap \bar{B}} \cap \overline{B \cap \bar{A}} = (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup A) \\ &= (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap A) \cup (B \cap \bar{B}) \cup (B \cap A) = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (B \cap A) \\ &= (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap A) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (A\Delta B)\Delta C &= ((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}))\Delta C = (((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) \cap \bar{C}) \cup (C \cap \overline{(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})}) \\ &= (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup (C \cap ((\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap A))) \\ &= (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cup (C \cap B \cap A) \end{aligned}$$

c)

$$(A\Delta B)\Delta C = (C \cap \overline{A\Delta B}) \cup ((A\Delta B) \cap \bar{C}) = ((A\Delta B) \cap \bar{C}) \cup (C \cap \overline{A\Delta B}) = C\Delta(A\Delta B)$$

or  $A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = B\Delta A$  donc  $(A\Delta B)\Delta C = C\Delta(A\Delta B) = C\Delta(B\Delta A)$

d)

$(C\Delta B)\Delta A = (C \cap \bar{B} \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{C} \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup (A \cap B \cap C) = A\Delta(B\Delta C)$ , en changeant  $A$  et  $C$ .

e)

$(A\Delta B)\Delta C = C\Delta(B\Delta A)$  d'après d) or  $C\Delta(B\Delta A) = A\Delta(B\Delta C)$  d'après c).

Donc  $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ .

Allez à : **Exercice 15 :**

### Correction exercice 16 :

1.  $I = [0,1]$  et  $J = [-1,1]$ .
2.  $I = [-1,1]$  et  $J = [0,1]$ .
3.  $I = [-1,1]$  et  $J = [-1,1]$ .
4.  $I = [0,1]$  et  $J = [0,1]$ .

Allez à : **Exercice 16 :**

### Correction exercice 17 :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$f(-1) = f(1)$  donc  $f$  n'est pas injective.

$-4$  n'a pas d'antécédent, car  $f(x) = -4 \Leftrightarrow x^2 = -4$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$ .  $f$  n'est pas surjective.

Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective donc cette fonction n'est pas bijective.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$$

Car  $x_1 \geq 0$  et  $x_2 \geq 0$ .  $f$  est injective.

Pour tout  $y \in \mathbb{R}^*$ , (celui de l'ensemble d'arrivée), il existe  $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}^*$ , (celui de l'ensemble de départ)

tel que :  $y = f(x)$ , en effet  $f(x) = (\sqrt{y})^2 = y$  donc  $f$  est surjective.

$f$  est bijective.

$$\begin{aligned} f: [0,1] &\rightarrow [0,2] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$$

Car  $x_1 \geq 0$  et  $x_2 \geq 0$ .  $f$  est injective.

2 n'a pas d'antécédent, car  $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2$  n'a pas de solution dans  $[0,1]$ .  $f$  n'est pas surjective.

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x + x^3$$

$g$  est une fonction dérivable,  $g'(x) = 1 + 3x^2 > 0$  donc  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

La contraposée de  $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$  est  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$

Supposons que  $x_1 \neq x_2$ , alors  $x_1 < x_2$  (ou  $x_2 < x_1$ , ce que revient au même), on en déduit que  $g(x_1) < g(x_2)$  car  $g$  est strictement croissante, par conséquent  $g(x_1) \neq g(x_2)$ ,  $g$  est injective.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$g$  est une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ , par conséquent pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , il existe un unique  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $y = g(x)$ ,  $g$  est surjective. Mais l'unicité du «  $x$  » fait que  $g$  est bijective donc il était inutile de montrer l'injectivité de  $g$ .

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + x^3$$

On va étudier (sommairement) cette fonction et dresser son tableau de variation.

$h$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  $h'(x) = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

Le «  $x^3$  » l'emporte sur le «  $x^2$  ».

$$h(0) = 0 \quad \text{et} \quad h\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$0$	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{4}{27}$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	

Les seules bijections de  $E \subset \mathbb{R}$  sur  $F \subset \mathbb{R}$  sont les fonctions strictement monotones dont l'image de  $E$  est  $F$ .

$h$  n'est pas une bijection.

Comme  $h(-1) = 0 = h(0)$ ,  $h$  n'est pas injective.

Pour tout  $y \in \mathbb{R}$  il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $y = h(x)$ , et bien il n'y a pas unicité sinon  $h$  serait bijective.

Pour tout  $y \in [0, \frac{4}{27}[$  il existe trois valeurs  $x$  tel que  $y = h(x)$ , pour  $y = \frac{4}{27}$ , il y en a deux pour les autres  $y$  n'a qu'un antécédent.

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x + x^4$$

On va étudier cette fonction,  $k$  est dérivable et  $k'(x) = 1 + 4x^3$

$$k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \left(-\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$$

$$k\left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) \left(1 + \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^3\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{8^{\frac{2}{3}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

Le «  $x^4$  » l'emporte sur le «  $x$  ».

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{8^{\frac{2}{3}}}$	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	$0$	$+$
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow -\frac{3}{8^{\frac{2}{3}}}$	$\nearrow +\infty$

Pour tout  $y > -\frac{3}{8^{\frac{2}{3}}}$ ,  $y$  admet deux antécédents,  $k$  est ni surjective ni injective.

Allez à : Exercice 17 :

### Correction exercice 18 :

1.

$$f(1,2) = 1 \times 2 = 2 \times 1 = f(2,1)$$

Donc  $f$  n'est pas injective.

2.  $f(1,p) = 1 \times p = p$

Donc pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe  $(n,m) = (1,p)$  tel que  $p = f(n,m)$

$f$  est surjective.

3.

$$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow (n_1, (n_1 + 1)^2) = (n_2, (n_2 + 1)^2) \Rightarrow \begin{cases} n_1 = n_2 \\ (n_1 + 1)^2 = (n_2 + 1)^2 \end{cases} \Rightarrow n_1 = n_2$$

Donc  $g$  est injective.

4. On va montrer que  $(1,1)$  n'admet pas d'antécédent. Supposons que

$$(1,1) = (n, (n + 1)^2)$$

Alors

$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = (n + 1)^2 \end{cases}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = 2^2 \end{cases}$$

Ce qui est impossible donc  $(1,1)$  n'admet pas d'antécédent,  $g$  n'est pas surjective.

Allez à : Exercice 18 :

### Correction exercice 19 :

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$$

$f$  est injective.

1 n'a pas d'antécédent car il n'existe pas d'entier naturel  $n$  tel que  $1 = 2n$ ,  $f$  n'est pas surjective.

$g(0) = E\left(\frac{0}{2}\right) = E(0) = 0$  et  $g(1) = E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ , donc  $g(0) = g(1)$  ce qui entraîne que  $g$  n'est pas injective.

Pour tout  $y = n \in \mathbb{N}$  (dans l'ensemble d'arrivée) il existe  $x = 2n \in \mathbb{N}$  (dans l'ensemble de départ) tel que :

$$g(x) = E\left(\frac{x}{2}\right) = E\left(\frac{2n}{2}\right) = E(n) = n = y$$

$g$  est surjective.

Si  $n$  est pair, il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2p$

$$f \circ g(n) = f(g(n)) = f(g(2p)) = f\left(E\left(\frac{2p}{2}\right)\right) = f(E(p)) = f(p) = 2p = n$$

Si  $n$  est impair, il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2p + 1$

$$f \circ g(n) = f(g(n)) = f(g(2p + 1)) = f\left(E\left(\frac{2p + 1}{2}\right)\right) = f\left(E\left(p + \frac{1}{2}\right)\right) = f(p) = 2p = n - 1$$

$$f \circ g(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ n - 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Que  $n$  soit paire ou impaire

$$g \circ f(n) = g(f(n)) = g(2n) = E\left(\frac{2n}{2}\right) = E(n) = n$$

$$g \circ f = id$$

Remarque :

Comme on le voit sur cet exemple, il ne suffit pas que  $g \circ f = id$  pour que  $g$  soit la bijection réciproque de  $f$ . La définition de la bijection réciproque d'une fonction  $f_1: E \rightarrow E$  est :

« S'il existe une fonction  $f_2: E \rightarrow E$  telle que  $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = id_E$  alors  $f_2 = f_1^{-1}$  » on a alors :  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions bijectives.

Allez à : **Exercice 19** :

### Correction exercice 20 :

$f(E) \subset E$  donc  $f(f(E)) \subset f(E) \subset E$ , or  $f(f(E)) = E$  donc  $E \subset f(E) \subset E$ , par conséquent  $E = f(E)$  ce qui signifie que  $f$  est surjective.

Allez à : **Exercice 20** :

### Correction exercice 21 :

- Supposons que  $g$  existe,  $f \circ g = Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f(g(n)) = n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (g(n))^2 = n$   
Si  $n$  n'est pas un carré cela ne marche pas, par exemple si  $n = 2$ ,  $(g(2))^2 = 2$  donc  $g(2) = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$   
Il n'existe pas de fonction  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$ .
- Supposons que  $h$  existe,  $h \circ f = Id_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, h(f(n)) = n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, h(n^2) = n$   
Les valeurs  $h(p)$  prennent les valeurs qu'elles veulent sauf lorsque  $p$  est un carré auquel cas  $h(p) = \sqrt{p}$ , donnons une fonction  $h$  qui répond à la question :  
Si  $p \neq n^2$  alors  $h(p) = 0$  et si  $p = n^2$  alors  $h(p) = \sqrt{p} = n$ .

Allez à : **Exercice 21** :

### Correction exercice 22 :

- Si  $g$  existe alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(g(n)) = n \Leftrightarrow 2g(n) = n$ , si  $n$  est impair  $g(n) \notin \mathbb{Z}$  donc il n'existe pas de fonction  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que  $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$ .
- Si  $h$  existe alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $h(f(n)) = n \Leftrightarrow h(2n) = n$   
Soit  $h$  la fonction définie, pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ , par  $h(2p) = p$  et  $h(2p + 1) = 0$  convient.

Allez à : **Exercice 22** :

### Correction exercice 23 :

On pose  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  et  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ , et bien sur tous les  $e_j$  sont distincts ainsi que tous les  $f_i$ .

On rappelle que le fait que  $f$  soit une application entraîne que  $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$

On suppose que  $f$  est injective, on va montrer que  $f$  est surjective.

On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si  $f$  n'est pas surjective alors  $f$  n'est pas injective.

Soit  $f_i \in F$  et on suppose qu'il n'existe pas de  $e_j \in E$  tel que  $f_i = f(e_j)$  ( $f$  n'est pas surjective)

Donc  $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n\}$ , il y a  $n$  éléments dans le premier ensemble et  $n - 1$  dans le second, donc il existe  $j_1$  et  $j_2$ , avec  $j_1 \neq j_2$  dans  $\{1, 2, \dots, n\}$  tels que  $f(e_{j_1}) = f(e_{j_2})$ , or  $e_{j_1} \neq e_{j_2}$  donc  $f$  n'est pas injective.

On suppose que  $f$  est surjective et on va montrer que  $f$  est injective.

On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si  $f$  n'est pas injective alors  $f$  n'est pas surjective.

Si  $f(e_i) = f(e_j) = u$  avec  $e_i \neq e_j$  alors

$\{f(e_1), \dots, f(e_{i-1}), u, f(e_{i+1}), \dots, f(e_{j-1}), u, f(e_{j+1}), \dots, f(e_n)\} \subset \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ , le premier ensemble a  $n - 1$  éléments et le second  $n$  donc il existe un  $f_j$  qui n'a pas d'antécédent, cela montre que  $f$  n'est pas surjective.

On a montré que  $(i) \Leftrightarrow (ii)$ , par définition  $(iii) \Rightarrow (i)$  et  $(iii) \Rightarrow (ii)$ . Si on a  $(i)$  alors on a  $(ii)$  et  $(i)$  et  $(ii)$  entraîne  $(iii)$  de même si on a  $(ii)$  alors on a  $(i)$  et  $(i)$  et  $(ii)$  entraîne  $(iii)$ . Ce qui achève de montrer les trois équivalences.

Allez à : **Exercice 23 :**

### Correction exercice 24 :

1.  $u$  et  $v$  sont surjectives donc  $u(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$  et  $v(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$  par conséquent

$$u \circ v \circ u(\mathbb{N}) = u(v(u(\mathbb{N}))) = u(v(\mathbb{Z})) = u(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$$

Cela montre que  $u \circ v \circ u$  est surjective.

$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow u(v(u(x_1))) = u(v(u(x_2))) \Leftrightarrow v(u(x_1)) = v(u(x_2))$$

Car  $u$  est injective

$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow v(u(x_1)) = v(u(x_2)) \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2)$$

Car  $v$  est injective

$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v \circ u(x_2) \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Car  $u$  est injective

Finalement  $u \circ v \circ u$  est injective et donc bijective (puisque'elle est surjective).

2.  $7$  n'admet pas d'antécédent donc  $f$  n'est pas surjective.

$$f(a, b, c) = f(a', b', c') \Leftrightarrow 2^a 3^b 5^c = 2^{a'} 3^{b'} 5^{c'}$$

L'unicité de la décomposition des entiers en produit de facteur premier entraîne que  $a = a'$ ,  $b = b'$  et  $c = c'$ , autrement dit  $f$  est injective.

Donc  $f$  est injective et pas surjective.

$$3. \varphi(n) = 0 \text{ et } \varphi(2n) = 0$$

Donc  $\varphi$  n'est pas injective.

$$\varphi(\mathbb{Z}) = \{0, 1, \dots, n-1\} \subsetneq \mathbb{N}$$

Donc  $\varphi$  n'est pas surjective.

4. Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{Z}$  on cherche s'il existe un unique couple  $(u, v) \in \mathbb{Z}$  tel que

Premier cas  $a \neq 0$

$$\begin{aligned} (x, y) = f(a, b) &\Leftrightarrow (x, y) = (au + bv + 1, cu + dv - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = au + bv + 1 \\ y = cu + dv - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \{ x - 1 = au + bv \\ L_2 \{ y + 1 = cu + dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \{ x - 1 = au + bv \\ cL_1 - aL_2 \{ c(x - 1) - a(y + 1) = cbv - adv \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = au + bv \\ c(x - 1) - a(y + 1) = (cb - ad)v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = au + bv \\ c(x - 1) - a(y + 1) = -v \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = au + b(-c(x - 1) + a(y + 1)) \\ v = -c(x - 1) + a(y + 1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} au = -b(-c(x - 1) + a(y + 1)) + (x - 1) \\ v = -c(x - 1) + a(y + 1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} au = bc(x - 1) - ab(y + 1) + (x - 1) \\ v = -c(x - 1) + a(y + 1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} au = (bc + 1)(x - 1) - ab(y + 1) \\ v = -c(x - 1) + a(y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} au = ad(x - 1) - ab(y + 1) \\ v = -c(x - 1) + a(y + 1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u = d(x - 1) - b(y + 1) \\ v = -c(x - 1) + a(y + 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $a = 0$ , alors  $bc = -1$ , en particulier  $b \neq 0$  et  $\frac{1}{b} = -c$

$$\begin{aligned}
(x, y) = f(0, b) &\Leftrightarrow (x, y) = (bv + 1, cu + dv - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = bv + 1 \\ y = cu + dv - 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{x-1}{b} \\ y = cu + dv - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -c(x-1) \\ y = cu - dc(x-1) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -c(x-1) \\ y = cu - dc(x-1) - 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} v = -c(x-1) \\ cu = dc(x-1) + 1 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -c(x-1) \\ u = d(x-1) + \frac{1+y}{c} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} v = -c(x-1) \\ u = d(x-1) - b(1+y) \end{cases}
\end{aligned}$$

Ce sont les mêmes formules que dans le cas où  $a \neq 0$

Donc pour tout  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  il existe un unique couple

$$(u, v) = (d(x-1) - b(y+1), -c(x-1) + a(y+1)) \in \mathbb{Z}^2$$

tel que  $(x, y) = f(u, v)$ ,  $f$  est bijective et

$$f^{-1}(x, y) = (d(x-1) - b(y+1), -c(x-1) + a(y+1))$$

Allez à : **Exercice 24 :**

### Correction exercice 25 :

Supposons qu'il existe  $f: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$  surjective et on cherche s'il existe un antécédent à  $A$ . On appelle  $x_0 \in E$ , un antécédent de  $A$ , donc par définition  $f(x_0) = A$ ,

si  $x_0 \in f(x_0)$  alors  $x_0 \in A$  et donc  $x_0 \notin f(x_0)$  ce qui est contradictoire

Si  $x_0 \notin f(x_0)$  alors par définition de  $A$ ,  $x_0 \in A = f(x_0)$  ce qui est aussi contradictoire.

L'hypothèse est donc fautive, il n'y a pas d'application surjective de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ .

Allez à : **Exercice 25 :**

### Correction exercice 26 :

1. Première méthode : raisonnons par récurrence

On pose  $(H_n)$  il y a  $n(n-1)$  applications injectives de  $I_2$  dans  $I_n$ .

Regardons si  $(H_2)$  est vraie.

Il y a 4 applications de  $I_2$  dans  $I_n$ .

$$f_1(1) = 1 \text{ et } f_1(2) = 1$$

$$f_2(1) = 1 \text{ et } f_2(2) = 2$$

$$f_3(1) = 2 \text{ et } f_3(2) = 1$$

$$f_4(1) = 2 \text{ et } f_4(2) = 2$$

Seules  $f_2$  et  $f_3$  sont injectives. Il y a  $2 = 2(2-1)$  applications injectives de  $I_2$  dans  $I_2$ .

Montrons que  $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$

Il y a  $n(n-1)$  applications injectives de  $\{0,1\}$  dans  $\{0,1, \dots, n\}$ .

Supposons que  $f(1) = n+1$  alors  $f(2) \in \{1, \dots, n\}$  (pour que  $f(1) \neq f(2)$ ), cela fait  $n$  applications injectives de plus.

Supposons que  $f(2) = n+1$  alors  $f(1) \in \{1, \dots, n\}$  (pour que  $f(1) \neq f(2)$ ), cela fait  $n$  applications injectives de plus.

Au total, il y a  $n(n-1) + n + n = n^2 - n + n + n = n^2 + n = n(n+1)$

L'hypothèse est vérifiée.

Conclusion pour tout  $n \geq 2$ , il y a  $n(n-1)$  applications injectives de  $I_2$  dans  $I_n$ .

Deuxième méthode :

Si  $f(1) = k \in \{0,1, \dots, n\}$  alors  $f(2) \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$ .

Cela fait  $n$  choix possibles pour  $f(1)$  et  $n-1$  pour  $f(2)$ , soit  $n(n-1)$  choix possibles pour  $(f(1), f(2))$  de façon à ce que  $f(1) \neq f(2)$  (autrement dit pour que  $f$  soit injective).

2.  $f: I_m \rightarrow I_n$

$f$  injective équivaut à  $f(1) = k_1; f(2) = k_2; \dots; f(m) = k_m$ , avec  $k_1, k_2, \dots, k_m \in \{1, 2, \dots, n\}$  tous distincts par conséquent  $m \leq n$ .

Remarque :

Cela ne veut pas dire que toutes les applications de  $\{1, 2, \dots, m\}$  dans  $\{1, 2, \dots, n\}$  sont injectives !

Supposons que  $f$  est surjective.

Pour tout  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \{1, 2, \dots, n\}$  (les  $k_i$  tous distincts) il existe  $l_1, l_2, \dots, l_n \in \{1, 2, \dots, m\}$  tels que  $k_i = f(l_i)$  par définition d'une application tous les  $l_i$  sont distincts (sinon un élément aurait plusieurs images), par conséquent  $n \leq m$ .

Pour que  $f$  soit bijective il faut (et il suffit) que  $f$  soit injective et surjective, par conséquent il faut que  $m \leq n$  et que  $n \leq m$ , autrement dit il faut que  $m = n$ .

Remarque :

Cela ne veut pas dire que toutes les applications de  $\{1, 2, \dots, n\}$  dans  $\{1, 2, \dots, n\}$  sont bijectives.

Allez à : **Exercice 26 :**

### Correction exercice 27 :

1.  $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Car  $g$  est injective

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Car  $f$  est injective.

Donc  $g \circ f$  est injective.

2. Première méthode :

Pour tout  $z \in G$  il existe  $y \in F$  tel que  $z = g(y)$  car  $g$  est surjective.

Comme pour tout  $y \in F$  il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$  car  $f$  est surjective. On en déduit que pour tout  $z \in G$  il existe  $x \in E$  tel que  $z = g(f(x)) = g \circ f(x)$  autrement dit  $g \circ f$  est surjective.

Remarque :

(a) D'habitude on appelle  $y$  un élément de l'image  $G$  mais ici ce pose un petit problème de notation parce que l'on va appeler  $x$  l'élément de  $F$  et on ne saura pas trop comment appeler l'élément de  $E$ , c'est pour cela qu'il est plus malin de l'appeler  $z$ .

(b) Si on commence par écrire « pour tout  $y \in F$  il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$  car  $f$  est surjective » puis « pour tout  $z \in G$  il existe  $y \in F$  tel que  $z = g(y)$  car  $g$  est surjective » donc « pour tout  $z \in G$  il existe  $x \in E$  tel que  $z = g(f(x)) = g \circ f(x)$  » cela ne va pas, je vous laisse réfléchir pourquoi.

Deuxième méthode :

On rappelle que  $\varphi: U \rightarrow V$  est surjective si et seulement si  $\varphi(U) = V$

Donc  $f(E) = F$  et  $g(F) = G$ , par conséquent  $g \circ f(E) = g(f(E)) = g(F) = G$  et on en déduit que  $g \circ f$  est surjective.

3. Si  $g$  et  $f$  sont bijectives alors elles sont injectives et  $g \circ f$  est injective et si  $g$  et  $f$  sont bijectives alors elles sont surjectives et  $g \circ f$  est surjective, on en déduit que  $g \circ f$  est bijective.

4.  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Car  $g \circ f$  est injective, par conséquent  $f$  est injective.

5. Première méthode :

Pour tout  $z \in G$ , il existe  $x \in E$  tel que  $z = g \circ f(x) = g(f(x))$ , donc il existe  $y = f(x)$  tel que  $z = g(y)$  ce qui signifie que  $g$  est surjective.

Deuxième méthode :

Comme  $g \circ f$  est surjective,  $g \circ f(E) = G \Leftrightarrow g(f(E)) = G$  or  $f(E) \subset F$  donc

$$g(f(E)) \subset g(F)$$

Comme  $g(F) \subset G$ , cela donne

$$G = g(f(E)) \subset g(F) \subset G$$

D'où

$$g(f(E)) = g(F) = G \Rightarrow g(F) = G$$

Ce qui montre que  $g$  est surjective.

6.

a.  $g \circ f = Id_E$  est bijective (l'identité est bijective)

$g \circ f$  est injective, d'après 4°),  $f$  est injective.

$g \circ f$  est surjective, d'après 5°),  $g$  est surjective.

Remarque :

$g \circ f = Id_E$  n'entraîne pas que  $g = f^{-1}$  et que donc  $f$  et  $g$  sont bijectives.

b.  $f \circ g = Id_F$  est bijective (l'identité est bijective)

$f \circ g$  est injective, d'après 4°),  $g$  est injective.

$f \circ g$  est surjective, d'après 5°),  $f$  est surjective.

c.  $f \circ f = Id_E$  est bijective

$f \circ f$  est injective, d'après 4°),  $f$  est injective.

$f \circ f$  est surjective, d'après 5°),  $f$  est surjective.

Par conséquent  $f$  est bijective et  $f^{-1} = f$ .

Allez à : **Exercice 27** :

### Correction exercice 28 :

1. Pour tout  $y \in Y$  il existe  $x = s(y) \in X$  tel que  $y = Id_Y(y) = f(s(y)) = f(x)$ ,  $f$  est surjective.

2.  $s(y_1) = s(y_2) \Rightarrow f(s(y_1)) = f(s(y_2)) \Rightarrow y_1 = y_2$

$s$  est injective.

3.  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow r(f(x_1)) = r(f(x_2)) \Rightarrow Id_X(x_1) = Id_X(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f$  est injective.

4. Pour tout  $x \in X$ , pose  $y = f(x)$ .

Comme  $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$  à chaque  $y \in Y$  telle que  $y = f(x)$  on associe bien une unique valeur  $x$ , on définit alors  $r: f(X) \rightarrow X$  par  $r(y) = x$ . Pour les  $y \in Y$  qui ne sont pas dans l'image de  $X$  par  $f$ , autrement dit qui ne sont pas de la forme  $y = f(x)$ , on leur attribue n'importe quelle valeur dans  $X$ , mettons  $x_0$  pour fixé les idées (d'ailleurs, on n'est pas obligé de leur attribuer à tous la même valeur).

Pour tout  $x \in X$ .

$$x = r(y) = r(f(x)) \Leftrightarrow Id_X = r \circ f$$

$r$  est bien une rétraction de  $f$ .

Remarque :

Si  $y \notin f(X)$ ,  $r(y) = x_0$  ne sert à rien pour montrer que  $r$  est une rétraction.

5. Pour tout  $x \in X$ , il existe  $y = f(x)$  tel que :

$$x = Id_X(x) = r(f(x)) = r(y)$$

Cela montre que  $r$  est surjective.

Remarque :

Les rôles habituels de  $x$  et  $y$  ont été inversés pour respecter les notations de l'énoncé.

6.

Si  $f$  admet une section alors  $f$  est surjective d'après 1°).

Si  $f$  admet une rétraction alors  $f$  est injective d'après 3°).

Par conséquent  $f$  est bijective, on note  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  sa bijection réciproque.

Comme  $Id_X = r \circ f$ , en composant par  $f^{-1}$  à droite :

$$Id_X \circ f^{-1} = (r \circ f) \circ f^{-1} \Leftrightarrow f^{-1} = r \circ (f \circ f^{-1}) = r$$

Comme  $Id_Y = f \circ s$ , en composant par  $f^{-1}$  à gauche :

$$f^{-1} \circ Id_Y = f^{-1} \circ (f \circ s) \Leftrightarrow f^{-1} = (f^{-1} \circ f) \circ s = s$$

D'où  $r = s = f^{-1}$ .

Allez à : **Exercice 28 :**

**Correction exercice 29 :**

1. Pour tout  $y \in f(A \cup B)$ , il existe  $x \in A \cup B$  tel que  $y = f(x)$ .

Comme  $x \in A$ ,  $y = f(x) \in f(A)$ , comme  $x \in B$ ,  $y = f(x) \in f(B)$  par conséquent

$$y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$$

Cela montre que  $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

Pour tout  $y \in f(A) \cup f(B)$ ,  $y \in f(A)$  ou  $y \in f(B)$

Si  $y \in f(A)$  alors il existe  $x \in A$  tel que  $y = f(x)$ , mais  $x \in A \subset A \cup B$  donc  $y = f(x) \in f(A \cup B)$

Si  $y \in f(B)$  alors il existe  $x \in B$  tel que  $y = f(x)$ , mais  $x \in B \subset A \cup B$  donc  $y = f(x) \in f(A \cup B)$

Cela montre que s tous les cas  $y \in f(A \cup B)$  et que donc

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$

Finalement  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2. Pour tout  $y \in f(A \cap B)$ , il existe  $x \in A \cap B$  tel que  $y = f(x)$ .

Comme  $x \in A \cap B \subset A$ ,  $y = f(x) \in f(A)$ , comme  $x \in A \cap B \subset B$ ,  $y = f(x) \in f(B)$  par conséquent

$$y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$$

Cela montre que  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Pour trouver un exemple où l'inclusion est stricte, d'après la suite, il ne faut pas prendre une fonction injective, par exemple prenons  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ , ensuite il faut prendre  $A$  et  $B$  où  $f$  n'est pas injective, par exemple :

$$A = [-4, 2] \text{ et } B = [-2, 3]$$

$$f(A) = f([-4, 2]) = [0, 16]; \quad f(B) = f([-2, 3]) = [0, 9] \Rightarrow f(A) \cap f(B) = [0, 9]$$

$$A \cap B = [-2, 2] \Rightarrow f(A \cap B) = [0, 4]$$

On a bien  $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$

Allez à : **Exercice 29 :**

**Correction exercice 30 :**

1.  $f^{-1}(\{2\}) = \{3, 4\}; f^{-1}(\{1, 2\}) = \{2, 3, 4\}; f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$

2.

$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$$

$$f^{-1}([1, 2]) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$$

Allez à : **Exercice 30 :**

**Correction exercice 31 :**

1.  $[0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$

Donc

$$f([0, 1] \times [0, 1]) = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$$

$$f^{-1}([-1, 1]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \in [-1, 1]\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [-1, 1]\} = [-1, 1] \times \mathbb{R}$$

2.

$$f(\mathbb{N}) = \{y \in [-1, 1], y = \cos(\pi n), n \in \mathbb{N}\} = \{y \in [-1, 1], y = (-1)^n, n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$$

$$f(2\mathbb{N}) = \{y \in [-1,1], y = \cos(2\pi n), n \in \mathbb{N}\} = \{y \in [-1,1], y = 1, n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$$

$$f^{-1}(\{\pm 1\}) = \{x \in \mathbb{R}, \cos(\pi x) = \pm 1\}$$

Or  $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$  et  $\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = (2k + 1)\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

$$f^{-1}(\{\pm 1\}) = \{x \in \mathbb{R}, x = 2k\pi, x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

Allez à : **Exercice 31** :

### Correction exercice 32 :

1. Pour tout  $x \in f^{-1}(A' \cup B')$ ,  $f(x) \in A' \cup B'$  donc  $f(x) \in A'$  ou  $f(x) \in B'$ , par conséquent  $x \in f^{-1}(A')$  ou  $x \in f^{-1}(B')$ , autrement dit  $x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$   
On a montré que  $f^{-1}(A' \cup B') \subset f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$   
Pour tout  $x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$ ,  $x \in f^{-1}(A')$  ou  $x \in f^{-1}(B')$ , par conséquent  $f(x) \in A'$  ou  $f(x) \in B'$ , autrement dit  $f(x) \in A' \cup B'$ , donc  $x \in f^{-1}(A' \cup B')$ .  
On a montré que  $f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cup B')$   
Finalement  $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
2. Pour tout  $x \in f^{-1}(A' \cap B')$ ,  $f(x) \in A' \cap B'$  donc  $f(x) \in A'$  et  $f(x) \in B'$ , par conséquent  $x \in f^{-1}(A')$  et  $x \in f^{-1}(B')$ , autrement dit  $x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$   
On a montré que  $f^{-1}(A' \cap B') \subset f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$   
Pour tout  $x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$ ,  $x \in f^{-1}(A')$  et  $x \in f^{-1}(B')$ , par conséquent  $f(x) \in A'$  et  $f(x) \in B'$ , autrement dit  $f(x) \in A' \cap B'$ , donc  $x \in f^{-1}(A' \cap B')$ .  
On a montré que  $f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cap B')$   
Finalement  $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

Allez à : **Exercice 32** :

### Correction exercice 33 :

1. Pour tout  $x \in A$ ,  $f(x) \in f(A)$  et donc  $x \in f^{-1}(f(A))$ , ce qui montre que  $A \subset f^{-1}(f(A))$
2. Pour tout  $y \in f(f^{-1}(B))$ , il existe  $x \in f^{-1}(B)$  tel que  $y = f(x)$ , comme  $x \in f^{-1}(B)$   $f(x) \in B$  ce qui entraîne que  $y \in B$ , ce qui montre que  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .
3. Comme « pour toute partie  $A$  de  $E$ , on a  $A \subset f^{-1}(f(A))$  » la question revient à montrer que :  
«  $f$  est injective si et seulement si pour toute partie  $A$  de  $E$  on a  $A \supset f^{-1}(f(A))$  »  
Si  $f$  est injective.  
Pour tout  $x \in f^{-1}(f(A))$ ,  $f(x) \in f(A)$  ce qui signifie qu'il existe  $x' \in A$  (attention, à priori ce n'est pas le même  $x$  que celui du début de la phrase) tel que  $f(x) = f(x')$  comme  $f$  est injective  $x = x'$ , par conséquent  $x \in A$ .  
On a montré que  $f^{-1}(f(A)) \subset A$ .  
Si pour toute partie  $A \subset E$ ,  $f^{-1}(f(A)) \subset A$   
$$f(x_1) = f(x_2) = y$$
  
On prend  $A = \{x_1\}$   
$$f(A) = f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\} = \{y\} \Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$$
  
D'après l'hypothèse  $f^{-1}(f(A)) \subset A$  donc  $\{f^{-1}(y)\} \subset \{x_1\}$   
Or  $x_2 \in f^{-1}(y)$  car  $f(x_2) = y$  donc  $x_2 \in \{x_1\}$  par conséquent  $x_1 = x_2$  ce qui signifie que  $f$  est injective.  
Finalement on a montré l'équivalence demandée.
4. Comme « pour toute partie  $B$  de  $F$ , on a  $f(f^{-1}(B)) \subset B$  » la question revient à montrer que :  
«  $f$  est surjective si et seulement si pour toute partie  $B$  de  $F$  on a  $f(f^{-1}(B)) \supset B$  »  
Si  $f$  est surjective.

Pour tout  $y \in B$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$  car  $f$  est surjective.

$x \in f^{-1}(B)$  entraîne que  $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ , cela montre que  $B \subset f(f^{-1}(B))$ .

Si pour tout  $B \subset f(f^{-1}(B))$

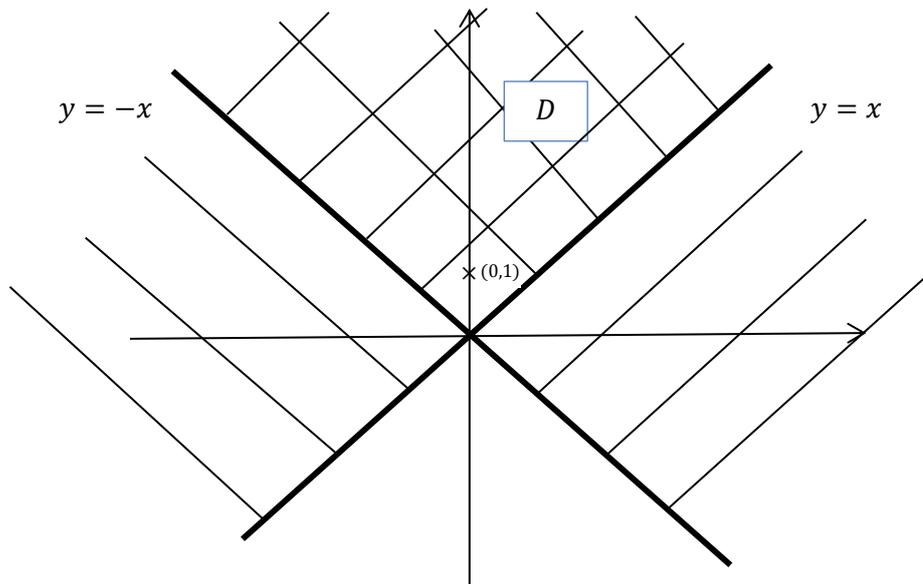
On pose  $B = \{y\}$ , alors  $\{y\} \subset f(f^{-1}(\{y\}))$  ce qui s'écrit aussi  $y \in f(f^{-1}(\{y\}))$ , il existe donc  $x \in f^{-1}(\{y\})$  tel que  $y = f(x)$ , cela montre bien que  $f$  est surjective.

Finalement on a montré l'équivalence demandée.

Allez à : **Exercice 33** :

### Correction exercice 34 :

- Le point  $(0,1)$  vérifie  $x \leq y$  donc  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$  est le demi-plan supérieur droit. De même  $(0,1)$  vérifie  $-y \leq x$  donc  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x\}$  est le demi-plan supérieur droit,  $D$  est l'intersection de ces deux demi-plan,  $D$  est le quart de plan supérieur du schéma ci-dessous.



- a.

$$\begin{aligned} L_1 & \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases} \\ L_2 & \end{aligned}$$

En additionnant  $L_1$  et  $L_2$  on trouve que  $2x_1 = 2x_2$ , donc  $x_1 = x_2$ , puis en remplaçant dans  $L_1$ , on trouve que  $y_1 = y_2$ .

- b.

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1^2 + y_1^2, 2x_1y_1) = (x_2^2 + y_2^2, 2x_2y_2) \Rightarrow \begin{cases} L_1 \{ x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \\ L_2 \{ 2x_1y_1 = 2x_2y_2 \end{cases}$$

$L_1 - L_2$  donne  $x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2$ , ce qui entraîne que  $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2$ , comme  $x - y \leq 0$  sur  $D$ , cela donne  $-(x_1 - y_1) = -(x_2 - y_2)$  ou encore  $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$ .

$L_1 + L_2$  donne  $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2$ , ce qui entraîne que  $(x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2$ , comme  $x + y \geq 0$  sur  $D$ , cela donne  $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ .

D'après 2.a. cela donne que  $x_1 = x_2$  et que  $y_1 = y_2$ , ce qui montre que  $f$  est injective.

- $(-1, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  n'a pas d'antécédent dans  $D$  car  $x^2 + y^2 > 0$ .

Allez à : **Exercice 34** :