

## Calculs de primitives

## Exercice 1.

Calculer

1.

$$F_1(x) = \int_0^x \cos^3(t) dt$$

2.

$$F_2(x) = \int_0^x \sin^3(t) dt$$

3.

$$F_3(x) = \int_0^x \cos^4(t) dt$$

4.

$$F_4(x) = \int_0^x \sin^4(t) dt$$

5.

$$F_5(t) = \int_0^x \cos^2(t) \sin^2(t) dt$$

6.

$$F_6(x) = \int_0^x \cos^2(t) \sin^3(t) dt$$

7.

$$F_7(x) = \int_0^x \cos(t) \sin^4(t) dt$$

Allez à : [Correction exercice 1](#)

## Exercice 2.

Calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) \sin^2(t) dt$$

Allez à : [Correction exercice 2](#)

## Exercice 3.

1.

$$F_1(x) = \int_0^x \operatorname{ch}^3(t) dt$$

2.

$$F_2(x) = \int_0^x \operatorname{sh}^3(t) dt$$

3.

$$F_3(x) = \int_0^x \operatorname{ch}^4(t) dt$$

4.

$$F_4(x) = \int_0^x \operatorname{sh}^4(t) dt$$

5.

$$F_5(t) = \int_0^x \operatorname{ch}^2(t) \operatorname{sh}^2(t) dt$$

6.

$$F_6(x) = \int_0^x \operatorname{ch}^2(t) \operatorname{sh}^3(t) dt$$

7.

$$F_7(x) = \int_0^x \operatorname{ch}(t) \operatorname{sh}^4(t) dt$$

Allez à : [Correction exercice 3](#)

Exercice 4.

Calculer les primitives suivantes :

1.

$$F_1(x) = \int (\cos(x) \cos(2x) + \sin(x) \sin(2x)) dx$$

2.

$$F_2(x) = \int \cos(x) \sin^4(x) dx$$

3.

$$F_3(x) = \int \cos^6(x) dx$$

4.

$$F_4(x) = \int \sin^4(x) dx$$

5.

$$F_5(x) = \int \sin^3(x) \cos^2(x) dx$$

6.

$$F_6(x) = \int \operatorname{ch}^2(x) \operatorname{sh}^2(x) dx$$

7.

$$F_7(x) = \int \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}^3(x) dx$$

8.

$$F_8(x) = \int \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}^3(x) dx$$

Allez à : [Correction exercice 4](#)

Exercice 5.

1.

$$F_1(x) = \int_0^x e^t \cos(t) dt$$

2.

$$F_2(x) = \int_0^x e^t \sin(t) dt$$

3.

$$F_3(x) = \int_0^x e^{-t} \cos(2t) dt$$

4.

$$F_4(x) = \int_0^x e^{-t} \sin(2t) dt$$

5.

$$F_5(x) = \int_0^x e^{2t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt$$

6.

$$F_6(x) = \int_0^x e^{-2t} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt$$

7.

$$F_7(x) = \int_0^x e^{-t} \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) dt$$

8.

$$F_8(x) = \int_0^x e^t \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) dt$$

Allez à : [Correction exercice 5](#)

Exercice 6.

1.

$$F_1(x) = \int_0^x t e^t dt$$

2.

$$F_2(x) = \int_0^x t^2 e^t dt$$

3.

$$F_3(x) = \int_0^x t^3 e^t dt$$

4.

$$F_4(x) = \int_1^x t \ln(t) dt$$

5.

$$F_5(x) = \int_1^x t^2 \ln(t) dt$$

6.

$$F_6(x) = \int_1^x t^3 \ln(t) dt$$

7.

$$F_7(x) = \int_0^x t \sin(t) dt$$

8.

$$F_8(x) = \int_0^x t^2 \sin(t) dt$$

9.

10. 
$$F_9(x) = \int_0^x t^3 \sin(t) dt$$

11. 
$$F_{10}(x) = \int_0^x t \cos(t) dt$$

12. 
$$F_{11}(x) = \int_0^x t^2 \cos(t) dt$$

13. 
$$F_{12}(x) = \int_0^x t^3 \cos(t) dt$$

14. 
$$F_{13}(x) = \int_0^x \arcsin(t) dt$$

15. 
$$F_{14}(x) = \int_0^x t \arcsin(t) dt$$

$$F_{15}(x) = \int_0^x \arctan(t) dt$$

Allez à : [Correction exercice 6](#)

Exercice 7.

1. 
$$F_1(x) = \int e^x \cos(x) dx$$

2. 
$$F_2(x) = \int \frac{\ln(x)}{x^n} dx, \quad n \neq 1$$

3. 
$$F_3(x) = \int x \arctan(x) dx$$

4. 
$$F_4(x) = \int (x^2 + x + 1)e^x dx$$

Allez à : [Correction exercice 7](#)

Exercice 8.

Calculer

1. 
$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x(x-1)}$$

2. 
$$F_2(x) = \int \frac{dx}{1-x^2}$$

3. 
$$F_3(x) = \int \frac{dx}{x(x^2-1)}$$

4.

$$F_4(x) = \int \frac{x^3}{x^2 + 4} dx$$

5.

$$F_5(x) = \int \frac{x}{x^2 + 4} dx$$

6.

$$F_6(x) = \int \frac{x^2}{x^2 + 3} dx$$

7.

$$F_7(x) = \int \frac{1}{x^2(x^2 - 1)} dx$$

8.

$$F_8(x) = \int \frac{1}{x(x^2 - 1)^2} dx$$

9.

$$F_9(x) = \int \frac{1}{(x^2 - 1)^2} dx$$

10.

$$F_{10}(x) = \int \frac{1}{x^2(x^2 - 1)^2} dx$$

11.

$$F_{11}(x) = \int \frac{x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

12.

$$F_{12}(x) = \int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} dx$$

13.

$$F_{13}(x) = \int \frac{x}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)} dx$$

14.

$$F_{14}(x) = \int \frac{dx}{x^4 - x^2 - 2}$$

15.

$$F_{15}(x) = \int \frac{dx}{(x + 2)(x^2 + 2x + 5)}$$

16.

$$F_{16}(x) = \int \frac{16dx}{x^2(x^2 + 2)^3}$$

17.

$$F_{17}(x) = \int \frac{x^4 + 1}{x(x - 1)^3} dx$$

18.

$$F_{18}(x) = \int \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} dx$$

19.

Trouver une primitive de

$$t \rightarrow \frac{t}{t^2 + 2t + 4}$$

Allez à : [Correction exercice 8](#)

Exercice 9.

1. Calculer

$$G(t) = \int \frac{-t + 1}{t^2 + 2t + 5} dt$$

2. Calculer

$$F(t) = \int \frac{\ln(t^2 + 2t + 5)}{(t - 1)^2} dt$$

Allez à : [Correction exercice 9](#)

Exercice 10.

Calculer les primitives suivantes :

1.

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x^2 + 5}$$

2.

$$F_2(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}}$$

3.

$$F_3(x) = \int e^x \sin(e^x) dx$$

4.

$$F_4(x) = \int \tan^3(x) dx$$

5.

$$F_5(x) = \int \frac{1}{\tan^3(x)} dx$$

6.

$$F_6(x) = \int \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x + 7)^m} dx, m \neq 1$$

7.

$$F_7(x) = \int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

8.

$$F_8(x) = \int \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^5(x)} dx$$

Allez à : [Correction exercice 10](#)

Exercice 11.

Calculer

1.

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad a \neq 0$$

2.

$$F_2(x) = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$$

3.

$$F_3(x) = \int \frac{x^3}{x^2 - 4} dx$$

4.

$$F_4(x) = \int \frac{4x dx}{(x - 2)^2}$$

5.

$$F_5(x) = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

6.

$$F_6(t) = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1}$$

7.

$$F_7(t) = \int \frac{(3t + 1)dt}{(t^2 - 2t + 10)^2}$$

8.

$$F_8(t) = \int \frac{(3t + 1)dt}{t^2 - 2t + 10}$$

9.

$$F_9(t) = \int \frac{dt}{t^3 + 1}$$

10.

$$F_{10}(x) = \int \frac{x^3 + 2}{(x + 1)^3} dx$$

11.

$$F_{11}(x) = \int \frac{x + 1}{x(x - 2)^2} dx$$

Allez à : [Correction exercice 11](#)

Exercice 12.

Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2}$$

2.

$$I_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1 - x^2}$$

3.

$$I_3 = \int_2^3 \frac{(2x + 1)dx}{x^2 + x - 3}$$

4.

$$I_4 = \int_0^2 \frac{x}{x^4 + 16} dx$$

5.

Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{5x + 6}{(x^2 - 4)(x + 2)} dx$$

Allez à : [Correction exercice 12](#)

Exercice 13.

Calculer les primitives suivantes :

1.

$$F_1(x) = \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)} dx$$

2.

$$F_2(x) = \int \frac{\sin^3(x)}{1 + \cos(x)} dx$$

3.

$$F_3(x) = \int \frac{dx}{\cos^4(x) + \sin^4(x)}$$

4.

$$F_4(x) = \int \frac{\cos(x) - 2}{\sin(x)} dx$$

Allez à : [Correction exercice 13](#)

Exercice 14.

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x) \sin(x)}$$

Allez à : [Correction exercice 14](#)

Exercice 15.

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)} dt$$

Allez à : [Correction exercice 15](#)

Exercice 16.

1. Déterminer une primitive de la fonction  $f$  définie par :

$$f(t) = \frac{1}{\sin(2t)}$$

2. A l'aide du changement de variable  $x = 2t$ , calculer

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sin(x)}$$

Allez à : [Correction exercice 16](#)

Exercice 17.

Calculer sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

$$F(x) = \int \frac{2dx}{1 + \tan(x)}$$

Allez à : [Correction exercice 17](#)

Exercice 18.

Calculer

$$F(t) = \int \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(t)} dt$$

Allez à : [Correction exercice 18](#)

Exercice 19.

Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{1 + \operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}$$

Allez à : [Correction exercice 19](#)

Exercice 20.

$$\int \frac{dx}{(\operatorname{ch}(x) + 1)^2}$$

Allez à : [Correction exercice 20](#)

Exercice 21.

Calculer pour  $x > 0$

$$F(x) = \int \frac{\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x) - 1} dx$$

Allez à : [Correction exercice 21](#)

Exercice 22.

Calculer

$$\int \frac{2 - \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)}{2 \operatorname{ch}(x)} dx$$

Allez à : [Correction exercice 22](#)

Exercice 23.

Calculer

$$F(x) = \int (3t^2 - 2t) \ln(t^2 + 1) dt$$

Allez à : [Correction exercice 23](#)

Exercice 24.

Calculer

$$\int_0^{\sqrt{3}} 3x^2 \ln(x^2 + 1) dx$$

Allez à : [Correction exercice 24](#)

Exercice 25.

1. Calculer

$$\int \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} dx$$

2. Calculer sur  $]1, +\infty[$

$$G(x) = \int \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \ln(x) dx$$

Allez à : [Correction exercice 25](#)

Exercice 26.

Calculer

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} \arctan(x) dx$$

Allez à : [Correction exercice 26](#)

Exercice 27.

Calculer

1.

$$F_1(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} dx; \quad t = \sqrt[6]{2+x}$$

Avec  $x \in ]-2, +\infty[$

2.

$$F_2(x) = \int \frac{1}{((x-1)^2 - 4)^2} dx; \quad \frac{x-1}{2} = \text{th}(u)$$

Avec  $x \in ]-1, 3[$

3.

$$F_3(x) = \int (\arcsin(x))^2 dx$$

4.

$$F_4(x) = \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx$$

Allez à : [Correction exercice 27](#)

Exercice 28.

Calculer les primitives suivantes sur l'intervalle  $I$  :

1.  $I = ]1, +\infty[$

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x-1}}$$

2.  $I = \mathbb{R}^{+*}$

$$F_2(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

3.  $I = \mathbb{R}$

$$F_3(x) = \int \frac{x}{\sqrt{9+4x^2}} dx$$

4.  $I = \left] \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right[$

$$F_4(x) = \int \frac{x+1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}} dx$$

5.  $I = \left] -\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right[$

$$F_5(x) = \int \frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}} dx$$

6.  $I = ]1, +\infty[$

$$F_6(x) = \int \sqrt{x^2-1} dx$$

7.  $I = ]1, 4[$

$$F_7(x) = \int \frac{x\sqrt{x}}{x^2 - 5x + 4} dx$$

8.  $I = ]-1, 1[$

$$F_8(x) = \int \frac{1}{1-t} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$$

Allez à : [Correction exercice 28](#)

Exercice 29.

Calculer

$$F(x) = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1-x}}$$

Allez à : [Correction exercice 29](#)

Exercice 30.

1.

$$F_1(x) = \int_0^x (t^2 + 1) \arctan(t) dt$$

2.

$$F_2(x) = \int_0^x (t + 1) \arcsin(t) dt$$

Allez à : [Correction exercice 30](#)

## CORRECTION

Correction exercice 1.

1. On peut mettre  $\cos^3(t)$  sous la forme  $f(\sin(t)) \cos(t)$  car la puissance de  $\cos$  est impaire.

$$F_1(x) = \int_0^x \cos^3(t) dt = \int_0^x \cos^2(t) \cos(t) dt = \int_0^x (1 - \sin^2(t)) \cos(t) dt$$

On pose  $u = \sin(t) \Rightarrow du = \cos(t) dt$

$$t = 0 \Rightarrow u = \sin(0) = 0$$

$$t = x \Rightarrow u = \sin(x)$$

$$F_1(x) = \int_0^{\sin(x)} (1 - t^2) dt = \left[ t - \frac{t^3}{3} \right]_0^{\sin(x)} = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}$$

2. On peut mettre  $\sin^3(t)$  sous la forme  $f(\cos(t)) \sin(t)$  car la puissance de  $\sin$  est impaire.

$$F_2(x) = \int_0^x \sin^3(t) dt = \int_0^x \sin^2(t) \sin(t) dt = - \int_0^x (1 - \cos^2(t)) (-\sin(t)) dt$$

On pose  $u = \cos(t) \Rightarrow du = -\sin(t) dt$

$$t = 0 \Rightarrow u = \cos(0) = 1$$

$$t = x \Rightarrow u = \cos(x)$$

$$F_2(x) = - \int_1^{\cos(x)} (1-t^2) dt = - \left[ t - \frac{t^3}{3} \right]_1^{\cos(x)} = - \left( \cos(x) - \frac{\cos^3(x)}{3} \right) + \left( 1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$= -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{2}{3}$$

3. Ici les puissances de sin et cos sont paires (respectivement 0 et 4) on doit linéariser  $\cos^4(t)$

$$(\cos(t))^4 = \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^4 = \frac{e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{4it}}{16} = \frac{e^{4it} + e^{4it} + 4(e^{2it} + e^{-2it}) + 6}{16}$$

$$= \frac{2 \cos(4t) + 4 \times 2 \cos(2t) + 6}{16} = \frac{\cos(4t) + 4 \cos(2t) + 3}{8}$$

$$F_3(x) = \frac{1}{8} \int_0^x (\cos(4t) + 4 \cos(2t) + 3) dt = \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{4} \sin(4t) + \frac{4}{2} \sin(2t) + 3t \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{8} \left( \frac{1}{4} \sin(4x) + \frac{4}{2} \sin(2x) + 3x \right) = \frac{1}{32} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8} x$$

4. Ici les puissances de sin et cos sont paires (respectivement 4 et 0) on doit linéariser  $\sin^4(t)$

$$(\sin(t))^4 = \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^4 = \frac{e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{4it}}{16} = \frac{e^{4it} + e^{4it} - 4(e^{2it} + e^{-2it}) + 6}{16}$$

$$= \frac{2 \cos(4t) - 4 \times 2 \cos(2t) + 6}{16} = \frac{\cos(4t) - 4 \cos(2t) + 3}{8}$$

$$F_4(x) = \frac{1}{8} \int_0^x (\cos(4t) - 4 \cos(2t) + 3) dt = \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{4} \sin(4t) - \frac{4}{2} \sin(2t) + 3t \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{8} \left( \frac{1}{4} \sin(4x) - \frac{4}{2} \sin(2x) + 3x \right) = \frac{1}{32} \sin(4x) - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8} x$$

5. Ici les puissances de sin et cos sont paires (respectivement 2 et 2) on doit linéariser  $\cos^2(t) \sin^2(t)$

$$\cos^2(t) \sin^2(t) = \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 = \left( \frac{e^{2it} + 2 + e^{-2it}}{4} \right) \left( \frac{e^{2it} - 2 + e^{-2it}}{-4} \right)$$

$$= \frac{e^{4it} - 2e^{2it} + 1 + 2e^{2it} - 4 + 2e^{-2it} + 1 - 2e^{-2it} + e^{-4it}}{-16} = \frac{e^{4it} + e^{-4it} - 2}{-16}$$

$$= \frac{2 \cos(4t) - 2}{-16} = -\frac{1}{8} \cos(4t) + \frac{1}{8}$$

$$F_5(t) = \frac{1}{8} \int_0^x (-\cos(4t) + 1) dt = -\frac{1}{8} \left[ \frac{1}{4} \sin(4t) + t \right]_0^x = -\frac{1}{32} \sin(4x) - \frac{x}{8}$$

6. On peut mettre  $\cos^2(t) \sin^3(t)$  sous la forme  $f(\cos(t)) \sin(t)$  car la puissance de sin est impaire.

$$F_6(x) = \int_0^x \cos^2(t) \sin^3(t) dt = - \int_0^x \cos^2(t) \sin^2(t) (-\sin(t)) dt$$

$$= - \int_0^x \cos^2(t) (1 - \cos^2(t)) (-\sin(t)) dt$$

On pose  $u = \cos(t) \Rightarrow du = -\sin(t) dt$

$$t = 0 \Rightarrow u = \cos(0) = 1$$

$$t = x \Rightarrow u = \cos(x)$$

$$\begin{aligned}
 F_6(x) &= - \int_1^{\cos(x)} t^2(1-t^2) dt = \int_1^{\cos(x)} (t^4 - t^2) dt = \left[ \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right]_1^{\cos(x)} \\
 &= \frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} - \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{2}{15}
 \end{aligned}$$

7.  $\cos(t) \sin^4(t)$  est sous la forme  $f(\sin(t)) \cos(t)$  car la puissance de  $\cos$  est impaire.

On pose  $u = \sin(t) \Rightarrow du = \cos(t) dt$

$$t = 0 \Rightarrow u = \sin(0) = 0$$

$$t = x \Rightarrow u = \sin(x)$$

$$F_7(x) = \int_0^{\sin(x)} t^4 dt = \left[ \frac{t^5}{5} \right]_0^{\sin(x)} = \frac{\sin^5(x)}{5}$$

Allez à : **Exercice 1**

Correction exercice 2.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^2(t) \cos(t) dt$$

On pose  $x = \sin(t)$ ,  $dx = \cos(t) dt$

$$t = 0 \Rightarrow x = \sin(0) = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$I = \int_0^1 (1-x^2)x^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

Allez à : **Exercice 2**

Correction exercice 3.

1. On peut toujours poser  $u = e^t$  mais parfois, il y a plus simple.

$$F_1(x) = \int_0^x \operatorname{ch}^3(t) dt = \int_0^x \operatorname{ch}^2(t) \operatorname{ch}(t) dt$$

On pose  $u = \operatorname{sh}(t) \Rightarrow du = \operatorname{ch}(t) dt$ ,  $\operatorname{ch}^2(t) = 1 + \operatorname{sh}^2(t) = 1 + u^2$

$$t = 0 \Rightarrow u = \operatorname{sh}(0) = 0$$

$$t = x \Rightarrow u = \operatorname{sh}(x)$$

$$F_1(x) = \int_0^{\operatorname{sh}(x)} (1+u^2) du = \left[ u + \frac{u^3}{3} \right]_0^{\operatorname{sh}(x)} = \operatorname{sh}(x) + \frac{\operatorname{sh}^3(x)}{3}$$

Allez à : **Exercice 3**

2. On peut toujours poser  $u = e^t$  mais parfois, il y a plus simple.

$$F_2(x) = \int_0^x \operatorname{sh}^3(t) dt = \int_0^x \operatorname{sh}^2(t) \operatorname{sh}(t) dt$$

On pose  $u = \operatorname{ch}(t) \Rightarrow du = \operatorname{sh}(t) dt$ ,  $\operatorname{sh}^2(t) = \operatorname{ch}^2(t) - 1 = u^2 - 1$

$$t = 0 \Rightarrow u = \operatorname{ch}(0) = 1$$

$$t = x \Rightarrow u = \operatorname{ch}(x)$$

$$F_2(x) = \int_1^{\operatorname{ch}(x)} (u^2 - 1) du = \left[ \frac{u^3}{3} - u \right]_1^{\operatorname{ch}(x)} = \frac{\operatorname{ch}^3(x)}{3} - \operatorname{ch}(x) - \left( \frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{\operatorname{ch}^3(x)}{3} - \operatorname{ch}(x) + \frac{2}{3}$$

Allez à : Exercice 3

3. Ici les puissances de sh et ch sont paires (respectivement 0 et 4) on pose

$$u = e^t \Leftrightarrow t = \ln(u) \Rightarrow dt = \frac{du}{u}$$

$$\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4t} + 4e^{2t} + 6 + 4e^{-2t} + e^{-4t}}{16} = \frac{1}{16}u^4 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}u^{-2} + \frac{1}{16}u^{-4}$$

$$t = 0 \Rightarrow u = e^0 = 1$$

$$t = x \Rightarrow u = e^x$$

$$\begin{aligned} F_3(x) &= \int_1^{e^x} \left(\frac{1}{16}u^4 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}u^{-2} + \frac{1}{16}u^{-4}\right) \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{16} \int_1^{e^x} u^3 du + \frac{1}{4} \int_1^{e^x} u du + \frac{3}{8} \int_1^{e^x} \frac{1}{u} du + \frac{1}{4} \int_1^{e^x} u^{-3} du + \frac{1}{16} \int_1^{e^x} u^{-5} du \\ &= \frac{1}{16} \left[ \frac{u^4}{4} \right]_1^{e^x} + \frac{1}{4} \left[ \frac{u^2}{2} \right]_1^{e^x} + \frac{3}{8} [\ln(u)]_1^{e^x} + \frac{1}{4} \left[ \frac{u^{-2}}{-2} \right]_1^{e^x} + \frac{1}{16} \left[ \frac{u^{-4}}{-4} \right]_1^{e^x} \\ &= \frac{1}{64} (e^{4x} - 1) + \frac{1}{8} (e^{2x} - 1) + \frac{3}{8} (\ln(e^x) - \ln(1)) - \frac{1}{8} (e^{-2x} - 1) - \frac{1}{64} (e^{-4x} - 1) \\ &= \frac{1}{64} (e^{4x} - e^{-4x}) + \frac{1}{8} (e^{2x} - e^{-2x}) + \frac{3}{8} x = \frac{\text{sh}(4x)}{32} + \frac{\text{sh}(2x)}{4} + \frac{3x}{8} \end{aligned}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^4 &= \frac{e^{4t} + 4e^{2t} + 6 + 4e^{-2t} + e^{-4t}}{16} = \frac{e^{4t} + e^{-4t} + 4(e^{2t} + e^{-2t}) + 6}{16} \\ &= \frac{2 \text{ch}(4t) + 4 \times \text{ch}(2t) + 6}{16} = \frac{1}{8} \text{ch}(4t) + \frac{1}{4} \text{ch}(2t) + \frac{3}{8} \\ F_3(x) &= \frac{1}{8} \int_0^x \text{ch}(4t) dt + \frac{1}{4} \int_0^x \text{ch}(2t) dt + \frac{3}{8} \int_0^x dt = \frac{1}{8} \left[ \frac{\text{sh}(4t)}{4} \right]_0^x + \frac{1}{4} \left[ \frac{\text{sh}(2t)}{2} \right]_0^x + \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{32} \text{sh}(4x) + \frac{1}{8} \text{sh}(2x) + \frac{3x}{8} \end{aligned}$$

Allez à : Exercice 3

4. Ici les puissances de sh et ch sont paires (respectivement 4 et 0) on pose

$$u = e^t \Leftrightarrow t = \ln(u) \Rightarrow dt = \frac{du}{u}$$

$$\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4t} - 4e^{2t} + 6 - 4e^{-2t} + e^{-4t}}{16} = \frac{1}{16}u^4 - \frac{1}{4}u^2 + \frac{3}{8} - \frac{1}{4}u^{-2} + \frac{1}{16}u^{-4}$$

$$t = 0 \Rightarrow u = e^0 = 1$$

$$t = x \Rightarrow u = e^x$$

$$\begin{aligned} F_4(x) &= \int_1^{e^x} \left(\frac{1}{16}u^4 - \frac{1}{4}u^2 + \frac{3}{8} - \frac{1}{4}u^{-2} + \frac{1}{16}u^{-4}\right) \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{16} \int_1^{e^x} u^3 du - \frac{1}{4} \int_1^{e^x} u du + \frac{3}{8} \int_1^{e^x} \frac{1}{u} du - \frac{1}{4} \int_1^{e^x} u^{-3} du + \frac{1}{16} \int_1^{e^x} u^{-5} du \\ &= \frac{1}{16} \left[ \frac{u^4}{4} \right]_1^{e^x} - \frac{1}{4} \left[ \frac{u^2}{2} \right]_1^{e^x} + \frac{3}{8} [\ln(u)]_1^{e^x} - \frac{1}{4} \left[ \frac{u^{-2}}{-2} \right]_1^{e^x} + \frac{1}{16} \left[ \frac{u^{-4}}{-4} \right]_1^{e^x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{64}(e^{4x} - 1) - \frac{1}{8}(e^{2x} - 1) + \frac{3}{8}(\ln(e^x) - \ln(1)) + \frac{1}{8}(e^{-2x} - 1) - \frac{1}{64}(e^{-4x} - 1) \\
&= \frac{1}{64}(e^{4x} - e^{-4x}) - \frac{1}{8}(e^{2x} - e^{-2x}) + \frac{3}{8}x = \frac{\text{sh}(4x)}{32} - \frac{\text{sh}(2x)}{4} + \frac{3x}{8}
\end{aligned}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^4 &= \frac{e^{4t} - 4e^{2t} + 6 - 4e^{-2t} + e^{-4t}}{16} = \frac{e^{4t} + e^{-4t} - 4(e^{2t} + e^{-2t}) + 6}{16} \\
&= \frac{2 \text{ch}(4t) - 4 \times \text{ch}(2t) + 6}{16} = \frac{1}{8} \text{ch}(4t) + \frac{1}{4} \text{ch}(2t) + \frac{3}{8} \\
F_4(x) &= \frac{1}{8} \int_0^x \text{ch}(4t) dt - \frac{1}{4} \int_0^x \text{ch}(2t) dt + \frac{3}{8} \int_0^x dt = \frac{1}{8} \left[ \frac{\text{sh}(4t)}{4} \right]_0^x - \frac{1}{4} \left[ \frac{\text{sh}(2t)}{2} \right]_0^x + \frac{3}{8} \\
&= \frac{1}{32} \text{sh}(4x) - \frac{1}{8} \text{sh}(2x) + \frac{3x}{8}
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 3**

5. Ici les puissances de sh et ch sont paires (respectivement 2 et 2) on pose

$$\begin{aligned}
u = e^t &\Leftrightarrow t = \ln(u) \Rightarrow dt = \frac{du}{u} \\
\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 &= \left(\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{4}\right)^2 = \frac{e^{4t} - 2 + e^{-4t}}{16} \\
t = 0 &\Rightarrow u = e^0 = 1 \\
t = x &\Rightarrow u = e^x \\
F_5(t) &= \frac{1}{16} \int_1^{e^x} (u^4 - 2 + u^{-4}) \frac{du}{u} = \frac{1}{16} \int_1^{e^x} \left(u^3 - \frac{2}{u} + u^{-5}\right) du = \frac{1}{16} \left[ \frac{u^4}{4} - 2 \ln(u) - \frac{u^{-4}}{4} \right]_1^{e^x} \\
&= \frac{1}{16} \left( \frac{e^{4x}}{4} - 2 \ln(e^x) - \frac{e^{-4x}}{4} \right) - \frac{1}{16} \left( \frac{1}{4} - 2 \ln(1) - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{64} - \frac{x}{8} = \frac{\text{sh}(4x)}{32} - \frac{x}{8}
\end{aligned}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 &= \frac{e^{4t} - 2 + e^{-4t}}{16} = \frac{2 \text{ch}(4t) - 2}{16} = \frac{1}{8} \text{ch}(4t) - \frac{1}{8} \\
F_5(x) &= \frac{1}{8} \int_0^x (\text{ch}(4t) - 1) dt = \frac{1}{8} \left[ \frac{\text{sh}(4t)}{4} - t \right]_0^x = \frac{\text{sh}(4x)}{32} - \frac{x}{8}
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 3**6. On peut mettre  $\text{ch}^2(t) \text{sh}^3(t)$  sous la forme  $f(\text{ch}(t)) \text{sh}(t)$  car la puissance de sh est impaire.

$$F_6(x) = \int_0^x \text{ch}^2(t) \text{sh}^3(t) dt = \int_0^x \text{ch}^2(t) \text{sh}^2(t) \text{sh}(t) dt = \int_0^x \text{ch}^2(t) (\text{ch}^2(t) - 1) \text{sh}(t) dt$$

On pose  $u = \text{ch}(t) \Rightarrow du = \text{sh}(t) dt$ 

$$t = 0 \Rightarrow u = \text{ch}(0) = 1$$

$$t = x \Rightarrow u = \text{ch}(x)$$

$$\begin{aligned}
F_6(x) &= \int_1^{\text{ch}(x)} t^2(t^2 - 1) dt = \int_1^{\text{ch}(x)} (t^4 - t^2) dt = \left[ \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right]_1^{\text{ch}(x)} = \frac{\text{ch}^5(x)}{5} - \frac{\text{ch}^3(x)}{3} - \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{\text{ch}^5(x)}{5} - \frac{\text{ch}^3(x)}{3} + \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 3**

7.  $\operatorname{ch}(t) \operatorname{sh}^4(t)$  est de la forme  $f(\operatorname{sh}(t)) \operatorname{ch}(t)$

On pose  $u = \operatorname{sh}(t) \Rightarrow du = \operatorname{ch}(t) dt$

$$t = 0 \Rightarrow u = \operatorname{sh}(0) = 0$$

$$t = x \Rightarrow u = \operatorname{sh}(x)$$

$$F_7(x) = \int_0^{\operatorname{sh}(x)} u^4 du = \frac{\operatorname{sh}^5(x)}{5}$$

Allez à : **Exercice 3**

Correction exercice 4.

1. Avec la formule d'addition

$$\cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) = \cos(a + b)$$

$$\cos(x) \cos(2x) + \sin(x) \sin(2x) = \cos(x - 2x) = \cos(-x) = \cos(x)$$

$$F_1(x) = \int \cos(x) dx = \sin(x) + K$$

Allez à : **Exercice 4**

2. La puissance en  $\cos(x)$  est impaire et celle en  $\sin(x)$  est paire, on peut mettre  $\cos(x)$  en facteur.

On pose  $t = \sin(x)$ ,  $dt = \cos(x) dx$

$$F_2(x) = \int t^4 dt = \frac{1}{5} t^5 + K = \frac{1}{5} \sin^5(t) + K$$

Allez à : **Exercice 4**

3. La puissance en  $\cos(x)$  est paire et la puissance en  $\sin(x)$  est paire (en fait elle est nulle), il faut linéariser.

$$\begin{aligned} \cos^6(x) &= \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^6 \\ &= \frac{1}{64} \left( (e^{ix})^6 + 6(e^{ix})^5(e^{-ix}) + 15(e^{ix})^4(e^{-ix})^2 + 20(e^{ix})^3(e^{-ix})^3 + 15(e^{ix})^2(e^{-ix})^4 \right. \\ &\quad \left. + 6(e^{ix})(e^{-ix})^5 + (e^{-ix})^6 \right) \\ &= \frac{1}{64} (e^{6ix} + 6e^{4ix} + 15e^{2ix} + 20 + 15e^{-2ix} + 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= \frac{1}{64} (e^{6ix} + e^{-6ix} + 6(e^{4ix} + e^{-4ix}) + 15(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 20) \\ &= \frac{1}{64} (2 \cos(6x) + 6 \times 2 \cos(4x) + 15 \times 2 \cos(2x) + 20) \\ &= \frac{1}{32} \cos(6x) + \frac{3}{16} \cos(4x) + \frac{15}{32} \cos(2x) + \frac{5}{16} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} F_3(x) &= \frac{1}{32 \times 6} \sin(6x) + \frac{3}{16 \times 4} \sin(4x) + \frac{15}{32 \times 2} \sin(2x) + \frac{5}{16} x + K \\ &= \frac{1}{192} \sin(6x) + \frac{3}{64} \sin(4x) + \frac{15}{64} \sin(2x) + \frac{5}{16} x + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 4**

4. La puissance en  $\cos(x)$  est paire et la puissance en  $\sin(x)$  est paire, il faut linéariser.

$$\begin{aligned}\sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16}(e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix} + 6) = \frac{1}{16}(2\cos(4x) + 4 \times 3\cos(2x) + 6) \\ &= \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$F_4(x) = \frac{1}{8 \times 4}\sin(4x) + \frac{3}{4 \times 2}\sin(2x) + \frac{3x}{8} + K = \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{3}{8}\sin(2x) + \frac{3x}{8} + K$$

Allez à : **Exercice 4**

5. La puissance en  $\cos(x)$  est paire et celle en  $\sin(x)$  est impaire, on peut mettre  $\sin(x)$  en facteur.

$$\begin{aligned}F_5(x) &= \int \sin^3(x) \cos^2(x) dx = \int \sin^2(x) \cos^2(x) \sin(x) dx = \int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) \sin(x) dx \\ &= \int (\cos^2(x) - \cos^4(x)) \sin(x) dx\end{aligned}$$

On pose  $t = \cos(x)$  donc  $dt = -\sin(x) dx$

$$F_5(x) = \int (t^2 - t^4)(-dt) = -\int (t^2 - t^4)dt = -\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right) + K = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + \frac{1}{5}\cos^5(x) + K$$

En fait rien n'empêche de linéariser  $\sin^3(x) \cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \times \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \dots$

Mais la première méthode est bien plus simple.

Allez à : **Exercice 4**

6. La puissance de  $\text{ch}(x)$  est paire et la puissance de  $\text{sh}(x)$  est impaire, il faut poser  $t = e^x$

$$\begin{aligned}\text{ch}^2(x) \text{sh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\right)^2 = \frac{1}{16}(e^{2x} - e^{-2x})^2 \\ &= \frac{1}{16}(e^{4x} - 2 + e^{-4x}) = \frac{1}{16}e^{4x} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}e^{-4x}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}F_6(x) &= \int \text{ch}^2(x) \text{sh}^2(x) dx = \int \left(\frac{1}{16}e^{4x} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}e^{-4x}\right) dx = \frac{1}{64}e^{4x} - \frac{x}{8} - \frac{1}{64}e^{-4x} + K \\ &= \frac{1}{32}\text{sh}(4x) - \frac{x}{8} + K\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 4**

7. La puissance de  $\text{sh}(x)$  est impaire, il peut poser  $t = \text{ch}(x)$  donc  $dt = \text{sh}(x) dx$

$$F_7(x) = \int \text{sh}(x) \text{ch}^3(x) dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + K = \frac{\text{ch}^4(x)}{4} + K$$

On peut aussi poser  $t = e^x$  mais la première méthode est bien plus simple.

Autre méthode (moins bonne), la puissance de  $\text{ch}(x)$  est impaire on peut poser  $t = \text{sh}(x)$  donc  $dt = \text{ch}(x) dx$

$$\begin{aligned}F_7(x) &= \int \text{sh}(x) \text{ch}^3(x) dx = \int \text{sh}(x) \text{ch}^2(x) \text{ch}(x) dx = \int \text{sh}(x) (1 + \text{sh}^2(x)) \text{ch}(x) dx \\ &= \int t(1 + t^2) dt = \int (t + t^3) dt = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + K = \frac{\text{ch}^2(x)}{2} + \frac{\text{ch}^4(x)}{4} + K\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 4**

8. La puissance de  $\text{ch}(x)$  est impaire, il peut poser  $t = \text{sh}(x)$  donc  $dt = \text{ch}(x) dx$

$$F_8(x) = \int \text{ch}(x) \text{sh}^3(x) dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + K = \frac{\text{sh}^4(x)}{4} + K$$

Autre méthode (moins bonne)

La puissance de  $\text{sh}(x)$  est impaire, on peut poser  $t = \text{ch}(x)$  donc  $dt = \text{sh}(x) dx$

$$\begin{aligned} F_8(x) &= \int \text{ch}(x) \text{sh}^3(x) dx = \int \text{ch}(x) \text{sh}^2(x) \text{sh}(x) dx = \int \text{ch}(x) (\text{ch}^2(x) - 1) \text{sh}(x) dx \\ &= \int t(t^2 - 1) dt = \int (t^3 - t) dt = \frac{t^4}{4} - t + K = \frac{\text{ch}^4(x)}{4} - \text{ch}(x) + K' \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 4**

Correction exercice 5.

1.

$F_1(x) = \int_0^x e^t \cos(t) dt$	
$u'(t) = e^t$	$u(t) = e^t$
$v(t) = \cos(t)$	$v'(t) = -\sin(t)$
$F_1(x) = \int_0^x e^t \cos(t) dt = [e^t \cos(t)]_0^x - \int_0^x e^t (-\sin(t)) dt$	
$F_1(x) = \int_0^x e^t \cos(t) dt = [e^t \cos(t)]_0^x + \int_0^x e^t \sin(t) dt$	

Il faut refaire une autre intégration par partie

$\int_0^x e^t \sin(t) dt$	
$u'(t) = e^t$	$u(t) = e^t$
$v(t) = \sin(t)$	$v'(t) = \cos(t)$
$\int_0^x e^t \sin(t) dt = [e^t \sin(t)]_0^x - \int_0^x e^t \cos(t) dt$	

$$\int_0^x e^t \sin(t) dt = [e^t \sin(t)]_0^x - \int_0^x e^t \cos(t) dt = [e^t \sin(t)]_0^x - F_1(x)$$

Ce que l'on remplace dans

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_0^x e^t \cos(t) dt = [e^t \cos(t)]_0^x + \int_0^x e^t \sin(t) dt = [e^t \cos(t)]_0^x + [e^t \sin(t)]_0^x - F_1(x) \\ \Leftrightarrow 2F_1(x) &= [e^t \cos(t)]_0^x + [e^t \sin(t)]_0^x = e^x \cos(x) - 1 + e^x \sin(x) \\ \Leftrightarrow F_1(x) &= \frac{1}{2} e^x \cos(x) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^x \sin(x) \end{aligned}$$

Remarque :

Lors de la seconde intégration par partie il faut continuer à intégrer  $e^x$  sinon on retombe sur la même intégrale.

On aurait aussi pu dériver  $e^x$  lors de la première intégration par partie et bien sûr dans la seconde aussi.

Allez à : **Exercice 5**

2.

Première méthode :

On fait exactement pareil.

Deuxième méthode :

On utilise le résultat ci-dessus

$$F_2(x) = \int_0^x e^t \sin(t) dt = [e^t \sin(t)]_0^x - F_1(x)$$

Puis

$$F_1(x) = \frac{1}{2} e^x \cos(x) + \frac{1}{2} e^x \sin(x) + K$$

$$F_2(x) = e^x \sin(x) - \left( \frac{1}{2} e^x \cos(x) + \frac{1}{2} e^x \sin(x) \right) + K' = -\frac{1}{2} e^x \cos(x) + \frac{1}{2} e^x \sin(x) + K'$$

Troisième méthode :

$$\begin{aligned} F_1(x) + iF_2(x) &= \int_0^x e^t \cos(t) dt + i \int_0^x e^t \sin(t) dt = \int_0^x e^t (\cos(t) + i \sin(t)) dt = \int_0^x e^t e^{it} dt \\ &= \int_0^x e^{(1+i)t} dt = \left[ \frac{1}{1+i} e^{(1+i)t} \right]_0^x = \frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} - \frac{1}{1+i} e^0 = \frac{1-i}{2} e^x e^{ix} - \frac{1-i}{2} \\ &= \frac{e^x}{2} (1-i)(\cos(x) + i \sin(x)) - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ &= \frac{e^x}{2} (\cos(x) + \sin(x) + i(-\cos(x) + \sin(x))) - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{aligned}$$

$F_1(x)$  est la partie réelle et  $F_2(x)$  est la partie imaginaire

$$F_1(x) = \frac{e^x}{2} (\cos(x) + \sin(x)) - \frac{1}{2}$$

$$F_2(x) = \frac{e^x}{2} (-\cos(x) + \sin(x)) + \frac{1}{2}$$

On a en même temps  $F_1(x)$  et  $F_2(x)$ .

Allez à : **Exercice 5**

3. Le plus simple serait de calculer  $F_3(x) + iF_4(x)$  comme dans l'exercice ci-dessus

Pour changer, on va faire une intégration par parties en dérivant l'exponentielle et en intégrant le «  $\cos(2t)$  »

$F_3(x) = \int_0^x e^{-t} \cos(2t) dt$	
$u'(t) = \cos(2t)$	$u(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)$
$v(t) = e^{-t}$	$v'(t) = -e^{-t}$
$F_3(x) = \int_0^x e^{-t} \cos(2t) dt = \left[ \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) \right]_0^x - \int_0^x (-e^{-t}) \frac{1}{2} \sin(2t) dt$	

$$F_3(x) = \int_0^x e^{-t} \cos(2t) dt = \left[ \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t} \sin(2t) dt$$

On refait une intégration par parties

$\int_0^x e^{-t} \sin(2t) dt$	
$u'(t) = \sin(2t)$	$u(t) = -\frac{1}{2} \cos(2t)$
$v(t) = e^{-t}$	$v'(t) = -e^{-t}$
$\int_0^x e^{-t} \sin(2t) dt = \left[ e^{-t} \left( -\frac{1}{2} \cos(2t) \right) \right]_0^x - \int_0^x (-e^{-t}) \left( -\frac{1}{2} \cos(2t) \right) dt$	

$$\int_0^x e^{-t} \sin(2t) dt = \left[ e^{-t} \left( -\frac{1}{2} \cos(2t) \right) \right]_0^x - \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t} \cos(2t) dt$$

Ce que l'on remplace dans

$$\begin{aligned} F_3(x) &= \int_0^x e^{-t} \cos(2t) dt = \left[ \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t} \sin(2t) dt \\ &= \left[ \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) \right]_0^x + \frac{1}{2} \left( \left[ e^{-t} \left( -\frac{1}{2} \cos(2t) \right) \right]_0^x - \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t} \cos(2t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-x} \sin(2x) - \frac{1}{4} e^{-x} \cos(2x) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} F_3(x) \end{aligned}$$

Donc

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right) F_3(x) = \frac{1}{2} e^{-x} \sin(2x) - \frac{1}{4} e^{-x} \cos(2x) + \frac{1}{4}$$

Puis

$$F_3(x) = \frac{4}{5} \left( \frac{1}{2} e^{-x} \sin(2x) - \frac{1}{4} e^{-x} \cos(2x) + \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{5} e^{-x} \sin(2x) - \frac{1}{5} e^{-x} \cos(2x) + \frac{1}{5}$$

Allez à : **Exercice 5**

4. On reprend l'égalité ci-dessus

$$F_3(x) = \int_0^x e^{-t} \cos(2t) dt = \left[ \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t} \sin(2t) dt = \frac{1}{2} e^{-x} \sin(2x) + \frac{1}{2} F_4(x)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} F_4(x) &= 2F_3(x) - e^{-x} \sin(2x) = 2 \left( \frac{2}{5} e^{-x} \sin(2x) - \frac{1}{5} e^{-x} \cos(2x) \right) - e^{-x} \sin(2x) \\ &= -\frac{1}{5} e^{-x} \sin(2x) - \frac{2}{5} e^{-x} \cos(2x) \end{aligned}$$

Et on rajoute comme d'habitude une constante

$$F_4(x) = -\frac{1}{5} e^{-x} \sin(2x) - \frac{2}{5} e^{-x} \cos(2x) + K$$

Allez à : **Exercice 5**

5.

$F_5(x) = \int_0^x e^{2t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt$	
$u'(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$	$u(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$
$v(t) = e^{2t}$	$v'(t) = 2e^{2t}$
$F_5(x) = \int_0^x e^{2t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt = \left[ e^{2t} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^x - \int_0^x 2e^{2t} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt$	

$$F_5(x) = \int_0^x e^{2t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt = \left[ e^{2t} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^x - 2 \int_0^x e^{2t} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt$$

On fait une seconde intégration par partie

$\int_0^x e^{2t} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt$	
$u'(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$	$u(t) = -\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$
$v(t) = e^{2t}$	$v'(t) = 2e^{2t}$
$\int_0^x e^{2t} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt = \left[ e^{2t} \left(-\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right) \right]_0^x - \int_0^x 2e^{2t} \left(-\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right) dt$	

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{2t} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt &= \left[ e^{2t} \left(-\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right) \right]_0^x + 2 \int_0^x e^{2t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt \\ &= -2e^{2x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2F_5(x) \end{aligned}$$

Ce que l'on remplace dans

$$\begin{aligned} F_5(x) &= \int_0^x e^{2t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt = \left[ e^{2t} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^x - 2 \int_0^x e^{2t} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt = F_5(x) \\ &= \left[ e^{2t} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^x - 2 \left( -2e^{2x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2F_5(x) \right) \end{aligned}$$

Donc

$$5F_5(x) = e^{2x} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4e^{2x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + e^{2x} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 4e^{2x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Et enfin

$$F_5(x) = \frac{1}{5} e^{2x} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{5} e^{2x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Allez à : **Exercice 5**

6. On fait le changement de variable  $u = -t \Leftrightarrow t = -u \Rightarrow dt = -du$

$$t = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$t = x \Rightarrow u = -x$$

$$\begin{aligned} F_6(x) &= \int_0^{-x} e^{2u} \cos\left(-u + \frac{\pi}{4}\right) (-du) = -\int_0^{-x} e^{2u} \cos\left(u - \frac{\pi}{4}\right) du = -F_5(-x) \\ &= -\left(\frac{1}{5} e^{-2x} \sin\left(-x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{5} e^{-2x} \cos\left(-x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + K' \\ &= \frac{1}{5} e^{-2x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4}{5} e^{-2x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + K' \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 5**

7. On peut faire des intégrations par parties ou utiliser les résultats précédents en utilisant la formule

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\begin{aligned} F_7(x) &= \int_0^x e^{-t} \left(\cos(2t) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(2t) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) dt \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \int_0^x e^{-t} \cos(2t) dt - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \int_0^x e^{-t} \sin(2t) dt = \frac{1}{2} F_3(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} F_4(x) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} e^{-x} \sin(2x) - \frac{1}{5} e^{-x} \cos(2x)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{5} e^{-x} \sin(2x) - \frac{2}{5} e^{-x} \cos(2x)\right) \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{10} e^{-x} \sin(2x) + \frac{(-1 + 2\sqrt{3})}{10} e^{-x} \cos(2x) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 5**

8. On fait le changement de variable  $u = -t \Leftrightarrow t = -u \Rightarrow dt = -du$

$$t = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$t = x \Rightarrow u = -x$$

$$\begin{aligned} F_8(x) &= \int_0^{-x} e^{-u} \cos\left(-2u - \frac{\pi}{3}\right) (-du) = -\int_0^{-x} e^{-u} \cos\left(2u + \frac{\pi}{3}\right) du = -F_7(-x) \\ &= -\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{10} e^x \sin(-2x) + \frac{(-1 + 2\sqrt{3})}{10} e^x \cos(-2x)\right) \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{10} e^x \sin(2x) - \frac{(-1 + 2\sqrt{3})}{10} e^x \cos(2x) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 5**

Correction exercice 6.

1.

$F_1(x) = \int_0^x te^t dt$	
$u'(t) = e^t$	$u(t) = e^t$
$v(t) = t$	$v'(t) = 1$

$$F_1(x) = \int_0^x t e^t dt = [t e^t]_0^x - \int_0^x 1 \times e^t dt$$

$$F_1(x) = \int_0^x t e^t dt = [t e^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = x e^x - [e^t]_0^x = x e^x - e^x + 1$$

Allez à : Exercice 6

2.

$F_2(x) = \int_0^x t^2 e^t dt$	
$u'(t) = e^t$	$u(t) = e^t$
$v(t) = t^2$	$v'(t) = 2t$
$F_2(x) = \int_0^x t^2 e^t dt = [t^2 e^t]_0^x - \int_0^x 2t e^t dt$	

$$F_2(x) = \int_0^x t^2 e^t dt = [t^2 e^t]_0^x - 2 \int_0^x t e^t dt = x^2 e^x - 2F_1(x) = x^2 e^x - 2(x - 1)e^x - 2$$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^x - 2$$

Allez à : Exercice 6

3.

$F_3(x) = \int_0^x t^3 e^t dt$	
$u'(t) = e^t$	$u(t) = e^t$
$v(t) = t^3$	$v'(t) = 3t^2$
$F_3(x) = \int_0^x t^3 e^t dt = [t^3 e^t]_0^x - \int_0^x 3t^2 e^t dt$	

$$F_3(x) = \int_0^x t^3 e^t dt = [t^3 e^t]_0^x - 3F_2(x) = x^3 e^x - 3(x^2 - 2x + 2)e^x + 6$$

$$= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + 6$$

Allez à : Exercice 6

4.

$F_4(x) = \int_1^x t \ln(t) dt$	
$u'(t) = t$	$u(t) = \frac{t^2}{2}$
$v(t) = \ln(t)$	$v'(t) = \frac{1}{t}$
$F_4(x) = \int_1^x t \ln(t) dt = \left[ \frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} dt$	

$$F_4(x) = \int_1^x t \ln(t) dt = \left[ \frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_1^x - \frac{1}{2} \int_1^x t dt = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_1^x = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{4} (x^2 - 1)$$

Allez à : Exercice 6

5.

$F_5(x) = \int_1^x t^2 \ln(t) dt$	
$u'(t) = t^2$	$u(t) = \frac{t^3}{3}$
$v(t) = \ln(t)$	$v'(t) = \frac{1}{t}$

$F_7(x) = \int_0^x t \sin(t) dt$	
$u'(t) = \sin(t)$	$u(t) = -\cos(t)$
$v(t) = t$	$v'(t) = 1$
$F_7(x) = \int_0^x t \sin(t) dt = [t(-\cos(t))]_0^x - \int_0^x 1 \times (-\cos(t)) dt$	
$F_5(x) = \int_1^x t^2 \ln(t) dt = \left[ \frac{t^3}{3} \ln(t) \right]_1^x - \int_1^x \frac{t^3}{3} \times \frac{1}{t} dt$	

$$F_5(x) = \int_1^x t^2 \ln(t) dt = \left[ \frac{t^3}{3} \ln(t) \right]_1^x - \frac{1}{3} \int_1^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{1}{3} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_1^x = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{1}{9} (x^3 - 1)$$

Allez à : **Exercice 6**

6.

$F_6(x) = \int_1^x t^3 \ln(t) dt$	
$u'(t) = t^3$	$u(t) = \frac{t^4}{4}$
$v(t) = \ln(t)$	$v'(t) = \frac{1}{t}$
$F_6(x) = \int_1^x t^3 \ln(t) dt = \left[ \frac{t^4}{4} \ln(t) \right]_1^x - \int_1^x \frac{t^4}{4} \times \frac{1}{t} dt$	

$$F_6(x) = \int_1^x t^3 \ln(t) dt = \left[ \frac{t^4}{4} \ln(t) \right]_1^x - \frac{1}{4} \int_1^x t^3 dt = \frac{x^4}{4} \ln(x) - \frac{1}{4} \left[ \frac{t^4}{4} \right]_1^x = \frac{x^4}{4} \ln(x) - \frac{1}{16} (x^4 - 1)$$

Allez à : **Exercice 6**

7.

$$F_7(x) = \int_0^x t \sin(t) dt = [t(-\cos(t))]_0^x + \int_0^x \cos(t) dt = -x \cos(x) + [\sin(t)]_0^x = -x \cos(x) + \sin(x)$$

Allez à : **Exercice 6**

8.

$F_8(x) = \int_0^x t^2 \sin(t) dt$	
$u'(t) = \sin(t)$	$u(t) = -\cos(t)$
$v(t) = t^2$	$v'(t) = 2t$
$F_8(x) = \int_0^x t^2 \sin(t) dt = [t^2(-\cos(t))]_0^x - \int_0^x 2t(-\cos(t)) dt$	

$$F_8(x) = \int_0^x t^2 \sin(t) dt = [t^2(-\cos(t))]_0^x + 2 \int_0^x t \cos(t) dt$$

Il faut faire une seconde intégration par parties.

$\int_0^x t \cos(t) dt$	
$u'(t) = \cos(t)$	$u(t) = \sin(t)$
$v(t) = t$	$v'(t) = 1$
$\int_0^x t \cos(t) dt = [t \sin(t)]_0^x - \int_0^x 1 \times \sin(t) dt$	

$$\int_0^x t \cos(t) dt = [t \sin(t)]_0^x - \int_0^x \sin(t) dt = x \sin(x) - [-\cos(t)]_0^x = x \sin(x) + \cos(x) - 1$$

Ce que l'on remplace dans

$$F_8(x) = \int_0^x t^2 \sin(t) dt = [t^2(-\cos(t))]_0^x + 2 \int_0^x t \cos(t) dt$$

$$= -x^2 \cos(x) + 2(x \sin(x) + \cos(x) - 1) = (-x^2 + 2) \cos(x) + 2x \sin(x) - 2$$

Allez à : **Exercice 6**

9.

$F_9(x) = \int_0^x t^3 \sin(t) dt$	
$u'(t) = \sin(t)$	$u(t) = -\cos(t)$
$v(t) = t^3$	$v'(t) = 3t^2$
$F_9(x) = \int_0^x t^3 \sin(t) dt = [t^3(-\cos(t))]_0^x - \int_0^x 3t^2(-\cos(t)) dt$	

$$F_9(x) = \int_0^x t^3 \sin(t) dt = [t^3(-\cos(t))]_0^x + 3 \int_0^x t^2 \cos(t) dt$$

Il faut faire une seconde intégration par parties.

$\int_0^x t^2 \cos(t) dt$	
$u'(t) = \cos(t)$	$u(t) = \sin(t)$
$v(t) = t^2$	$v'(t) = 2t$
$\int_0^x t^2 \cos(t) dt = [t^2 \sin(t)]_0^x - \int_0^x 2t \sin(t) dt$	

$$\int_0^x t^2 \cos(t) dt = [t^2 \sin(t)]_0^x - 2 \int_0^x t \sin(t) dt = x^2 \sin(x) - 2F_7(x)$$

$$= x^2 \sin(x) - 2(-x \cos(x) + \sin(x)) = (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x)$$

Ce que l'on remplace dans

$$F_9(x) = -x^3 \cos(x) + 3 \int_0^x t^2 \cos(t) dt = -x^3 \cos(x) + 3((x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x))$$

$$= (-x^3 + 6x) \cos(x) + (3x^2 - 6) \sin(x)$$

Allez à : **Exercice 6**

10. On peut faire une intégration par parties mais on va voir une autre technique qui permet de calculer  $F_{10}(x)$  et  $F_7(x)$  en même temps.

$$F_{10}(x) + iF_7 = \int_0^x t \cos(t) dt + i \int_0^x t \sin(t) dt = \int_0^x t(\cos(t) + i \sin(t)) dt = \int_0^x t e^{it} dt$$

Et on fait une intégration par parties.

$F_{10}(x) + iF_7 = \int_0^x t e^{it} dt$	
$u'(t) = e^{it}$	$u(t) = \frac{1}{i} e^{it} = -i e^{it}$
$v(t) = t$	$v'(t) = 1$
$F_{10}(x) + iF_7 = \int_0^x t e^{it} dt = [-t i e^{it}]_0^x - \int_0^x 1 \times (-i e^{it}) dt$	

$$\begin{aligned}
 F_{10}(x) + iF_7 &= \int_0^x te^{it} dt = [-tie^{it}]_0^x + i \int_0^x e^{it} dt = ix e^{ix} + i \left[ \frac{1}{i} e^{it} \right]_0^x = ix e^{ix} + (e^{ix} - 1) \\
 &= -ix e^{ix} + e^{ix} - 1 = -ix(\cos(x) + i \sin(x)) + \cos(x) + i \sin(x) - 1 \\
 &= -ix \cos(x) + x \sin(x) + \cos(x) + i \sin(x) - 1 \\
 &= (x \sin(x) + \cos(x) - 1) + i(-x \cos(x) + \sin(x)) \\
 F_{10}(x) &= x \sin(x) + \cos(x) - 1 \\
 F_7(x) &= -x \cos(x) + \sin(x)
 \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 6**

11. On peut faire deux intégrations par parties ou calculer  $F_{11}(x) + iF_8(x)$ , nous allons voir une autre technique.

On pose  $u = \frac{\pi}{2} - t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} - u \Rightarrow dt = -du$

$$t = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

$$t = x \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\begin{aligned}
 F_{11}(x) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} \left(u - \frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} \left(u^2 - \pi + \frac{\pi^2}{4}\right) \sin(u) du \\
 &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(u^2 - \pi + \frac{\pi^2}{4}\right) \sin(u) du - \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \left(u^2 - \pi + \frac{\pi^2}{4}\right) \sin(u) du = C_1 - G(x)
 \end{aligned}$$

Où

$$G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \left(u^2 - \pi + \frac{\pi^2}{4}\right) \sin(u) du$$

$$C_1 = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(u^2 - \pi + \frac{\pi^2}{4}\right) \sin(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(u^2 - \pi + \frac{\pi^2}{4}\right) \sin(u) du = G(0)$$

Et

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \left(u^2 - \pi + \frac{\pi^2}{4}\right) \sin(u) du \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} u^2 \sin(u) du - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} u \sin(u) du + \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \sin(u) du \\
 &= F_8\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \pi F_7\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\pi^2}{4} [-\cos(u)]_0^{\frac{\pi}{2}-x} \\
 &= \left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 + 1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
 &\quad - \pi \left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) + \frac{\pi^2}{4} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1\right) \\
 &= \left(1 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi x - x^2\right) \sin(x) + (\pi - 2x) \cos(x) - \pi \left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(x) + \cos(x)\right) \\
 &\quad + \frac{\pi^2}{4} (-\sin(x) + 1) \\
 &= (\pi - 2x - \pi) \cos(x) + \left(1 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi x - x^2 + \pi \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{\pi^2}{4}\right) \sin(x) + \frac{\pi^2}{4} \\
 &= -2x \cos(x) + (1 - x^2) \sin(x) + \frac{\pi^2}{4}
 \end{aligned}$$

Comme  $G(0) = \frac{\pi^2}{4}$

$$F_{11}(x) = -2x \cos(x) + (1 - x^2) \sin(x)$$

Franchement c'est plus compliqué que de faire deux intégrations par parties, c'était juste pour varier les plaisirs.

Allez à : **Exercice 6**

12. Toutes les méthodes décrites ci-dessus fonctionnent, voyons une autre façon de faire :

On cherche une primitive de la forme

$$F_{12}(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) \cos(x) + (a'x^3 + b'x^2 + c'x + d') \sin(x) + K$$

Où  $a, b, c, a', b'$  et  $c'$  sont des constantes réelles.

En faisant le changement de variables  $u = -t$  on constate que  $F_{12}$  est une fonction paire, on peut alors améliorer la forme de la primitive

$$F_{12}(x) = (bx^2 + d) \cos(x) + (a'x^3 + c'x) \sin(x) + K$$

On dérive

$$\begin{aligned} F'_{12}(x) &= 2bx \cos(x) - (bx^2 + d) \sin(x) + (3a'x^2 + c') \sin(x) + (a'x^3 + c'x) \cos(x) \\ &= (2b + a'x^3 + c'x) \cos(x) + (-(bx^2 + d) + 3a'x^2 + c') \sin(x) \\ &= (a'x^3 + (c' + 2b)x) \cos(x) + ((3a' - b)x^2 + c' - d) \sin(x) \end{aligned}$$

$$F'_{12}(x) = x^3 \cos(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a'x^3 + (c' + 2b)x = x^3 \\ (3a' - b)x^2 + c' - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ c' + 2b = 0 \\ 3a' - b = 0 \\ c' - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ c' = -2b \\ b = -3a' \\ d = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ c' = 6 \\ b = -3 \\ d = 6 \end{cases}$$

$$F_{12}(x) = (-3x^2 + 6) \cos(x) + (x^3 + 6x) \sin(x) + K$$

Comme  $F_{12}(0) = \int_0^0 t^3 \cos(t) dt = 0$ , et que

$$F_{12}(x) = (-30^2 + 6) \cos(0) + (0^3 + 6 \times 0) \sin(0) + K = 6 + K$$

cela entraîne que  $K = -6$  et

$$F_{12}(x) = (-3x^2 + 6) \cos(x) + (x^3 + 6x) \sin(x) - 6$$

Allez à : **Exercice 6**

13. Il faut faire une intégration par parties mais il n'y a qu'une fonction, alors on écrit  $F_{13}(x)$  de la façon suivante :

$$F_{13}(x) = \int_0^x 1 \times \arcsin(t) dt$$

$F_{13}(x) = \int_0^x 1 \times \arcsin(t) dt$	
$u'(t) = 1$	$u(t) = t$
$v(t) = \arcsin(t)$	$v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$F_{13}(x) = \int_0^x 1 \times \arcsin(t) dt = [t \arcsin(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$	

$$F_{13}(x) = \int_0^x 1 \times \arcsin(t) dt = [t \arcsin(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$  peut se calculer directement en remarquant que  $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = t(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}u'(t)(u(t))^{-\frac{1}{2}}$  avec  $u(t) = 1 - t^2$

Donc

$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \left[ -(u(t))^{\frac{1}{2}} \right]_0^x = -(u(x))^{\frac{1}{2}} + (u(0))^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2} + 1$$

Sinon on pose  $t = \sin(u) \Leftrightarrow u = \arcsin(t) \Rightarrow dt = \cos(u) du$

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2(u)} = \sqrt{\cos^2(u)} = |\cos(u)|$$

Mais  $-1 \leq x \leq 1$  donc  $-1 \leq t \leq 1$  donc on peut prendre  $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$  et alors  $\cos(u) \geq 0$ .

$$t = 0 \Rightarrow u = \arcsin(0) = 0$$

$$t = x \Rightarrow u = \arcsin(x)$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \int_0^{\arcsin(x)} \frac{\sin(u)}{\cos(u)} \cos(u) du = \int_0^{\arcsin(x)} \sin(u) du = [-\cos(u)]_0^{\arcsin(x)} \\ &= -\cos(\arcsin(x)) + \cos(0) = -\sqrt{1-x^2} + 1 \end{aligned}$$

Encore une autre méthode, on fait le changement de variable  $v = t^2$  parce que l'on a remarqué qu'au numérateur le «  $t$  » était, à une constante multiplicative près, la dérivée de  $v$  et que  $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  ne dépend que de  $v = t^2$ .

$$dv = 2t dt$$

$$t = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$t = x \Rightarrow v = x^2$$

$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{dv}{\sqrt{1-v}} = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} (1-v)^{-\frac{1}{2}} dv = \frac{1}{2} \left[ -2(1-v)^{\frac{1}{2}} \right]_0^{x^2} = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + 1$$

$$F_{13}(x) = [t \arcsin(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - 1$$

Allez à : **Exercice 6**

14.

$F_{14}(x) = \int_0^x t \arcsin(t) dt$	
$u'(t) = t$	$u(t) = \frac{t^2}{2}$
$v(t) = \arcsin(t)$	$v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$F_{14}(x) = \int_0^x t \arcsin(t) dt = \left[ \frac{t^2}{2} \arcsin(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$	

$$F_{14}(x) = \int_0^x t \arcsin(t) dt = \left[ \frac{t^2}{2} \arcsin(t) \right]_0^x - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Pour le calcul de  $\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$

On pose  $t = \sin(u) \Leftrightarrow u = \arcsin(t) \Rightarrow dt = \cos(u) du$

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2(u)} = \sqrt{\cos^2(u)} = |\cos(u)|$$

Mais  $-1 \leq x \leq 1$  donc  $-1 \leq t \leq 1$  donc on peut prendre  $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$  et alors  $\cos(u) \geq 0$ .

$$t = 0 \Rightarrow u = \arcsin(0) = 0$$

$$t = x \Rightarrow u = \arcsin(x)$$

$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\arcsin(x)} \frac{\sin^2(u)}{\cos(u)} \cos(u) du = \int_0^{\arcsin(x)} \sin^2(u) du$$

Il faut linéariser  $\sin^2(u)$  ou ce qui revient au même utiliser la formule

$$\sin^2(u) = \frac{1 - \cos(2u)}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \int_0^{\arcsin(x)} \frac{1 - \cos(2u)}{2} du = \frac{1}{2} \left[ u - \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_0^{\arcsin(x)} \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(x) - \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin(x)) \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(x) - \frac{1}{4} \times 2 \sin(\arcsin(x)) \cos(\arcsin(x)) = \frac{1}{2} \arcsin(x) - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} F_{14}(x) &= \int_0^x t \arcsin(t) dt = \left[ \frac{t^2}{2} \arcsin(t) \right]_0^x - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin(x) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \arcsin(x) - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \right) = \frac{2x^2 - 1}{4} \arcsin(x) + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 6**

15. Pour faire une intégration par parties on écrit  $F_{15}(x)$  sous la forme

$$F_{15}(x) = \int_0^x 1 \times \arctan(t) dt$$

$F_{15}(x) = \int_0^x 1 \times \arctan(t) dt$	
$u'(t) = 1$	$u(t) = t$
$v(t) = \arctan(t)$	$v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$
$F_{15}(x) = \int_0^x 1 \times \arctan(t) dt = [t \arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt$	

$$\begin{aligned} F_{15}(x) &= \int_0^x 1 \times \arctan(t) dt = [t \arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} [\ln(1+t^2)]_0^x = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 6**

Correction exercice 7.

1. Pour  $F_1$  on peut faire deux intégrations par parties

$\int e^x \cos(x) dx$	
$u'(x) = e^x$	$u(x) = e^x$
$v(x) = \cos(x)$	$v'(x) = -\sin(x)$
$F_1(x) = [e^x \cos(x)] - \int e^x (-\sin(x)) dx$	

$$F_1(x) = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx$$

$\int e^x \sin(x) dx$	
$u'(x) = e^x$	$u(x) = e^x$
$v(x) = \sin(x)$	$v'(x) = \cos(x)$
$\int e^x \sin(x) dx = [e^x \sin(x)] - \int e^x \cos(x) dx$	

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

Donc

$$F_1(x) = e^x \cos(x) + \left( e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx \right) \Leftrightarrow F_1(x) = e^x (\cos(x) + \sin(x)) - F_1(x)$$

$$\Leftrightarrow 2F_1(x) = e^x (\cos(x) + \sin(x)) \Leftrightarrow F_1(x) = e^x \left( \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) \right)$$

Il ne reste plus qu'à rajouter une constante

$$F_1(x) = e^x \left( \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) \right) + K$$

Deuxième méthode

$$F_1(x) = \int e^x \cos(x) dx = \int e^x \operatorname{Re}(e^{ix}) dx = \int \operatorname{Re}(e^x e^{ix}) dx = \int \operatorname{Re}(e^{(1+i)x}) dx$$

$$= \operatorname{Re} \left( \int e^{(1+i)x} dx \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} \right) + K$$

$$= \operatorname{Re} \left( \frac{1-i}{2} e^x (\cos(x) + i \sin(x)) \right) + K$$

$$= \frac{e^x}{2} \operatorname{Re}(\cos(x) - i \cos(x) + i \sin(x) + \sin(x)) + K = \frac{e^x}{2} (\cos(x) + \sin(x)) + K$$

Allez à : **Exercice 7**

2. A l'aide d'une intégration par partie

$\int \frac{\ln(x)}{x^n} dx = \int x^{-n} \ln(x) dx$	
$u'(x) = x^{-n}$	$u(x) = \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} = -\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$
$v(x) = \ln(x)$	$v'(x) = \frac{1}{x}$
$F_2(x) = \left[ -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} \right] - \int \frac{-1}{n-1} \times \frac{1}{x^n} dx$	

$$F_2(x) = -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} - 1n - 1 \times \frac{1}{x^n} dx = -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int x^{-n} dx$$

$$= -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + K$$

$$= -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + K = -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2 x^{n-1}} + K$$

Allez à : **Exercice 7**

3. A l'aide d'une intégration par partie

$\int x \arctan(x) dx$	
$u'(x) = x$	$u(x) = \frac{x^2}{2}$
$v(x) = \arctan(x)$	$v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$F_3(x) = \left[ \frac{x^2}{2} \arctan(x) \right] - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$	

$$F_3(x) = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \left( \frac{x^2 + 1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} (x - \arctan(x)) + K = \frac{1}{2} (x^2 - 1) \arctan(x) - \frac{x}{2} + K$$

Allez à : **Exercice 7**

4. On cherche une primitive de la forme

$$F_4(x) = (ax^2 + bx + c)e^x + K$$

$$F_4'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x = (ax^2 + (2a + b)x + b + c)e^x$$

$$(x^2 + x + 1)e^x = (ax^2 + (2a + b)x + b + c)e^x \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = ax^2 + (2a + b)x + b + c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 1 \\ b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Donc

$$F_4(x) = (x^2 - x + 2)e^x + K$$

On aurait pu faire aussi deux intégrations par partie.

Allez à : **Exercice 7**

Correction exercice 8.

1.

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$$

On multiplie par  $x$ , puis  $x = 0$

$$a = \left[ \frac{1}{x-1} \right]_{x=0} = -1$$

On multiplie par  $x - 1$ , puis  $x = 1$

$$b = \left[ \frac{1}{x} \right]_{x=1} = 1$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \left( \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx = -\ln|x| + \ln|x-1| + K = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + K$$

Allez à : **Exercice 8**

2.

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{-(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

On multiplie par  $x - 1$ , puis  $x = 1$

$$a = \left[ -\frac{1}{x+1} \right]_{x=1} = -\frac{1}{2}$$

On multiplie par  $x + 1$ , puis  $x = -1$

$$b = \left[ -\frac{1}{x-1} \right]_{x=-1} = \frac{1}{2}$$

$$F_2(x) = \int \frac{dx}{1-x^2} = \int \left( \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} (-\ln|x-1| + \ln|x+1|) + K = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + K$$

Remarque :

$$F_2(x) = \operatorname{argth}(x) + K$$

A condition que l'on cherche une intégrale sur l'intervalle  $] -1, 1[$ , sinon c'est faux.

On peut éventuellement décomposer de la façon suivante :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(x+1)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{x+1} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

Mais alors il faut faire attention

$$\int \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| + K = -\ln|x-1| + K$$

Allez à : **Exercice 8**

3.

Première méthode

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

On multiplie par  $x$ , puis  $x = 0$

$$a = \left[ \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right]_{x=0} = -1$$

On multiplie par  $x-1$ , puis  $x = 1$

$$b = \left[ \frac{1}{x(x+1)} \right]_{x=1} = \frac{1}{2}$$

On multiplie par  $x+1$ , puis  $x = -1$

$$c = \left[ \frac{1}{x(x-1)} \right]_{x=-1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} F_3(x) &= \int \frac{dx}{x(x^2-1)} = \int \left( \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + K \\ &= \ln \frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|} + K \end{aligned}$$

Deuxième méthode

$$F_3(x) = \int \frac{dx}{x(x^2-1)} = \int \frac{xdx}{x^2(x^2-1)}$$

On pose  $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$

$$F_3(x) = \int \frac{xdx}{x^2(x^2-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t(t-1)} = \frac{1}{2} F_1(t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| + K = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2} \right| + K$$

Allez à : **Exercice 8**

4. Il faut faire une division euclidienne

$$x^3 = x^3 + 4x - 4x = x(x^2 + 4) - 4x$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{x^2+4} &= x - \frac{4x}{x^2+4} \\ F_4(x) &= \int \left( x - \frac{4x}{x^2+4} \right) dx = \int \left( x - 2 \frac{2x}{x^2+4} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 2 \ln(x^2+4) + K \end{aligned}$$

Remarque :

La valeur absolu dans le logarithme est inutile puisque  $x^2 + 4 > 0$ .

Allez à : **Exercice 8**

5.

$$F_5(x) = \int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + K$$

Allez à : **Exercice 8**

6. Il faudrait faire une division mais

$$\frac{x^2}{x^2+3} = \frac{x^2+3-3}{x^2+3} = 1 - \frac{3}{x^2+3}$$

$$F_6(x) = \int \frac{x^2}{x^2+3} dx = F_6(x) = \int \left(1 - \frac{3}{x^2+3}\right) dx = x - 3 \int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$= x - 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + K = x - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + K$$

Allez à : **Exercice 8**

7.

$$\frac{1}{x^2(x^2-1)} = \frac{1}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1}$$

On multiplie par  $x^2$ , puis  $x = 0$

$$b = \left[ \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right]_{x=0} = -1$$

On multiplie par  $x-1$ , puis  $x = 1$

$$c = \left[ \frac{1}{x^2(x+1)} \right]_{x=1} = \frac{1}{2}$$

On multiplie par  $x+1$ , puis  $x = -1$

$$d = \left[ \frac{1}{x^2(x-1)} \right]_{x=-1} = -\frac{1}{2}$$

On multiplie par  $x$ , puis  $x \rightarrow +\infty$

$$0 = a + c + d \Leftrightarrow a = 0$$

$$\frac{1}{x^2(x^2-1)} = \frac{1}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$F_7(x) = \int \frac{1}{x^2(x^2-1)} dx = \int \left( \frac{-1}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx = -\int x^{-2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= -[-x^{-1}] + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + K = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + K$$

Allez à : **Exercice 8**

8.

$$\frac{1}{x(x^2-1)^2} = \frac{1}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{x+1} + \frac{e}{(x+1)^2}$$

Cela risque d'être long, rusons :

$$F_8(x) = \int \frac{1}{x(x^2-1)^2} dx = \int \frac{x dx}{x^2(x^2-1)^2}$$

On pose  $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$

$$F_8(x) = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t(t-1)^2}$$

$$\frac{1}{t(t-1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{(t-1)^2}$$

C'est déjà beaucoup mieux

On multiplie par  $t$ , puis  $t = 0$

$$a = \left[ \frac{1}{(t-1)^2} \right]_{t=0} = 1$$

On multiplie par  $(t-1)^2$ , puis  $t = 1$

$$c = \left[ \frac{1}{t} \right]_{t=1} = 1$$

On multiplie par  $t$ , puis  $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} 0 = a + b &\Leftrightarrow b = -1 \\ \frac{1}{t(t-1)^2} &= \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} \\ F_8(x) &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} \right) dt = \frac{1}{2} \ln|t| - \frac{1}{2} \ln|t-1| + \frac{1}{2} \int (t-1)^{-2} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t}{t-1} \right| + \frac{1}{2} [(t-1)^{-1}] + K = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2}{x^2-1} \right| + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2-1} + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 8**

9.

$$\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$$

On multiplie par  $(x-1)^2$ , puis  $x = 1$

$$b = \left[ \frac{1}{(x+1)^2} \right]_{x=1} = \frac{1}{4}$$

On multiplie par  $(x+1)^2$ , puis  $x = -1$

$$d = \left[ \frac{1}{(x+1)^2} \right]_{x=-1} = \frac{1}{4}$$

$x = 0$

$$1 = -a + b + c + d \Leftrightarrow -a + c = \frac{1}{2}$$

On multiplie par  $x$ , puis  $x \rightarrow +\infty$

$$0 = a + c$$

On en déduit aisément que :

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} &= \frac{1}{4} \left( \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) \\ \int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} dx &= \frac{1}{4} \int \left( \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \left( -\ln|x-1| + \ln|x+1| + \int ((x-1)^{-2} + (x+1)^{-2}) dx \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + [-(x-1)^{-1} - (x+1)^{-1}] \right) + K \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) + K = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{4} \frac{2x}{x^2-1} + K \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \frac{x}{x^2-1} + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 8**

10.

$$\frac{1}{x^2(x^2-1)^2} = \frac{1}{x^2(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{x+1} + \frac{f}{(x+1)^2}$$

Là cela risque d'être long.

En effet, on peut facilement déterminer  $b$ ,  $d$  et  $f$ , ensuite en multipliant par  $x$  puis faire tendre  $x \rightarrow +\infty$ , on trouve une autre relation, il en manque encore 2 (car il y a 6 coefficients), mais on ne peut pas faire  $x = 0$ , ni  $x = 1$ , ni  $x = -1$ , à mon avis  $x = i$  donnerait de bon résultats mais on va être un peu astucieux et cela va s'arranger relativement simplement.

$$\begin{aligned} \frac{1-x^2+x^2}{x^2(x^2-1)^2} &= \frac{1-x^2}{x^2(x^2-1)^2} + \frac{x^2}{x^2(x^2-1)^2} = -\frac{1}{x^2(x^2-1)} + \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} \\ F_{10}(x) &= \int \frac{1}{x^2(x^2-1)^2} dx = \int \left( -\frac{1}{x^2(x^2-1)} + \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} \right) dx \\ &= -\int \frac{dx}{x^2(x^2-1)} + \int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} dx = -F_7(x) + F_9(x) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} F_{10}(x) &= -F_7(x) + F_9(x) = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{4} \frac{2x}{x^2-1} + K \\ &= -\frac{1}{x} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \frac{x}{x^2-1} + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 8**

11.

$$\begin{aligned} F_{11}(x) &= \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \\ \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{x^2+1} \end{aligned}$$

$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$  est le cas le plus compliqué des fractions rationnelles, il y a deux méthodes

Première méthode

$$\arctan(x) = \int \frac{1}{x^2+1} dx = \int 1 \times \frac{1}{x^2+1} dx$$

Et on intègre par parties

$\int 1 \times \frac{1}{x^2+1} dx$	
$u'(x) = 1$	$u(x) = x$
$v(x) = \frac{1}{x^2+1}$	$v'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \left[ \frac{x}{x^2+1} \right] - \int x \frac{(-2x)}{x^2+1} dx$	

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= \int \frac{1}{x^2+1} dx = \left[ \frac{x}{x^2+1} \right] + 2 \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} dx - 2 \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx - 2 \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \frac{x}{x^2+1} + 2 \arctan(x) - 2 \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \end{aligned}$$

Donc

$$2 \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{x^2+1} + \arctan(x) \Rightarrow \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \times \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctan(x) + K$$

## Deuxième méthode

On fait le changement de variable  $x = \tan(t) \Leftrightarrow dx = (1 + \tan^2(t))dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{1 + \tan^2(t)}{(1 + \tan^2(t))^2} dt = \int \frac{dt}{1 + \tan^2(t)} = \int \cos^2(t) dt = \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right) + K = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \times 2 \sin(t) \cos(t) = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \cos^2(t) \\ &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \times \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \times \frac{1}{1 + \tan^2(t)} = \frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{1}{2} x \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

$$F_{11}(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{1}{2} \times \frac{x}{1 + x^2} + K = \frac{1}{2} \times \frac{x - 1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \arctan(x) + K$$

Allez à : **Exercice 8**

12. A priori il faut décomposer  $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$  en éléments simples mais  $(x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10$

Donc  $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$  est de la forme  $\frac{u'(x)}{u(x)}$  et alors

$$F_{12}(x) = \ln|x^2 + 3x - 10| + K$$

Allez à : **Exercice 8**

13.

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+3}$$

On multiplie par  $x - 1$ , puis  $x = 1$

$$a = \left[ \frac{x}{(x+1)(x+3)} \right]_{x=1} = \frac{1}{8}$$

On multiplie par  $x + 1$ , puis  $x = -1$

$$b = \left[ \frac{x}{(x-1)(x+3)} \right]_{x=-1} = \frac{1}{4}$$

On multiplie par  $x + 3$ , puis  $x = -3$

$$c = \left[ \frac{x}{(x-1)(x+1)} \right]_{x=-3} = -\frac{3}{8}$$

$$F_{13}(x) = \int \left( \frac{1}{8} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} + \frac{-3}{8} \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{8} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{3}{8} \ln|x+3| + K$$

Allez à : **Exercice 8**

14.

$$x^4 - x^2 - 2 = X^2 - X - 2$$

Ce polynôme a deux racines  $X_1 = -1$  et  $X_2 = 2$  donc

$$x^4 - x^2 - 2 = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2) = (x^2+1)(x^2-2) = (x^2+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

$$\frac{1}{x^4 - x^2 - 2} = \frac{1}{(x^2+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-\sqrt{2}} + \frac{d}{x+\sqrt{2}}$$

On multiplie par  $x^2 + 1$ , puis  $x = i$

$$ai + b = \left[ \frac{1}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} \right]_{x=i} = \left[ \frac{1}{x^2-2} \right]_{x=i} = -\frac{1}{3}$$

Donc  $a = 0$  et  $b = -\frac{1}{3}$

On multiplie par  $x - \sqrt{2}$ , puis  $x = \sqrt{2}$

$$c = \left[ \frac{1}{(x^2 + 1)(x + \sqrt{2})} \right]_{x=\sqrt{2}} = \frac{1}{3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

On multiplie par  $x + \sqrt{2}$ , puis  $x = -\sqrt{2}$

$$d = \left[ \frac{1}{(x^2 + 1)(x - \sqrt{2})} \right]_{x=-\sqrt{2}} = \frac{-1}{3 \times 2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$\begin{aligned} F_{14}(x) &= \int \left( \frac{-\frac{1}{3}}{x^2 + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{12}}{x - \sqrt{2}} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{12}}{x + \sqrt{2}} \right) dx \\ &= -\frac{1}{3} \arctan(x) + \frac{\sqrt{2}}{12} \ln \left| x - \frac{\sqrt{2}}{12} \right| - \frac{\sqrt{2}}{12} \ln \left| x + \frac{\sqrt{2}}{12} \right| + K \\ &= -\frac{1}{3} \arctan(x) + \frac{\sqrt{2}}{12} \ln \left| \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{12}}{x + \frac{\sqrt{2}}{12}} \right| + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 8**

15.  $x^2 + 2x + 5$  n'a pas de racine réelle.

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5}$$

On multiplie par  $x = 2$ , puis  $x = -2$

$$a = \left[ \frac{1}{x^2 + 2x + 5} \right]_{x=-2} = \frac{1}{5}$$

On multiplie par  $x$ , puis  $x \rightarrow +\infty$

$$0 = a + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{5}$$

$x = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} &= \frac{a}{2} + \frac{c}{5} \Leftrightarrow 1 = 5a + 2c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}a = 0 \\ F_{15}(x) &= \int \left( \frac{\frac{1}{5}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{5}x}{x^2+2x+5} \right) dx = \frac{1}{5} \ln|x+2| - \frac{1}{5} \int \frac{x}{x^2+2x+5} dx \\ &= \int \frac{x}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{x}{(x+2)^2+1} dx \end{aligned}$$

On pose  $t = x + 2 \Leftrightarrow x = t - 2 \Rightarrow dx = dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+2x+5} dx &= \int \frac{t-2}{t^2+1} dt = \int \frac{t}{t^2+1} dt - 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2+1) - 2 \arctan(t) + K \\ &= \frac{1}{2} \ln((x+2)^2+1) - 2 \arctan(x+2) + K \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) - 2 \arctan(x+2) + K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{15}(x) &= \frac{1}{5} \ln|x+2| - \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) - 2 \arctan(x+2) \right) + K \\ &= \frac{1}{5} \ln|x+2| - \frac{1}{10} \ln(x^2+2x+5) + \frac{2}{5} \arctan(x+2) + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 8**

16. C'est très difficile.

$$\frac{16}{x^2(x^2+2)^3} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2+2} + \frac{ex+f}{(x^2+2)^2} + \frac{hx+j}{(x^2+2)^3}$$

$\frac{16}{x^2(x^2+2)^3}$  est paire donc

$$\frac{16}{x^2(x^2+2)^3} = \frac{a}{-x} + \frac{b}{(-x)^2} + \frac{-cx+d}{(-x)^2+2} + \frac{-ex+f}{((-x)^2+2)^2} + \frac{-hx+j}{((-x)^2+2)^3}$$

On en déduit que :

$$a = c = e = h = 0$$

$$\frac{16}{x^2(x^2+2)^3} = \frac{b}{x^2} + \frac{d}{x^2+2} + \frac{f}{(x^2+2)^2} + \frac{j}{(x^2+2)^3}$$

On multiplie par  $x^2$  puis  $x = 0$

$$b = \left[ \frac{16}{(x^2+2)^3} \right]_{x=0} = 2$$

On multiplie par  $(x^2+2)^3$  puis  $x = i\sqrt{2}$

$$j = \left[ \frac{16}{x^2} \right]_{x=i\sqrt{2}} = -8$$

On multiplie par  $x^2$ , puis  $x^2 \rightarrow +\infty$

$$0 = b + d \Leftrightarrow d = -2$$

$x = i$

$$-16 = -b + d + f + j \Leftrightarrow -16 = -2 - 2 + f - 8 \Leftrightarrow f = -4$$

$$\frac{16}{x^2(x^2+2)^3} = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^2+2} - \frac{4}{(x^2+2)^2} - \frac{8}{(x^2+2)^3}$$

$$F_{16}(x) = \int \frac{16dx}{x^2(x^2+2)^3} = \int \left( \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^2+2} - \frac{4}{(x^2+2)^2} - \frac{8}{(x^2+2)^3} \right) dx$$

$$= -\frac{2}{x} - \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - 4 \int \frac{dx}{4 \left( \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 \right)^2} - 8 \int \frac{dx}{8 \left( \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 \right)^3}$$

$$= -\frac{2}{x} - \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \int \frac{dx}{\left( \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 \right)^2} - \int \frac{dx}{\left( \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 \right)^3}$$

Dans les deux intégrales on fait le changement de variable  $t = \frac{x}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}t \Rightarrow dx = \sqrt{2}dt$

$$F_{16}(x) = -\frac{2}{x} - \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2} \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} - \sqrt{2} \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$$

Or

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \times \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctan(x)$$

D'après le cours, ce que l'on a revu dans le calcul de  $F_{11}(x)$ .

Donc

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2} \arctan(t)$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^3} = \int 1 \times \frac{1}{(t^2+1)^2} dt$$

On intègre par parties

$\int 1 \times \frac{1}{(t^2+1)^2} dt$	
$u'(t) = 1$	$u(t) = t$
$v(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2} = (t^2+1)^{-2}$	$v'(t) = -\frac{4t}{(t^2+1)^3}$
$\int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt = \left[ \frac{t}{(t^2+1)^2} \right] -$	$\int t \times \left( -\frac{4t}{(t^2+1)^3} \right) dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt &= \left[ \frac{t}{(t^2+1)^2} \right] + 4 \int \frac{t^2}{(t^2+1)^3} dt = \frac{t}{(t^2+1)^2} + 4 \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^3} dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^2} + 4 \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^3} dt - 4 \int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^2} + 4 \int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt - 4 \int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 4 \int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt &= \frac{t}{(t^2+1)^2} + 3 \int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt \\ \int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt &= \frac{1}{4} \times \frac{t}{(t^2+1)^2} + 3 \left( \frac{1}{2} \times \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2} \arctan(t) \right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} F_{16}(x) &= -\frac{2}{x} - \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - 2\sqrt{2} \left( \frac{1}{2} \times \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2} \arctan(t) \right) \\ &\quad - 2\sqrt{2} \left( \frac{1}{4} \times \frac{t}{(t^2+1)^2} + 3 \left( \frac{1}{2} \times \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2} \arctan(t) \right) \right) + K \\ &= -\frac{2}{x} - \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2} \frac{t}{t^2+1} - \sqrt{2} \arctan(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{t}{(t^2+1)^2} \\ &\quad - 3\sqrt{2} \arctan(t) + K \\ &= -\frac{2}{x} - \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{x}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} - \sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{x}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right)^2} \\ &\quad - 3\sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + K = -\frac{2}{x} - 5\sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2x}{x^2+2} - \frac{2x}{(x^2+2)^2} + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 8**

17. Attention il faut faire une division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} x(x-1)^3 = x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x & \\ x^4 & + 1 \\ \hline x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x & | x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x \\ & \underline{1} \\ & 3x^3 - 3x^2 + x + 1 \\ \hline x^4 + 1 & = 1 \times (x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x) + 3x^3 - 3x^2 + x + 1 \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{x^4+1}{x(x-1)^3} &= 1 + \frac{3x^3-3x^2+x+1}{x(x-1)^3} \\ F_{17}(x) &= \int \left( 1 + \frac{3x^3-3x^2+x+1}{x(x-1)^3} \right) dx = x + \int \frac{3x^3-3x^2+x+1}{x(x-1)^3} dx \\ \frac{3x^3-3x^2+x+1}{x(x-1)^3} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

On multiplie par  $x$ , puis  $x = 0$

$$a = \left[ \frac{3x^3 - 3x^2 + x + 1}{(x-1)^3} \right]_{x=0} = -1$$

On multiplie par  $(x-1)^3$ , puis  $x = 1$

$$d = \left[ \frac{1}{x} \right]_{x=1} = 1$$

On multiplie par  $x$  puis  $x \rightarrow +\infty$

$$3 = a + b \Leftrightarrow b = -4$$

$x = 2$

$$\frac{3 \times 8 - 3 \times 4 + 2 + 1}{2 \times 1} = \frac{a}{2} + b + c + d \Leftrightarrow \frac{15}{2} = -\frac{1}{2} - 4 + c + 1 \Leftrightarrow c = 8 + 4 - 1 = 11$$

$$\frac{3x^3 - 3x^2 + x + 1}{x(x-1)^3} = \frac{-1}{x} - \frac{4}{x-1} + \frac{11}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$$

$$\int \frac{3x^3 - 3x^2 + x + 1}{x(x-1)^3} dx = \int \left( \frac{-1}{x} - \frac{4}{x-1} + \frac{11}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} \right) dx$$

$$= -\ln|x| - 4 \ln|x-1| - \frac{11}{x-1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)^2} + K$$

$$F_{17}(x) = x - \ln|x| - 4 \ln|x-1| - \frac{11}{x-1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)^2} + K$$

Allez à : **Exercice 8**

18. Si on n'a rien vu il faut décomposer la fraction

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2}$$

On multiplie par  $(x^2+1)^2$  puis  $x = i$

$$di + e = \left[ \frac{1}{x} \right]_{x=i} = \frac{1}{i} = -i \Rightarrow \begin{cases} d = -1 \\ e = 0 \end{cases}$$

On multiplie par  $x$  puis  $x = 0$

$$a = \left[ \frac{1}{(x^2+1)^2} \right]_{x=0} = 1$$

$x \rightarrow \frac{1}{x(x^2+1)^2}$  est impaire donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2+1)^2} &= -\frac{1}{(-x)((-x)^2+1)^2} \Leftrightarrow \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2} \\ &= -\left( \frac{a}{-x} + \frac{-bx+c}{(-x)^2+1} + \frac{-dx+e}{((-x)^2+1)^2} \right) \Leftrightarrow \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{a}{x} + \frac{bx-c}{x^2+1} + \frac{dx-e}{(x^2+1)^2} \Rightarrow c = e = 0 \end{aligned}$$

Et enfin on multiplie par  $x$ , puis  $x \rightarrow +\infty$

$$0 = a + b \Rightarrow b = -1$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}$$

$$F_{18}(x) = \int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2} \right) dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+1} + K$$

Mais on peut faire mieux

$$F_{18}(x) = \int \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{xdx}{x^2(x^2 + 1)^2}$$

On peut alors faire le changement de variable  $t = x^2$  donc  $dt = 2xdx$

$$F_{18}(x) = \int \frac{xdx}{x^2(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t(t + 1)^2}$$

Puis on décompose la fraction en éléments simple

$$\frac{1}{t(t + 1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t + 1} + \frac{c}{(t + 1)^2}$$

On multiplie par  $t$ , puis  $t = 0$

$$a = \left[ \frac{1}{(t + 1)^2} \right]_{t=0} = 1$$

On multiplie par  $(t + 1)^2$  puis  $t = -1$

$$c = \left[ \frac{1}{t} \right]_{t=-1} = -1$$

On multiplie par  $t$ , puis  $t \rightarrow +\infty$

$$0 = a + b \Rightarrow b = -1$$

$$\begin{aligned} F_{18}(x) &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{t} + \frac{-1}{t + 1} + \frac{-1}{(t + 1)^2} \right) dt = \frac{1}{2} \left( \ln|t| - \ln|t + 1| + \frac{1}{t + 1} \right) + K \\ &= \frac{1}{2} \left( \ln(x^2) - \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \right) + K = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2 + 1} + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 8**

19.

Le polynôme  $t^2 + 2t + 4$  n'admet pas de racines réelles, cette fraction est donc un élément simple, il faut donc mettre le dénominateur sous sa forme canonique

$$\begin{aligned} t^2 + 2t + 4 &= (t + 1)^2 + 3 \\ \int \frac{t}{t^2 + 2t + 4} dt &= \int \frac{t}{(t + 1)^2 + 3} dt \end{aligned}$$

Puis faire le changement de variable  $x = t + 1 \Leftrightarrow t = x - 1$ , ce qui entraîne que  $dt = dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{t^2 + 2t + 4} dt &= \int \frac{x - 1}{x^2 + 3} dx = \int \frac{x}{x^2 + 3} dx - \int \frac{1}{x^2 + 3} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) - \int \frac{1}{x^2 + (\sqrt{3})^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + K = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2t + 4) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t + 1}{\sqrt{3}}\right) + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 8**

Correction exercice 9.

1.

$$\int \frac{-t + 1}{t^2 + 2t + 5} dt = \int \frac{-t + 1}{(t + 1)^2 + 4} dt$$

On fait le changement de variable  $u = t + 1 \Leftrightarrow t = u - 1$ ,  $dt = du$

$$\begin{aligned} G(t) &= \int \frac{-(u - 1) + 1}{u^2 + 4} dt = \int \frac{-u + 2}{u^2 + 4} dt = \int \frac{-u}{u^2 + 4} dt + \int \frac{2}{u^2 + 4} dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln(u^2 + 4) + \frac{2}{2} \arctan\left(\frac{u}{2}\right) = -\frac{1}{2} \ln(t^2 + 2t + 5) + \arctan\left(\frac{t + 1}{2}\right) + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 9**

2. On fait une intégration par partie

$F(t) = \int \frac{\ln(t^2+2t+5)}{t^2} dt$	
$u'(t) = \frac{1}{(t-1)^2}$	$u(t) = -\frac{1}{t-1}$
$v(t) = \ln(t^2 + 2t + 5)$	$v'(t) = \frac{2t+2}{t^2+2t+5}$
$F(t) = \left[ -\frac{\ln(t^2+2t+5)}{t-1} \right] + \int \frac{2t+2}{(t-1)(t^2+2t+5)} dt$	

Il existe  $a, b$  et  $c$  réels tels que

$$\frac{2t + 2}{(t - 1)(t^2 + 2t + 5)} = \frac{a}{t - 1} + \frac{bt + c}{t^2 + 2t + 5}$$

Je multiplie par  $t - 1$ , puis  $t = 1$

$$a = \left[ \frac{2t + 2}{t^2 + 2t + 5} \right]_{t=1} = \frac{1}{2}$$

Je multiplie par  $t$ , puis  $t \rightarrow +\infty$

$$0 = a + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$t = 0$ ,

$$\begin{aligned} -\frac{2}{5} &= -a + \frac{c}{5} \Leftrightarrow c = -2 + 5a = \frac{1}{2} \\ \int \frac{2t + 2}{(t - 1)(t^2 + 2t + 5)} dt &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{t - 1} + \frac{-t + 1}{t^2 + 2t + 5} \right) dt = \frac{1}{2} \left( \ln|t - 1| + \int \frac{-t + 1}{t^2 + 2t + 5} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln|t - 1| - \frac{1}{4} \ln(t^2 + 2t + 5) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{t + 1}{2}\right) + K \end{aligned}$$

Donc

$$F(t) = -\frac{\ln(t^2 + 2t + 5)}{t - 1} + \frac{1}{2} \ln|t - 1| - \frac{1}{4} \ln(t^2 + 2t + 5) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{t + 1}{2}\right) + K$$

Allez à : **Exercice 9**

Correction exercice 10.

1.

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x^2 + 5} = \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + K$$

Allez à : **Exercice 10**

2.

$$F_2(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1}}$$

On fait le changement de variable  $t = \frac{x}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow x = \sqrt{5}t \Rightarrow dx = \sqrt{5}dt$

$$F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{5}dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \operatorname{argch}(t) + K = \operatorname{argch}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + K$$

Allez à : **Exercice 10**

3.

On fait le changement de variable  $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln(t) \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

$$F_3(x) = \int t \sin(t) \left(\frac{dt}{t}\right) = \int \sin(t) dt = -\cos(t) + K = -\cos(e^x) + K$$

Autre méthode : on remarque que  $dt = e^x dx$ , or ce terme est dans l'intégrale donc

$$F_3(x) = \int e^x \sin(e^x) dx = \int \sin(e^x)(e^x dx) = \int \sin(t) dt = -\cos(t) + K = -\cos(e^x) + K$$

Allez à : **Exercice 10**

4. On pose  $t = \tan(x) \Leftrightarrow x = \arctan(t) \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$\begin{aligned} F_4(x) &= \int t^3 \times \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^3}{1+t^2} dt = \int \frac{t(t^2+1)-t}{1+t^2} dt = \int \left( t - \frac{t}{1+t^2} \right) dt \\ &= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + K = \frac{1}{2} \tan^2(x) - \frac{1}{2} \ln(1+\tan^2(x)) + K \end{aligned}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned} F_4(x) &= \int \tan^3(x) dx = \int \tan(x)(\tan^2(x) + 1 - 1) dx \\ &= \int \tan(x)(1 + \tan^2(x)) dx - \int \tan(x) dx + K' \\ &= \int \tan(x) \tan'(x) dx - \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx + K' = \frac{1}{2} \tan^2(x) + \int \frac{\cos'(x)}{\cos(x)} dx + K' \\ &= \frac{1}{2} \tan^2(x) + \ln|\cos(x)| + K' \end{aligned}$$

On peut se demander si ces deux primitives sont bien égales à une constante près.

$$\ln(1 + \tan^2(x)) = \ln\left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right) = -\ln(\cos^2(x)) = -2 \ln|\cos(x)|$$

Donc tout va bien.

Allez à : **Exercice 10**

5.

$$\begin{aligned} F_5(x) &= \int \frac{1}{\tan^3(x)} dx = \int \frac{1 + \tan^2(x) - \tan^2(x)}{\tan^3(x)} dx = \int \frac{1 + \tan^2(x)}{\tan^3(x)} dx - \int \frac{\tan^2(x)}{\tan^3(x)} dx \\ &= \int \frac{\tan'(x)}{\tan^3(x)} dx - \int \frac{1}{\tan(x)} dx = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\tan^2(x)} - \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\tan^2(x)} - \int \frac{\sin'(x)}{\sin(x)} dx = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\tan^2(x)} - \ln|\sin(x)| + K \end{aligned}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned} F_5(x) &= \int \frac{1}{\tan^3(x)} dx = \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^3(x)} dx = \int \frac{\cos(x) \cos^2(x)}{\sin^3(x)} dx = \int \frac{\cos(x)(1 - \sin^2(x))}{\sin^3(x)} dx \\ &= \int \frac{1 - \sin^2(x)}{\sin^3(x)} \cos(x) dx \end{aligned}$$

On fait alors le changement de variable  $t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x) dx$

$$\begin{aligned} F_5(x) &= \int \frac{1 - \sin^2(x)}{\sin^3(x)} \cos(x) dx = \int \frac{1 - t^2}{t^3} (dt) = \int \left( \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} \right) dt = \int t^{-3} dt - \ln|t| + K' \\ &= -\frac{1}{2} \times t^{-2} - \ln|t| + K' = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{t^2} - \ln|t| + K' = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin^2(x)} - \ln|\sin(x)| + K' \end{aligned}$$

Là encore on peut se demander si ces deux primitives sont égales à une constante près.

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} + 1 = \frac{1}{\tan^2(x)} + 1$$

Donc

$$\begin{aligned} F_5(x) &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin^2(x)} - \ln|\sin(x)| + K' = -\frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{\tan^2(x)} + 1 \right) - \ln|\sin(x)| + K' \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\tan^2(x)} - \ln|\sin(x)| - \frac{1}{2} + K' \end{aligned}$$

On en déduit que  $K = -\frac{1}{2} + K'$ .

Allez à : **Exercice 10**

6. A priori il faudrait décomposer la fraction en éléments simples mais ici cela s'arrange plus simplement.  
On pose  $t = x^2 + 3x + 7 \Rightarrow dt = (2x + 3)dx$

$$F_6(x) = \int \frac{dt}{t^m} = \int t^{-m} dt = \frac{1}{1-m} t^{-m+1} + K = -\frac{1}{m-1} \times \frac{1}{t^{m-1}} + K$$

$$= -\frac{1}{m-1} \times \frac{1}{(x^2 + 3x + 7)^{m-1}} + K$$

Allez à : **Exercice 10**

7.

$$F_7(x) = \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int \ln(x) \times \frac{dx}{x} = \int \ln(x) \times \ln'(x) dx = \frac{1}{2} \ln^2(x) + K$$

Autre méthode (très semblable)

On pose  $t = \ln(x) \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

$$F_7(x) = \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int \ln(x) \times \frac{dx}{x} = \int t dt = \frac{1}{2} \times t^2 + K = \frac{1}{2} \ln^2(x) + K$$

Encore une autre méthode

On pose  $t = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$

$$F_7(x) = \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int \frac{\ln(e^t)}{e^t} \times e^t dt = \int t dt = \frac{1}{2} \times t^2 + K = \frac{1}{2} \ln^2(x) + K$$

Allez à : **Exercice 10**

8. La « méthode normale » voudrait que l'on pose  $t = e^x$  mais ici cela s'arrange plus simplement.  
On pose  $t = \text{sh}(x) \Rightarrow dt = \text{ch}(x) dx$

$$F_8(x) = \int \frac{1}{t^5} dt = \int t^{-5} dt = \frac{1}{-4} \times t^{-4} + K = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{t^4} + K = -\frac{1}{4 \text{sh}^4(x)} + K$$

Allez à : **Exercice 10**

Correction exercice 11.

1. Ce n'est qu'un rappel d'un résultat du cours :

$$F_1(x) = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + K$$

Allez à : **Exercice 11**

2. Pour  $F_2$ , on constate que  $\frac{1}{(1+x^2)^2}$  est un élément simple, donc il n'y a pas de décomposition à faire.

Première méthode (décrite dans le cours)

$\arctan(x) = \int 1 \times \frac{1}{1+x^2} dx$	
$u'(x) = 1$	$u(x) = x$
$v(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$	$v'(x) = -2x(1+x^2)^{-2}$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \left[ \frac{x}{1+x^2} \right] -$	$\int x \left( -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \right) dx$

$$\begin{aligned}
 \arctan(x) &= \frac{x}{1+x^2} + 2 \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{1+x^2} + 2 \int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2} dx \\
 &= \frac{x}{1+x^2} + 2 \int \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2} \right) dx \\
 &= \frac{x}{1+x^2} + 2 \left( \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \right) \\
 &= \frac{x}{1+x^2} + 2 \left( \arctan(x) - \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \right) = \frac{x}{1+x^2} + 2 \arctan(x) - 2F_2(x)
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$F_2(x) = \frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{1}{2} \times \frac{x}{1+x^2} + K$$

Deuxième méthode

On pose  $x = \tan(t)$ , alors  $dx = (1 + \tan^2(t))dt$

$$\begin{aligned}
 F_2(x) &= \int \frac{(1 + \tan^2(t))}{(1 + \tan^2(t))^2} dt = \int \frac{1}{1 + \tan^2(t)} dt = \int \cos^2(t) dt = \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\
 &= \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) + K = \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{4} \sin(2 \arctan(x)) + K' \\
 &= \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{2}{4} \sin(\arctan(x)) \cos(\arctan(x)) + K' \\
 &= \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + K' = \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{x}{1+x^2} + K'
 \end{aligned}$$

En effet :

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ensuite  $\arctan(x) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  donc  $\cos(\arctan(x)) > 0$  donc

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Puis

$$\sin(\arctan(x)) = \tan(\arctan(x)) \cos(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Si on trouve que

$$F_2(x) = \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{4} \sin(2 \arctan(x)) + K'$$

C'est bon.

Allez à : **Exercice 11**

3. Il faut faire une division euclidienne :  $x^3 = x^3 - 4x + 4x = x(x^2 - 4) + 4x$

Donc

$$\frac{x^3}{x^2 - 4} = x + \frac{4x}{x^2 - 4}$$

Normalement il faudrait encore décomposer  $\frac{4x}{x^2-4}$  mais cette fraction est, à une constante multiplicative

près, de la forme  $\frac{u'(x)}{u(x)}$ .

$$F_3(x) = \int \left( x + \frac{4x}{x^2 - 4} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x^2 - 4| + K$$

Allez à : **Exercice 11**

4.

$$\frac{4x}{(x-2)^2} = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{x-2}$$

$$a = [4x]_{x=2} = 8$$

On multiplie par  $x$ , puis  $x \rightarrow +\infty$

$$4 = b$$

$$F_4(x) = \int \left( \frac{8}{(x-2)^2} + \frac{4}{x-2} \right) dx = 8 \int (x-2)^{-2} dx + 4 \int \frac{1}{x-2} dx$$

$$= 8(-1)(x-2)^{-1} + 4 \ln|x-2| + K = -\frac{8}{x-2} + 4 \ln|x-2| + K$$

Allez à : **Exercice 11**

5.

$x^2 + x + 1$  n'a pas de racines réelles donc  $\frac{1}{x^2+x+1}$  est un élément simple et il faut mettre  $x^2 + x + 1$  sous forme canonique.

$$F_5(x) = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

On fait le changement de variable  $t = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = t - \frac{1}{2} \Rightarrow dx = dt$

$$F_5(x) = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) + K = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K$$

Allez à : **Exercice 11**

6.  $t^2 + 2t - 1$  admet deux racines réelles distinctes

$$t_1 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}$$

Et

$$t_2 = -1 + \sqrt{2}$$

$$t^2 + 2t - 1 = (t - t_1)(t - t_2)$$

$$\frac{1}{t^2 + 2t - 1} = \frac{1}{(t - t_1)(t - t_2)} = \frac{a}{t - t_1} + \frac{b}{t - t_2}$$

$$a = \left[ \frac{1}{t - t_2} \right]_{t=t_1} = \frac{1}{t_1 - t_2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$b = \left[ \frac{1}{t - t_1} \right]_{t=t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$F_6(t) = \frac{\sqrt{2}}{4} \int \left( \frac{-1}{t - t_1} + \frac{1}{t - t_2} \right) dt = \frac{\sqrt{2}}{4} (-\ln|t - t_1| + \ln|t - t_2|) + K = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{t - t_2}{t - t_1} \right| + K$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{t + 1 - \sqrt{2}}{t + 1 + \sqrt{2}} \right| + K$$

Allez à : **Exercice 11**

7.  $t^2 - 2t + 10$  n'a pas de racine réelle donc  $\frac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$  est un élément simple et il faut mettre  $t^2 - 2t + 10$  sous sa forme canonique.

$$F_7(t) = \int \frac{(3t+1)dt}{((t-1)^2 + 9)^2}$$

On fait le changement de variable  $u = t - 1 \Leftrightarrow t = u + 1 \Rightarrow dt = du$

$$F_7(t) = \int \frac{(3(u+1)+1)du}{(u^2+9)^2} = \int \frac{(3u+4)du}{(u^2+9)^2} = \int \frac{3udu}{(u^2+9)^2} + \int \frac{4du}{(u^2+9)^2}$$

$$I_1(t) = \int \frac{3udu}{(u^2+9)^2} \quad \text{et} \quad I_2(t) = \int \frac{4du}{(u^2+9)^2}$$

Dans  $I_1$  on fait le changement de variable  $v = u^2 \Rightarrow dv = 2udu$

$$I_1(t) = \int \frac{\frac{3}{2} dv}{(v+9)^2} = \frac{3}{2} \int (v+9)^{-2} dv = \frac{3}{2} (-1)(v+9)^{-1} = -\frac{3}{2(v+9)} = -\frac{3}{2(u^2+9)}$$

$$= -\frac{3}{2((t-1)^2+9)} = -\frac{3}{2(t^2-2t+10)}$$

$$I_2(t) = \int \frac{4du}{(u^2+9)^2} = \int \frac{4du}{9^2 \left( \left( \frac{u}{3} \right)^2 + 1 \right)^2}$$

On fait le changement de variable  $v = \frac{u}{3} \Leftrightarrow u = 3v \Rightarrow du = 3dv$

$$I_2(t) = \frac{12}{81} \int \frac{dv}{(v^2+1)^2} = \frac{4}{27} \int \frac{dv}{(v^2+1)^2}$$

Comme on l'a déjà revu avec  $F_2$

$$\int \frac{dv}{(v^2+1)^2} = \frac{1}{2} \arctan(v) + \frac{1}{2} \frac{v}{1+v^2} + K$$

$$I_2(t) = \frac{4}{27} \left( \frac{1}{2} \arctan(v) + \frac{1}{2} \frac{v}{1+v^2} \right) + K = \frac{2}{27} \arctan\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{2}{27} \frac{\frac{u}{3}}{1+\left(\frac{u}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{27} \arctan\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{2}{9} \times \frac{u}{9+u^2} = \frac{2}{27} \arctan\left(\frac{t-1}{3}\right) + \frac{2}{9} \times \frac{t-1}{t^2-2t+10}$$

Et finalement

$$F_7(t) = -\frac{3}{2(t^2-2t+10)} + \frac{2}{27} \arctan\left(\frac{t-1}{3}\right) + \frac{2}{9} \times \frac{t-1}{t^2-2t+10}$$

$$= \frac{2}{27} \arctan\left(\frac{t-1}{3}\right) + \frac{\frac{2}{9}t - \frac{31}{18}}{t^2-2t+10}$$

Allez à : **Exercice 11**

8.  $t^2 - 2t + 10$  n'a pas de racine réelle donc

$$\frac{3t+1}{t^2-2t+10}$$

est un élément simple, on met  $t^2 - 2t + 10$  sous forme canonique.

$$F_8(t) = \int \frac{3t+1}{((t-1)^2+9)} dt$$

On pose  $u = t - 1 \Leftrightarrow t = u + 1 \Rightarrow dt = du$

$$F_8(t) = \int \frac{3(u+1)+1}{(u^2+9)} du = \int \frac{3u+4}{u^2+9} du = \int \frac{3u}{u^2+9} du + \int \frac{4}{u^2+3^2} du$$

$$= \frac{3}{2} \ln(u^2+9) + \frac{4}{3} \arctan\left(\frac{u}{3}\right) + K = \frac{3}{2} \ln(t^2-2t+10) + \frac{4}{3} \arctan\left(\frac{t-1}{3}\right) + K$$

Allez à : **Exercice 11**

9.

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}$$

$$a = \left[ \frac{1}{t^2-t+1} \right]_{t=-1} = \frac{1}{3}$$

On multiplie par  $t$ , puis  $t \rightarrow +\infty$

$$0 = a + b \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$$

$t = 0$ ,

$$1 = a + c \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{t+1} + \frac{-t+2}{t^2-t+1} \right)$$

$$F_9(t) = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3} \int \frac{-t+2}{t^2-t+1} dt = \frac{1}{3} \ln|t+1| + \frac{1}{3} \int \frac{-t+2}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt$$

On pose  $u = t - \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = u + \frac{1}{2} \Rightarrow dt = du$

$$\int \frac{-u + \frac{3}{2}}{u^2 + \frac{3}{4}} du = - \int \frac{u}{u^2 + \frac{3}{4}} du + \frac{3}{2} \int \frac{1}{u^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} du = -\frac{1}{2} \ln\left(u^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + K$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(t^2 - t + 1) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + K$$

Par conséquent

$$F_9(t) = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3} \int \frac{-t+2}{t^2-t+1} dt$$

$$= \frac{1}{3} \ln|t+1| + \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{2} \ln(t^2 - t + 1) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) \right) + K$$

$$= \frac{1}{3} \ln|t+1| - \frac{1}{6} \ln(t^2 - t + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + K$$

Allez à : **Exercice 11**

10. Il faut diviser  $x^3 + 2$  par  $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ,

$$x^3 + 2 = 1 \times (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + (-3x^2 - 3x + 1)$$

Ce qui entraîne que

$$\frac{x^3 + 2}{(x+1)^3} = 1 + \frac{-3x^2 - 3x + 1}{(x+1)^3}$$

On cherche alors  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :

$$\frac{-3x^2 - 3x + 1}{(x+1)^3} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3}$$

$$c = [-3x^2 - 3x + 1]_{x=-1} = 1$$

On multiplie par  $x$ , puis  $x \rightarrow +\infty$

$$-3 = a$$

$x = 0$

$$1 = a + b + c \Rightarrow b = 1 - a - c = 3$$

$$F_{10}(x) = \int \frac{x^3 + 2}{(x+1)^3} dx = \int \left( 1 - \frac{3}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx$$

$$= x - 3 \ln|x+1| + 3 \int (x+1)^{-2} dx + \int (x+1)^{-3} dx$$

$$= x - 3 \ln|x+1| + 3(-(x+1)^{-1}) + \left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-2} + K$$

$$= x - 3 \ln|x+1| - \frac{3}{x+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x+1)^2} + K$$

Allez à : **Exercice 11**

11.

On cherche alors  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :

$$\frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}$$

$$c = \left[ \frac{x+1}{x} \right]_{x=2} = \frac{3}{2}$$

On multiplie par  $x$ , puis  $x \rightarrow +\infty$

$$0 = a + b$$

$$x = 1$$

$$2 = a - b + c \Leftrightarrow a - b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } a = \frac{1}{4} \text{ et } b = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} F_{11}(x) &= \int \frac{x+1}{x(x-2)^2} dx = \int \left( \frac{\frac{1}{4}}{x} - \frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{\frac{3}{2}}{(x-2)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln|x-2| + \frac{3}{2} \int (x-2)^{-2} dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| - \frac{3}{2} \times \frac{1}{x-2} + K \end{aligned}$$

Allez à : [Exercice 11](#)

Correction exercice 12.

1.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{2})^2} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Allez à : [Exercice 12](#)

2.

$$I_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$$

Car  $x \rightarrow \frac{1}{1-x^2}$  est paire

Première méthode parce que  $\left] 0, \frac{1}{2} \right[ \subset ] -1, 1[$

$$I_2 = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2} = 2 [\operatorname{argth}(x)]_0^{\frac{1}{2}} = 2 \operatorname{argth} \left( \frac{1}{2} \right) - 2 \operatorname{argth}(0) = 2 \times \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \ln(3)$$

Deuxième méthode (qui marche sur n'importe quel intervalle ne contenant pas  $-1$  et  $1$ ).

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) \\ I_2 &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2} = 2 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = [-\ln(1-x) + \ln(1+x)]_0^{\frac{1}{2}} = \left[ \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \ln \left( \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) - \ln(1) = \ln(3) \end{aligned}$$

Attention  $\int \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x) + K$ , il ne faut pas oublier le signe  $-$ .

Allez à : [Exercice 12](#)

3.  $x^2 + x - 3$  s'annule en  $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$  et  $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ , comme  $[2,3] \subset \left] \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right[$   $x \rightarrow \frac{2x+1}{x^2+x-3}$  est définie et continue sur  $[2,3]$ .

A priori il faut décomposer  $\frac{2x+1}{x^2+x-3}$  en éléments simples mais il se trouve que  $2x+1$  est la dérivée de  $x^2+x-3$ , donc

$$I_3 = [\ln|x^2+x-3|]_2^3 = \ln(9) - \ln(3) = \ln \left( \frac{9}{3} \right) = \ln(3)$$

Allez à : [Exercice 12](#)

4. On pose  $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$   
 $x = 0 \Rightarrow t = 0$  et  $x = 2 \Rightarrow t = 4$

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2x dx}{(x^2)^2 + 16} = \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{dt}{t^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \left[ \arctan\left(\frac{t}{4}\right) \right]_0^4 = \frac{1}{8} (\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{1}{8} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{32}$$

Allez à : **Exercice 12**

5.  
 Il existe  $a, b$  et  $c$  réels tels que

$$\frac{5x + 6}{(x^2 - 4)(x + 2)} = \frac{5x + 6}{(x - 2)(x + 2)^2} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 2} + \frac{c}{(x + 2)^2}$$

On multiplie par  $x - 2$ , puis  $x = 2$

$$a = \left[ \frac{5x + 6}{(x + 2)^2} \right]_{x=2} = \frac{10 + 6}{(2 + 2)^2} = 1$$

On multiplie par  $x + 2$ , puis  $x = -2$

$$c = \left[ \frac{5x + 6}{x - 2} \right]_{x=-2} = \frac{-10 + 6}{-2 - 2} = 1$$

On multiplie par  $x$ , puis  $x \rightarrow +\infty$

$$0 = a + b \Rightarrow b = -1$$

Par conséquent

$$I = \int_0^1 \left( \frac{1}{x - 2} + \frac{-1}{x + 2} + \frac{1}{(x + 2)^2} \right) dx = \left[ \ln|x - 2| - \ln|x + 2| - \frac{1}{x + 2} \right]_{x=0}^{x=1} \\ = \ln|-1| - \ln(3) - \frac{1}{3} - \left( \ln|-2| - \ln(2) - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6} - \ln(3)$$

Allez à : **Exercice 12**

Correction exercice 13.

- 1.

$$F_1(x) = \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)} dx$$

D'après les règles de Bioche

$$\frac{\cos^3(-x)}{\sin^5(-x)} d(-x) = \frac{\cos^3(x)}{(-\sin(x))^5} (-dx) = \frac{\cos^3(x)}{-\sin^5(x)} (-dx) = \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)} dx \\ \frac{\cos^3(x + \pi)}{\sin^5(x + \pi)} d(x + \pi) = \frac{(-\cos(x))^3}{(-\sin(x))^5} dx = \frac{-\cos^3(x)}{-\sin^5(x)} dx = \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)} dx$$

Ici deux des changements de variables sont possibles,  $t = \cos(x)$  et  $t = \tan(x)$ , on va essayer les deux pour constater que  $t = \tan(x)$  est meilleur (ce qui est toujours le cas lorsque l'on a le choix entre  $\cos(x)$  ou  $\sin(x)$  et  $\tan(x)$ )

Changement de variable  $t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)$ .

$$F_1(x) = \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)} dx = \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^6(x)} \sin(x) dx = - \int \frac{\cos^3(x)}{(\sin^2(x))^3} (-\sin(x) dx) \\ = - \int \frac{\cos^3(x)}{(1 - \cos^2(x))^3} (-\sin(x) dx) = - \int \frac{t^3}{(1 - t^2)^3} dt$$

Il n'est pas tout simple de décomposer cette fraction rationnelle, on peut toutefois poser  $u = t^2 \Rightarrow du = 2t dt$

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= -\frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(1-t^2)^3} 2t dt = -\frac{1}{2} \int \frac{u}{(1-u)^3} du = -\frac{1}{2} \int \frac{u-1+1}{(1-u)^3} du \\
&= -\frac{1}{2} \int \left( -\frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{(1-u)^3} \right) du = \frac{1}{2} \int (1-u)^{-2} du - \frac{1}{2} \int (1-u)^{-3} du \\
&= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2}(-1)(1-u)^{-1} \right] - \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2}(-1)(1-u)^{-2} \right] + K \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-u} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1-u)^2} + K = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-t^2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1-t^2)^2} + K \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\cos^2(t)} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1-\cos^2(t))^2} + K = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{\sin^4(x)} + K \\
&= \frac{1(\sin^2(x)-1)}{4 \sin^4(x)} + K = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\tan^4(x)} + K
\end{aligned}$$

Changement de variable  $t = \tan(x) \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2(x)}$

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)} dx = \int \frac{\cos^5(x)}{\sin^5(x) \cos^2(x)} dx = \int \frac{1}{\frac{\sin^5(x)}{\cos^5(x)} \cos^2(x)} dx = \int \frac{1}{\tan^5(x) \cos^2(x)} dx = \int \frac{1}{t^5} dt \\
&= \int t^{-5} dt = -\frac{1}{4} t^{-4} + K' = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\tan^4(x)} + K'
\end{aligned}$$

C'est nettement plus simple.

Allez à : **Exercice 13**

2. On applique encore les règles de Bioche.

$$\frac{\sin^3(-x)}{1+\cos(-x)} d(-x) = \frac{-\sin^3(x)}{1+\cos(x)} (-dx) = \frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)} dx$$

C'est le seul invariant qui fonctionne, on doit faire le changement de variable  $t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x) dx$

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= -\int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)} (-\sin(x) dx) = -\int \frac{1-t^2}{1+t} dt = \int \frac{t^2-1}{1+t} dt = \int (t-1) dt = \frac{t^2}{2} - t + K \\
&= \frac{\cos^2(x)}{2} - \cos(x) + K
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 13**

3.

$$\frac{d(x+\pi)}{\cos^4(x+\pi) + \sin^4(x+\pi)} = \frac{dx}{(-\cos(x))^4 + (-\sin(x))^4} = \frac{dx}{\cos^4(x) + \sin^4(x)}$$

Donc on doit faire le changement de variable  $t = \tan(x)$

Première méthode

On fait apparaître  $dt = \frac{dx}{\cos^2(x)}$

$$F_3(x) = \int \frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x) + \sin^4(x)} \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

Et la règle de Bioche dit que  $\frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x) + \sin^4(x)}$  peut s'exprimer en fonction de  $\tan(x)$

$$\frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x) + \sin^4(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x)(1+\tan^4(x))} = \frac{1}{\cos^2(x)(1+\tan^4(x))}$$

Or  $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

$$\frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x) + \sin^4(x)} = \frac{1 + \tan^2(x)}{1 + \tan^4(x)}$$

Donc

$$F_3(x) = \int \frac{1+t^2}{1+t^4} dt$$

Deuxième méthode

$$t = \tan(x) \Leftrightarrow x = \arctan(t) \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} \Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{(1+\tan^2(x))^2}$$

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} \Rightarrow \sin^4(x) = \frac{\tan^4(x)}{(1+\tan^2(x))^2}$$

Donc

$$F_3(x) = \int \frac{1}{\cos^4(x) + \sin^4(x)} dx = \int \frac{1}{\frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{t^4}{(1+t^2)^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)^2}{1+t^4} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{1+t^2}{1+t^4} dt$$

On retrouve le même résultat heureusement, il reste à trouver une primitive de  $t \rightarrow \frac{1+t^2}{1+t^4}$  et ce n'est pas simple.

$$\frac{1+t^2}{1+t^4} = \frac{1+t^2}{t^4+2t^2+1-2t^2} = \frac{1+t^2}{(t^2+1)^2 - (\sqrt{2}t)^2} = \frac{1+t^2}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)}$$

$$= \frac{at+b}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{ct+d}{t^2+\sqrt{2}t+1}$$

Car  $t^2 - \sqrt{2}t + 1$  et  $t^2 + \sqrt{2}t + 1$  sont deux polynômes sans racines réelles.

Remarque :

On peut aussi résoudre dans  $\mathbb{C}$  :  $t^4 = -1$ , on trouve quatre racines complexes  $z_k = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})}$ ,  $k \in \{0,1,2,3\}$  que l'on regroupe ainsi

$$t^4 + 1 = [(t - z_0)(t - z_3)][(t - z_1)(t - z_2)]$$

Puisque  $z_0 = \bar{z}_3$  et  $z_1 = \bar{z}_2$

$t \rightarrow \frac{1+t^2}{1+t^4}$  est paire, on en déduit que :

$$t^4 + 1 = (-t)^4 + 1 \Leftrightarrow \frac{at+b}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{ct+d}{t^2+\sqrt{2}t+1} = \frac{-at+b}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{-ct+d}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

Donc  $c = -a$  et  $d = b$

$t = 0$  entraîne que  $1 = b + d$  par conséquent  $b = d = \frac{1}{2}$ .

$t = i$  entraîne que

$$0 = \frac{ai + \frac{1}{2}}{-\sqrt{2}i} + \frac{-ai + \frac{1}{2}}{\sqrt{2}i} \Leftrightarrow 0 = -\frac{2a}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = 0$$

$$\frac{1+t^2}{1+t^4} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1} \right)$$

$$\int \frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1} = \int \frac{dt}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

On pose  $u = t - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow t = u + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow dt = du$

$$\int \frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1} = \int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2} \arctan(u\sqrt{2}) = \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}t - 1)$$

$$\int \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1} = \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}t + 1)$$

En faisant pareil ou en faisant le changement de variable  $t' = -t$ .

Donc

$$F_3(x) = \int \frac{1+t^2}{1+t^4} dt = \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}t - 1) + \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}t + 1) + K$$

$$= \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2} \tan(x) - 1) + \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2} \tan(x) + 1) + K$$

4.

Avec les règles de Bioche

$$\frac{\cos(-x) - 2}{\sin(-x)} d(-x) = \frac{\cos(x) - 2}{-\sin(x)} (-dx) = \frac{\cos(x) - 2}{\sin(x)} dx$$

On fait le changement de variable  $t = \cos(x)$ 

$$dt = -\sin(x) dx$$

Alors

$$F_4(x) = \int \frac{\cos(x) - 2}{\sin(x)} dx = \int \frac{\cos(x) - 2}{\sin(x) (-\sin(x))} (-\sin(x)) dx = - \int \frac{\cos(x) - 2}{\sin^2(x)} (-\sin(x)) dx$$

$$= - \int \frac{\cos(x) - 2}{1 - \cos^2(x)} (-\sin(x)) dx = - \int \frac{t - 2}{1 - t^2} dt = \int \frac{t - 2}{t^2 - 1} dt$$

Il faut alors décomposer la fraction rationnelle  $\frac{t-2}{t^2-1}$  en élément simple

$$\frac{t - 2}{t^2 - 1} = \frac{t - 2}{(t - 1)(t + 1)}$$

Il existe  $a$  et  $b$  réels tels que

$$\frac{t - 2}{(t - 1)(t + 1)} = \frac{a}{t - 1} + \frac{b}{t + 1}$$

On multiplie par  $t - 1$ , puis  $t = 1$ 

$$a = \left[ \frac{t - 2}{t + 1} \right]_{t=1} = -\frac{1}{2}$$

On multiplie par  $t + 1$ , puis  $t = -1$ 

$$b = \left[ \frac{t - 2}{t - 1} \right]_{t=-1} = -\frac{3}{2}$$

Donc

$$F_4(x) = \int \frac{\cos(x) - 2}{\sin(x)} dx = \int \left( \frac{-\frac{1}{2}}{t - 1} + \frac{\frac{3}{2}}{t + 1} \right) dt = -\frac{1}{2} \ln|t - 1| + \frac{3}{2} \ln|t + 1| + K$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|\cos(x) - 1| + \frac{3}{2} \ln|\cos(x) + 1| + K$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(1 - \cos(x)) + \frac{3}{2} \ln(\cos(x) + 1) + K$$

Allez à : **Exercice 13**

Correction exercice 14.

On pose  $f(x) = \frac{1}{\cos(x) \sin(x)}$  pour appliquer les règles de Bioches

$$f(-x)d(-x) = \frac{1}{\cos(-x) \sin(-x)} (-dx) = \frac{-1}{\cos(x) \sin(x)} (-dx) = \frac{1}{\cos(x) \sin(x)} dx$$

On peut faire le changement de variable  $t = \cos(x)$ 

$$f(\pi - x)d(\pi - x) = \frac{1}{\cos(\pi - x) \sin(\pi - x)} (d(\pi - x)) = \frac{1}{-\cos(x) \sin(x)} (-dx)$$

$$= \frac{1}{\cos(x) \sin(x)} dx$$

On peut faire le changement de variable  $t = \sin(x)$

$$f(\pi + x) = \frac{1}{\cos(\pi + x) \sin(\pi + x)} d(\pi + x) = \frac{1}{(-\cos(x))(-\sin(x))} dx = \frac{1}{\cos(x) \sin(x)} dx$$

On peut faire le changement de variable  $t = \tan(x)$

Le meilleur est  $t = \tan(x)$ , mais on va en faire deux histoire de comparer les différents changements de variables.

On commence par  $t = \sin(x)$ , il faut faire apparaître la dérivée de  $\sin$  au numérateur

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x) \sin(x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x) dx}{\cos^2(x) \sin(x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x) dx}{(1 - \sin^2(x)) \sin(x)}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$dt = \cos(t) dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x) dx}{(1 - \sin^2(x)) \sin(x)} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(1 - t^2)t}$$

Or

$$\frac{1}{(1 - t^2)t} = \frac{-1}{(t - 1)(t + 1)t} = \frac{a}{t - 1} + \frac{b}{t + 1} + \frac{c}{t}$$

On multiplie par  $t - 1$ , puis  $t = 1$

$$a = \left[ \frac{-1}{(t + 1)t} \right]_{t=1} = -\frac{1}{2}$$

On multiplie par  $t + 1$ , puis  $t = -1$

$$b = \left[ \frac{-1}{(t - 1)t} \right]_{t=-1} = -\frac{1}{2}$$

On multiplie par  $t$ , puis  $t = 0$

$$c = \left[ \frac{-1}{(t - 1)(t + 1)} \right]_{t=0} = 1$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(1 - t^2)t} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left( \frac{-\frac{1}{2}}{t - 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{t + 1} + \frac{1}{t} \right) dt = \left[ -\frac{1}{2} \ln|t - 1| - \frac{1}{2} \ln|t + 1| + \ln|t| \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \left[ \ln \left| \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \right| \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} \right| - \ln \left| \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} \right| = \ln(\sqrt{3}) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 \ln(\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Pour le changement de variable  $t = \cos(x)$  c'est quasiment pareil, il faut faire apparaître la dérivée de  $\cos$  au numérateur, on passe

Changement de variable  $t = \tan(x)$ , il faut faire apparaître la dérivée de  $\tan$  au numérateur

$$dt = \frac{dx}{\cos^2(x)} = (1 + \tan^2(x)) dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x) \sin(x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x) dx}{\cos^2(x) \sin(x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \times \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} \times \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan(x)} \times \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x) \sin(x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan(x)} \times \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \ln(\sqrt{3}) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \ln(\sqrt{3}) + \ln(\sqrt{3}) = 2 \ln(\sqrt{3})$$

C'est effectivement plus simple.

Allez à : [Exercice 14](#)

Correction exercice 15.

$$\frac{\cos^3(-t)}{\sin^4(-t)} d(-t) = -\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)} dt \neq \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)} dt$$

$$\frac{\cos^3(\pi - t)}{\sin^4(\pi - t)} d(\pi - t) = \frac{(-\cos(-t))^3}{(\sin(t))^4} (-dt) = \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)} dt$$

$$\frac{\cos^3(\pi + t)}{\sin^4(\pi + t)} d(\pi + t) = \frac{(-\cos(t))^3}{(-\sin(t))^4} dt = \frac{-\cos^3(t)}{\sin^4(t)} dt = -\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)} dt \neq \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)} dt$$

On fait le changement de variable  $x = \sin(t) \Rightarrow dx = \cos(t) dt$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(t)}{\sin^4(t)} \cos(t) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2(t)}{\sin^4(t)} \cos(t) dt$$

$$t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1 - x^2}{x^4} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (x^{-4} - x^{-2}) dx = \left[-\frac{1}{3}x^{-3} + x^{-1}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left[-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{1} - \left(-\frac{2^3}{3} + 2\right) = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$$

Allez à : [Exercice 15](#)

Correction exercice 16.

1. Avec les règles de Bioche

$$f(t + \pi)d(t + \pi) = \frac{1}{\sin(2(t + \pi))} dt = \frac{1}{\sin(2t)} dt = f(t)dt$$

On peut faire le changement de variable  $u = \tan(t)$

$$du = \frac{dt}{\cos^2(t)}$$

$$\frac{1}{\sin(2t)} = \frac{1}{2 \sin(t) \cos(t)} = \frac{\cos(t)}{2 \sin(t)} \frac{1}{\cos^2(t)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\tan(t)} \times \frac{dt}{\cos^2(t)}$$

Donc

$$\int f(t) dt = \int \frac{1}{2} \times \frac{1}{\tan(t)} \times \frac{dt}{\cos^2(t)} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + K = \frac{1}{2} \ln|\tan(t)|$$

On a pris  $K = 0$  car une demande « une » primitive de  $f$ .

2.  $dx = 2dt$  et  $t = \frac{x}{2}$

$$F(x) = \int \frac{1}{\sin(x)} dx = 2 \int \frac{1}{\sin(2t)} dt = 2 \times \frac{1}{2} \ln|\tan(t)| + K = \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right| + K$$

Allez à : **Exercice 16**

Correction exercice 17.

On pose  $f(x) = \frac{2}{1+\tan(x)}$

$$f(-x)d(-x) = \frac{2}{1+\tan(-x)}(-dx) = \frac{-2}{1-\tan(x)} dx \neq f(x)dx$$

$$f(\pi-x)d(\pi-x) = \frac{2}{1+\tan(\pi-x)}(-dx) = \frac{-2}{1-\tan(x)} dx \neq f(x)dx$$

$$f(\pi+x)d(\pi+x) = \frac{2}{1+\tan(\pi+x)} dx = \frac{2}{1+\tan(x)} dx = f(x)dx$$

On fait le changement de variable  $t = \tan(x)$ ,  $dt = (1 + \tan^2(x))dx$

$$F(x) = \int \frac{2}{(1+\tan(x))(1+\tan^2(x))} (1+\tan^2(x))dx = \int \frac{2}{(1+t)(1+t^2)} dt$$

Il existe  $a, b$  et  $c$  réels tels que

$$\frac{2}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$$

On multiplie par  $t+1$ , puis  $t = -1$

$$a = \left[ \frac{2}{1+t^2} \right]_{t=-1} = 1$$

On multiplie par  $t^2+1$ , puis  $t = i$

$$bi+c = \left[ \frac{2}{1+t} \right]_{t=i} = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{2} = 1-i$$

Donc  $b = -1$  et  $c = 1$

$$F(x) = \int \left( \frac{1}{1+t} + \frac{-t+1}{1+t^2} \right) dt = \ln|t+1| - \int \frac{t}{t^2+1} dt + \int \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= \ln|t+1| - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + \arctan(t) + K$$

$$= \ln|\tan(x)+1| - \frac{1}{2} \ln(\tan^2(x)+1) + \arctan(\tan(x)) + K$$

$$= \ln|\tan(x)+1| - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{\cos^2(x)} \right) + x + K = \ln \left| \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 1 \right| + \ln|\cos(x)| + x + K$$

$$= \ln|\sin(x) + \cos(x)| + x + K$$

Allez à : **Exercice 17**

Correction exercice 18.

On pose  $x = e^t$  donc  $t = \ln(x)$  et  $dt = \frac{dx}{x}$ 

D'autre part

$$1 + \operatorname{ch}(t) = 1 + \frac{e^t + e^{-t}}{2} = 1 + \frac{x + \frac{1}{x}}{2} = 1 + \frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{2x + x^2 + 1}{2x} = \frac{(x + 1)^2}{2x}$$

Donc

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \frac{2x}{(x+1)^2} \frac{dx}{x} = 2 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = 2 \int (x+1)^{-2} dx = -2(x+1)^{-1} + K = \frac{-2}{x+1} + K \\ &= \frac{-2}{e^t + 1} + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 18**

Correction exercice 19.

$$F(x) = \int \frac{1 + \operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)} dx$$

On fait le changement de variable  $t = e^x$ , soit  $x = \ln(t)$ ,  $dx = \frac{dt}{t}$ 

$$\frac{1 + \operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)} = \frac{1 + \frac{t - \frac{1}{t}}{2}}{1 + \frac{t + \frac{1}{t}}{2}} = \frac{1 + \frac{t^2 - 1}{2t}}{1 + \frac{t^2 + 1}{2t}} = \frac{2t + t^2 - 1}{2t + t^2 + 1} = \frac{t^2 + 2t - 1}{(t + 1)^2}$$

$$F(x) = \int \frac{1 + \operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)} dx = \int \frac{t^2 + 2t - 1}{(t + 1)^2} \frac{dt}{t}$$

On décompose  $\frac{t^2 + 2t - 1}{t(t+1)^2}$  en éléments simples, il existe  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :

$$\frac{t^2 + 2t - 1}{t(t+1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{(t+1)^2} + \frac{c}{t+1}$$

Je multiplie par  $t$ , puis  $t = 0$ ,  $a = \left[ \frac{t^2 + 2t - 1}{(t+1)^2} \right]_{t=0} = -1$ Je multiplie par  $(t+1)^2$ , puis  $t = -1$ ,  $b = \left[ \frac{t^2 + 2t - 1}{t} \right]_{t=-1} = 2$ Je multiplie par  $t$ , puis  $t \rightarrow \infty$ ,  $1 = a + c$ , donc  $c = 2$ .

$$F(x) = \int \left( \frac{-1}{t} + \frac{2}{(t+1)^2} + \frac{2}{t+1} \right) dt = -\ln|t| - \frac{2}{t+1} + 2 \ln|t+1| + K$$

$$F(x) = -x - \frac{2}{e^x + 1} + 2 \ln|e^x + 1| + K$$

Allez à : **Exercice 19**

Correction exercice 20.

On pose  $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln(t) \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$ 

$$\operatorname{ch}(x) + 1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1 = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} + 1 = \frac{t^2 + 1}{2t} + 1 = \frac{t^2 + 1 + 2t}{2t} = \frac{(t+1)^2}{2t}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(\operatorname{ch}(x) + 1)^2} &= \int \left( \frac{2t}{(t+1)^2} \right)^2 \frac{dt}{t} = \int \frac{4t}{(t+1)^4} dt = 4 \int \frac{t+1-1}{(t+1)^4} dt \\
&= 4 \int \left( \frac{1}{(t+1)^3} - \frac{1}{(t+1)^4} \right) dt = 4 \int ((t+1)^{-3} - (t+1)^{-4}) dt \\
&= 4 \left[ -\frac{1}{2}(t+1)^{-2} + \frac{1}{3}(t+1)^{-3} \right] + K = -\frac{2}{(t+1)^2} + \frac{4}{3(t+1)^3} + K \\
&= -\frac{2}{(e^x + 1)^2} + \frac{4}{3(e^x + 1)^3} + K = \frac{6(e^x + 1) + 4}{3(e^x + 1)^3} + K = 2 \frac{3e^x + 5}{3(e^x + 1)^3} + K
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 20**

Correction exercice 21.

On pose  $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln(t)$  donc  $dx = \frac{dt}{t}$

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{t - \frac{1}{t}}{2} = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

$$\frac{\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x) - 1} = \frac{\frac{t^2 + 1}{2t} - \frac{t^2 - 1}{2t}}{\frac{t^2 + 1}{2t} - 1} = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{t^2 + 1 - 2t}{2t}} = \frac{1}{(t-1)^2}$$

$$F(x) = \int \frac{2dt}{t(t-1)^2}$$

Il existe  $a, b$  et  $c$  réels tels que :

$$\frac{2}{t(t-1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{(t-1)^2}$$

Je multiplie par  $t$ , puis  $t = 0$

$$a = \left[ \frac{2}{(t-1)^2} \right]_{t=0} = 2$$

Je multiplie par  $(t-1)^2$ , puis  $t = 1$

$$c = \left[ \frac{2}{t} \right]_{t=1} = 2$$

Je multiplie par  $t$ , puis  $t \rightarrow +\infty$

$$0 = a + b \Leftrightarrow b = -2$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= 2 \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} \right) dt = 2 \left( \ln|t| - \ln|t-1| - \frac{1}{t-1} \right) + K \\
&= 2 \left( \ln(e^x) - \ln(e^x - 1) - \frac{1}{e^x - 1} \right) + K = 2x - 2 \ln(e^x - 1) - \frac{2}{e^x - 1} + K, \\
K &\in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 21**

Correction exercice 22.

Il s'agit d'une fraction rationnelle de fonctions hyperboliques, on peut faire le changement de variable  $t = e^x$ , donc  $x = \ln(t)$  et  $dx = \frac{dt}{t}$

$$\frac{2 - \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)}{2 \operatorname{ch}(x)} = \frac{2 - \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}}{2 \frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{2 - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2 - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \frac{2t - 1}{t^2 + 1}$$

$$\int \frac{2 - \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)}{2 \operatorname{ch}(x)} dx = \int \frac{2t - 1}{t^2 + 1} \frac{dt}{t} = \int \frac{2t - 1}{(t^2 + 1)t} dt$$

Il existe  $a, b$  et  $c$  réels tels que

$$\begin{aligned} \frac{2t - 1}{(t^2 + 1)t} &= \frac{a}{t} + \frac{bt + c}{t^2 + 1} \\ a &= \left[ \frac{2t - 1}{t^2 + 1} \right]_{t=0} = -1 \\ bi + c &= \left[ \frac{2t - 1}{t} \right]_{t=i} = \frac{2i - 1}{i} = 2 + i \end{aligned}$$

$b = 1$  et  $c = 2$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{2t - 1}{(t^2 + 1)t} &= \frac{-1}{t} + \frac{t + 2}{t^2 + 1} \\ \int \frac{2 - \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)}{2 \operatorname{ch}(x)} dx &= \int \left( \frac{-1}{t} + \frac{t + 2}{t^2 + 1} \right) dt = -\ln|t| + \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 1} dt + 2 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= -\ln|t| + \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + 2 \arctan(t) + K \\ &= -\ln(e^x) + \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + 2 \arctan(e^x) + K \\ &= -x + \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + 2 \arctan(e^x) + K \end{aligned}$$

Autre méthode

$$\frac{2 - \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)}{2 \operatorname{ch}(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} - \frac{1}{2} + \frac{1 \operatorname{sh}(x)}{2 \operatorname{ch}(x)}$$

Donc

$$\int \frac{2 - \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)}{2 \operatorname{ch}(x)} dx = \int \left( \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} - \frac{1}{2} + \frac{1 \operatorname{sh}(x)}{2 \operatorname{ch}(x)} \right) dx$$

Comme

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\operatorname{ch}(x)} &= \int \frac{\frac{1}{t}}{\frac{t^2 + 1}{2t}} dt = \int \frac{2dt}{t^2 + 1} = 2 \arctan(t) + K = 2 \arctan(e^x) \\ \int \frac{2 - \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)}{2 \operatorname{ch}(x)} dx &= 2 \arctan(e^x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln(\operatorname{ch}(x)) + K' \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 22**

Correction exercice 23.

A l'aide d'une intégration par partie

$\int (2t - 1) \ln(t^2 + 1) dt$	
$u'(t) = 3t^2 - 2t$	$u(t) = t^3 - t^2$
$v(t) = \ln(t^2 + 1)$	$v'(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}$
$F(x) = [(t^3 - t^2) \ln(t^2 + 1)] - \int (t^3 - t^2) \frac{2t}{t^2 + 1}$	

$$F(x) = [(t^3 - t^2) \ln(t^2 + 1)] - 2 \int \frac{t^4 - t^3}{t^2 + 1} dt$$

Il faut diviser  $t^4 - t^3$  par  $t^2 + 1$

$$\begin{array}{r|l} t^4 - t^3 & t^2 + 1 \\ t^4 & + t^2 \\ \hline -t^3 - t^2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -t^3 & -t \\ \hline & -t^2 + t \\ & -t^2 & -1 \\ & & t+1 \end{array}$$

$$t^4 - t^3 = (t^2 + 1)(t^2 - t - 1) + t + 1 \Rightarrow \frac{t^3 - t^2}{t^2 + 1} = t^2 - t - 1 + \frac{t + 1}{t^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= (t^3 - t^2) \ln(t^2 + 1) - 2 \int \left( t^2 - t - 1 + \frac{t + 1}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= (t^3 - t^2) \ln(t^2 + 1) - 2 \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t \right) - 2 \left( \int \frac{t}{t^2 + 1} dt + \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \right) \\ &= (t^3 - t^2) \ln(t^2 + 1) - \frac{2}{3} t^3 + t^2 - 2t - \ln(t^2 + 1) - 2 \arctan(t) + K \\ &= (t^3 - t^2 - 1) \ln(t^2 + 1) - \frac{2}{3} t^3 + t^2 - 2t - 2 \arctan(t) + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 23**

Correction exercice 24.

Il faut faire une intégration par partie.

$\int_0^{\sqrt{3}} 3x^2 \ln(x^2 + 1) dx$	
$u'(x) = 3x^2$	$u(x) = x^3$
$v(x) = \ln(x^2 + 1)$	$v'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
$\int_0^{\sqrt{3}} 3x^2 \ln(x^2 + 1) dx = [x^3 \ln(x^2 + 1)]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^4}{x^2 + 1} dx$	

Il faut alors décomposer  $\frac{2x^4}{x^2 + 1}$  en éléments simples, pour cela il faut faire une division euclidienne de  $2x^4$  par  $x^2 + 1$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 & x^2 + 1 \\ \hline 2x^4 + 2x^2 & 2x^2 - 2 \\ \hline & -2x^2 \\ & -2x^2 - 2 \\ \hline & 2 \end{array}$$

Donc

$$2x^4 = (x^2 + 1)(2x^2 - 2) + 2$$

Ce qui entraîne que

$$\frac{2x^4}{x^2 + 1} = 2x^2 - 2 + \frac{2}{x^2 + 1}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} 3x^2 \ln(x^2 + 1) dx &= [x^3 \ln(x^2 + 1)]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \left( 2x^2 - 2 + \frac{2}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= (\sqrt{3})^3 \ln((\sqrt{3})^2 + 1) - \left[ \frac{2}{3} x^3 - 2x + 2 \arctan(x) \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 3\sqrt{3} \ln(4) - \left( \frac{2}{3} (\sqrt{3})^3 - 2\sqrt{3} + 2 \arctan(\sqrt{3}) \right) \\ &= 6\sqrt{3} \ln(2) - \left( 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2 \times \frac{\pi}{3} \right) = 6\sqrt{3} \ln(2) - \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 24**

Correction exercice 25.

1.  $\frac{2x}{(x^2-1)^2}$  est de la forme  $\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$ , cela serait maladroit de décomposer cette fraction en éléments simple (mais c'est possible)

$$\int \frac{2x}{(x^2-1)^2} dx = \int 2x(x^2-1)^{-2} dx = -(x^2-1)^{-1} + K = \frac{-1}{x^2-1} + K$$

2.

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln(x) dx = \left[ \frac{-1}{x^2-1} \ln(x) \right] - \int \frac{-1}{x(x^2-1)} dx \\ &= \frac{-1}{x^2-1} \ln(x) + \int \frac{1}{x(x-1)(x+1)} dx \\ \frac{1}{x(x-1)(x+1)} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} \end{aligned}$$

Je multiplie par  $x$ , puis  $x = 0$ 

$$a = \left[ \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right]_{x=0} = -1$$

Je multiplie par  $x-1$ , puis  $x = 1$ 

$$b = \left[ \frac{1}{x(x+1)} \right]_{x=1} = \frac{1}{2}$$

Je multiplie par  $x+1$ , puis  $x = -1$ 

$$c = \left[ \frac{1}{x(x-1)} \right]_{x=-1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{x^2-1} \ln(x) + \int \left( \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{x^2-1} \ln(x) - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + K \\ &= \frac{1}{x^2-1} \ln(x) - \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(x-1) + \frac{1}{2} \ln(x+1) + K \\ &= \frac{x^2-2}{x^2-1} \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2-1) + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 25**

Correction exercice 26.

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} \arctan(x) dx$$

$$u'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} = (x+1)^{-2}$$

$$u(x) = -(x+1)^{-1} = -\frac{1}{x+1}$$

$$v(x) = \arctan(x)$$

$$v'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} \arctan(x) dx = \left[ -\frac{1}{x+1} \arctan(x) \right] - \int \frac{-1}{x+1} \times \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} \arctan(x) dx = \left[ -\frac{1}{x+1} \arctan(x) \right] + \int \frac{1}{x+1} \times \frac{1}{x^2+1} dx$$

Or il existe  $a, b$  et  $c$  réels tels que

$$\frac{1}{x+1} \times \frac{1}{x^2+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

On multiplie par  $x+1$ , puis  $x = -1$

$$a = \left[ \frac{1}{x^2+1} \right]_{x=-1} = \frac{1}{2}$$

On multiplie par  $x^2+1$ , puis  $x = i$

$$bi+c = \left[ \frac{1}{x+1} \right]_{x=i} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$$

Donc  $b = -\frac{1}{2}$  et  $c = \frac{1}{2}$ .

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)^2} \arctan(x) dx &= -\frac{1}{x+1} \arctan(x) + \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1} \right) dx \\ &= -\frac{1}{x+1} \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \left( \int -\frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx \right) \\ &= -\frac{1}{x+1} \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan(x) \right) + K \\ &= -\frac{1}{x+1} \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan(x) + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 26**

Correction exercice 27.

1. Dans cet exemple il ne faut pas calculer  $dt$ , mais il faut trouver  $x$  en fonction de  $t$  :

$$t = \sqrt[6]{2+x} \Leftrightarrow t^6 = 2+x \Leftrightarrow x = t^6 - 2 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$$

D'autre part

$$\sqrt[3]{2+x} = (2+x)^{\frac{1}{3}} = (t^6)^{\frac{1}{3}} = t^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{2+x} = (2+x)^{\frac{1}{2}} = (t^6)^{\frac{1}{2}} = t^3$$

$$F_1(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} dx = \int \frac{1}{t^3 + t^2} 6t^5 dt = \int \frac{6t^3}{t+1} dt$$

La division euclidienne de  $t^3$  par  $t+1$  donne  $t^3 = (t+1)(t^2 - t + 1) - 1$

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 6 \int \frac{(t+1)(t^2 - t + 1) - 1}{t+1} dt = 6 \int \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - \ln|t+1| + K \\ &= 2\sqrt[6]{2+x}^3 - 3\sqrt[6]{2+x}^2 + 6t - \ln|\sqrt[6]{2+x} + 1| + K \\ &= 2\sqrt{2+x} - 3\sqrt[3]{2+x} + 6t - \ln|\sqrt[6]{2+x} + 1| + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 27**

2.

$$\frac{x-1}{2} = \text{th}(u) \Leftrightarrow x = 2 \text{th}(u) + 1 \Rightarrow dx = 2(1 - \text{th}^2(u)) du$$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int \frac{1}{((x-1)^2 - 4)^2} dx = \int \frac{1}{((2 \text{th}(u))^2 - 4)^2} 2(1 - \text{th}(u)) du = \int \frac{2(1 - \text{th}^2(u))}{16(\text{th}^2(u) - 1)^2} du \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \text{th}^2(u)}{(1 - \text{th}^2(u))^2} du = \frac{1}{8} \int \frac{1}{1 - \text{th}^2(u)} du = \frac{1}{8} \int \text{ch}^2(u) du \end{aligned}$$

Car  $1 - \text{th}^2(u) = 1 - \frac{\text{sh}^2(u)}{\text{ch}^2(u)} = \frac{\text{ch}^2(u) - \text{sh}^2(u)}{\text{ch}^2(u)} = \frac{1}{\text{ch}^2(u)}$

$$F_2(x) = \frac{1}{8} \int \left( \frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)^2 du = \frac{1}{32} \int (e^{2u} + 2 + e^{-2u}) du = \frac{1}{32} \left( \frac{e^{2u}}{2} + 2u - \frac{e^{-2u}}{2} \right) + K$$

Il reste à remplacer  $u$  par sa valeur en fonction de  $x$ , soit  $u = \text{argth}\left(\frac{x-1}{2}\right)$

Pour  $x \in ]-1, 3[$ ,  $\frac{x-1}{2} \in ]-1, 1[$  et si on pose  $t = \frac{x-1}{2}$

$$u = \operatorname{argth}(t) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \frac{x-1}{2}}{1 - \frac{x-1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$$

Donc

$$e^{2u} = \frac{x+1}{x-3} \quad \text{et} \quad e^{-2u} = \frac{1}{e^{2u}} = \frac{3-x}{x+1}$$

Finalement

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \frac{1}{64} \times \frac{x+1}{x-3} + \frac{1}{32} \times \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right) - \frac{1}{64} \times \frac{3-x}{x+1} + K \\ &= \frac{1}{64} \times \frac{(x+1)^2 - (3-x)^2}{(3-x)(x+1)} + \frac{1}{32} \times \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right) + K \\ &= \frac{1}{64} \times \frac{8x-8}{(3-x)(x+1)} + \frac{1}{32} \times \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right) + K \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{x-1}{(3-x)(x+1)} + \frac{1}{32} \times \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right) + K \end{aligned}$$

Remarque :

On aurait pu décomposer la fraction rationnelle  $\frac{1}{((x-1)^2-4)^2} = \frac{1}{(x-3)^2(x+1)^2}$  en éléments simples.

Allez à : **Exercice 27**

3. On pose  $t = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = \sin(t) \Rightarrow dx = \cos(t) dt$

$$F_3(x) = \int t^2 \cos(t) dt$$

A l'aide d'une intégration

$F_3(x) = \int t^2 \cos(t) dt$	
$u'(t) = \cos(t)$	$u(t) = \sin(t)$
$v(t) = t^2$	$v'(t) = 2t$
$F_3(x) = [t^2 \sin(t)] - \int 2t \sin(t) dt$	

$$F_3(x) = t^2 \sin(t) - 2 \int t \sin(t) dt$$

A l'aide d'une deuxième intégration par partie

$\int t \sin(t) dt$	
$u'(t) = \sin(t)$	$u(t) = -\cos(t)$
$v(t) = t$	$v'(t) = 1$
$\int t \sin(t) dt = [-t \cos(t)] - \int (-\cos(t)) dt$	

$$\int t \sin(t) dt = [-t \cos(t)] - \int (-\cos(t)) dt = -t \cos(t) + \sin(t) + K$$

Donc

$$\begin{aligned} F_3(x) &= t^2 \sin(t) - 2(-t \cos(t) + \sin(t)) + K = (t^2 - 2) \sin(t) + 2t \cos(t) + K \\ &= ((\arcsin(x))^2 - 2)x + 2 \arcsin(x) \cos(\arcsin(x)) + K \\ &= ((\arcsin(x))^2 - 2)x + 2 \arcsin(x) \sqrt{1-x^2} + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 27**

4.

$$F_4(x) = \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{1+x^3} (3x^2 dx)$$

On pose  $t = 1 + x^3 \Leftrightarrow dt = 3x^2 dx$

$$F_4(x) = \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times t^{\frac{3}{2}} + K = \frac{2}{9} (1+x^3)^{\frac{3}{2}} + K = \frac{2}{9} (1+x^3) \sqrt{1+x^3} + K$$

Allez à : **Exercice 27**

Correction exercice 28.

$$1. \text{ On pose } t = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow t^2 = x-1 \Leftrightarrow x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x-1}} = \int \frac{2t dt}{t^2 + 1 + t} = 2 \int \frac{t}{t^2 + t + 1} dt = 2 \int \frac{t}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt$$

$$\text{On pose } u = t + \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = u - \frac{1}{2} \Rightarrow dt = du$$

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 2 \int \frac{u - \frac{1}{2}}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} du = \int \frac{2u}{u^2 + \frac{3}{4}} du + \int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} du \\ &= \ln\left(u^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + K = \ln(t^2 + t + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + K \\ &= \ln(x-1 + \sqrt{x-1} + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{3}}\right) + K \\ &= \ln(x + \sqrt{x-1}) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{3}}\right) + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 28**

2.

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{x\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$\text{On pose } t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3}t = 2x+1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}t-1}{2} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt$$

$$F_2(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} dt}{\frac{\sqrt{3}t-1}{2} \sqrt{t^2+1}} = 2 \int \frac{dt}{(\sqrt{3}t-1)\sqrt{t^2+1}}$$

$$\text{On pose alors } t = \text{sh}(u) \Rightarrow dt = \text{ch}(u) du, \text{ donc } \sqrt{\text{sh}^2(u)+1} = \text{ch}(u)$$

$$F_2(x) = 2 \int \frac{\text{ch}(u) du}{(\sqrt{3} \text{sh}(u) - 1) \text{ch}(u)} = 2 \int \frac{du}{\sqrt{3} \text{sh}(u) - 1}$$

$$\text{On pose } v = e^u \Leftrightarrow u = \ln(v) \Rightarrow du = \frac{dv}{v}$$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= 2 \int \frac{du}{\sqrt{3} \text{sh}(u) - 1} = 2 \int \frac{du}{\sqrt{3} \frac{(e^u - e^{-u})}{2} - 1} = 2 \int \frac{2e^u}{\sqrt{3}(e^{2u} - 1) - 2e^u} du \\ &= 2 \int \frac{2v}{\sqrt{3}(v^2 - 1) - 2v} \frac{dv}{v} = 4 \int \frac{dv}{\sqrt{3}v^2 - 2v - \sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \int \frac{dv}{v^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}v - 1} \end{aligned}$$

$$v^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}v - 1 \text{ a deux racines réelles : } \Delta = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3} = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$v_1 = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad v_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$v^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}v - 1 = (v - \sqrt{3})\left(v - \frac{3}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{1}{v^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}v - 1} = \frac{1}{(v - \sqrt{3})\left(v - \frac{3}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{a}{v - \sqrt{3}} + \frac{b}{v - \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$a = \left[ \frac{1}{v - \frac{\sqrt{3}}{3}} \right]_{v=\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b = \left[ \frac{1}{v - \sqrt{3}} \right]_{v=\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_2(x) = \frac{4}{\sqrt{3}} \int \left( \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{v - \sqrt{3}} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{v - \frac{3}{\sqrt{3}}} \right) dv = 2 \left( \ln|v - \sqrt{3}| - \ln \left| v - \frac{\sqrt{3}}{3} \right| \right) + K$$

$$= 2 \left( \ln|e^u - \sqrt{3}| - \ln \left| e^u - \frac{3}{\sqrt{3}} \right| \right) + K = 2 \ln \left| \frac{e^u - \sqrt{3}}{e^u - \frac{\sqrt{3}}{3}} \right| + K$$

Or  $t = \text{sh}(u) \Leftrightarrow u = \text{argsh}(t) = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$  et  $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

$$u = \text{argsh}(t) = \ln \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \right) = \ln \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 4}}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \ln \left( \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x + 1}{\sqrt{3}} \right)$$

Donc

$$e^u = \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x + 1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^u - \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x + 1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x - 2}{\sqrt{3}} \\ e^u - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x + 1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Finalement

$$F_2(x) = 2 \ln \left| \frac{\frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x - 2}{\sqrt{3}}}{\frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x}{\sqrt{3}}} \right| + K = 2 \ln \left| \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x - 2}{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x} \right| + K$$

Allez à : **Exercice 28**

$$F_3(x) = \int \frac{x}{\sqrt{9+4x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{9\left(1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2\right)}} dx$$

On pose  $t = \frac{2x}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}t \Rightarrow dx = \frac{3}{2}dt$

$$\begin{aligned} F_3(x) &= \int \frac{\frac{3}{2}t}{3\sqrt{1+t^2}} \times \frac{3}{2} dt = \frac{3}{4} \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{3}{4} \sqrt{1+t^2} + K = \frac{3}{4} \sqrt{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2} + K \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \sqrt{9+4x^2} + K = \frac{1}{8} \sqrt{9+4x^2} + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 28**

4. Sur  $I$ ,  $-4x^2 + 4x + 1 > 0$

$$\begin{aligned} F_4(x) &= \int \frac{x+1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{-4\left(x^2-x-\frac{1}{4}\right)}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{-4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right)}} dx \\ &= \int \frac{x+1}{\sqrt{3-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{3\left(1-\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{3}\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}} dx \end{aligned}$$

On pose  $t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3}t = 2x-1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}t+1}{2} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$

$$\begin{aligned} F_4(x) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{\sqrt{3}t+1}{2} + 1\sqrt{3}}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\sqrt{3}}{2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{\sqrt{3}t+3}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\sqrt{3}}{4} \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{1}{4} \int \frac{3}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{1-t^2} + \frac{3}{4} \arcsin(t) + K = -\frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{3}{4} \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + K \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{-4x^2+4x+1} + \frac{3}{4} \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 28**

5. Sur  $I$ ,  $-4x^2 + 12x - 5 > 0$

$$\begin{aligned} F_5(x) &= \int \frac{8x-3}{\sqrt{-4x^2+12x-5}} dx = \int \frac{8x-3}{\sqrt{-4\left(x^2-3x+\frac{5}{4}\right)}} dx = \int \frac{8x-3}{\sqrt{-4\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-1\right)}} dx \\ &= \int \frac{8x-3}{\sqrt{4-4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} dx = \int \frac{8x-3}{\sqrt{4\left(1-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right)}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{8x-3}{\sqrt{1-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} dx \end{aligned}$$

On pose  $t = x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = t + \frac{3}{2} \Rightarrow dx = dt$

$$\begin{aligned}
 F_5(x) &= \frac{1}{2} \int \frac{8\left(t + \frac{3}{2}\right) - 3}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{8t+9}{\sqrt{1-t^2}} dt = 8 \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt + 9 \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= -8\sqrt{1-t^2} + 9 \arcsin(t) + K = -8\sqrt{1-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2} + 9 \arcsin\left(x-\frac{3}{2}\right) + K \\
 &= -8\sqrt{4\left(-x^2+3x-\frac{5}{4}\right)} + 9 \arcsin\left(x-\frac{3}{2}\right) + K \\
 &= -8\sqrt{-4x^2+12x-5} + 9 \arcsin\left(x-\frac{3}{2}\right) + K
 \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 28**

6. On pose  $x = \operatorname{ch}(t) \Rightarrow dx = \operatorname{sh}(t) dt$  avec  $t \geq 0$ ,  $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2(t)-1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2(t)} = \operatorname{sh}(t)$

$$\begin{aligned}
 F_6(x) &= \int \sqrt{x^2-1} dx = \int \operatorname{sh}(t) \operatorname{sh}(t) dt = \int \operatorname{sh}^2(t) dt = \int \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 dt = \int \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} dt \\
 &= \frac{1}{4} \int (e^{2t} - 2 + e^{-2t}) dt = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} e^{2t} - 2t - \frac{1}{2} e^{-2t}\right) + K \\
 &= \frac{1}{16} e^{2\operatorname{argch}(x)} - \frac{1}{4} \operatorname{argch}(t) + \frac{1}{16} e^{-2\operatorname{argch}(x)} + K
 \end{aligned}$$

Mais on peut trouver une forme plus agréable

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} e^{2t} - 2t - \frac{1}{2} e^{-2t}\right) &= \frac{1}{16} (e^{2t} - e^{-2t}) - \frac{1}{4} t = \frac{1}{16} (e^t + e^{-t})(e^t - e^{-t}) \\
 &= \frac{1}{16} \times 2 \operatorname{ch}(t) \times 2 \operatorname{sh}(t) - \frac{1}{4} t = \frac{1}{4} \operatorname{ch}(t) \operatorname{sh}(t) - \frac{1}{4} t = \frac{1}{4} \operatorname{ch}(t) \sqrt{\operatorname{ch}^2(t)-1} - \frac{1}{4} t \\
 &= \frac{1}{4} x \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{4} \operatorname{argch}(x)
 \end{aligned}$$

Donc

$$F_6(x) = \frac{1}{4} x \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{4} \operatorname{argch}(x) + K$$

Allez à : **Exercice 28**

7. On pose  $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$

$$\begin{aligned}
 F_7(x) &= \int \frac{x\sqrt{x}}{x^2-5x+4} dx = \int \frac{t^2 t}{t^4-5t^2+4} dt = \int \frac{t^3}{t^4-5t^2+4} dt \\
 t^4-5t^2+4 &= (t^2-4)(t^2-1) = (t-2)(t+2)(t-1)(t+1) \\
 \frac{t^3}{t^4-5t^2+4} &= \frac{t^3}{(t-2)(t+2)(t-1)(t+1)} = \frac{a}{t-2} + \frac{b}{t+2} + \frac{c}{t-1} + \frac{d}{t+1} \\
 a &= \left[ \frac{t^3}{(t+2)(t-1)(t+1)} \right]_{t=2} = \frac{8}{4 \times 1 \times 3} = \frac{2}{3} \\
 b &= \left[ \frac{t^3}{(t-2)(t-1)(t+1)} \right]_{t=-2} = \frac{-8}{-4 \times (-3) \times (-1)} = -\frac{2}{3} \\
 c &= \left[ \frac{t^3}{(t-2)(t+2)(t+1)} \right]_{t=1} = \frac{1}{(-1) \times 3 \times 2} = -\frac{1}{6} \\
 d &= \left[ \frac{t^3}{(t-2)(t+2)(t-1)} \right]_{t=-1} = \frac{1}{(-3) \times 1 \times (-2)} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{t^3}{t^4 - 5t^2 + 4} &= \frac{t^3}{(t-2)(t+2)(t-1)(t+1)} = \frac{\frac{2}{3}}{t-2} - \frac{\frac{2}{3}}{t+2} + \frac{\frac{1}{6}}{t-1} - \frac{\frac{1}{6}}{t+1} \\ F_7(x) &= \int \left( \frac{\frac{2}{3}}{t-2} - \frac{\frac{2}{3}}{t+2} + \frac{\frac{1}{6}}{t-1} - \frac{\frac{1}{6}}{t+1} \right) dt \\ &= \frac{2}{3} \ln|t-2| - \frac{2}{3} \ln|t+2| + \frac{1}{6} \ln|t-1| - \frac{1}{6} \ln|t+1| + \\ &= \frac{2}{3} \ln \left( \frac{|t-2|}{|t+2|} \right) + \frac{1}{6} \ln \left( \frac{|t-1|}{|t+1|} \right) + K = \frac{2}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right| + \frac{1}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 28**

8. On pose  $u = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$

$$\begin{aligned} u = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} &\Leftrightarrow u^2 = \frac{1-t}{1+t} \Leftrightarrow u^2(1+t) = 1-t \Leftrightarrow u^2 + tu^2 = 1-t \Leftrightarrow tu^2 + t = 1-u^2 \\ &\Leftrightarrow t(u^2 + 1) = 1-u^2 \Leftrightarrow t = \frac{1-u^2}{u^2+1} \end{aligned}$$

Donc

$$dt = \frac{-2u(u^2+1) - 2u(1-u^2)}{(u^2+1)^2} du = \frac{-4u}{(u^2+1)^2} du$$

D'autre part

$$1-t = 1 - \frac{1-u^2}{u^2+1} = \frac{u^2+1 - (1-u^2)}{u^2+1} = \frac{2u^2}{u^2+1}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} F_8(t) &= \int \frac{1}{1-t} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt = \int \frac{1}{\frac{2u^2}{u^2+1}} \times u \times \frac{-4u}{(u^2+1)^2} du = -2 \int \frac{du}{u^2+1} = -2 \arctan(u) + K \\ &= -2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \right) + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 28**

Correction exercice 29.

On pose

$$\begin{aligned} t = \sqrt{1-x} &\Leftrightarrow t^2 = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t^2 \Rightarrow dx = -2tdt \\ F(x) &= \int -\frac{2t}{1+t} dt = -2 \int \frac{t}{1+t} dt = -2 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = -2 \int \left( 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= -2t + 2 \ln(t+1) + K = -2\sqrt{1-x} + 2 \ln(\sqrt{1-x} + 1) + K \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 29**

Correction exercice 30.

1.

$F_1(x) = \int_0^x (t^2 + 1) \arctan(t) dt$	
$u'(t) = t^2 + 1$	$u(t) = \frac{t^3}{3} + t$
$v(t) = \arctan(t)$	$v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$
$F_1(x) = \int_0^x (t^2 + 1) \arctan(t) dt = [\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{\frac{t^3}{3} + t}{1+t^2} dt$	

$$F_1(x) = \int_0^x (t^2 + 1) \arctan(t) dt = [\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{\frac{t^3}{3} + t}{1+t^2} dt = x \arctan(x) - \frac{1}{3} \int_0^x \frac{t^3 + 3t}{t^2 + 1} dt$$

$\frac{t^3+t}{t^2+1}$  est une fraction rationnelle, il faut la décomposer en élément simple, pour cela on commence par faire une division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} t^3 + 3t & t^2 + 1 \\ t^3 + t & t \\ \hline 2t & \end{array}$$

Donc  $t^3 + 3t = (t^2 + 1)t + 2t$ , d'où l'on déduit que

$$\frac{t^3 + 3t}{t^2 + 1} = \frac{(t^2 + 1)t + 2t}{t^2 + 1} = t + \frac{2t}{t^2 + 1}$$

Par conséquent

$$\int_0^x \frac{t^3 + 3t}{t^2 + 1} dt = \int_0^x \left( t + \frac{2t}{t^2 + 1} \right) dt = \left[ \frac{t^2}{2} + \ln(t^2 + 1) \right]_0^x = \frac{x^2}{2} + \ln(x^2 + 1)$$

$$F_1(x) = x \arctan(x) - \frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 1)$$

Allez à : **Exercice 30**

2.

$$F_2(x) = \int_0^x (t + 1) \arcsin(t) dt$$

$\int_0^x (t + 1) \arcsin(t) dt$	
$u'(t) = t + 1$	$u(t) = \frac{t^2}{2} + t$
$v(t) = \arcsin(t)$	$v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\int_0^x (t + 1) \arcsin(t) dt = \left[ \left( \frac{t^2}{2} + t \right) \arcsin(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{\frac{t^2}{2} + t}{\sqrt{1-t^2}} dt$	

$$F_2(x) = \int_0^x (t + 1) \arcsin(t) dt = \left[ \left( \frac{t^2}{2} + t \right) \arcsin(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{\frac{t^2}{2} + t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$= \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \arcsin(x) - \int_0^x \frac{\frac{t^2}{2} + t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

On fait le changement de variable  $t = \sin(u) \Leftrightarrow u = \arcsin(t)$

$$t = 0 \Rightarrow u = \arcsin(0) = 0$$

$$t = x \Rightarrow u = \arcsin(x)$$

$$dt = \cos(u) du$$

$$\frac{\frac{t^2}{2} + t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\frac{\sin^2(u)}{2} + \sin(u)}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \frac{\frac{\sin^2(u)}{2} + \sin(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}} = \frac{\frac{\sin^2(u)}{2} + \sin(u)}{|\cos(u)|}$$

Mais comme  $u = \arcsin(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\cos(u) > 0$  et alors  $|\cos(u)| = \cos(u)$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\frac{t^2}{2} + t}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \int_0^{\arcsin(x)} \frac{\frac{\sin^2(u)}{2} + \sin(u)}{\cos(u)} \cos(u) du = \int_0^{\arcsin(x)} \left( \frac{\sin^2(u)}{2} + \sin(u) \right) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\arcsin(x)} \sin^2(u) du + \int_0^{\arcsin(x)} \sin(u) du \end{aligned}$$

Pour la première intégrale il faut utiliser la formule  $\sin^2(u) = \frac{1-\cos(2u)}{2}$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\frac{t^2}{2} + t}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\arcsin(x)} \frac{1-\cos(2u)}{2} du + [-\cos(u)]_0^{\arcsin(x)} \\ &= \frac{1}{4} \left[ u - \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_0^{\arcsin(x)} - \cos(\arcsin(x)) + 1 \\ &= \frac{1}{4} \left( \arcsin(x) - \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin(x)) \right) - \cos(\arcsin(x)) + 1 \\ &= \frac{1}{4} \left( \arcsin(x) - \frac{1}{2} \times 2 \sin(\arcsin(x)) \cos(\arcsin(x)) \right) - \sqrt{1-x^2} + 1 \\ &= \frac{1}{4} \arcsin(x) - \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + 1 \\ &= \frac{1}{4} \arcsin(x) - \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + 1 \end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned} \cos(\arcsin(x)) &= \sqrt{1-x^2} \\ \sin(2a) &= 2 \sin(a) \cos(a) \\ \arcsin(\sin(x)) &= x \end{aligned}$$

Finalement

$$F_2(x) = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \arcsin(x) - \frac{1}{4} \arcsin(x) + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} - 1$$

Allez à : **Exercice 30**