

Applications linéaires, matrices, déterminants

Exercice 1.

Soit $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$.

Allez à : [Correction exercice 1](#)

Exercice 2.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim(\text{Im}(f))$.
3. Donner une base de $\text{Im}(f)$.

Allez à : [Correction exercice 2](#)

Exercice 3.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim(\text{Im}(f))$.
3. Donner une base de $\text{Im}(f)$.

Allez à : [Correction exercice 3](#)

Exercice 4.

On considère l'application $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$h(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$$

1. Montrer que h est une application linéaire.
2. Montrer que h est ni injective ni surjective.
3. Donner une base de son noyau et une base de son image.

Allez à : [Correction exercice 4](#)

Exercice 5.

Soit f l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, -x_2 + 2x_3)$$

Et soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
2. Déterminer les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique.
3. Calculer une base de $\ker(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.

Allez à : [Correction exercice 5](#)

Exercice 6.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim(\text{Im}(f))$.
3. Donner une base de $\text{Im}(f)$.

Allez à : [Correction exercice 6](#)

Exercice 7.

Soit $u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4)$$

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$

1. Donner une base de $\ker(u)$ et sa dimension.
2. Donner une base (La plus simple possible) de $\text{Im}(u)$ et sa dimension.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^4$?
4. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 , en donner une base et sa dimension.
5. A-t-on $\ker(u) \oplus E = \mathbb{R}^4$?

Allez à : [Correction exercice 7](#)

Exercice 8.

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont l'image de la base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$f(e_1) = -7e_1 - 6e_2$$

$$f(e_2) = 8e_1 + 7e_2$$

$$f(e_3) = 6e_1 + 6e_2 - e_3$$

1. Pour tout vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ déterminer $f \circ f(x)$.
2. En déduire que f est inversible (c'est-à-dire bijective) et déterminer f^{-1} .

Allez à : [Correction exercice 8](#)

Exercice 9.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y, x - 2y, 0, x - y - z - t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. A-t-on $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^4$?

Allez à : [Correction exercice 9](#)

Exercice 10.

Soit l'application $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie pour tout $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y + z + t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

Allez à : [Correction exercice 10](#)

Exercice 11.

Soit $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\text{Im}(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$?

Allez à : [Correction exercice 11](#)

Exercice 12.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que :

$$f(e_1) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3), f(e_2) = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3) \text{ et}$$

$$f(e_3) = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$$

Soient $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u\}$ et $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$

1. Montrer que E_{-1} et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
2. Montrer que $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à E_{-1} et que $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à E_1 .
3. Que peut-on en déduire sur les dimensions de E_{-1} et de E_1 ?
4. Déterminer $E_{-1} \cap E_1$.
5. A-t-on $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$?
6. Calculer $f^2 = f \circ f$ et en déduire que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Allez à : [Correction exercice 12](#)

Exercice 13.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3

Soient

$$a = \frac{1}{3}(2, -2, 1); b = \frac{1}{3}(2, 1, -2); c = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$$

Soit $\beta' = (a, b, c)$

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 définie par :

$$u(e_1) = 3e_1 + e_2 - e_3$$

$$u(e_2) = e_1 + 7e_2$$

$$u(e_3) = -e_1 - e_3$$

1. Montrer que β' est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, calculer $u(x)$.
3. Montrer que :

$$u(a) = 3a - 3c$$

$$u(b) = 3b + 3c$$

$$u(c) = -3a + 3b + 3c$$

Allez à : [Correction exercice 13](#)

Exercice 14.

Soit E un espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f \circ f = Id_E$.

On pose $E_1 = \ker(f - Id_E)$ et $E_2 = \ker(f + Id_E)$

1. Soit $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
2. Pour tout $x \in E$ écrire $x = \frac{f(x)+x}{2} - \frac{f(x)-x}{2}$ et montrer que $E_1 \oplus E_2 = E$
3. On suppose que E est de dimension finie et que $f \neq \pm Id_E$. Soit (v_1, v_2, \dots, v_n) une base de E telle que : $E_1 = \text{Vect}(v_1, \dots, v_r)$ et $E_2 = \text{Vect}(v_{r+1}, \dots, v_n)$ calculer $f(v_i)$ dans la base (v_1, v_2, \dots, v_n) .

Allez à : [Correction exercice 14](#)

Exercice 15.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

1. Calculer les images des vecteurs de la base canonique par f . En déduire la dimension de $\text{im}(f)$.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Allez à : [Correction exercice 15](#)

Exercice 16.

Soit u l'application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ par :

$$u(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer les dimensions de $\text{Im}(u)$ et de $\ker(u)$.

Allez à : [Correction exercice 16](#)

Exercice 17.

Soit u une application linéaire de E dans E , E étant un espace vectoriel de dimension n avec n pair.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

(a) $u^2 = O_E$ (où O_E est l'application linéaire nulle) et $n = 2 \dim(\text{Im}(u))$

(b) $\text{Im}(u) = \ker(u)$

Allez à : [Correction exercice 17](#)

Exercice 18.

Question de cours

Soit u une application linéaire de E vers E .

Montrer que : u est injective si et seulement si $\ker(u) = \{0_E\}$.

Allez à : [Correction exercice 18](#)

Exercice 19.

Soit $u: E \rightarrow E$ une application linéaire et λ un réel.

1. Soit $E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{id}_E)$. Calculer $u(x)$ pour $x \in E_\lambda$
Montrer que est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E , montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E .
3. Si $\lambda \neq 0$, montrer que $u(E_\lambda) = E_\lambda$

Allez à : [Correction exercice 19](#)

Exercice 20.

Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire

Montrer que :

$$\ker(f) \cap \text{im}(f) = f(\ker(f^2))$$

Allez à : [Correction exercice 20](#)

Exercice 21.

Soient f et g deux endomorphisme de \mathbb{R}^n . Montrer que

$$f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap \text{Im}(f)$$

Allez à : [Correction exercice 21](#)

Exercice 22.

Soit u un endomorphisme de E un espace vectoriel.

1. Montrer que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.
2. Montrer que $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im}(u)$.

Allez à : [Correction exercice 22](#)

Exercice 23.

Soit u un endomorphisme de E , un espace vectoriel.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) $\ker(u) \cap \text{im}(u) = \{0_E\}$
- (ii) $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Allez à : [Correction exercice 23](#)

Exercice 24.

Soit $u: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de \mathbb{R}^p et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de \mathbb{R}^q .

1. $p = 3, q = 2$

$$u(e_1) = f_1 + 2f_2, u(e_2) = 2f_1 - f_2 \text{ et } u(e_3) = -f_1 + f_2$$

- a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par u .
 - b) Déterminer la matrice de u de la base \underline{e} dans la base \underline{f} .
 - c) Déterminer le noyau et l'image de u .
2. $p = 3$ et $q = 3$, dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$
- $$u(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3, u(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 \text{ et } u(e_3) = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$$
- a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par u .
 - b) Déterminer la matrice de u de la base \underline{e} dans la base \underline{e} .
 - c) Déterminer le noyau et l'image de u .

Allez à : [Correction exercice 24](#)

Exercice 25.

Soit $u: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de \mathbb{R}^p et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de \mathbb{R}^q .

1. $p = 2, q = 3$

$$A = \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2)$ par u .
 - b) Déterminer l'image de la base \underline{e} (c'est-à-dire $u(e_1)$ et $u(e_2)$).
 - c) Déterminer le noyau et l'image de u .
2. $p = 4, q = 4$, dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$
- $$A = \text{Mat}_{\underline{e}, \underline{f}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$
- a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ par u .
 - b) Déterminer l'image de la base \underline{e} (c'est-à-dire $u(e_1), u(e_2), u(e_3)$ et $u(e_4)$).
 - c) Déterminer le noyau et l'image de u .

Allez à : [Correction exercice 25](#)

Exercice 26.

Soit $u: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de \mathbb{R}^p et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de \mathbb{R}^q .

1. $p = 3$ et $q = 3$ dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 - x_3)$$

(On admet que u est une application linéaire).

- a) Déterminer l'image de la base \underline{e} (c'est-à-dire $u(e_1), u(e_2)$, et $u(e_3)$).
- b) Déterminer la matrice de u de la base \underline{e} dans la base \underline{e} .

c) Déterminer le noyau et l'image de u .

2. $p = 3$ et $q = 3$ dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2)$$

(On admet que u est une application linéaire).

a) Déterminer l'image de la base \underline{e} (c'est-à-dire $u(e_1)$, $u(e_2)$, et $u(e_3)$).

b) Déterminer la matrice de u de la base \underline{e} dans la base \underline{e} .

c) Déterminer le noyau et l'image de u .

Allez à : [Correction exercice 26](#)

Exercice 27.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les base canonique de \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^3 est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base du noyau de f .

2. Déterminer une base de l'image de f . Quel est le rang de A ?

Allez à : [Correction exercice 27](#)

Exercice 28.

Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Allez à : [Correction exercice 28](#)

Exercice 29.

Soit la matrice A de définie par : $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1} .

2. En déduire A^n , pour tout n entier.

Allez à : [Correction exercice 29](#)

Exercice 30.

Soit A la matrice de définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 .

2. Trouver un polynôme P de degré 2 tel que $P(A) = O$.

3. En déduire A^{-1} .

4. Retrouver A^{-1} par une autre méthode.

Allez à : [Correction exercice 30](#)

Exercice 31.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3 . Calculer $A^3 - A^2 + A - I$.

2. Exprimer A^{-1} en fonction de A^2 , A et I .

3. Exprimer A^4 en fonction de A^2 , A et I .

Allez à : [Correction exercice 31](#)

Exercice 32.

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $(A - 2I)^3$, puis en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de I , A et de A^2 .

Allez à : [Correction exercice 32](#)

Exercice 33.

A tout nombre réel t on associe la matrice : $M(t) = \begin{pmatrix} \text{ch}(t) & \text{sh}(t) \\ \text{sh}(t) & \text{ch}(t) \end{pmatrix}$

1. Calculer le produit des matrices $M(t_1)$ et $M(t_2)$, où t_1 et t_2 sont deux réels quelconques.
2. Montrer que $M(t)$ est inversible, et déterminer $M^{-1}(t)$.

Allez à : [Correction exercice 33](#)

Exercice 34.

Soit f une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par : $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ et $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 .

1. Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .
2. Déterminer la matrice A de f dans la base β .
3.
 - a) Déterminer le noyau et l'image de f .
 - b) En déduire que f est inversible.
 - c) Déterminer f^{-1} dans la base β , en déduire A^{-1} .

4. Montrer que $A = RH$.

Où H est la matrice d'une homothétie dont on donnera le rapport et R est la matrice d'une rotation dont on donnera l'angle.

Soient $a = e_1 + e_2$ et $b = e_1 - e_2$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 . On pose $\beta' = (a, b)$.

5. Montrer que $\beta' = (a, b)$ est une base de \mathbb{R}^2 .
6. Calculer $f(a)$ et $f(b)$.
7. Déterminer la matrice de f dans la base β' .

Allez à : [Correction exercice 34](#)

Exercice 35.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soient $a = e_1 - e_2 + e_3$, $b = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la matrice de passage P de β à β' . Calculer P^{-1} .
3. Déterminer la matrice R de u dans la base β' .
4.
 - a) Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de R
 - b) Calculer R^4
 - c) En déduire les valeurs de A^{4n} .

Allez à : [Correction exercice 35](#)

Exercice 36.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit u une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par :

$$u(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$$

$$u(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$$

$$u(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$$

- Déterminer la matrice de u dans la base canonique.
- Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul a de E .
- Montrer que $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . Donner une base (b, c) de F .
- Montrer que $\beta' = (a, b, u(b))$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
- Déterminer la matrice R de u dans la base β' .

Allez à : [Correction exercice 36](#)

Exercice 37.

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ par

$$u(x) = (-10x_1 + 3x_2 + 15x_3, -2x_1 + 3x_3, -6x_1 + 2x_2 + 9x_3)$$

- Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer la dimension du noyau et de l'image de u . On donnera un vecteur directeur a de $\ker(u)$.
- A-t-on $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$?
- Déterminer un vecteur b tel que $a = u(b)$.
- Montrer que $E_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = -x\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , déterminer un vecteur directeur de E_{-1} que l'on notera c .
- Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer la matrice A' de u dans la base β' et donner la relation reliant A et A' .

Allez à : [Correction exercice 37](#)

Exercice 38.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice par rapport à la base β est : $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\beta' = (a, b, c, d)$ une famille de \mathbb{R}^4 définie par :

$$a = e_1 - e_2, b = e_1 - e_2 - e_3, c = 2e_1 - 2e_2 + e_3 + e_4 \text{ et } d = -e_1 + 2e_2$$

- Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
- Calculer $f(a), f(b), f(c)$ et $f(d)$ et les exprimer dans la base $\beta' = (a, b, c, d)$.
- Déterminer la matrice de f dans la base β' .

Allez à : [Correction exercice 38](#)

Exercice 39.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose :

$$a = (-1, 1, 0, -1), b = (1, -2, -1, 1), c = (-2, 3, 1, -1) \text{ et } d = (2, -1, 0, 1)$$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
2. Donner la matrice de passage P de β à β' . Calculer P^{-1} .
3. Calculer $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ et $u(d)$ dans la base β' .
4. Déterminer la matrice T de u dans la base β' .
5. Calculer $N = T + I$, puis N^4 et en déduire $(A + I)^4$.

Allez à : [Correction exercice 39](#)

Exercice 40.

Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique, $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, est

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Soient a, b, c et d quatre vecteurs

$$a = -2e_1 - e_2 - e_3 - e_4; b = e_2 - e_4; c = 2e_1 + e_3 + e_4; d = 3e_1 + e_3 + 2e_4$$

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
2. Calculer $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ et $u(d)$ dans la base $\beta' = (a, b, c, d)$.
3. En déduire la matrice D de u dans la base β' .
4. Déterminer la matrice P de passage de β à β' .
5. Calculer P^{-1} .
6. Calculer $P^{-1}AP$.

Allez à : [Correction exercice 40](#)

Exercice 41.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $a = e_1 + e_2 + e_3$, $b = e_1$, $c = u(b)$ et $d = u^2(b)$.

1. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
2. Donner la matrice de passage P de β à β' . Calculer P^{-1} .
3. Calculer $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ et $u(d)$ dans la base β' .
4. Déterminer la matrice N de u dans la base β' .
5. Calculer N^4 et en déduire A^4 .
6. Donner une base de $\ker(u)$.
7. Donner une base de $\text{Im}(u)$.

Allez à : [Correction exercice 41](#)

Exercice 42.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4

Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base β est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur a qui engendre le noyau de u .
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^4, u(x) = \lambda x\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
3. Trouver un vecteur directeur b de E_{-1} . Déterminer une base (c, d) de E_1 .
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
5. Déterminer la matrice de u dans la base β' .

Allez à : [Correction exercice 42](#)

Exercice 43.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrices dans la base canonique est :

$$A = \text{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $a_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 - 2e_4$, $a_2 = e_2 + e_3$, $a_3 = e_1 + 3e_2 + 5e_3 - 3e_4$ et $c = -e_1 - e_2 - e_3$

On pose $F = \text{Vect}(a_1, a_2, a_3)$.

1. Montrer que $\beta' = (a_1, a_2, a_3, c)$ est une base de \mathbb{R}^4 et donner la matrice P de passage de β à β' .
2. Déterminer la matrice D de u dans la base β' .
3. Montrer que pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$ en déduire que $v: F \rightarrow F$ définie par $v(x) = u(x)$ est un endomorphisme de F , déterminer la matrice de v dans la base $\beta_a = (a_1, a_2, a_3)$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus \text{Vect}(c)$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^4$ il existe un unique couple de vecteurs $(f, g) \in F \times \text{Vect}(c)$ tels que : $x = f + g$, calculer $u(x)$.

Allez à : [Correction exercice 42](#)

Exercice 44.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -3 & -12 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I$ ne soit pas inversible. Déterminer alors $\ker(A - \lambda I)$.
2. Soit $a = (-3, 1, 2)$, calculer $u(a)$.
3. Déterminer $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(b) = a - b$, puis $c \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(c) = b - c$.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
5. Déterminer $T = \text{mat}_{\beta'}(u)$.
6. Montrer que $(T + I)^3 = O$ (la matrice nulle). En déduire $(A + I)^3$.
7. Déterminer A^{-1} en fonction de A^2 , A et I .

Allez à : [Correction exercice 44](#)

Exercice 45.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . On considère l'application linéaire f définie par

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3; f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3; f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

On note $f^2 = f \circ f$.

1. Déterminer la matrice de f dans β .

2. Montrer que $E_1 = \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$ et que $N_{-1} = \ker(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
3. Déterminer a, b deux vecteurs tels que $E_1 = Vect(a)$ et $N_{-1} = Vect(b, f(b))$. A-t-on $E_1 \oplus N_{-1} = \mathbb{R}^3$?
4. Montrer que $\beta' = (a, b, f(b))$ est une base de \mathbb{R}^3 .
5. On appelle $\beta' = (a, b, f(b))$, quelle est la matrice de f dans β' .
6. Quelle est la matrice de f^2 dans β'

Allez à : [Correction exercice 45](#)

Exercice 46.

Partie I

Soit $e_2 = (0, 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$

1. Calculer $u(e_2)$, $u^2(e_2)$ et $u^3(e_2)$ et montrer que $\beta' = (e_2, u(e_2), u^2(e_2), u^3(e_2))$ est une base de \mathbb{R}^4 .
2. Calculer $u^4(e_2)$ dans la base en fonction de $u^2(e_2)$ et e_2 . Déterminer la matrice C de u dans la base β'

Partie II

3. Déterminer un vecteur $a \in \mathbb{R}^4$ tel que $u(a) = a$ dont la première composante est 1.
4. Soit $b = (1, -1, 0, 1)$ et $c = e_1 - e_3 + e_4$, montrer que $u(b) = a + b$ et que $u(c) = -c$.
5. Déterminer un vecteur $d \in \mathbb{R}^4$ tel que $u(d) = c - d$.
6. Montrer que $\beta'' = (a, b, c, d)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
7. Déterminer la matrice T de u dans la base β'' .

Partie III

8. Montrer que les matrices T et C sont semblables.

Allez à : [Correction exercice 46](#)

Exercice 47.

Soit $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2, a_i \in \mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? On considère l'application

$$f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \mapsto (X + 1)P'$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que la matrice A de f par rapport aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B} est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que $\mathcal{B}' = (1, X + 1, (X + 1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver la matrice B de f par rapport aux bases \mathcal{B}' et \mathcal{B}' .
5. Calculer A^2, A^3 et B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. Déterminer le rang de f .
7. Trouver une base de l'image de f .
8. Trouver une base de noyau de f .

Allez à : [Correction exercice 47](#)

Exercice 48.

Soit $u: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ défini par $U(P) = P + (1 - X)P'$

Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de u dans β .
3. Déterminer le noyau et l'image de u .

Allez à : [Correction exercice 48](#)

Exercice 49.

Soit $u: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, l'application définie pour tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$u(P) = 2P - (X - 1)P'$$

Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans β .
3. Déterminer le noyau de u . On notera P_2 un vecteur directeur du noyau.
4. Donner une base de l'image de u .
5. Déterminer un polynôme P_1 tel que $u(P_1) = P_1$
6. Montrer que $\beta' = (1, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Déterminer la matrice D de u dans la base β' .

Allez à : [Correction exercice 49](#)

Exercice 50.

Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P - (X - 2)P'$

1. Montrer que f est une application linéaire
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f .
4. Déterminer la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$.
5. Montrer que $\beta' = (1, X - 2, (X - 2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. Déterminer la matrice de passage P de β à β' . Calculer P^{-1} .
7. Quelle est la matrice de f dans la base β' .

Allez à : [Correction exercice 50](#)

Exercice 51.

Soit $u: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ une application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par

$$u(P) = P + (1 - X)P' + 2P''$$

On appelle $P_1 = 1 - X, P_2 = 1$ et $P_3 = 1 + 2X - X^2$

On appelle $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\beta' = (P_1, P_2, P_3)$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
4. Montrer que β' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base β' .

Allez à : [Correction exercice 51](#)

Exercice 52.

Soit $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2, a_i \in \mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit

$\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? On considère l'application

$$f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \mapsto f(P)$$

Où $f(P)(X) = P(X + 1) - P(X) = a_0 + a_1(X + 1) + a_2(X + 1)^2 - (a_0 + a_1X + a_2X^2)$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que la matrice A de f par rapport aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B} est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que $\mathcal{B}' = (1, X - 1, (X - 1)(X - 2))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver la matrice B de f par rapport aux bases \mathcal{B}' et \mathcal{B}' .

Allez à : [Correction exercice 52](#)

Exercice 53.

Partie I

Soit g une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans \mathbb{R}^2 définie par :

$$g(P) = (P(-1), P(1))$$

1. Montrer que g est une application linéaire.
2. Déterminer une base du noyau et déterminer l'image de g .

Partie II

Soit h une application linéaire de $\mathbb{R}_1[X]$ dans \mathbb{R}^2 définie par :

$$h(P) = (P(-1), P(1))$$

3. Montrer que h est bijective.

Allez à : [Correction exercice 53](#)

Exercice 54.

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

Soient a et b les fonctions définies par :

$$a(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad b(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On pose $H = \text{Vect}(a, b)$ et $F = \{f \in H, f(\ln(2)) = 0\}$

1. Déterminer la dimension de H
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H .
3. Quelle est la dimension de F ?
4. Soit $\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $f \in H$ par

$$\varphi(f) = (f(-\ln(2)), f(\ln(2)))$$

- a) Montrer que φ est une application linéaire
- b) Montrer que φ est un isomorphisme.

Allez à : [Correction exercice 54](#)

Exercice 55.

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficient dans \mathbb{R} à n lignes et n colonnes.

Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA = -A$.

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA = A$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\frac{A+{}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que $\frac{A-{}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. A-t-on $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, décomposer A en une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Allez à : [Correction exercice 55](#)

Exercice 56.

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à deux lignes et deux colonnes.

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$\phi(A) = A - {}^tA$$

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer le noyau de ϕ , quel est sa dimension ?
3. Déterminer l'image de ϕ . En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une matrice J , à déterminer tel que $\phi(A) = \lambda J$.

Allez à : [Correction exercice 56](#)

Exercice 57.

1. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

2.

a) Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$

b) Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$, puis calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Allez à : [Correction exercice 57](#)

Exercice 58.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

1. Calculer $\Delta = \det(A)$
2. Déterminer les valeurs de a, b, c et d qui annule Δ .

Allez à : [Correction exercice 58](#)

Exercice 59.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Première partie

Soit $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire.

$\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3

La matrice de u dans la canonique de \mathbb{R}^3 est A .

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$, un vecteur non nul, tel que $\ker(u) = \text{Vect}(a)$.
2. Déterminer un vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $a = u(b)$.
3. Montrer que $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , donner un vecteur non nul $c \in E$.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
5. Déterminer la matrice T de u dans la base β' .
6. Donner la relation entre A, T et la matrice de passage, notée Q , de β à β' .

Deuxième partie

Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ l'application linéaire définie par :

$$f(P) = (2 + X + X^2)P - (1 + 2X + X^2 + X^3)P' + \frac{1}{2}(-1 + X + X^2 + X^3 + X^4)P''$$

1. Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$ et en déduire que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner la matrice B de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. On pose $P_0 = 1 + X + X^2$, $P_1 = 1 + X$ et $P_2 = 2 + X + X^2$
Montrer que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer la matrice T' de f dans la base \mathcal{B}' .
5. Donner la relation entre B , T' et la matrice, notée Q' , de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

Troisième partie

Montrer que A et B sont deux matrices semblables.

Allez à : [Correction exercice 59](#)

Exercice 60.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Soit $u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est A .

1. Montrer que si v est un endomorphisme de E , un espace vectoriel de dimension n alors

$$\ker(v) \subset \ker(v^2) \subset \dots \subset \ker(v^n)$$
2. Déterminer une base de $\ker(u + id_{\mathbb{R}^4})$, de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$, de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3)$ et de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^4)$.
Donner l'entier p tel que $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^p) = \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^{p+1})$
3.
 - a) Donner un vecteur non nul a qui engendre $\ker(u + id_{\mathbb{R}^4})$.
 - b) Donner un vecteur b vérifiant $a = (u + id_{\mathbb{R}^4})(b)$.
Puis montrer que (a, b) est une base de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$
 - c) Donner un vecteur c vérifiant $b = (u + id_{\mathbb{R}^4})(c)$.
Puis montrer que (a, b, c) est une base de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3)$
 - d) exprimer $u(b)$ et $u(c)$ en fonction de a , b et c .
4. soit $d = (1, 1, 0, 1)$, calculer $u(d)$.
5. Montrer que $\beta' = (a, b, c, d)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
6. Donner la matrice, T , de u dans la base β' et donner la relation entre A , T et la matrice de passage P de β à β' .
7. Calculer $(T + I)^3(T - I)$ et en déduire $(A + I)^3(A - I)$

Allez à : [Correction exercice 60](#)

Exercice 61.

Première partie :

Soit g un endomorphisme de \mathbb{R}^3

1. Montrer que $\ker(g) \subset \ker(g^2) \subset \ker(g^3)$
2. On suppose que $g^3 = O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et que $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subsetneq \ker(g) \subsetneq \ker(g^2) \subsetneq \ker(g^3)$
 - a) Déterminer $\dim(\ker(g))$ et $\dim(\ker(g^2))$
 - b) Montrer que $Im(g) \subset \ker(g^2)$, puis que $Im(g) = \ker(g^2)$.

Deuxième partie :

Soit g un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $g^3 = O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et que $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subsetneq \ker(g) \subsetneq \ker(g^2) \subsetneq \ker(g^3)$

3. Soit $a \in \ker(g)$, un vecteur non nul, montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $g(b) = a$. Montrer que $b \in \ker(g^2)$ et en déduire que (a, b) est une famille libre.
4. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^3$ tel que $g(c) = b$, montrer que alors (a, b, c) est une base de \mathbb{R}^3 .

5. Déterminer la matrice de g dans la base (a, b, c) .

Troisième partie :

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -3 & -12 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Montrer que $f + Id$ vérifie les hypothèses de la seconde partie.

7. Déterminer a, b et c tels que : $a \in \ker(f + Id)$, $(f + Id)(b) = a$ et $(f + Id)(c) = b$.

8. Déterminer la matrice de f dans la base (a, b, c) .

Allez à : [Correction exercice 61](#)

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

1. Soient $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, et soient λ et μ deux réels.

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) = (X_1, X_2, X_3)$$

Donc

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= (X_1 + X_2 + X_3, 2X_1 + X_2 - X_3) \\ &= ((\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3), 2(\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \\ &\quad - (\lambda x_3 + \mu y_3)) \\ &= (\lambda(x_1 + x_2 + x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3), \lambda(2x_1 + x_2 - x_3) + \mu(2y_1 + y_2 - y_3)) \\ &= \lambda(x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3, 2y_1 + y_2 - y_3) = \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

Ce qui montre que u est linéaire.

2.

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_2 - 2L_1 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $x = (2x_3, -3x_3, x_3) = x_3(2, -3, 1)$, si on pose $a = (2, -3, 1)$

$$\ker(u) = \text{Vect}(a)$$

Allez à : [Exercice 1](#)

Correction exercice 2.

1.

$$\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z')$$

$$f(\lambda u + \lambda' u')$$

$$\begin{aligned} &= (-2(\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda' z'), (\lambda x + \lambda' x') - 2(\lambda y + \lambda' y') \\ &\quad + (\lambda z + \lambda' z'), (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') - 2(\lambda z + \lambda' z')) \\ &= (\lambda(-2x + y + z) + \lambda'(-2x' + y' + z'), \lambda(x - 2y + z) + \lambda'(x' - 2y' + z')) \\ &= \lambda(-2x + y + z, x - 2y + z) + \lambda'(-2x' + y' + z', x' - 2y' + z') = \lambda f(u) + \lambda' f(u) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2.

$$\begin{aligned} u \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (-2x + y + z, x - 2y + z) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \\ &u = (z, z, z) = z(1, 1, 1) \end{aligned}$$

Donc $\ker(f) = \text{Vect}(a)$ avec $a = (1, 1, 1)$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 1 + \dim(\text{Im}(f)) = 3 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 2$$

3. Donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. Une base est $((1,0), (0,1))$

Allez à : **Exercice 2**

Correction exercice 3.

$$\begin{aligned} 1. \quad \lambda u + \lambda' u' &= (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z') \\ f(\lambda u + \lambda' u') &= (-2(\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda' z'), (\lambda x + \lambda' x') - 2(\lambda y + \lambda' y') \\ &\quad + (\lambda z + \lambda' z'), (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') - 2(\lambda z + \lambda' z')) \\ &= (\lambda(-2x + y + z) + \lambda'(-2x' + y' + z'), \lambda(x - 2y + z) + \lambda'(x' - 2y' + z')) \\ &= \lambda(-2x + y + z, x - 2y + z) + \lambda'(-2x' + y' + z', x' - 2y' + z') = \lambda f(u) + \lambda' f(u) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

$$\begin{aligned} 2. \quad u \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (-2x + y + z, x - 2y + z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & -2x + y + z = 0 \\ L_2 & x - 2y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & -2x + y + z = 0 \\ 2L_2 + L_1 & -3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \\ &\quad u = (z, z, z) = z(1,1,1) \end{aligned}$$

Donc $\ker(f) = \text{Vect}(a)$ avec $a = (1,1,1)$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 1 + \dim(\text{Im}(f)) = 3 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 2$$

3. Donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. Une base est $((1,0), (0,1))$ par exemple.

Allez à : **Exercice 3**

Correction exercice 4.

$$\begin{aligned} 1. \quad \text{Soit } u &= (x, y) \text{ et } u' = (x', y'), \lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y') \\ h(\lambda u + \lambda' u') &= (\lambda x + \lambda' x' - (\lambda y + \lambda' y'), -3(\lambda x + \lambda' x') + 3(\lambda y + \lambda' y')) \\ &= (\lambda(x - y) + \lambda'(x' - y'), \lambda(-3x + 3y) + \lambda'(-3x' + 3y')) \\ &= \lambda(x - y, -3x + 3y) + \lambda'(x' - y', -3x' + 3y') = \lambda h(u) + \lambda' h(u') \end{aligned}$$

Donc h est linéaire.

2. $h(1,1) = (0,0) = h(0,0)$ et pourtant $(1,1) \neq (0,0)$ donc h n'est pas injective.

On va montrer que $(1,0)$ n'a pas d'antécédent. Supposons qu'il existe $u = (x, y)$ tel que $(1,0) =$

$$h(u) \Leftrightarrow (1,0) = (x - y, -3x + 3y) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x - y \\ 0 = -3x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x - y \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 \\ x = y \end{cases}, \text{ c'est impossible}$$

donc h n'est pas surjective.

h est un endomorphisme donc h est injectif si et seulement si h est surjectif. Ici, h n'est pas injectif donc h n'est pas surjectif.

$$3. \quad u = (x, y) \in \ker(h) \Leftrightarrow (x - y, -3x + 3y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

Donc $u = (x, x) = x(1,1)$, $(1,1)$ est un vecteur non nul qui engendre $\ker(h)$, c'est une base de $\ker(h)$

$$h(e_1) = (1 - 0, -3 \times 1 + 3 \times 0) = (1, -3) = e_1 - 3e_2 \text{ et}$$

$$h(e_2) = ((0 - 1, -3 \times 0 + 3 \times 1) = (-1, 3) = -e_1 + 3e_2$$

$$\text{Im}(h) = \text{Vect}(h(e_1), h(e_2)) = \text{Vect}(e_1 - 3e_2, -e_1 + 3e_2) = \text{Vect}(e_1 - 3e_2)$$

$e_1 - 3e_2$ est un vecteur non nul qui engendre $\text{Im}(h)$, c'est une base de $\text{Im}(h)$.

Allez à : **Exercice 4**

Correction exercice 5.

1. $f(e_1) = (1, 2, 0) = 1 \times e_1 + 2e_2 + 0 \times e_3$
 $f(e_2) = (0, 1, -1) = 0 \times e_1 + 1 \times e_2 - 1 \times e_3$
 et $f(e_3) = (-1, -3, 2) = -1 \times e_1 - 3e_2 + 2e_3$

2. Les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de $f(e_2)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de $f(e_3)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) sont $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

3.

$$u = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_2 - 2L_1 \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Donc $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Première méthode :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$$

Puis on regarde si la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est libre.

$$\alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \alpha_3 f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Il s'agit du même système que ci-dessus donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Cette famille est libre et elle engendre $\text{Im}(f)$ c'est une base de $\text{Im}(f)$, on en conclut que $\dim(\text{Im}(f)) = 3$ et que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Deuxième méthode (plus compliquée) :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3, -e_1 - 3e_2 + 2e_3) \\ &= \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3, -e_1 - 3e_2 + 2e_3 + e_1 + 2e_2) \\ &= \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3, -e_2 + 2e_3) \\ &= \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3 - e_2 + 2e_3, -e_2 + 2e_3) \\ &= \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_3, -e_2 + 2e_3) \\ &= \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_3, -e_2 + 2e_3 - 2e_3) \\ &= \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_3, -e_2) \\ &= \text{Vect}(e_1 + 2e_2, e_3, e_2) = \text{Vect}(e_1, e_3, e_2) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) \end{aligned}$$

Donc une base de $\text{Im}(f)$ est (e_1, e_2, e_3) et bien sur $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Troisième méthode :

Avec le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, comme $\dim(\ker(f)) = 0$, $\dim(\text{Im}(f)) = 3$ donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ et une base de $\text{Im}(f)$ est (e_1, e_2, e_3) .

Allez à : **Exercice 5**

Correction exercice 6.

1.

$$\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z')$$

$$\begin{aligned}
f(\lambda u + \lambda' u') &= \left(-2(\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda' z'), (\lambda x + \lambda' x') - 2(\lambda y + \lambda' y') \right. \\
&\quad \left. + (\lambda z + \lambda' z'), (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') - 2(\lambda z + \lambda' z') \right) \\
&= (\lambda(-2x + y + z) + \lambda'(-2x' + y' + z'), \lambda(x - 2y + z) \\
&\quad + \lambda'(x' - 2y' + z'), \lambda(x + y - 2z) + \lambda'(x' + y' - 2z')) \\
&= \lambda(-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z) \\
&\quad + \lambda'(-2x' + y' + z', x' - 2y' + z', x' + y' - 2z') = \lambda f(u) + \lambda' f(u')
\end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2.

$$\begin{aligned}
u \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z) = (0, 0, 0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & -2x + y + z = 0 \\ L_2 & x - 2y + z = 0 \\ L_3 & x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2L_2 + L_1 \begin{cases} L_1 & -2x + y + z = 0 \\ L_2 & -3y + 3z = 0 \\ L_3 & 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \\
&u = (z, z, z) = z(1, 1, 1)
\end{aligned}$$

Donc $\ker(f) = \text{Vect}(a)$ avec $a = (1, 1, 1)$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 1 + \dim(\text{Im}(f)) = 3 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 2$$

3.

Première méthode

$$f(e_1) = (-2, 1, 1) \quad \text{et} \quad f(e_2) = (1, -2, 1)$$

Sont deux vecteurs de l'image de f , ils ne sont pas proportionnels ils forment donc une famille libre de vecteurs dans un espace de dimension 2, c'est une base.

Deuxième méthode

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= (-2, 1, 1); \quad f(e_2) = (1, -2, 1) \quad \text{et} \quad f(e_3) = (1, 1, -2) \\
\text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))
\end{aligned}$$

$(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$, le problème est de savoir si cette famille est libre.

Soit on fait « comme d'habitude », c'est-à-dire que l'on écrit qu'une combinaison linéaire de ces trois vecteurs est nulle

$$\begin{aligned}
\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) &= 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \lambda_1(-2, 1, 1) + \lambda_2(1, -2, 1) + \lambda_3(1, 1, -2) = (0, 0, 0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ L_2 & \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ L_3 & \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2L_2 + L_1 \begin{cases} L_1 & -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ L_2 & -3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ L_3 & 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc pour tout $\lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\lambda_3 f(e_1) + \lambda_3 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Si on prend $\lambda_3 = 1$

$$f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), -f(e_1) - f(e_2)) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

$f(e_1)$ et $f(e_2)$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre, comme cette famille est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$, c'est une base de $\text{Im}(f)$.

Allez à : **Exercice 6**

Correction exercice 7.

1.

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Donc $x = (0, x_3, x_3, 0) = x_3(0, 1, 1, 0)$, si on pose $a = e_2 + e_3$ alors $\ker(u) = \text{vect}(a)$ et donc la dimension de $\ker(u)$ est 1.

2.

$$u(e_1) = (1, 0, 1, 0) = e_1 + e_3; \quad u(e_2) = (-1, 0, 1, 0) = -e_1 + e_3;$$

$$u(e_3) = (1, 0, -1, 0) = e_1 - e_3; \quad u(e_4) = (0, 0, 0, 1, 1) = e_3 + e_4$$

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(e_1 + e_3, -e_1 + e_3, e_1 - e_3, e_3 + e_4) = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_1 - e_3, e_3 + e_4)$$

Car $u(e_2) = -u(e_3)$

$$\begin{aligned} \text{Im}(u) &= \text{Vect}(e_1 + e_3, e_1 - e_3 + e_1 + e_3, e_3 + e_4) = \text{Vect}(e_1 + e_3, 2e_1, e_3 + e_4) \\ &= \text{Vect}(e_3, e_1, e_3 + e_4) = \text{Vect}(e_3, e_1, e_4) \end{aligned}$$

Cette famille est une sous-famille d'une famille libre, elle est libre (et génératrice) donc c'est une base de $\text{Im}(u)$

Autre méthode, d'après le théorème de rang

$$\dim(\ker(u) + \dim(\text{Im}(u))) = \dim(\mathbb{R}^4) \Rightarrow \dim(\text{Im}(u)) = 3$$

Par conséquent $(e_1 + e_3, e_1 - e_3, e_3 + e_4)$ est une famille génératrice à trois vecteurs dans un espace de dimension trois, c'est une base et donc $\dim(\text{Im}(u)) = 3$.

3. Comme $\dim(\ker(u) + \dim(\text{Im}(u))) = \dim(\mathbb{R}^4)$

Le tout est de savoir si $a = e_2 + e_3$ appartient à $\text{Im}(u)$, si c'est le cas $\ker(u) \subset \text{Im}(u)$ et il n'y a pas de somme directe et sinon $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et il y a somme directe.

Soit on montre que $(e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_1 - e_3, e_3 + e_4)$ est libre et donc une base de \mathbb{R}^4 puisqu'il s'agit d'une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4 et on a

$$\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^4$$

Soit

$$\ker(u) + \text{Im}(u) = \text{vect}(e_1, e_3, e_4, e_2 + e_3) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4$$

Ce qui montre que $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^4$.

4. $0 + 0 - 0 + 0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^4} \in E$.

Soient $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in E$, on a

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \quad \text{et} \quad y_1 + y_2 - y_3 + y_4 = 0$$

Pour tout λ et μ réels

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3, \lambda x_4 + \mu y_4) \\ &= (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) - (\lambda x_3 + \mu y_3) + (\lambda x_4 + \mu y_4) \\ &= \lambda(x_1 + x_2 - x_3 + x_4) + \mu(y_1 + y_2 - y_3 + y_4) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\lambda x + \mu y \in E$ donc E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$, on a $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$ donc $x_1 = -x_2 + x_3 - x_4$

$$x = (-x_2 + x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) = x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1)$$

On pose $b = (-1, 1, 0, 0)$, $c = (1, 0, 1, 0)$ et $d = (-1, 0, 0, 1)$, la famille (a, b, c) engendre E

$$\alpha b + \beta c + \gamma d = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(1, 0, 1, 0) + \gamma(-1, 0, 0, 1) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Ce que signifie que (b, c, d) est une famille libre. Par conséquent (b, c, d) est une base de E .

5. $\ker(u) = \text{Vect}(a)$ avec $a = e_2 + e_3 = (0, 1, 1, 0)$ donc $0 + 1 - 1 + 0 = 0$ ce qui montre que $a \in E$, autrement dit $\ker(u) \subset E$, on n'a pas : $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^4$

Allez à : **Exercice 7**

Correction exercice 8.

1. La matrice de $f \circ f$ dans la base β est $\text{Mat}_{\beta}(f) \times \text{Mat}_{\beta}(f)$

$$\text{Or } \text{Mat}_\beta(f) = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ donc } \text{Mat}_\beta(f^2) = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

2. Il existe g telle que $g \circ f = Id$ donc f est bijective et $f^{-1} = g$.

Allez à : **Exercice 8**

Correction exercice 9.

1. Soit $u = (x, y, z, t)$, $u' = (x', y', z', t')$ deux vecteurs et λ et λ' deux réels.

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \lambda' u') &= f(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t') \\ &= (\lambda x + \lambda' x' - 2(\lambda y + \lambda' y'), \lambda x + \lambda' x' - 2(\lambda y + \lambda' y'), 0, \lambda x + \lambda' x' - (\lambda y + \lambda' y') \\ &\quad - (\lambda z + \lambda' z') - (\lambda t + \lambda' t')) \\ &= (\lambda(x - 2y) + \lambda'(x' - 2y'), \lambda(x - 2y) + \lambda'(x' - 2y'), 0, \lambda(x - y - z - t) \\ &\quad + \lambda'(x' - y' - z' - t')) \\ &= \lambda(x - 2y, x - 2y, 0, x - y - z - t) + \lambda'(x' - 2y', x' - 2y', 0, x' - y' - z' - t') \\ &= \lambda f(u) + \lambda' f(u') \end{aligned}$$

f est bien linéaire.

2. Soit $u = (x, y, z, t) \in \ker(f)$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \\ x - y - z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - y - z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y - z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ t = y - z \end{cases}$$

Donc

$$u = (2y, y, z, y - z) = y(2, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, -1)$$

$a = (2, 1, 0, 1)$ et $b = (0, 0, 1, -1)$ sont deux vecteurs non colinéaires (qui forment donc une famille libre) qui engendrent $\ker(f)$ ils forment une base de $\ker(f)$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 2$$

Si on appelle (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de \mathbb{R}^4 , $f(e_1) = (1, 1, 0, 1)$ et $f(e_3) = (0, 0, 0, -1)$ sont deux vecteurs non proportionnels de $\text{Im}(f)$, ils forment donc une famille libre à deux éléments dans un espace de dimension 2, c'est une base de $\text{Im}(f)$.

3. On a $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^4$ si et seulement si $(a, b, f(e_1), f(e_3))$ est une base de \mathbb{R}^4 .

$$\det(a, b, f(e_1), f(e_3)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$(a, b, f(e_1), f(e_3))$ est une base de \mathbb{R}^4 donc $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^4$.

Allez à : **Exercice 9**

Correction exercice 10.

1. Soient $u = (x, y, z, t)$ et $u' = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de \mathbb{R}^4 . Soient λ et λ' deux réels.

$$\begin{aligned} \lambda u + \lambda' u' &= \lambda(x, y, z, t) + \lambda'(x', y', z', t') = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t') \\ f(\lambda u + \lambda' u') &= f(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t') \\ &= ((\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y'), (\lambda z + \lambda' z') + (\lambda t + \lambda' t'), (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') \\ &\quad + (\lambda z + \lambda' z') + (\lambda t + \lambda' t')) \\ &= (\lambda(x + y) + \lambda'(x' + y'), \lambda(z + t) + \lambda'(z' + t'), \lambda(x + y + z + t) \\ &\quad + \lambda'(x' + y' + z' + t')) \\ &= \lambda(x + y, z + t, x + y + z + t) + \lambda'(x' + y', z' + t', x' + y' + z' + t') \\ &= \lambda f(u) + \lambda' f(u') \end{aligned}$$

f est linéaire.

2.

$$u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x+y, z+t, x+y+z+t) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ t=-z \end{cases} \Leftrightarrow u = (x, -x, z, -z) = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, -1)$$

On pose $a = (1, -1, 0, 0)$ et $b = (0, 0, 1, -1)$, a et b engendrent $\ker(f)$, d'autre part ces vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre, finalement (a, b) est une base de $\ker(f)$.

3.

Première méthode

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$$

$$f(e_1) = (1, 0, 1); f(e_2) = (1, 0, 1); f(e_3) = (0, 1, 1); f(e_4) = (0, 1, 1)$$

Comme $f(e_1) = f(e_2)$ et $f(e_3) = f(e_4)$

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_3))$$

$f(e_1)$ et $f(e_3)$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre, comme cette famille est génératrice de $\text{Im}(f)$, c'est une base de $\text{Im}(f)$.

Deuxième méthode

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow 2 + \dim(\text{Im}(f)) = 4 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 2$$

Ensuite on cherche deux vecteurs non proportionnels de $\text{Im}(f)$, par exemple $f(e_1)$ et $f(e_3)$, ils forment une famille libre dans un espace de dimension 2, c'est une base.

Allez à : **Exercice 10**

Correction exercice 11.

1. Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Soient λ et μ deux réels.

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$$

$$u(\lambda x + \mu y)$$

$$\begin{aligned} &= (-2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3), -(\lambda x_1 + \mu y_1) + \lambda x_3 \\ &\quad + \mu y_3, -2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3)) \\ &= (\lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + 4y_3], \lambda[-x_1 + x_3] \\ &\quad + \mu[-y_1 + y_3], \lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + 4y_3]) \\ &= \lambda(-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3) \\ &\quad + \mu(-2y_1 + 4y_2 + 4y_3, -y_1 + y_3, -2y_1 + 4y_2 + 4y_3) = \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

Donc u est linéaire.

2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_3 \\ -\frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_3}{2} (2, -1, 2)$$

$a = (2, -1, 2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3$ est un vecteur non nul qui engendre $\ker(u)$, c'est une base de $\ker(u)$.

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$$

D'après le théorème du rang,

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 1 + \dim(\text{Im}(u)) = 3 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(u)) = 2$$

$u(e_1) = -2e_1 - e_2 - 2e_3 = (-2, -1, -2)$ et $u(e_2) = 4e_1 + 4e_3 = (4, 0, 4)$, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $Im(u)$ qui est de dimension 2, $(u(e_1), u(e_2))$ est une base de $Im(u)$.

3. $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (a, u(e_1), u(e_2))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Il est presque évident que

$$u(e_1) + u(e_3) = a$$

Sinon on calcule $\alpha a + \beta u(e_1) + \gamma u(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et on s'aperçoit que $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $\gamma = -1$ est une solution non nulle.

$(a, u(e_1), u(e_2))$ n'est pas une base, donc on n'a pas $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$

Allez à : **Exercice 11**

Correction exercice 12.

1. Soient u, u' deux vecteurs de E_{-1} , alors $f(u) = -u$ et $f(u') = -u'$. Soient λ, λ' deux réels.

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') = \lambda(-u) + \lambda'(-u') = -(\lambda u + \lambda' u')$$

La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_{-1} ,

La troisième montre que $\lambda u + \lambda' u' \in E_{-1}$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3}$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, la seconde égalité montre que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-1}$.

E_{-1} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Soient u, u' deux vecteurs de E_1 , alors $f(u) = u$ et $f(u') = u'$. Soient λ, λ' deux réels.

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') = \lambda u + \lambda' u'$$

La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_1 ,

La seconde montre que $\lambda u + \lambda' u' \in E_1$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, cela montre aussi que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$.

E_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

- 2.

$$f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3\right) = -e_1 + e_2 = -(e_1 - e_2)$$

Donc $e_1 - e_2 \in E_{-1}$

$$f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3\right) = -e_1 + e_3 = -(e_1 - e_3)$$

Donc $e_1 - e_3 \in E_{-1}$

$$\begin{aligned} f(e_1 + e_2 + e_3) &= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Donc $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$

3. Les vecteurs $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille de E_{-1} , donc la dimension de E_{-1} est supérieur ou égal à 2.

E_1 a un vecteur non nul, donc sa dimension est supérieur ou égal à 1.

4. Soit $u \in E_{-1} \cap E_1$, $f(u) = -u$ et $f(u) = u$ donc $-u = u$, ce qui signifie que le seul vecteur de $E_{-1} \cap E_1$ est le vecteur nul.

$$E_{-1} \cap E_1 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

- 5.

$$\dim(E_{-1} + E_1) = \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) - \dim(E_{-1} \cap E_1) = \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) \geq 2 + 1 = 3$$

Comme

$$E_{-1} + E_1 \subset \mathbb{R}^3$$

On a

$$\dim(E_{-1} + E_1) \leq 3$$

Finalement

$$\dim(E_{-1} + E_1) = 3$$

Remarque : cela entraîne que $\dim(E_{-1}) = 2$ et $\dim(E_1) = 1$

L'intersection de ces sous-espaces vectoriels étant réduit au vecteur nul on a

$$E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$$

6. On peut calculer $f^2(e_1)$, $f^2(e_2)$ et $f^2(e_3)$ pour s'apercevoir que ces vecteurs valent respectivement e_1 , e_2 et e_3 . Mais c'est long.

Autre méthode

D'après la question précédente $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

(Une base de E_{-1} collée à une base de E_1 donne une base de \mathbb{R}^3 si et seulement si $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$).

Tous les vecteurs de \mathbb{R}^3 s'écrivent de manière unique comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs, il suffit de montrer que $f^2(e_1 - e_2) = e_1 - e_2$, $f^2(e_1 - e_3) = e_1 - e_3$ et que $f^2(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$

Là, j'ai fait long, en fait il suffit de montrer les égalités ci-dessous

$$f^2(e_1 - e_2) = f(f(e_1 - e_2)) = f(-(e_1 - e_2)) = -f(e_1 - e_2) = -(-(e_1 - e_2)) = e_1 - e_2$$

Car $e_1 - e_2 \in E_{-1}$

$$f^2(e_1 - e_3) = f(f(e_1 - e_3)) = f(-(e_1 - e_3)) = -f(e_1 - e_3) = -(-(e_1 - e_3)) = e_1 - e_3$$

Car $e_1 - e_3 \in E_{-1}$

$$f^2(e_1 + e_2 + e_3) = f(f(e_1 + e_2 + e_3)) = f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

Car $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$

Par conséquent $f^2 = id_{\mathbb{R}^3}$

Cela montre que $f^{-1} = f$ et que f est bijective.

Remarque :

Avec les matrices on retrouve ce résultat plus facilement.

Allez à : [Exercice 12](#)

Correction exercice 13.

1.

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b = \gamma c = 0_{\mathbb{R}^3} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma = 0 \\ -\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{2}{3}\gamma = 0 \\ \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3}\beta + \frac{2}{3}\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ 2L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ -\beta + 3\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(a, b, c) est une famille libre à trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base de \mathbb{R}^3 .

2.

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 u(e_1) + x_2 u(e_2) + x_3 u(e_3) \\ &= x_1 (3e_1 + e_2 - e_3) + x_2 (e_1 + 7e_2) + x_3 (-e_1 - e_3) \\ &= [3x_1 + x_2 - x_3]e_1 + [x_1 + 7x_2]e_2 + [-x_1 - x_3]e_3 \\ &= (3x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 7x_2, -x_1 - x_3) \end{aligned}$$

3. $a = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$ donc

$$u(a) = \frac{1}{3}(3 \times 2 - 2 - 1, 2 + 7 \times (-2), -2 - 1) = \frac{1}{3}(3, -12, -3) = (1, -4, -1)$$

$$3a - 3c = 3 \times \frac{1}{3}(2, -2, 1) - 3 \times \frac{1}{3}(1, 2, 2) = (2, -2, 1) - (1, 2, 2) = (1, -4, -1)$$

On a bien $u(a) = 3a - 3c$

$$b = \frac{1}{3}(2, 1, -2) \text{ donc}$$

$$u(b) = \frac{1}{3}(3 \times 2 + 1 - (-2), 2 + 7, -2 - (-2)) = \frac{1}{3}(9, 9, 0) = (3, 3, 0)$$

$$3b + 3c = 3 \times \frac{1}{3}(2, 1, -2) + 3 \times \frac{1}{3}(1, 2, 2) = (2, 1, -2) + (1, 2, 2) = (3, 3, 0)$$

On a bien $u(b) = 3b + 3c$

$$c = \frac{1}{3}(1, 2, 2) \text{ donc}$$

$$u(c) = \frac{1}{3}(3 + 2 - 2, 1 + 7 \times 2, -1 - 2) = \frac{1}{3}(3, 15, -3) = (1, 5, -1)$$

$$\begin{aligned} -3a + 3b + 3c &= -3 \times \frac{1}{3}(2, -2, 1) + 3 \times \frac{1}{3}(2, 1, -2) + 3 \times \frac{1}{3}(1, 2, 2) \\ &= -(2, -2, 1) + (2, 1, -2) + (1, 2, 2) = (1, 5, -1) \end{aligned}$$

On a bien $u(c) = -3a + 3b + 3c$

Allez à : **Exercice 13**

Correction exercice 14.

$$1. \text{ Soit } x_1 \in E_1, (f - id)(x_1) = 0_E \Leftrightarrow f(x_1) - x_1 = 0_E \Leftrightarrow f(x_1) = x_1$$

$$\text{Soit } x_2 \in E_2, (f + id)(x_2) = 0_E \Leftrightarrow f(x_2) + x_2 = 0_E \Leftrightarrow f(x_2) = -x_2$$

$$2. \text{ On pose } x_1 = \frac{f(x) + x}{2} \text{ et } x_2 = -\frac{f(x) - x}{2}$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{f(x) + x}{2}\right) = \frac{1}{2}(f^2(x) + f(x)) = \frac{1}{2}(x + f(x)) = x_1$$

Donc, d'après la première question, $x_1 \in E_1$.

De même

$$f(x_2) = f\left(-\frac{f(x) - x}{2}\right) = -\frac{1}{2}(f^2(x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(x - f(x)) = -x_2$$

Donc, d'après la première question, $x_2 \in E_2$.

Comme $x = x_1 + x_2$, on a $E_1 + E_2 = E$

Il reste à montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

Si $x \in E_1 \cap E_2$ alors $f(x) = x$ et $f(x) = -x$ donc $x = -x$ ce qui montre que x est le vecteur nul.

On a $E_1 \oplus E_2 = E$.

$$3. f(v_i) = v_i \text{ pour } 1 \leq i \leq r \text{ et } f(v_i) = -v_i \text{ pour } r + 1 \leq i \leq n$$

Remarque :

La matrice de f dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : **Exercice 14**

Correction exercice 15.

1.

$$f(e_1) = 1$$

$$f(e_2) = 1$$

$$f(e_3) = 1$$

$$f(e_4) = 1$$

Donc

$$\text{Im}(f) = \{1\} \text{ et } \dim(\text{im}(f)) = 1$$

2. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 3$$

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(f) &\Leftrightarrow x = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) \\ &= x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

On pose $a = (-1, 1, 0, 0)$, $b = (-1, 0, 1, 0)$ et $c = (-1, 0, 0, 1)$

(a, b, c) est une famille génératrice de $\ker(f)$ avec trois vecteurs et $\dim(\ker(f)) = 3$ donc (a, b, c) est une base de $\ker(f)$.

Allez à : **Exercice 15**

Correction exercice 16.

1. Soit $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \lambda' x') &= (\lambda x_1 + \lambda' x'_1) + (\lambda x_2 + \lambda' x'_2) + \dots + (\lambda x_n + \lambda' x'_n) \\ &= \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \lambda'(x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n) = \lambda u(x) + \lambda' u(x') \end{aligned}$$

Donc u est linéaire

2. $u(e_1) = u(e_2) = \dots = u(e_n) = 1$ donc $\dim(\text{Im}(u)) = 1$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = n - 1$$

Allez à : **Exercice 16**

Correction exercice 17.

Supposons (a)

Si $y \in \text{Im}(u)$ alors il existe $x \in E$ $y = u(x)$ alors $u(y) = u^2(x) = 0_E$ alors $y \in \text{Ker}(u)$

Donc $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) + \frac{n}{2} = n \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = \frac{n}{2}$$

$\text{Im}(u) \subset \ker(u)$ et ces deux espaces ont la même dimension, donc ils sont égaux.

Supposons (b)

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim E \Leftrightarrow 2 \dim(\text{Im}(u)) = n \Leftrightarrow 2 \text{rg}(u) = n$$

Pour tout $x \in E$, $u(x) \in \text{Im}(u)$ donc $u(x) \in \ker(u)$ donc $u(u(x)) = 0_E$ donc $u^2 = 0_E$.

Allez à : **Exercice 17**

Correction exercice 18.

Si u est injective alors si $x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_F \Leftrightarrow u(x) = u(0_E) \Rightarrow x = 0_E$ car u est injective, ce qui montre que $\ker(u) = \{0_E\}$.

Si $\ker(u) = \{0_E\}$ alors $u(x) = u(y) \Leftrightarrow u(x) - u(y) = 0_F \Leftrightarrow u(x - y) = 0_F \Rightarrow x - y = 0_E$ car $\ker(u) = \{0_E\}$, et donc $x = y$ ce qui montre que u est injective.

Allez à : **Exercice 18**

Correction exercice 19.

1. $(u - \lambda \text{id}_E)(x) = 0_E \Leftrightarrow u(x) - \lambda x = 0_E \Leftrightarrow u(x) = \lambda x$

$$u(0_E) = 0_E = \lambda \times 0_E \Rightarrow 0_E \in E_\lambda$$

Soient x_1 et x_2 deux vecteurs de E_λ , on a $u(x_1) = \lambda x_1$ et $u(x_2) = \lambda x_2$

Soient α_1 et α_2 deux réels.

$$u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) = \alpha_1 \lambda x_1 + \alpha_2 \lambda x_2 = \lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

Donc $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E_\lambda$

E_λ est un sous-espace vectoriel de E .

2. F est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in F$ par conséquent $u(0_E) = 0_E \in u(F)$

Pour tout x_1 et x_2 dans F . Pour tout α_1 et α_2 réels. On a $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$

Soient y_1 et y_2 dans $u(F)$, il existe x_1 et x_2 dans F tels que $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$

Alors

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

Car u est linéaire, donc

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in u(F)$$

Car $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$.

Par conséquent $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E .

3. Si $x \in E_\lambda$ alors $x = \frac{1}{\lambda} u(x) = u\left(\frac{1}{\lambda} x\right) \in u(E_\lambda)$ donc $E_\lambda \subset u(E_\lambda)$

Si $y \in u(E_\lambda)$ il existe $x \in E_\lambda$ tel que $y = u(x)$ donc $y = \lambda x \in E_\lambda$, ce qui montre que $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$

Finalement

$$u(E_\lambda) = E_\lambda$$

Allez à : **Exercice 19**

Correction exercice 20.

Soit $y \in \ker(f) \cap \text{im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et $f(y) = 0_E$

Donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(y) = 0_E$ donc $x \in \ker(f^2)$, comme $y = f(x)$, $y \in f(\ker(f^2))$

On a montré que

$$\ker(f) \cap \text{im}(f) \subset f(\ker(f^2))$$

Soit $y \in f(\ker(f^2))$, il existe $x \in \ker(f^2)$ tel que $y = f(x)$, ce qui montre que $y \in \text{Im}(f)$ et comme

$f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0_E$ on a $y \in \ker(f)$

On a montré que

$$f(\ker(f^2)) \subset \ker(f) \cap \text{im}(f)$$

Et donc

$$\ker(f) \cap \text{im}(f) = f(\ker(f^2))$$

Allez à : **Exercice 20**

Correction exercice 21.

Soit $y \in f(\ker(g \circ f))$, il existe $x \in \ker(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$

Donc $y \in \text{Im}(g)$,

D'autre part $x \in \ker(g \circ f)$ donc $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0_{\mathbb{R}^n}$, par conséquent $g(y) = g(f(x)) = 0_{\mathbb{R}^n}$, ce qui montre que $y \in \ker(g)$.

On a donc $y \in \ker(g) \cap \text{Im}(f)$, on a montré que

$$f(\ker(g \circ f)) \subset \ker(g) \cap \text{Im}(f)$$

Soit $y \in \ker(g) \cap \text{Im}(f)$

$y \in \text{Im}(f)$ donc il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$

$y \in \ker(g)$ donc $g(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$

On en déduit que $0_{\mathbb{R}^n} = g(y) = g(f(x))$, ce qui montre que $x \in \ker(g \circ f)$ et comme $y = f(x)$ cela montre que $y \in f(\ker(g \circ f))$.

Allez à : **Exercice 21**

Correction exercice 22.

1. Soit $x \in \ker(u)$, $u(x) = 0_E$, donc $u^2(x) = u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $x \in \ker(u^2)$, ce qui montre que

$$\ker(u) \subset \ker(u^2)$$

2. Soit $y \in \text{im}(u^2)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u^2(x) = u(u(x))$, autrement dit il existe $x' = u(x)$ tel que $y = u(x')$, ce qui montre que $y \in \text{im}(u)$.

Allez à : **Exercice 22**

Correction exercice 23.

Supposons que $\ker(u) \cap \text{im}(u) = \{0_E\}$ et montrons que $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Si $x \in \ker(u)$ alors $u(x) = 0_E$ alors $u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$ alors $x \in \ker(u \circ u)$

Cela montre que $\ker(u) \subset \ker(u \circ u)$

Si $x \in \ker(u \circ u)$ alors $u(u(x)) = 0_E$, on pose $y = u(x) \in \text{Im}(u)$ et comme $u(y) = 0_E$, $y \in \ker(u) \cap \text{im}(u)$, d'après (i) $y = 0_E$ et donc $u(x) = 0_E$ ce qui signifie que $x \in \ker(u)$

Cela montre que $\ker(u \circ u) \subset \ker(u)$ et finalement $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Supposons que $\ker(u) = \ker(u \circ u)$ et montrons que $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0_E\}$

Soit $y \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0_E$, cela entraîne que $u(u(x)) = 0_E$, autrement dit $x \in \ker(u \circ u)$, d'après (ii) $x \in \ker(u)$ donc $y = u(x) = 0_E$, cela montre bien que

$$\ker(u) \cap \text{im}(u) = \{0_E\}$$

Allez à : **Exercice 23**

Correction exercice 24.

1.

a)

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 u(e_1) + x_2 u(e_2) + x_3 u(e_3) \\ &= x_1 (f_1 + 2f_2) + x_2 (2f_1 - f_2) + x_3 (-f_1 + f_2) \\ &= (x_1 + 2x_2 - x_3)f_1 + (2x_1 - x_2 + x_3)f_2 = (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + x_3) \end{aligned}$$

b)

$$A = \text{Mat}_{\underline{e}}(u) = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}$$

c)

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3) \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ \Leftrightarrow AX &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \times \frac{3}{5}x_3 - x_3 = 0 \\ x_2 = \frac{3}{5}x_3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}x_3 \\ x_2 = \frac{3}{5}x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $x = \left(-\frac{1}{5}x_3, \frac{3}{5}x_3, x_3\right) = \frac{x_3}{5}(-1, 3, 5)$, on en déduit que $\ker(u) = \text{Vect}(a)$ avec $a = (-1, 3, 5)$.

On en déduit que $\dim(\ker(u)) = 1$ et d'après le théorème du rang :

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(u)) = 2$$

Or $\text{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 donc $\text{Im}(u) = \mathbb{R}^2$.

Une autre méthode est d'écrire que :

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$$

Puis, avec le théorème du rang, de dire que la dimension de cet espace est 2, il suffit donc de trouver deux vecteurs non colinéaires dans $Im(u)$, soit par exemple $(u(e_1), u(e_2))$ ou $(u(e_1), u(e_3))$ ou encore $(u(e_2), u(e_3))$, pour trouver une base (libre plus le bon nombre de vecteurs égal base). Mais je pense que si on ne remarque pas que $Im(u) = \mathbb{R}^2$ on a raté quelque chose parce que cela signifie que u est surjective.

2.

a) Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1u(e_1) + x_2u(e_2) + x_3u(e_3) \\ &= x_1(3e_1 + 2e_2 + 2e_3) + x_2(2e_1 + 3e_2 + 2e_3) + x_3(2e_1 + 2e_2 + 3e_3) \\ &= (3x_1 + 2x_2 + 2x_3)e_1 + (2x_1 + 3x_2 + 2x_3)e_2 + (2x_1 + 2x_2 + 3x_3)e_3 \\ &= (3x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{aligned}$$

b) Histoire de changer de méthode je ne vais pas faire comme dans le 1.

Les coordonnées de $u(x)$ dans la base \underline{e} sont

$$\begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = AX$$

Où

$$A = Mat_{\underline{e}}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) &\Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 3L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ 5L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 7x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\ker(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

On peut utiliser le théorème du rang, mais je vais faire plus théorique (pour rire), u est un endomorphisme dont le noyau est réduit au vecteur nul est une injection, c'est donc une bijection, donc u est surjective et $Im(u) = \mathbb{R}^3$.

Allez à : **Exercice 24**

Correction exercice 25.

1.

a) Les coordonnées du vecteur $u(x)$ dans la base \underline{f} sont :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Donc $u(x) = (x_1, -x_1 + 2x_2, x_1 + x_2)$ b) $u(e_1) = f_1 - f_2 + f_3$ et $u(e_2) = 2f_2 + f_3$

c)

$$\begin{aligned} x \in \ker(u) &\Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\ker(u) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

$$Im(u) = Vect(u(e_1), u(e_2))$$

$u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont deux vecteurs non proportionnels donc ils forment une famille libre de $Im(u)$, cette famille étant génératrice, c'est une base de $Im(u)$.

Remarque :

Ici le théorème du rang ne sert pas à grand-chose.

Dans ce cas $Im(u)$ est un plan de \mathbb{R}^3 .

2.

a) Les coordonnées du vecteur $u(x)$ dans la base \underline{e} sont :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - x_4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 \end{pmatrix}$$

$$u(x) = (x_1 + 2x_3 - x_4, -x_1 + 2x_2 - x_4, x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4)$$

b)

$$u(e_1) = e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4, u(e_2) = 2e_2 - e_3 + 3e_4, u(e_3) = 2e_1 + e_3 + 7e_4 \text{ et } u(e_4) = -e_1 - e_2 - 5e_4.$$

c)

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - x_4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \\ L_2 + L_1 \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}$$

Un vecteur de $\ker(u)$ s'écrit $x = (-2x_3 + x_4, -x_3 + x_4, x_3, x_4) = x_3(-2, -1, 1, 0) + x_4(1, 1, 0, 1)$ si on pose $a = (-2, -1, 1, 0)$ et $b = (1, 1, 0, 1)$ alors

$$\ker(u) = Vect(a, b)$$

a et b ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $\ker(u)$, c'est une famille génératrice de $\ker(u)$ et donc une base de $\ker(u)$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(Im(u)) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow 2 + \dim(Im(u)) = 4 \Leftrightarrow \dim(Im(u)) = 2$$

D'autre part :

$u(e_1) = e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4$, $u(e_2) = 2e_2 - e_3 + 3e_4$ sont deux vecteurs non proportionnels de $Im(u)$, $(u(e_1), u(e_2))$ est une famille libre à deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2, c'est une base de $Im(u)$.

Remarque :

$Im(u) = Vect(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4))$ ne sert à rien dans cette question.

Allez à : **Exercice 25**

Correction exercice 26.

1.

a)

$$e_1 = (1, 0, 0) \Rightarrow u(e_1) = (1, 2, 3) = e_1 + 2e_2 + 3e_3$$

$$e_2 = (0, 1, 0) \Rightarrow u(e_2) = (1, 0, 1) = e_1 + e_3$$

$$e_3 = (0, 0, 1) \Rightarrow u(e_3) = (0, -1, -1) = -e_2 - e_3$$

b)

$$A = \text{Mat}_{\underline{e}}(u) = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

c)

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 - x_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases}$$

$$x = (-x_2, x_2, -2x_2) = x_2(-1, 1, -2)$$

$$a = (-1, 1, -2), \ker(u) = \text{Vect}(a).$$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(u)) = 3 - 1 = 2$$

Il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires (qui forment donc une famille libre) dans $\text{Im}(u)$, par exemple : $u(e_1)$ et $u(e_2)$ (on aurait pu prendre $u(e_1)$ et $u(e_3)$ ou $u(e_2)$ et $u(e_3)$).

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2))$$

Il est totalement inutile de chercher une relation entre $u(e_1)$, $u(e_2)$ et $u(e_3)$ car le théorème du rang donne la dimension de l'image de u .

2.

a)

$$e_1 = (1, 0, 0) \Rightarrow u(e_1) = (1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3$$

$$e_2 = (0, 1, 0) \Rightarrow u(e_2) = (1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3$$

$$e_3 = (0, 0, 1) \Rightarrow u(e_3) = (0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

b)

$$\text{Mat}_{\underline{e}}(u) = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$$c) \ x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$$

Un vecteur de $\ker(u)$ est de la forme $x = (x_1, -x_1, x_3) = x_1(1, -1, 0) + (0, 0, 1)x_3$

Si on pose $a = (1, -1, 0)$ et $b = (0, 0, 1)$, $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(a, b)$

a et b sont deux vecteurs non proportionnels de $\text{Ker}(u)$, cette famille engendre $\ker(u)$ il s'agit donc d'une base de $\ker(u)$. Pour l'image, pas besoin du théorème du rang, on pose $c = (1, 1, 1)$

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(c, c, 0_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(c)$$

$\text{Im}(u)$ est la droite engendrée par c .

Allez à : **Exercice 26**

Correction exercice 27.

$$1. \text{ soit } x \in \mathbb{R}^4 \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ ses coordonnées dans la base canonique.}$$

$$\begin{aligned}
 x \in \ker(f) &\Leftrightarrow AX = O_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -4x_2 + 4x_3 - 14x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_3 - 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \\
 &x = (-3x_3, x_3, x_3, 0) = x_3(-3, 1, 1, 0)
 \end{aligned}$$

On pose $a = (-3, 1, 1, 0) \in \ker(f) = \text{Vect}(a)$, c'est une base de $\ker(f)$.

2. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4)$$

Donc

$$\dim(\text{Im}(f)) = 3$$

Comme

$$\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$$

On a

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$$

Et

$$\text{rg}(A) = 3$$

Allez à : [Exercice 27](#)

Correction exercice 28.

A est la matrice d'une application linéaire de \mathbb{R}^5 dans \mathbb{R}^4 .

$$\begin{aligned}
 X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \ker(A) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 \\ x_2 = -3x_3 - x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - 2x_4 - x_4 - x_5 \\ x_2 = -3x_4 - x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -(-4x_4 - x_5) - 2x_4 - x_4 - x_5 \\ x_2 = -4x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = -4x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_4, -4x_4 - x_5, x_4, x_4, x_5) = x_4(1, -4, 1, 1, 0) + x_5(0, -1, 0, 0, 1)$$

Les vecteurs $(1, -4, 1, 1, 0)$ et $(0, -1, 0, 0, 1)$ ne sont pas proportionnels et ils engendrent le noyau, donc $\ker(A)$ est de dimension 2.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = 5$$

Ce qui montre que $\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = 3$.

Allez à : [Exercice 28](#)

Correction exercice 29.

$$\begin{aligned}
Y = AX \Leftrightarrow AX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 - 8x_2 - 12x_3 = y_1 \\ 12x_1 - 7x_2 - 12x_3 = y_2 \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 13L_2 - 12L_1 \\ 2L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} 13x_1 - 8x_2 - 12x_3 = y_1 \\ 5x_2 - 12x_3 = 13y_2 - 12y_1 \\ -x_2 + 2x_3 = 2y_3 - y_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow 5L_3 + L_2 \begin{cases} 13x_1 - 8x_2 - 12x_3 = y_1 \\ 5x_2 - 12x_3 = 13y_2 - 12y_1 \\ -2x_3 = 10y_3 - 5y_2 + 13y_2 - 12y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 = y_1 + 8x_2 + 12x_3 \\ 5x_2 = 13y_2 - 12y_1 + 12x_3 \\ x_3 = 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 = y_1 + 8x_2 + 12(6y_1 - 4y_2 - 5y_3) \\ 5x_2 = 13y_2 - 12y_1 + 12(6y_1 - 4y_2 - 5y_3) = 60y_1 - 35y_2 - 60y_3 \\ x_3 = 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 = 73y_1 - 48y_2 - 60y_3 + 8(12y_1 - 7y_2 - 12y_3) \\ x_2 = 12y_1 - 7y_2 - 12y_3 \\ x_3 = 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x_1 = 169y_1 - 104y_2 - 156y_3 \\ x_2 = 12y_1 - 7y_2 - 12y_3 \\ x_3 = 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13y_1 - 8y_2 - 12y_3 \\ x_2 = 12y_1 - 7y_2 - 12y_3 \\ x_3 = 6y_1 - 4y_2 - 5y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
\text{Donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} = A
\end{aligned}$$

Le mieux aurait été de changer les rôles de x_1 et x_3 dans le premier système.

$$3. A^2 = I \text{ donc } A^{2n} = (A^2)^n = I^n = I \text{ et } A^{2n+1} = A^{2n}A = A.$$

Allez à : [Exercice 29](#)

Correction exercice 30.

1. et 2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I \text{ donc } P(X) = X^2 - X - 2$$

$$3. A^2 - A = 2I \Leftrightarrow A(A - I) = 2I \Leftrightarrow A \times \frac{A-I}{2} = I \text{ donc } A^{-1} = \frac{A-I}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4.

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{cases}$$

Ici il y a un problème pour appliquer le pivot de Gauss parce qu'il n'y a pas de termes en x_1 dans la première ligne, il y a deux façons d'arranger ce problème, soit on intervertit x_1 et x_2 soit on intervertit la ligne 1 avec une ligne où il y a un x_1 , c'est ce que nous allons faire.

$$\begin{aligned}
& L_1 \begin{cases} x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow L_2 \begin{cases} x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow L_3 \begin{cases} x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow L_3 - L_1 \begin{cases} x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_1 \\ x_2 - x_3 = -y_2 + y_3 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_1 \\ -2x_3 = -y_1 - y_2 + y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 + y_2 \\ x_2 = -x_3 + y_1 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3\right) + y_2 \\ x_2 = -\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3\right) + y_1 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Allez à : **Exercice 30**

Correction exercice 31.

$$1. A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A^2 + A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

O

$$2. A^3 - A^2 + A - I = O \Leftrightarrow A(A^2 - A + I) = I \text{ donc } A^{-1} = A^2 - A + I$$

$$3. A^3 = A^2 - A + I \text{ donc } A^4 = A(A^2 - A + I) = A^3 - A^2 + A = (A^2 - A + I) - A^2 + A = I$$

Allez à : **Exercice 31**

Correction exercice 32.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^3 = (A - 2I)(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui entraîne que

$$A^3 - 3 \times 2A^2 + 3 \times 2^2A - 2^3I = 0$$

Car A et I commutent.

Ce qui équivaut à

$$A^3 - 6A^2 + 12A - 8I = 0$$

Soit encore

$$A^3 - 6A^2 + 12A = 8I$$

Puis en divisant par 8 et en mettant A en facteur

$$A \left(\frac{1}{8}A^2 - \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}I \right) = I$$

Ce qui montre que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{8}A^2 - \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}I$$

Allez à : **Exercice 32**

Correction exercice 33.

1.

$$\begin{aligned} M(t_1)M(t_2) &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t_1) & \operatorname{sh}(t_1) \\ \operatorname{sh}(t_1) & \operatorname{ch}(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t_2) & \operatorname{sh}(t_2) \\ \operatorname{sh}(t_2) & \operatorname{ch}(t_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t_1)\operatorname{ch}(t_2) + \operatorname{sh}(t_1)\operatorname{sh}(t_2) & \operatorname{ch}(t_1)\operatorname{sh}(t_2) + \operatorname{sh}(t_1)\operatorname{ch}(t_2) \\ \operatorname{sh}(t_1)\operatorname{ch}(t_2) + \operatorname{ch}(t_1)\operatorname{sh}(t_2) & \operatorname{sh}(t_1)\operatorname{sh}(t_2) + \operatorname{ch}(t_1)\operatorname{ch}(t_2) \end{pmatrix} \\ \operatorname{ch}(t_1)\operatorname{ch}(t_2) + \operatorname{sh}(t_1)\operatorname{sh}(t_2) &= \frac{e^{t_1} + e^{-t_1}}{2} \frac{e^{t_2} + e^{-t_2}}{2} + \frac{e^{t_1} - e^{-t_1}}{2} \frac{e^{t_2} - e^{-t_2}}{2} \\ &= \frac{e^{t_1+t_2} + e^{t_1-t_2} + e^{-t_1+t_2} + e^{-t_1-t_2}}{4} + \frac{e^{t_1+t_2} + e^{t_1-t_2} + e^{-t_1+t_2} + e^{-t_1-t_2}}{4} \\ &= \frac{2e^{t_1+t_2} + 2e^{-(t_1+t_2)}}{4} = \operatorname{ch}(t_1 + t_2) \\ \operatorname{sh}(t_1)\operatorname{ch}(t_2) + \operatorname{ch}(t_1)\operatorname{sh}(t_2) &= \frac{e^{t_1} - e^{-t_1}}{2} \frac{e^{t_2} + e^{-t_2}}{2} + \frac{e^{t_1} + e^{-t_1}}{2} \frac{e^{t_2} - e^{-t_2}}{2} \\ &= \frac{e^{t_1+t_2} + e^{t_1-t_2} - e^{-t_1+t_2} - e^{-t_1-t_2}}{4} + \frac{e^{t_1+t_2} - e^{t_1-t_2} + e^{-t_1+t_2} - e^{-t_1-t_2}}{4} \\ &= \frac{2e^{t_1+t_2} - 2e^{-(t_1+t_2)}}{4} = \operatorname{sh}(t_1 + t_2) \end{aligned}$$

Donc $M(t_1)M(t_2) = M(t_1 + t_2)$

2. $\det(M(t)) = \operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1 \neq 0$ donc la matrice est inversible.

Or $M(t)M(-t) = M(0) = I$ donc $(M(t))^{-1} = M(-t)$

Allez à : **Exercice 32**

Correction exercice 34.

1. Soient $x = (x_1, x_2)$ et $x' = (x'_1, x'_2)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 et soient λ et λ' deux réels.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \lambda' x') &= f(\lambda x_1 + \lambda' x'_1, \lambda x_2 + \lambda' x'_2) = (\lambda x_1 + \lambda' x'_1 - (\lambda x_2 + \lambda' x'_2), \lambda x_1 + \lambda' x'_1 + (\lambda x_2 + \lambda' x'_2)) \\ &= (\lambda(x_1 - x_2) + \lambda'(x'_1 - x'_2), \lambda(x_1 + x_2) + \lambda'(x'_1 + x'_2)) \\ &= \lambda(x_1 - x_2, x_1 + x_2) + \lambda'(x'_1 - x'_2, x'_1 + x'_2) = \lambda f(x) + \lambda' f(x') \end{aligned}$$

f est une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 donc f est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.

a) $x \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_1 + L_2 \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Donc $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

On en déduit que f est injective, comme de plus, f est un endomorphisme, f est surjective et donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. (On aurait pu aussi invoquer le théorème du rang)

b) Du a) on tire que f est bijective et donc inversible (cela signifie la même chose).

c)

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow (y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \Leftrightarrow (y_1, y_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_1 + y_2 = 2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 - y_1 \\ x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - y_1 \\ x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \\ x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(y_1, y_2) = (\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2, -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2)$, ou, en changeant les rôles de x et de y :

$$f^{-1}(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2)$$

$$\text{Et } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. La matrice d'une homothétie est de la forme $H = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = hI$ et la matrice d'une rotation d'angle α

est de la forme $R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$. Alors

$$RH = h \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \cos(\alpha) & -h \sin(\alpha) \\ h \sin(\alpha) & h \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{cases} h \cos(\alpha) = 1 \\ h \sin(\alpha) = 1 \end{cases}$, donc $(h \cos(\alpha))^2 + (h \sin(\alpha))^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow h^2 = 2 \Leftrightarrow h = \sqrt{2}$ ou $h = -\sqrt{2}$

Si $h = -\sqrt{2}$ alors $\begin{cases} \cos(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ donc $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ modulo 2π .

Si $h = \sqrt{2}$ alors $\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ donc $\alpha = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π .

5. $\det(a, b) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc (a, b) est une base de \mathbb{R}^2 .

6. Les coordonnées de $f(a)$ dans la base (e_1, e_2) sont $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $f(a) = 2e_2 = a + b$

Les coordonnées de $f(b)$ dans la base (e_1, e_2) sont $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $f(b) = 2e_1 = a - b$

7. $\text{Mat}_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Allez à : **Exercice 34**

Correction exercice 35.

1.

$$\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = C_3 - C_2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 2) = -1 \neq 0$$

Donc (a, b, c) est une base de \mathbb{R}^3

2.

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 PX = Y &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \{ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_1 \\ L_2 \{ -x_1 - x_2 - 2x_3 = y_2 \\ L_3 \{ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \{ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_1 \\ L_2 + L_1 \{ x_2 = y_1 + y_2 \\ L_3 + L_2 \{ -x_3 = y_2 + y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 + y_1 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = -y_2 - y_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2y_1 - 2y_2 + 2y_2 + 2y_3 + y_1 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = -y_2 - y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -y_1 + 2y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = -y_2 - y_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Les coordonnées de $u(a)$ dans la base β sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $u(a) = a$

Les coordonnées de $u(b)$ dans la base β sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $u(b) = c$

Les coordonnées de $u(c)$ dans la base β sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc $u(c) = -b$

Par conséquent

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

a)

$$\begin{aligned}
 P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 R^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 R^4 &= R^2R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I
 \end{aligned}$$

c) $R = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PRP^{-1}$

$$A^4 = PRP^{-1}PRP^{-1}PRP^{-1}PRP^{-1} = PR^4P^{-1} = PIP^{-1} = I$$

Donc

$$A^{4n} = (A^4)^n = I^n = I$$

Allez à : Exercice 35

Correction exercice 36.

$$1. A = \text{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2. u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \text{ donc } 0_{\mathbb{R}^3} \in E$$

Soient $x \in E$ et $y \in E$ et λ et μ deux réels, $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda x + \mu y$, donc $\lambda x + \mu y \in E$, E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3) \in E &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = x_1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = x_2 \\ -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 & L_1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 & L_2 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \\ L_2 & \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \\ L_3 & \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -3x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ 4L_2 + L_1 & \\ 2L_3 - L_1 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Une base de E est le vecteur $a = (1, 0, 1)$ et bien sur $\dim(E) = 1$.

3. Il est clair que le vecteur nul est dans F .

Soient $x \in F$ et $y \in F$ et λ et μ deux réels

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3),$$

$$\begin{aligned} -2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 2(\lambda x_2 + \mu y_2) + 3(\lambda x_3 + \mu y_3) &= \lambda(-2x_1 + 2x_2 + 3x_3) + \mu(-2y_1 + 2y_2 + 3y_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\lambda x + \mu y \in F$. F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in F \Leftrightarrow x = \left(x_2 + \frac{3}{2}x_3, x_2, x_3\right) = x_2(1, 1, 0) + \frac{x_3}{2}(3, 0, 2)$$

On pose $b = (1, 1, 0)$ et $c = (3, 0, 2)$

(b, c) est une famille génératrice de F formée de deux vecteurs non proportionnels, cette famille est donc libre.

Une base de F est (b, c) .

4. $u(b)$ a pour coordonnées :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \det(a, b, u(b)) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Donc $(a, b, u(b))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

On aurait pu montrer que la famille est libre, et dire qu'une famille libre à 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 est une base.

5. $\dim(E) + \dim(F) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

$(1, 0, 1) \notin F$ car $-2 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 1 = 1 \neq 0$ donc $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Donc $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

6. $u(u(b))$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $u(u(b)) = -b$

$$\text{mat}_{\beta'}(u) = \begin{matrix} & u(a) & u(b) & u(u(b)) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ u(b) \end{matrix} \end{matrix}$$

Allez à : **Exercice 36**

Correction exercice 37.

1.

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 3 & 15 \\ -2 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) &\Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x_1 + 3x_2 + 15x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_3 = 0 \\ -6x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{matrix} 5L_2 - L_1 \\ L_3 - 3L_2 \end{matrix} \begin{cases} -10x_1 + 3x_2 + 15x_3 = 0 \\ 12x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x_1 + 15x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ x &= \left(\frac{3}{2}x_3, 0, x_3\right) = \frac{x_3}{2}(3, 0, 2) \end{aligned}$$

On pose $a = (3, 0, 2)$ et alors $\ker(u) = \text{Vect}(a)$ et $\dim(\ker(u)) = 1$

D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(u)) = 2$

3. Le problème est de savoir si $\ker(u) \cap \text{im}(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ car $\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3)$

Première méthode :

On cherche une base de $\text{Im}(u)$ (ce qui revient à choisir deux des trois vecteurs parmi $u(e_1), u(e_2)$ et $u(e_3)$ car ces vecteurs sont deux à deux non proportionnels et que la dimension de l'image de u est 2, puis de montrer que ces trois vecteurs forment une base de \mathbb{R}^3 , c'est long, on passe)

Deuxième méthode

D'après la matrice, il est clair que $a = u(e_2)$, comme $\ker(u) = \text{Vect}(a)$ on a $\ker(u) \subset \text{im}(u)$ et donc $\ker(u) \cap \text{Im}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, ce qui montre que l'on n'a pas $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.

4.

Première méthode

On pose $X_a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées de a et de b dans la base canonique et on résout le système

$$u(b) = a \Leftrightarrow AX_b = X_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 & 3 & 15 \\ -2 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

C'est long

Deuxième méthode

On remarque que $u(e_2) = a$ donc un vecteur b qui vérifie $u(b) = a$ est par exemple $b = e_2$

Remarque :

Ce n'est pas le seul mais l'énoncé demande « un vecteur b tel que $u(b) = a$ »

5. $u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-1}$

Soit $x_1 \in E_{-1}$ et $x_2 \in E_{-1}$, on a $u(x_1) = -x_1$ et $u(x_2) = -x_2$, alors pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ on a

$$u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2) = \lambda_1(-x_1) + \lambda_2(-x_2) = -(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

Donc

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in E_{-1}$$

Et E_{-1} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3

Autre méthode :

$E_{-1} = \ker(u + id)$ donc E_{-1} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

On pose $X_c = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées de c dans la base canonique

$$\begin{aligned} u(c) = -c &\Leftrightarrow AX_c = -X_c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 & 3 & 15 \\ -2 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x_1 + 3x_2 + 15x_3 = -x_1 \\ -2x_1 + 3x_3 = -x_2 \\ -6x_1 + 2x_2 + 9x_3 = -x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 + 3x_2 + 15x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -6x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x_3 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = 2x_3 \end{cases} \\ &x = (2x_3, x_3, x_3) = x_3(2, 1, 1) \end{aligned}$$

On prend $c = (2, 1, 1)$ et on a $E_{-1} = \text{Vect}(c)$

6.

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha(3, 0, 2) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(2, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

(a, b, c) est une famille libre dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base de \mathbb{R}^3 .

7.

$$u(a) = 0_{\mathbb{R}^3}, u(b) = a, u(c) = -c$$

Donc

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A' = P^{-1}AP$$

Où

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allez à : **Exercice 37**

Correction exercice 38.

$$1. \det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à la dernière}$$

ligne. Puis $\det(e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$, de nouveau en développant par rapport à la dernière ligne. Ce déterminant est non nul donc (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) est une base de \mathbb{R}^4 .

2.

$$\text{Les coordonnées de } f(a) \text{ dans la base } \beta \text{ sont : } \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(a) = -3e_1 + 3e_2 = -3(e_1 - e_2) = -3a$$

$$\text{Les coordonnées de } f(b) \text{ dans la base } \beta \text{ sont : } \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(b) = -3e_1 + 3e_2 + 3e_3 = -3(e_1 - e_2 - e_3) = -3b$$

Les coordonnées de $f(c)$ dans la base β sont :
$$\begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(c) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Les coordonnées de $f(d)$ dans la base β sont :
$$\begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(d) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

3.
$$\text{Mat}_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allez à : **Exercice 38**

Correction exercice 39.

1.
$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \text{ en additionnant } C_3 + C_2$$

Puis en développant par rapport à la troisième ligne :

$$\det(a, b, c, d) = -(-1) \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 + C_1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Donc (a, b, c, d) est une base de \mathbb{R}^4 .

2.
$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X = PX' &\Leftrightarrow PX' = X \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & \begin{cases} -x'_1 + x'_2 - 2x'_3 + 2x'_4 = x_1 \\ L_2 & \begin{cases} x'_1 - 2x'_2 + 3x'_3 - x'_4 = x_2 \\ L_3 & \begin{cases} -x'_2 + x'_3 = x_3 \\ L_4 & \begin{cases} -x'_1 + x'_2 - x'_3 + x'_4 = x_4 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & \begin{cases} -x'_1 + x'_2 - 2x'_3 + 2x'_4 = x_1 \\ L_2 + L_1 & \begin{cases} -x'_2 + x'_3 + x'_4 = x_1 + x_2 \\ L_3 & \begin{cases} -x'_2 + x'_3 = x_3 \\ L_4 + L_2 & \begin{cases} -x'_2 + 2x'_3 = x_2 + x_4 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & \begin{cases} -x'_1 + x'_2 - 2x'_3 + 2x'_4 = x_1 \\ L_2 & \begin{cases} -x'_2 + x'_3 + x'_4 = x_1 + x_2 \\ L_3 - L_2 & \begin{cases} -x'_4 = -x_1 - x_2 + x_3 \\ L_4 - L_2 & \begin{cases} x'_3 - x'_4 = -x_1 + x_4 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

L_3 donne $x'_4 = x_1 + x_2 - x_3$

L_4 donne $x'_3 = -x_1 + x_4 + x'_4 = x_2 - x_3 + x_4$

L_2 donne $x'_2 = x'_3 + x'_4 - x_1 - x_2 = x_2 - x_3 + x_4 + x_1 + x_2 - x_3 - x_1 - x_2 = x_2 - 2x_3 + x_4$

L_1 donne

$$\begin{aligned} x'_1 &= x'_2 - 2x'_3 + 2x'_4 - x_1 = x_2 - 2x_3 + x_4 - 2(x_2 - x_3 + x_4) + 2(x_1 + x_2 - x_3) - x_1 \\ &= x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ Les coordonnées de } u(a) \text{ dans la base } (e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ sont : } \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } u(a) = e_1 - e_2 + e_4 = -(e_1 + e_2 - e_4) = -a$$

$$\text{Les coordonnées de } u(b) \text{ dans la base } (e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ sont : } \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } u(b) = -2e_1 + 3e_2 + e_3 - 2e_4 = a - b$$

$$\text{Les coordonnées de } u(c) \text{ dans la base } (e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ sont : } \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } u(c) = 3e_1 - 5e_2 - 2e_3 + 2e_4 = b - c$$

$$\text{Les coordonnées de } u(d) \text{ dans la base } (e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ sont : } \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } u(d) = -4e_1 + 4e_2 + e_3 - 2e_4 = c - d$$

4.

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned} T &= P^{-1}AP = (P^{-1}A)P = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Comme } A = P^{-1}TP, A + I = PTP^{-1} + PIP^{-1} = P(T + I)P^{-1} = PNP^{-1}$$

$$\text{Donc } (A + I)^4 = PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1} = PN^4P^{-1} = POP^{-1} = O, \text{ la matrice nulle.}$$

Allez à : [Exercice 39](#)

Correction exercice 40.

1.

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{cases} -2\alpha + 2\gamma + 3\delta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma + \delta = 0 \\ -\alpha - \beta + \gamma + 2\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ 2L_2 - L_1 \\ 2L_3 - L_1 \\ 2L_4 - L_2 \end{array} \begin{cases} -2\alpha + 2\gamma + 3\delta = 0 \\ 2\beta - 2\gamma - 3\delta = 0 \\ -\delta = 0 \\ -2\beta + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, c'est une base de \mathbb{R}^4 .

2. Les coordonnées de $u(a)$ dans β sont

$$AX_a = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2X_a$$

Donc $u(a) = 2a$

Les coordonnées de $u(b)$ dans β sont

$$AX_b = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2X_b$$

Donc $u(b) = 2b$

Les coordonnées de $u(c)$ dans β sont

$$AX_c = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_c$$

Donc $u(c) = -c$

Les coordonnées de $u(d)$ dans β sont

$$AX_d = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -X_d$$

Donc $u(d) = -d$

3.

$$D = \text{Mat}_{\beta'}(u) = \begin{pmatrix} u(a) & u(b) & u(c) & u(d) \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}$$

4.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.

$$Y = PX \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{cases} -2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = y_1 \\ -x_1 + x_2 = y_2 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = y_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = y_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ 2L_2 - L_1 \\ 2L_3 - L_1 \\ 2L_4 - L_1 \end{array} \begin{cases} -2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = y_1 \\ 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -y_1 + 2y_2 \\ -x_4 = -y_1 + 2y_3 \\ -2x_2 + x_4 = -y_1 + 2y_4 \end{cases}$$

D'après L_3

$$x_4 = y_1 - 2y_3$$

Ce que l'on remplace dans L_4

$$-2x_2 + y_1 - 2y_3 = -y_1 + 2y_4 \Leftrightarrow -2x_2 = -2y_1 + 2y_3 + 2y_4 \Leftrightarrow x_2 = y_1 - y_3 - y_4$$

On remplace ces deux résultats dans L_2

$$2(y_1 - y_3 - y_4) - 2x_3 - 3(y_1 - 2y_3) = -y_1 + 2y_2 \Leftrightarrow -2x_3 = 2y_2 - 4y_3 + 2y_4 \\ \Leftrightarrow x_3 = -y_2 + 2y_3 - y_4$$

Et enfin on remet le tout dans L_1

$$-2x_1 + 2(-y_2 + 2y_3 - y_4) + 3(y_1 - 2y_3) = y_1 \Leftrightarrow -2x_1 = -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 \\ \Leftrightarrow x_1 = y_1 - y_2 - y_3 - y_4$$

Donc

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 - y_4 \\ x_2 = y_1 - y_3 - y_4 \\ x_3 = -y_2 + 2y_3 - y_4 \\ x_4 = y_1 - 2y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

6.

$$P^{-1}AP = P^{-1} \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : [Exercice 40](#)

Correction exercice 41.

1. $c = u(b) = u(e_1) = e_1 + e_2$, voir la matrice.

Les coordonnées de $d = u(c)$ dans la base β sont : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la quatrième colonne.

$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

En développant par rapport à la troisième ligne.

Donc (a, b, c, d) est une base de \mathbb{R}^4 .

$$2. P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = PX' \Leftrightarrow PX' = X \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = x_1 \\ x'_1 + x'_3 + x'_4 = x_2 \\ x'_1 + x'_4 = x_3 \\ x'_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'_2 = x_1 - x'_1 - x'_3 - x'_4 = x_1 - (x_3 - x_4) - (x_2 - x_3) - x_4 \\ x'_3 = x_2 - x'_1 - x'_4 = x_2 - x_3 \\ x'_1 = x_3 - x'_4 = x_3 - x_4 \\ x'_4 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = x_3 - x_4 \\ x'_2 = x_1 - x_2 \\ x'_3 = x_2 - x_3 \\ x'_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\text{Donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ Les coordonnées de } u(a) \text{ dans la base } \beta \text{ sont } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $u(a) = 0_{\mathbb{R}^4}$

$u(b) = c$, on a aussi $u(b) = e_1 + e_2$ c'est donné par la deuxième colonne de la matrice, on en aura besoin plus tard.

$$u(c) = u(u(b)) = u^2(b) = d,$$

$$u(d) = u(u^2(b)) = u^2(u(b)) = u^2(e_1 + e_2) = u(u(e_1) + u(e_2)) = u(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \\ = u(e_1) + u(e_2) + u(e_3) + u(e_4) = e_1 = a$$

Il suffit de faire la somme des quatre colonnes pour trouver les coordonnées de $u(d)$ dans la base β .

4.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or $A = PNP^{-1}$ donc $A^4 = (PNP^{-1})^4 = PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1}PNP^{-1} = PN^4P^{-1} = O$

6. Soit $x \in \mathbb{R}^4$, il s'exprime sous la forme $x = x'_1a + x'_2b + x'_3c + x'_4d$ dans la base β' ?

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow NX' = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_4 \\ 0 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $x = x'_1a$, $\ker(u)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur a .

7. $\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(a), u(b), u(c), u(d)) = \text{Vect}(0_{\mathbb{R}^4}, c, d, a) = \text{Vect}(a, c, d)$

(a, c, d) est une famille (car (a, b, c, d) est libre) et génératrice de $\text{Im}(u)$, c'est une base de $\text{Im}(u)$.

Allez à : [Exercice 41](#)

Correction exercice 42.

1.

$$\begin{aligned}
 x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(u) &\Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 = -x_4 \\ x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_4 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 = -x_4 \\ x_3 = 0 \\ 3x_4 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_4 \\ x_1 = -x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = -x_4 \end{cases} \\
 x = (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-x_4, -x_4, 0, x_4) = x_4(-1, -1, 0, 1)
 \end{aligned}$$

$a = (-1, -1, 0, 1)$ engendre $\ker(u)$.

2. $u(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{\mathbb{R}^4} = \lambda 0_{\mathbb{R}^4}$, donc $0_{\mathbb{R}^4} \in E_\lambda$

Soient x et y deux vecteurs de E_λ , on a $u(x) = \lambda x$ et $f(y) = \lambda y$

Par conséquent

$$u(ax + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y) = \alpha \lambda x + \beta \lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$$

Ce qui montre que $\alpha x + \beta y \in E_\lambda$

E_λ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

3.

$$\begin{aligned}
 x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_{-1} &\Leftrightarrow u(x) = -x \Leftrightarrow AX = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = -x_1 \\ x_1 + x_4 = -x_2 \\ x_3 = -x_3 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_4 = -x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow L_2 + L_1 \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_4 = -2x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_4 = -2x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \\
 x = (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1, x_1, 0, -2x_1) = x_1(1, 1, 0, -2)
 \end{aligned}$$

$b = (1, 1, 0, -2)$ engendre E_{-1} .

$$\begin{aligned}
 x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_1 &\Leftrightarrow u(x) = x \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = x_1 \\ x_1 + x_4 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_4 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \{ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ L_2 \{ -3x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \{ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ L_2 + 3L_1 \{ -2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\
 x = (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-x_4, 0, x_3, x_4) = x_3(0, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1)
 \end{aligned}$$

On pose $c = (0, 0, 1, 0)$ et $d = (-1, 0, 0, 1)$, (c, d) engendrent E_1 , de plus ils ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre, c'est une base de E_1 .

4. Première méthode

$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la troisième colonne

$$\det(a, b, c, d) = \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} L_1 + L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

En développant par rapport à la troisième colonne

Donc (a, b, c, d) est une base de \mathbb{R}^4 .

Deuxième méthode

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta - \delta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta - \delta = 0 \\ \alpha = \beta \\ \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\delta = 0 \\ \alpha = \beta \\ \gamma = 0 \\ -\beta + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \alpha = \beta \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

(a, b, c, d) est une famille libre à 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4, c'est une base.

5. D'après les questions précédentes on a

$$u(a) = 0_{\mathbb{R}^4}; u(b) = -b; u(c) = c \text{ et } u(d) = d$$

Donc

$$Mat_{\beta'}(u) = \begin{pmatrix} u(a) & u(b) & u(c) & u(d) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}$$

Allez à : [Exercice 42](#)

Correction exercice 43.

1.

$$\begin{aligned} \det(a_1, a_2, a_3, c) &= \begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 + C_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \end{aligned}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Les coordonnées de } u(a_1) \text{ dans la base } \beta \text{ sont } \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } u(a_1) = e_1 + 2e_2 + 3e_3 - 2e_4 = a_1$$

$$\text{Les coordonnées de } u(a_2) \text{ dans la base } \beta \text{ sont } \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } u(a_2) = e_2 + e_3 = a_2$$

$$\text{Les coordonnées de } u(a_3) \text{ dans la base } \beta \text{ sont } \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } u(a_3) = e_1 + 3e_2 + 5e_3 - 3e_4 = a_3$$

Les coordonnées de $u(c)$ dans la base β sont
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $u(c) = e_1 + e_2 + e_3 = -c$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. $u(a_1) = a_1 \in F$, $u(a_2) = a_2 \in F$ et $u(a_3) = a_3 \in F$, (a_1, a_2, a_3) est une base de F donc pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.

Pour tout $x \in F$, $v(x) = u(x) \in F$, et v est linéaire donc v est un endomorphisme de F .

$$\text{Mat}_{(a_1, a_2, a_3)}(v) = \begin{matrix} & u(a_1) & u(a_2) & u(a_3) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \end{matrix}$$

4. (a_1, a_2, a_3) est une base de F , (c) est une base de $\text{Vect}(c)$, et (a_1, a_2, a_3, c) est une base de \mathbb{R}^4 , donc

$$\mathbb{R}^4 = F \oplus \text{Vect}(c)$$

5. Par définition de la somme directe, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$ il existe un unique $f \in F$ et un unique $g \in \text{Vect}(c)$ tel que $x = f + g$.

$$u(x) = u(f + g) = u(f) + u(g) = f - g$$

Allez à : **Exercice 43**

Correction exercice 44.

1.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -10 - \lambda & -3 & -12 \\ 5 & -\lambda & 7 \\ 6 & 2 & 7 - \lambda \end{vmatrix} &= (-10 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 7 \\ 2 & 7 - \lambda \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -3 & -12 \\ 2 & 7 - \lambda \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -3 & -12 \\ -\lambda & 7 \end{vmatrix} \\ &= (-10 - \lambda)[- \lambda(7 - \lambda) - 14] - 5[-3(7 - \lambda) + 24] + 6(-21 - 12\lambda) \\ &= (-10 - \lambda)(\lambda^2 - 7\lambda - 14) - 5(3 + 3\lambda) - 126 - 72\lambda \\ &= -10\lambda^2 + 70\lambda + 140 - \lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda - 15 - 15\lambda - 126 - 72\lambda \\ &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda + 1)^3 \end{aligned}$$

Si $\lambda = -1$ alors $A - \lambda I = A + I$ n'est pas inversible.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$\begin{aligned} x \in \ker(u + id) &\Leftrightarrow X \in \ker(A + I) \Leftrightarrow (A + I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - 12x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow L_2 - L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{2}x_3 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $x = \left(-\frac{3}{2}x_3, \frac{1}{2}x_3, x_3\right) = \frac{x_3}{2}(-3, 1, 2)$

Donc $\ker(A + I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. $(u + Id)(a) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow u(a) + a = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow u(a) = -a$

3. Si on pose $X_a = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ où X_b sont les coordonnées de b dans la base canonique alors

$$\begin{aligned} u(b) = a - b &\Leftrightarrow AX_b = X_a - X_b \Leftrightarrow (A + I)X_b = X_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - 12x_3 = -3 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow L_2 - L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{2}x_3 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x_3 + 1 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Si on prend $x_3 = 0$ on a pour solution $b = (0, 1, 0)$.

Si on pose $X_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_c = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ où X_c sont les coordonnées de c dans la base canonique alors

$$\begin{aligned} u(c) = b - c &\Leftrightarrow AX_c = X_b - X_c \Leftrightarrow (A + I)X_c = X_b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - 12x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow L_2 - L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{2}x_3 + \frac{3}{2} + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2} \\ x_1 = -\frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Si on prend $x_3 = 1$ on a pour solution $c = (-1, -1, 1)$.

4. $\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc (a, b, c) est une base de \mathbb{R}^3 .

5. $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. $(T + I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, par de simple calculs on trouve que $(T + I)^3 = O$.

$$(A + I)^3 = (PTP^{-1} + PIP^{-1})^3 = (P(T + I)P^{-1})^3 = P(T + I)^3P^{-1} = O$$

7. $(A + I)^3 \Leftrightarrow A^3 + 3A^2 + 3A + I = O \Leftrightarrow A(-3A^2 - 3A - 3I) = I$

Donc $A^{-1} = -3A^2 - 3A - 3I$

Allez à : [Exercice 44](#)

Correction exercice 45.

1.

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_1) & f(e_3) \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$$2. \text{ Soient } x \in E_1, (f - id_{\mathbb{R}^3})(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(x) - x = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(x) = x \\ f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$$

Soient x, x' deux vecteurs de E_1 donc $f(x) = x$ et $f(x') = x'$, soient λ, λ' deux réels

$$f(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f(x) + \lambda' f(x') = \lambda x + \lambda' x'$$

Cela entraîne que $\lambda x + \lambda' x' \in E_1$, par conséquent E_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Soient $x \in N_{-1}, (f^2 + id_{\mathbb{R}^3})(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f^2(x) + x = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f^2(x) = -x$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow f^2(0_{\mathbb{R}^3}) = f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in N_{-1}$$

Soient x, x' deux vecteurs de N_{-1} donc $f^2(x) = -x$ et $f^2(x') = -x'$, soient λ, λ' deux réels

$$f^2(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f^2(x) + \lambda' f^2(x') = \lambda(-x) + \lambda'(-x') = -(\lambda x + \lambda' x')$$

Cela entraîne que $\lambda x + \lambda' x' \in N_{-1}$, par conséquent N_{-1} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Remarque :

On peut aller plus vite en remarquant que $f + id_{\mathbb{R}^3}$ est une application linéaire et en invoquant le fait que le noyau d'une application linéaire un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . Et puis pareil pour $f^2 + id_{\mathbb{R}^3}$.

3.

$$x \in E_1 \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 - x_3 = x_1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = x_2 \\ 3x_1 - 8x_2 + 6x_3 = x_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Maintenant on peut appliquer la méthode du pivot de Gauss (à l'étape d'avant ce n'était pas possible).

$$x \in E_1 \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + 3L_1 \end{matrix} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$x = (x_3, x_3, x_3) = x_3(1,1,1)$$

E_1 est la droite vectoriel engendrée par le vecteur $a = (1,1,1)$, $E_1 = Vect(a)$.

$$x \in E_1 \Leftrightarrow f^2(x) = -x \Leftrightarrow A^2X = -X$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - x_3$$

$$x = (x_2 - x_3, x_2, x_3) = x_2(1,1,0) + x_3(-1,0,1)$$

On cherche un vecteur de N_{-1} , prenons $x_2 = 1$ et $x_3 = 0$: $b = (1,1,0) = e_1 + e_2$

$$f(b) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = 2e_2 + 3e_3 + 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 = 2e_1 - 3e_2 - 5e_3$$

Il faut vérifier que ce vecteur est bien dans N_{-1} , $x_1 - x_2 + x_3 = 2 - 3 + (-5) = 0$, c'est bon, $f(b) \in$

N_{-1} ensuite il faut montrer que $(b, f(b))$ est une base de N_{-1} . $\dim(N_{-1}) < 3$ or $(b, f(b))$ est une famille libre (car b et $f(b)$ ne sont pas proportionnels) dans un espace de dimension inférieur ou égale à

2, cela entraîne à la fois que $\dim(N_{-1}) \geq 2$, qu'alors $\dim(N_{-1}) = 2$ et que $(b, f(b))$ est une base de cet espace.

Il y a plusieurs méthode possible, la plus basique est de montrer que $(a, b, f(b))$ est une base de \mathbb{R}^3 , on passe, c'est trop facile. Deuxième méthode, soit $x \in E_1 \cap N_{-1}$,

$x \in E_1 \Leftrightarrow f(x) = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x) = x$ et $x \in N_{-1} \Leftrightarrow f^2(x) = -x$, cela entraîne que $-x = x \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^3}$, autrement dit $E_1 \cap N_{-1} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Comme $\dim(E_1) + \dim(N_{-1}) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, on en déduit que $E_1 \oplus N_{-1} = \mathbb{R}^3$.

Remarque :

Sans rien faire de plus on peut en déduire que β' est une base.

4. Il faut d'abord calculer $f(a), f(b)$ et $f(f(b))$ dans la base $(a, b, f(b))$

$f(a) = a$ car $a \in E_1$.

$f(b) = f(b)$ çà c'est sûr ! et $f(f(b)) = f^2(b) = -b$

On en déduit la matrice de f dans la base $(a, b, f(b))$

$$\begin{matrix} f(a) & f(b) & f^2(b) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ f(b) \end{matrix} \end{matrix}$$

5. Il faut calculer $f^2(a), f^2(b)$ et $f^2(f(b))$ dans la base $(a, b, f(b))$

$$f^2(a) = f(f(a)) = f(a) = a$$

$$f^2(b) = -b$$

$$f^2(f(b)) = f^3(b) = f(f^2(b)) = f(-b) = -f(b)$$

Donc la matrice est

$$\begin{matrix} f^2(a) & f^2(b) & f^3(b) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ f(b) \end{matrix} \end{matrix}$$

Autre méthode la matrice de f^2 est la matrice de f au carré

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : **Exercice 45**

Correction exercice 46.

1. On appelle X_{e_2} les coordonnées de e_2 dans la base canonique

Les coordonnées de $u(e_2)$ dans la base canonique sont

$$AX_{e_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $u^2(e_2)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $u^3(e_2)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Montrons que $(e_2, u(e_2), u^2(e_2), u^3(e_2))$ est libre

$$\alpha e_2 + \beta u(e_2) + \gamma u^2(e_2) + \delta u^3(e_2) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\beta - 4\gamma - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ 4\gamma = 0 \\ -\beta - 2\gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\beta - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\beta + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\beta + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \delta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\beta + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

$(e_2, u(e_2), u^2(e_2), u^3(e_2))$ est une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, c'est une base.

2.

Les coordonnées de $u^4(e_2)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $u^4(e_2) = -e_2 + 2u^2(e_2)$

$$C = \begin{matrix} & u(e_2) & u^2(e_2) & u^3(e_2) & u^4(e_2) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & e_2 \\ & u(e_2) \\ & u^2(e_2) \\ & u^3(e_2) \end{matrix}$$

3. On cherche les vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tels que $u(x) = x$

$$u(x) = x \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ -3x_1 - 2x_3 + 2x_4 = x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \\ L_2 \begin{cases} -3x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \\ L_3 \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -6x_2 - 4x_4 = 0 \end{cases} \\ L_2 + 3L_1 \begin{cases} -6x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ L_3 - L_1 \begin{cases} x_2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x = (x_1, 0, -x_1, 0) = x_1(1, 0, -1, 0)$$

4. Les coordonnées de $u(b)$ dans la base canonique sont

$$AX_b = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_a + X_b$$

Les coordonnées de $u(c)$ dans la base canonique sont

$$AX_c = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_c$$

Donc $u(c) = -c$

5. On cherche les vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tels que $u(x) = c - x$

$$\begin{aligned}
u(x) = c - x &\Leftrightarrow AX = X_c - X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 - x_1 \\ x_2 = -x_2 \\ -3x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -1 - x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 - x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_2 = 0 \\ -3x_1 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 = 0 \\ -3x_1 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -3x_1 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 = 1 - x_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -3(1 - x_3) - x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 = 1 - x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_4 = 2 - 2x_3 \\ x_1 = 1 - x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 1 - x_3 \\ x_1 = 1 - x_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Prenons $x_3 = 0$ par exemple, alors $d = (1, 0, 0, 1)$

6. On peut montrer que la famille β'' est libre et rappeler qu'elle a 4 vecteurs dans un espace de dimension 4 ou alors calculer le déterminant

$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la seconde ligne

$$\det(a, b, c, d) = +(-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Puis par rapport à la première ligne

$$\det(a, b, c, d) = - \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = -(-1 - 0) = 1 \neq 0$$

Donc β'' est une base.

7.

$$T = \begin{pmatrix} u(a) & u(b) & u(c) & u(d) \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}$$

8. On pose

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de β à β' , on a $A = QCQ^{-1}$

Et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de β à β'' , on a $A = PTP^{-1}$

Donc

$$QCQ^{-1} = PTP^{-1}$$

Ce qui équivaut à

$$C = Q^{-1}PTP^{-1}Q = (P^{-1}Q)^{-1}T(P^{-1}Q)$$

Ce qui montre que C et T sont semblables.

Allez à : Exercice 46

Correction exercice 47.

1. Si $\in \mathbb{R}_2[X]$, $d^\circ(X+1)P' \leq 1+2-1=2$ donc f est bien une application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
 $f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (X+1)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' = (X+1)(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2') = \lambda_1(X+1)P_1' + \lambda_2(X+1)P_2' = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$
 donc f est linéaire, c'est même un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.

$$\begin{aligned} f(1) &= (X+1) \times 0 = 0 = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2 \\ f(X) &= (X+1) \times 1 = 0 = 1 \times 1 + 1 \times X + 0 \times X^2 \\ f(X^2) &= (X+1) \times 2X = 0 = 0 \times 1 + 2 \times X + 2 \times X^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } A = \begin{pmatrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

3. $\alpha + \beta(X+1) + \gamma(X+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \gamma X^2 + (\beta + 2\gamma)X + \alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$

Donc B' est une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 ($\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$), c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4.

$$\begin{aligned} f(1) &= (X+1) \times 0 = 0 = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2 \\ f(X+1) &= (X+1) \times 1 = 0 = 0 \times 1 + 1 \times (X+1) + 0 \times (X+1)^2 \\ f((X+1)^2) &= (X+1) \times 2(X+1) = 0 = 0 \times 1 + 0 \times (X+1) + 2 \times (X+1)^2 \end{aligned}$$

Donc

$$B = \begin{pmatrix} f(1) & f(X+1) & f((X+1)^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X+1 \\ (X+1)^2 \end{matrix}$$

5.

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ A^3 &= AA^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $k > 0$

$$B^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Et $B^0 = I$

6.

La première colonne de la matrice A est nulle, donc le rang de A est inférieur ou égal à 2, les deux suivantes ne sont pas proportionnelles, donc le rang de A est au moins 2.

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = 2$$

7.

$\text{Im}(f)$ est engendré par $f(X) = 1 + X$ et $f(X^2) = 2X + 2X^2$, cette famille constitue une base de $\text{Im}(f)$.

8.

D'après le théorème du rang, la dimension du noyau de f est 1, car

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim \mathbb{R}_2[X] = 3$$

Or $f(1) = 0$, donc le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par le « vecteur » 1. (C'est-à-dire le polynôme constant égale à 1).

Allez à : **Exercice 47**

Correction exercice 48.

1.

$$\begin{aligned} u(\alpha P + \beta Q) &= \alpha P + \beta Q + (1 - X)(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P + \beta Q + (1 - X)(\alpha P' + \beta Q') \\ &= \alpha(P + (1 - X)P') + \beta(Q + (1 - X)Q') = \alpha u(P) + \beta u(Q) \end{aligned}$$

Donc u est une application linéaire

$$d^\circ P \leq 2 \Rightarrow d^\circ u(P) \leq 2$$

Elle va de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.

$$\begin{aligned} u(1) &= 1 + (1 - X) \times 0 = 1 \\ u(X) &= X + (1 - X) \times 1 = 1 \\ u(X^2) &= X^2 + (1 - X) \times 2X = 2X - X^2 \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. $P \in \ker(u)$

$$\begin{aligned} u(P) = 0 &\Leftrightarrow u(aX^2 + bX + c) = au(X^2) + bu(X) + cu(1) = a(2X - X^2) + b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow -aX^2 + 2aX + b + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \end{cases} \\ P &= bX - b = b(X - 1) \end{aligned}$$

Donc $\ker(u)$ est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $X - 1$.

$$Im(u) = Vect(u(1), u(X), u(X^2)) = Vect(1, 1, 2X - X^2) = Vect(1, 2X - X^2)$$

Ces deux polynômes ne sont pas proportionnels ils forment donc une famille libre (et génératrice) de $Im(u)$ donc une base de $Im(u)$.

Allez à : **Exercice 48**

Correction exercice 49.

1. Si $d^\circ P \leq 2$ alors $d^\circ P' \leq 1$ et $d^\circ(X - 1)P' \leq 2$ donc $d^\circ u(P) \leq 2$

D'autre part

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= 2(\lambda P + \mu Q) - (X - 1)(\lambda P + \mu Q)' = 2(\lambda P + \mu Q) - (X - 1)(\lambda P' + \mu Q') \\ &= \lambda(2P - (X - 1)P') + \mu(2Q - (X - 1)Q') = \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

Cela montre que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.

$$\begin{aligned} u(1) &= 2 \times 1 - (X - 1) \times 0 = 2; \\ u(X) &= 2X - (X - 1) \times 1 = X + 1; \\ u(X^2) &= 2X^2 - (X - 1) \times 2X = 2X \end{aligned}$$

Par conséquent

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Soit $P = aX^2 + bX + c$

$$u(P) = au(X^2) + bu(X) + cu(1) = 2aX + b(1 + X) + 2c = (2a + b)X + b + 2c$$

Donc

$$u(P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{b}{2} \\ c = -\frac{b}{2} \end{cases}$$

Et

$$P = -\frac{b}{2}X^2 + bX - \frac{b}{2} = -\frac{b}{2}(X^2 - 2X + 1) = -\frac{b}{2}(X - 1)^2$$

Le noyau de u est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $P_2 = (X - 1)^2$

4. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$$

Donc

$$\dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\ker(u)) = 3 - 1 = 2$$

$u(1) = 2$ et $u(X) = 1 + X$ sont deux polynômes non proportionnels de l'image de u , ils forment donc une famille libre dans un espace de dimension 2, $(2, 1 + X)$ est une base de $\text{Im}(u)$.

5. Soit $P = aX^2 + bX + c$

$$u(P) = P \Leftrightarrow (2a + b)X + b + 2c = aX^2 + bX + c \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a \\ 2a + b = b \\ b + 2c = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a = 0 \\ c = -b \end{cases}$$

$$P = bX - b = b(X - 1)$$

$$P_1 = X - 1$$

6.

$$\alpha + \beta(X - 1) + \gamma(X - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta + \gamma + (\beta - 2\gamma)X + \gamma X^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

β' est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

7. $u(1) = 2 \times 1$, $u(P_1) = P_1$ et $u(P_2) = 0$, donc

$$D = \begin{pmatrix} u(1) & u(P_1) & u(P_2) \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ P_1 \\ P_2 \end{matrix}$$

Allez à : **Exercice 49**

Correction exercice 50.

1. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) - (X - 2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 - (X - 2)(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2') \\ &= \lambda_1 (P_1 - (X - 2)P_1') + \lambda_2 (P_2 - (X - 2)P_2') = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2. f est un endomorphisme si l'image de $\mathbb{R}_2[X]$ par f est $\mathbb{R}_2[X]$, autrement dit il faut que l'image d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 soit un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Première méthode

$$\begin{aligned} f(aX^2 + bX + c) &= aX^2 + bX + c - (X - 2)(2aX + b) \\ &= aX^2 + bX + c - (2aX^2 + bX - 4aX - 2b) = -aX^2 + 4aX + c - 2b \end{aligned}$$

C'est bon, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (parce qu'il est clair que f est linéaire d'après la première question).

Deuxième méthode

$$d^\circ P \leq 2 \Rightarrow d^\circ P' \leq 1$$

Donc

$$d^\circ (X - 2)P' \leq 1 + 1 = 2$$

Par conséquent

$$d^\circ f(P) \leq 2$$

Troisième méthode

Comme $f(aX^2 + bX + c) = af(X^2) + bf(X) + cf(1)$, il suffit de vérifier que $d^\circ f(X^2) \leq 2$, $d^\circ f(X) \leq 2$ et que $d^\circ f(1) \leq 2$, ce qui est le cas car

$$f(X^2) = X^2 - (X - 2) \times 2X = -X^2 + 4X;$$

$$f(X) = X - (X - 2) \times 1 = 2;$$

$$f(1) = 1 - (X - 2) \times 0 = 1$$

3.

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow -aX^2 + 4aX + c - 2b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 0 \\ 4a = 0 \\ c - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 2b \end{cases}$$

$$P = bX + 2b = b(X + 2)$$

Les polynômes de $\ker(f)$ sont proportionnels au polynôme $X + 2$, il s'agit d'une droite vectorielle dont une base est le polynôme $X + 2$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) \Leftrightarrow 1 + \dim(\text{Im}(f)) = 3 \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 2$$

$$f(X^2) = -X^2 + 4X; f(X) = 2$$

Ces deux polynômes ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $\text{Im}(f)$ qui est de dimension 2, c'est une base de $\text{Im}(f)$.

Remarque :

$f(1) = 1$ est proportionnel au vecteur (polynôme) $f(X) = 2$.

4.

$$f(X^2) = 4X - X^2; f(X) = 2; f(1) = 1$$

Par conséquent

$$A = \text{Mat}_{(1, X, X^2)}(f) = \begin{pmatrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

5.

$$\alpha \times 1 + \beta(X - 2) + \gamma(X - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta X - 2\beta + \gamma X^2 - 4\gamma X + 4\gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma X^2 + (\beta - 4\gamma)X + \alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta - 4\gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

β' est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base.

6.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & X - 2 & (X - 2)^2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = y_1 \\ x_2 - 4x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 4x_3 + y_1 \\ x_2 = 4x_3 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2(y_2 + 4y_3) - 4y_3 + y_1 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque :

On rappelle que P^{-1} est la matrice de passage de β' à β , cela signifie que

$$1 = 1$$

$$X = 2 \times 1 + 1 \times (X - 2)$$

$$X^2 = 4 \times 1 + 4 \times (X - 2) + 1 \times (X - 2)^2$$

7.

$$\begin{aligned}
 f(1) &= 1 \\
 f(X-2) &= X-2 - (X-2) \times 1 = 0 \\
 f((X-2)^2) &= (X-2)^2 - (X-2) \times 2(X-2) = -(X-2)^2
 \end{aligned}$$

Donc

$$D = \text{Mat}_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} f(1) & f(X-2) & f((X-2)^2) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X-2 \\ (X-2)^2 \end{matrix}$$

Deuxième méthode

On calcule

$$\begin{aligned}
 D = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On trouve bien sûr le même résultat (cela fait partie du cours).

Allez à : [Exercice 50](#)

Correction exercice 51.

1.

$$\begin{aligned}
 u(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + (1-X)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' + 2(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)'' \\
 &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + (1-X)(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2') + 2(\lambda_1 P_1'' + \lambda_2 P_2'') \\
 &= \lambda_1 (P_1 + (1-X)P_1' + 2P_1'') + \lambda_2 (P_2 + (1-X)P_2' + 2P_2'') = \lambda_1 u(P_1) + \lambda_2 u(P_2)
 \end{aligned}$$

u est une application linéaire.

2. Il est clair que le degré de $u(P) = P + (1-X)P' + 2P''$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 lorsque P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Par conséquent u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

3.

$$\begin{aligned}
 u(1) &= 1 \\
 u(X) &= X + (1-X) \times 1 = 1 \\
 u(X^2) &= X^2 + (1-X) \times 2X + 2 \times 2 = 4 + 2X - X^2 \\
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 \alpha(1-X) + \beta \times 1 + \gamma(1+2X-X^2) = 0 &\Leftrightarrow -\gamma X^2 + (-\alpha + 2\gamma)X + \alpha + \beta + \gamma = 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Cette famille est libre, elle a trois vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

5.

$$\begin{aligned}
 u(1-X) &= 1-X + (1-X) \times (-1) = 0 \\
 u(1) &= 1 \\
 u(1+2X-X^2) &= 1+2X-X^2 + (1-X) \times (2-2X) + 2 \times (-2) = -1-2X+X^2 \\
 &= -(1+2X-X^2)
 \end{aligned}$$

Donc

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : [Exercice 51](#)

Correction exercice 52.

1. Soient
- P_1
- et
- P_2
- deux polynômes de
- $\mathbb{R}_2[X]$
- et
- λ_1
- et
- λ_2
- deux réels.

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(X) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(X+1) - (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(X) \\ &= \lambda_1 P_1(X+1) + \lambda_2 P_2(X+1) - (\lambda_1 P_1(X+1) + \lambda_2 P_2(X+1)) \\ &= \lambda_1 (P_1(X+1) - P_1(X)) + \lambda_2 (P_2(X+1) - P_2(X)) = \lambda_1 f(P_1)(X) + \lambda_2 f(P_2)(X) \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que :

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 f(P_1)(X) + \lambda_2 f(P_2)$$

- 2.
- f
- est linéaire.

$$\begin{aligned} f(1)(X) &= 1 - 1 = 0 \\ f(X)(X) &= (X+1) - X = 1 \\ f(X^2) &= (X+1)^2 - X^2 = 1 + 2X \end{aligned}$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

- 3.

$$\begin{aligned} \alpha \times 1 + \beta \times (X-1) + \gamma \times (X-1)(X-2) &= 0 \Leftrightarrow \gamma X^2 + (\beta - 3\gamma)X + (\alpha - \beta + 2\gamma) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta - 3\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

 \mathcal{B}' est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3 c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

- 4.

$$f(1)(X) = 0, f(X-1)(X) = (X-1+1) - (X-1) = 1 \text{ et}$$

$$\begin{aligned} f((X-1)(X-2))(X) &= (X-1+1)(X-2+1) - (X-1)(X-2) = X(X-1) - (X-1)(X-2) \\ &= (X-1)(X - (X-2)) = 2(X-1) \end{aligned}$$

Donc

$$B = \begin{pmatrix} f(1) & f(X-1) & f((X-1)(X-2)) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X-1 \\ (X-1)(X-2) \end{matrix}$$

Allez à : [Exercice 52](#)

Correction exercice 53.

1. Soient
- $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$
- ,
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= ((\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(1), (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(-1)) \\ &= (\lambda_1 P_1(-1) + \lambda_2 P_2(-1), \lambda_1 P_1(1) + \lambda_2 P_2(1)) \\ &= \lambda_1 (P_1(-1), P_1(1)) + \lambda_2 (P_2(-1), P_2(1)) = \lambda_1 g(P_1) + \lambda_2 g(P_2) \end{aligned}$$

Donc h est linéaire.

2. Soit
- $P \in \ker(g)$
- ,
- $(P(-1), P(1)) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases}$

Un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 qui s'annule en -1 et en 1 est de la forme

$$P = (aX + b)(X+1)(X-1) = aX(X^2 - 1) + b(X^2 - 1)$$

 $(X(X^2 - 1), X^2 - 1)$ forme une famille libre (car les polynômes ne sont pas proportionnels) qui engendre $\ker(g)$, c'est une base de $\ker(g)$.Une base \mathbb{R}^3 est $(1, X, X^2, X^3)$

$$g(1) = (1,1); g(X) = (-1,1); g(X^2) = (1,1); g(X^3) = (-1,1)$$

L'image de g est engendré par $(1,1)$ et $(-1,1)$ (ces vecteurs ne sont pas proportionnels) ils forment donc une famille libre, bref c'est une base de $\mathcal{I}m(g)$, comme $\mathcal{I}m(g) \subset \mathbb{R}^2$ et qu'ils ont la même dimension, on en déduit que $\mathcal{I}m(g) = \mathbb{R}^2$.

3. La linéarité de h est évidente (voir 1°).

Soit $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$ un vecteur de $\ker(h)$,

$$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

Le noyau de h est réduit au vecteur nul, de plus d'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(h)) + \dim(\mathcal{I}m(h)) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) \Leftrightarrow \dim(\mathcal{I}m(h)) = 2$$

Donc $\mathcal{I}m(h) = \mathbb{R}_1[X]$, autrement dit h est surjective, finalement h est bijective.

Allez à : **Exercice 53**

Correction exercice 54.

1. a et b ne sont pas proportionnelles donc (a, b) est libre, de plus (a, b) est une famille génératrice de H donc c'est une base de H , d'où $\dim(H) = 2$.

2. Soit $\theta_{\mathbb{R}}$ l'application nulle, $\theta_{\mathbb{R}}(\ln(2)) = 0$ donc $\theta_{\mathbb{R}} \in F$

Soient $f_1 \in F$ et $f_2 \in F$, donc $f_1(\ln(2)) = 0$ et $f_2(\ln(2)) = 0$ et soient λ_1, λ_2 deux réels

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(\ln(2)) = \lambda_1 f_1(\ln(2)) + \lambda_2 f_2(\ln(2)) = \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 0 = 0$$

Donc $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in F$, F est un sous-espace-vectoriel de H .

3. On rappelle que

$$\operatorname{ch}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{sh}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$f \in F \Leftrightarrow \begin{cases} f \in H \\ f(\ln(2)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, f = \lambda a + \mu b \\ f(\ln(2)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} f(x) = \lambda a(x) + \mu b(x) \\ f(\ln(2)) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} f(x) = \lambda a(x) + \mu b(x) \\ \lambda a(\ln(2)) + \mu b(\ln(2)) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} f(x) = \lambda a(x) + \mu b(x) \\ \lambda \frac{5}{4} + \mu \frac{3}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} f(x) = \lambda a(x) + \mu b(x) \\ \lambda = -\frac{3}{5}\mu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\frac{3}{5}\mu a(x) + \mu b(x) \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}, f = \mu \left(-\frac{3}{5}a + b\right)$$

F est un espace de dimension 1 dont une base est $-\frac{3}{5}a + b$.

4. a) Soient $f_1 \in H$ et $f_2 \in H$ et soient λ_1, λ_2 deux réels.
- $$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= ((\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(-\ln(2)), (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(\ln(2))) \\ &= (\lambda_1 f_1(-\ln(2)) + \lambda_2 f_2(-\ln(2)), \lambda_1 f_1(\ln(2)) + \lambda_2 f_2(\ln(2))) \\ &= \lambda_1 (f_1(-\ln(2)), f_1(\ln(2))) + \lambda_2 (f_2(-\ln(2)), f_2(\ln(2))) = \lambda_1 \varphi(f_1) + \lambda_2 \varphi(f_2) \end{aligned}$$

Donc φ est une application linéaire.

- b) Soit $f \in \ker(\varphi)$, $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} f(x) = \lambda a(x) + \mu b(x)$

$$\begin{aligned} \varphi(f) = (0,0) &\Leftrightarrow (f(-\ln(2)), f(\ln(2))) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(-\ln(2)) = 0 \\ f(\ln(2)) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda a(-\ln(2)) + \mu b(-\ln(2)) = 0 \\ \lambda a(\ln(2)) + \mu b(\ln(2)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \frac{5}{4} - \mu \frac{3}{4} = 0 \\ \lambda \frac{5}{4} + \mu \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $f = \theta_{\mathbb{R}}$, le noyau de φ est réduit au vecteur nul donc φ est injective, d'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(H) \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(\varphi)) = 2$$

Ce qui montre que φ est surjective, finalement φ est surjective donc bijective.

Allez à : **Exercice 54**

Correction exercice 55.

1. Soient $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et soient λ et μ deux réels.

La matrice nulle O vérifie ${}^tO = -O$

$${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB = \lambda(-A) + \mu(-B) = -(\lambda A + \mu B)$$

Donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et soient λ et μ deux réels.

La matrice nulle O vérifie ${}^tO = O$

$${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB = \lambda A + \mu B = \lambda A + \mu B$$

Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$2. \quad {}^t\left(\frac{A+{}^tA}{2}\right) = \frac{1}{2}({}^tA + {}^t({}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA + A) \text{ donc } \frac{A+{}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$${}^t\left(\frac{A-{}^tA}{2}\right) = \frac{1}{2}({}^tA - {}^t({}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA) \text{ donc } \frac{A-{}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

3. Pour toute matrice A :

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

Donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA = -A$ et ${}^tA = A$ donc $A = -A$ d'où $A = O$.

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{O\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ entraîne que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 5.

$$A_s = \frac{1}{2}(A + {}^tA) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_a = \frac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

A est la somme de $A_s \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $A_a \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Allez à : **Exercice 55**

Correction exercice 56.

1. $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 2 \times 2 = 4$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \ker(\phi)$

$$\phi(A) = O \Leftrightarrow A - {}^tA = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = c$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La famille de matrices

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\ker(\phi)$ et

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Montre que cette famille est libre, elle forme donc une base de $\ker(\phi)$ et $\dim(\ker(\phi)) = 3$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\phi(A) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c-b \\ b-c & 0 \end{pmatrix} = (b-c) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent l'image de ϕ est la droite engendrée par la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{Im}(\phi)$ étant une droite, toute matrice de cette image est proportionnelle à J .

Allez à : **Exercice 56**

Correction exercice 57.

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ b+c & a-b & a-c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ b+c & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

2.

a)

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 - L_1 & L_3 - L_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ b & c-b & d-b \\ b^2 & c^2-b^2 & d^2-b^2 \end{vmatrix} = (c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ b^2 & c+b & d+b \end{vmatrix} \\ = (c-b)(d-b)(d-c)$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) & (d-a)(d+a) \\ a^3 & (b-a)(b^2+ba+a^2) & (c-a)(c^2+ac+a^2) & (d-a)(d^2+da+a^2) \end{vmatrix} \\ = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a & d+a \\ a^3 & b^2+ba+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+da+a^2 \end{vmatrix} \\ = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b+a & 1 & 1 & 1 \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+da+a^2 & \end{vmatrix} \\ = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2+ba & c^2+ac & d^2+da \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 - aL_1 \\ L_3 - a^2L_1 \end{matrix} \\ = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_3 - aL_2 \\ \end{matrix} \\ = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Allez à : **Exercice 57**

Correction exercice 58.

1.

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{cccc|cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_1 & C_2 - C_1 & C_3 - C_1 & C_4 - C_1 \\ a & a & a & a & a & 0 & 0 & 0 \\ a & b & b & b & a & b-a & b-a & b-a \\ a & b & c & c & a & b-a & c-a & c-a \\ a & b & c & d & a & b-a & c-a & d-a \end{array} = a \begin{array}{ccc|ccc} b-a & b-a & b-a & & & \\ b-a & c-a & c-a & & & \\ b-a & c-a & d-a & & & \end{array} \\
& = a(b-a) \begin{array}{ccc|ccc} C_1 & C_2 & C_3 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ b-a & c-a & c-a & & & \\ b-a & c-a & d-a & & & \end{array} = a(b-a) \begin{array}{ccc|ccc} C_1 & C_2 - C_2 & C_3 - C_1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ b-a & c-b & c-b & & & \\ b-a & c-b & d-b & & & \end{array} \\
& = a(b-a) \begin{array}{cc|cc} c-b & c-b & & \\ c-b & d-b & & \end{array} = a(b-a)(c-b) \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ c-b & d-b & & \end{array} \\
& = a(b-a)(c-b)(d-c)
\end{aligned}$$

$$2. \Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ a = b \\ \text{ou} \\ b = c \\ \text{ou} \\ c = d \end{cases}$$

Allez à : **Exercice 58**

Correction exercice 59.

Première partie

1.

$$\text{Soit } x = (x_1, x_2, x_3) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
x \in \ker(u) &\Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \\
&x = (x_3, -x_3, x_3) = x_3(1, -1, 1)
\end{aligned}$$

On pose $a = (1, -1, 1)$ et alors $\ker(u) = \text{Vect}(a)$

$$2. \text{ On pose } X_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, X_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
u(b) = a &\Leftrightarrow AX_b = X_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 = 1 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 + 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

On prend, par exemple $x_3 = 0$ alors $b = (1, 0, 0)$ 3. Soient $x \in E_1$, $x' \in E_1$ et λ et λ' deux réels

$$u(\lambda x + \lambda' x') = \lambda u(x) + \lambda' u(x') = \lambda x + \lambda' x'$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lambda x + \lambda' x' &\in E_1 \\
u(0_{\mathbb{R}^3}) &= 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E_1
\end{aligned}$$

Donc E_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

$$x \in E_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = x_1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = x_2 \\ x_1 - x_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_3 \\ x_1 = 2x_3 \end{cases}$$

$$x = (2x_3, -2x_3, x_3) = x_3(2, -2, 1)$$

Si on pose $c = (2, -2, 1)$ alors $E_1 = \text{Vect}(c)$.

4.

$$\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Donc (a, b, c) est une base de \mathbb{R}^3 .

5.

$$\begin{aligned} u(a) &= 0_{\mathbb{R}^3} \\ u(b) &= a \\ u(c) &= c \end{aligned}$$

Donc

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. $T = Q^{-1}AQ$

Deuxième partie

1.

$$\begin{aligned} f(1) &= (2 + X + X^2) \times 1 - (1 + 2X + X^2 + X^3) \times 0 + \frac{1}{2}(-1 + X + X^2 + X^3 + X^4) \times 0 \\ &= 2 + X + X^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(X) &= (2 + X + X^2)X - (1 + 2X + X^2 + X^3) \times 1 + \frac{1}{2}(-1 + X + X^2 + X^3 + X^4) \times 0 \\ &= 2X + X^2 + X^3 - 1 - 2X - X^2 - X^3 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(X^2) &= (2 + X + X^2)X^2 - (1 + 2X + X^2 + X^3) \times 2X + \frac{1}{2}(-1 + X + X^2 + X^3 + X^4) \times 2 \\ &= 2X^2 + X^3 + X^4 - 2X - 4X^2 - 2X^3 - 2X^4 - 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = -1 - X - X^2 \\ f(\alpha + \beta X + \gamma X^2) &= \alpha f(1) + \beta f(X) + \gamma f(X^2) \in \mathbb{R}_2[X] \end{aligned}$$

Car $f(1) \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ et $f(X^2) \in \mathbb{R}_2[X]$

2.

$$B = \begin{pmatrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

3. Les coordonnées de $P_0 = 1 + X + X^2$ dans la base \mathcal{B} sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de $P_1 = 1 + X$ dans la base \mathcal{B} sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de $P_2 = 2 + X + X^2$ dans la base \mathcal{B} sont $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det(P_0, P_1, P_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

En développement par rapport à la troisième ligne.

Donc (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4.

$$\text{Les coordonnées de } f(P_0) \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ sont } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } f(P_0) = 0$$

$$\text{Les coordonnées de } f(P_1) \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ sont } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } f(P_1) = 1 + X + X^2 = P_0$$

$$\text{Les coordonnées de } f(P_2) \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ sont } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } f(P_2) = 2 + X + X^2 = P_2$$

Donc

$$T' = \begin{pmatrix} f(P_0) & f(P_1) & f(P_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{matrix} = T$$

5. $T' = Q'^{-1}BQ'$

Troisième partie

$$Q'^{-1}BQ' = Q^{-1}AQ \Leftrightarrow QQ'^{-1}BQ'Q^{-1} = A \Leftrightarrow (Q'Q^{-1})^{-1}B(Q'Q^{-1}) = A$$

Donc A et B sont semblables.Allez à : **Exercice 59**

Correction exercice 60.

1. Si $x \in \ker(v)$ alors $v(x) = 0_E$, alors $v(v(x)) = v(0_E) = 0_E$ donc $x \in \ker(v^2)$,cela montre que $\ker(v) \subset \ker(v^2)$, de même si $x \in \ker(v^2)$ alors $v^2(x) = 0_E$, alors $v(v^2(x)) = v(0_E) = 0_E$ donc $x \in \ker(v^3)$, cela montre que $\ker(v^2) \subset \ker(v^3)$ et ainsi de suite.2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$x \in \ker(u + id_{\mathbb{R}^4}) \Leftrightarrow (A + I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (x_1, 0, x_1, 0) = x_1(1, 0, 1, 0)$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x \in \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2) \Leftrightarrow (A + I)^2 X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 4x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, 0) = x_1(1,0,1,0) + x_2(0,1,0,0)$$

$((1,0,1,0), (0,1,0,0))$ est une famille de vecteurs non proportionnels (donc libre)

qui engendrent $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$, il s'agit d'une base de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$.

$$(A + I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$x \in \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3) \Leftrightarrow (A + I)^3 X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_4 = 0$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, 0) = x_1(1,0,0,0) + x_2(0,1,0,0) + x_3(0,0,0,1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

(e_1, e_2, e_3) est une famille (évidemment libre) qui engendre $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3)$,

c'est une base de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3)$.

$$(A + I)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$x \in \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^4) \Leftrightarrow (A + I)^4 X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_4 = 0$$

$$\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3) = \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^4)$$

$$p = 3$$

3.

a) $a = (1,0,1,0)$ et $X_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) On pose $b = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $X_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique

$$a = (u + id_{\mathbb{R}^4})(b) \Leftrightarrow (A + I)X_b = X_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 1 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

On prend, par exemple $x_3 = 0$, $b = (0,1,0,0)$.

$$(u + id_{\mathbb{R}^4})^2(b) = (u + id_{\mathbb{R}^4}) \circ (u + id_{\mathbb{R}^4})(b) = (u + id_{\mathbb{R}^4})(a) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Donc $b \in \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$

D'autre part, a et b ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre d'un espace de dimension 2, c'est une base de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$.

c) On pose $c = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $X_c = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique

$$b = (u + id_{\mathbb{R}^4})(c) \Leftrightarrow (A + I)X_c = X_b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 + 1 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

On prend, par exemple $x_1 = 0$, $c = (0,0,1,0)$

$$x \in \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Les composantes de c ne vérifient pas $\begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ donc $c \notin \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$, de plus (a, b) est une famille libre de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$ par conséquent (a, b, c) est une famille libre, elle a trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension trois, c'est une base de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^2)$.

$$d) a = (u + id_{\mathbb{R}^4})(b) \Leftrightarrow a = u(b) + b \Leftrightarrow u(b) = a - b$$

$$b = (u + id_{\mathbb{R}^4})(c) \Leftrightarrow b = u(c) + c \Leftrightarrow u(c) = b - c$$

4. les coordonnées de d dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $u(d) = d$

5. $x \in \ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3) \Leftrightarrow x_4 = 0$

Les composantes de d ne vérifient pas $x_4 = 0$ et (a, b, c) est une famille libre de $\ker((u + id_{\mathbb{R}^4})^3)$ donc (a, b, c, d) est une famille libre, elle a quatre vecteurs donc c'est une base de \mathbb{R}^4 .

6.

$$T = \begin{pmatrix} u(a) & u(b) & u(b) & u(d) \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}$$

$$T = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PTP^{-1}$$

7.

$$T + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (T + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (T + I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$T - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T + I)^3(T - I) = O$$

$$A + I = PTP^{-1} + PIP^{-1} = P(T + I)P^{-1} \Rightarrow (A + I)^3 = P(T + I)^3P^{-1}$$

Et

$$A - I = P(T - I)P^{-1}$$

$$(A + I)^3(A - I) = P(T + I)^3P^{-1}P(T - I)P^{-1} = P(T + I)^3(T - I)P^{-1} = POP^{-1} = O$$

Allez à : **Exercice 60**

Correction exercice 61.

1. Si $u \in \ker(g)$ alors $g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ alors $g(g(u)) = g(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $u \in \ker(g^2)$, cela montre que

$$\ker(g) \subset \ker(g^2)$$

Si $u \in \ker(g^2)$ alors $g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ alors $g(g^2(u)) = g(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $u \in \ker(g^3)$, cela montre que

$$\ker(g^2) \subset \ker(g^3)$$

2. a) $g^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ donc pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $g^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Donc $\text{Ker}(g^3) = \mathbb{R}^3$ et donc $\dim(\text{Ker}(g^3)) = 3$

$$\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subsetneq \ker(g) \subsetneq \ker(g^2) \subsetneq \ker(g^3) \text{ donc}$$

$$0 < \dim(\ker(g)) < \dim(\ker(g^2)) < \dim(\ker(g^3)) = 3$$

$$\text{Donc } \dim(\ker(g)) = 1 \text{ et } \dim(\ker(g^2)) = 2$$

- b) Si $v \in \text{Im}(g)$ alors il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $v = g(u)$ donc $g^2(v) = g^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$, donc $\text{Im}(g) \subset \ker(g^2)$

D'après le théorème du rang : $\dim(\ker(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = 3$ donc $\dim(\text{Im}(g)) = 2$. Comme $\dim(\ker(g^2)) = 2$ aussi, on en déduit que $\text{Im}(g) = \ker(g^2)$.

3. $a \in \ker(g) \subset \ker(g^2) = \text{Im}(g)$ donc il existe $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $a = g(b)$.

$$g^2(b) = g(a) = 0_{\mathbb{R}^3} \text{ donc } b \in \text{Ker}(g^2).$$

$$\lambda a + \mu b = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow g(\lambda a + \mu b) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda g(a) + \mu g(b) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \mu a = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \mu = 0$$

On remplace dans $\lambda a + \mu b = 0_{\mathbb{R}^3}$, d'où l'on tire que $\lambda = 0$. La famille (a, b) est libre.

4. $b \in \ker(g^2) = \text{Im}(g)$ donc il existe $c \in \mathbb{R}^3$ tel que $b = g(c)$.

$g^2(c) = g(b) = a \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $c \notin \ker(g^2)$ or (a, b) est une famille libre de $\ker(g^2)$ donc (a, b, c) est une famille libre à trois éléments dans \mathbb{R}^3 , un espace de dimension 3, c'est une base.

$$g(a) \quad g(b) \quad g(c)$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$$

6. La matrice de $f + Id$ dans la base canonique est : $A + I = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

La matrice de $(f + Id)^2$ dans la base canonique est :

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice de $(f + Id)^3$ dans la base canonique est :

$$(A + I)^3 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $(f + Id)^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$, par conséquent $\ker((f + Id)^3) = \mathbb{R}^3$

$(A + I)^2 \neq 0$ donc $(f + Id)^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$, il existe donc un vecteur x de \mathbb{R}^3 tel que $(f + Id)^2(x) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

Donc $\ker((f + Id)^2) \subsetneq \ker$.

Autre méthode :

on détermine une base de $\ker((f + Id)^2)$

$$x \in \ker((f + Id)^2) \Leftrightarrow (A + I)^2 X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x_1 - 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x_1 + 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{3}{2}x_3$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{3}{2}x_3, x_2, x_3\right) = \frac{3}{2}x_3(-1, 0, 2) + x_2(0, 1, 0)$$

$(-1, 0, 2)$ et $(0, 1, 0)$ sont deux vecteurs non proportionnels, donc libre de $\ker((f + Id)^2)$, d'autre part ils engendrent $\ker((f + Id)^2)$, il s'agit d'une base de $\ker((f + Id)^2)$, et $\dim(\ker((f + Id)^2)) = 2$

Donc $\ker((f + Id)^2) \subsetneq \ker((f + Id)^3) = \mathbb{R}^3$

$$(A + I)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } (A + I) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $(0, 1, 0) \in \ker((f + Id)^2)$ et $(0, 1, 0) \notin \ker(f + Id)$

Donc $\ker(f + Id) \subsetneq \ker((f + Id)^2)$

Autre méthode :

On calcule la dimension de $\ker(f + Id)$.

$$\begin{aligned} x \in \ker(f + Id) &\Leftrightarrow (A + I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - 12x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3L_2 - 5L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $x = (x_1, x_2, x_3) = (-3x_2, x_2, 2x_2) = x_2(-3, 1, 2)$, $\ker(f + Id)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(-3, 1, 2)$. $\dim(\ker(f + Id)) = 1$, comme $\ker(f + Id) \subset \ker((f + Id)^2)$ et que $\dim(\ker(f + Id)) < \dim \ker((f + Id)^2)$, on a $\ker(f + Id) \subsetneq \ker((f + Id)^2)$

Il reste à montrer que $\ker(f + Id) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, on vient de montrer que $\dim(\ker(f + Id)) = 1$, donc c'est fini.

7. D'après la question précédente $a = (-3, 1, 2)$

Soit $b = (x_1, x_2, x_3)$ tel que $(f + Id)(b) = a$

$$\begin{aligned} (A + I)X_b = X_a &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - 12x_3 = -3 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3L_2 - 5L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ -2x_2 + x_3 = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4(-2 + 2x_2) = 1 \\ x_3 = -2 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = -9 - 9x_2 \\ x_3 = -2 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - 3x_2 \\ x_3 = -2 + 2x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

On peut prendre n'importe quelle valeur pour x_2 , en général on prend 0, mais ici, $x_2 = 1$ est plus adapté.

$b = (0, 1, 0)$ convient.

$$\begin{aligned} (f + Id)(c) = b &\Leftrightarrow (A + I)X_c = X_b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & -3 & -12 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - 12x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3L_2 - 5L_1 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4(3 + 2x_2) = 0 \\ x_3 = 3 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = -12 - 9x_2 \\ x_3 = 3 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 - 3x_2 \\ x_3 = 3 + 2x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Je prends, par exemple $x_2 = -1$, on trouve alors $x_1 = -1$ et $x_3 = 1$ donc $c = (-1, -1, 1)$

8. On rappelle que, choisit ainsi, (a, b, c) est une base.

$$(f + Id)(a) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(a) + a = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(a) = -a$$

$$(f + Id)(b) = a \Leftrightarrow f(b) + b = a \Leftrightarrow f(b) = a - b$$
$$(f + Id)(c) = b \Leftrightarrow f(c) + c = b \Leftrightarrow f(c) = b - c$$

Donc

$$Mat_{(a,b,c)}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Allez à : **Exercice 61**