Quelques exercices de calcul matriciel, avec le Classpad

On trouvera ici quelques exercices de calcul matriciel.

Chaque exercice est corrigé complètement, sans la calculatrice. On montre également ce qu'il est possible de faire, pour le même énoncé, avec l'aide du Classpad.

Exercice 1 :
Trouver toutes les matrices A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$.

Solution :

Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a, b, c, d sont quatre réels quelconques.

Alors $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$.

Ainsi $A^2 = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ bc+d^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow (S_1) \begin{cases} d=-a \\ bc=1-a^2 \end{cases}$ ou $(S_2) \begin{cases} d \neq -a \\ b=c=0 \\ a^2=d^2=1 \end{cases}$

Si $b \neq 0$, le système (S_1) équivaut à $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

Si $b = 0$, (S_1) équivaut à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Le système (S_2) équivaut à $A = I_2$ ou $A = -I_2$.

On voit ici comment retrouver toutes les solutions dans l'application Principale du Classpad.

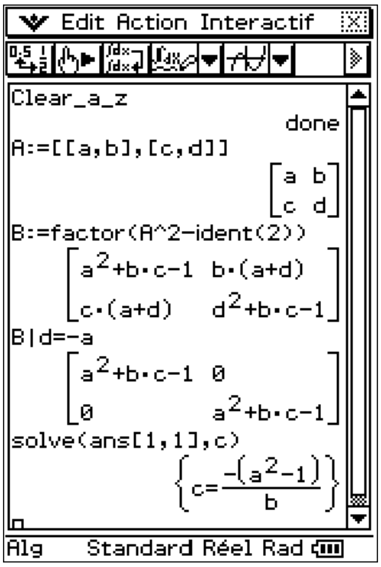

fig1

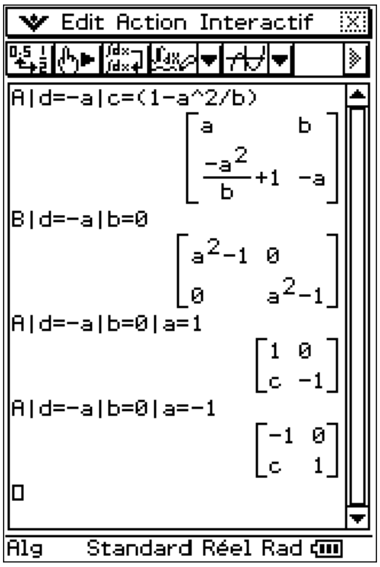

fig2

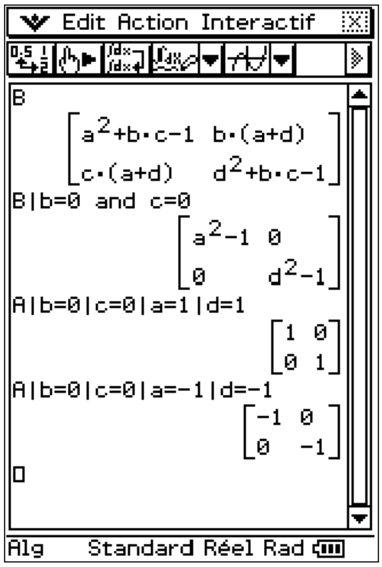

fig3

Exercice 1 :

Quelles sont les matrices qui commutent avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Solution :

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{K})$. On résout le système résultant de $AJ = JA$.

$$AJ = JA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0 \\ a_{32} = a_{42} = a_{43} = 0 \\ a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} \\ a_{12} = a_{23} = a_{34} \\ a_{13} = a_{24} \end{cases}$$

On constate donc que les matrices qui commutent avec J sont les matrices qui s'écrivent :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit les solutions sont les matrices $A = aI + bJ + cJ^2 + dJ^3$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$.
On obtient la sous-algèbre de $\mathscr{M}_4(\mathbb{K})$ engendré par I, J, J^2, J^3 (car $J^4 = 0$).

Voici comment on peut conduire ce calcul avec le Classpad (pour des raisons évidentes de lisibilité, on a préféré afficher ici l'écran issu du « Classpad Manager »).

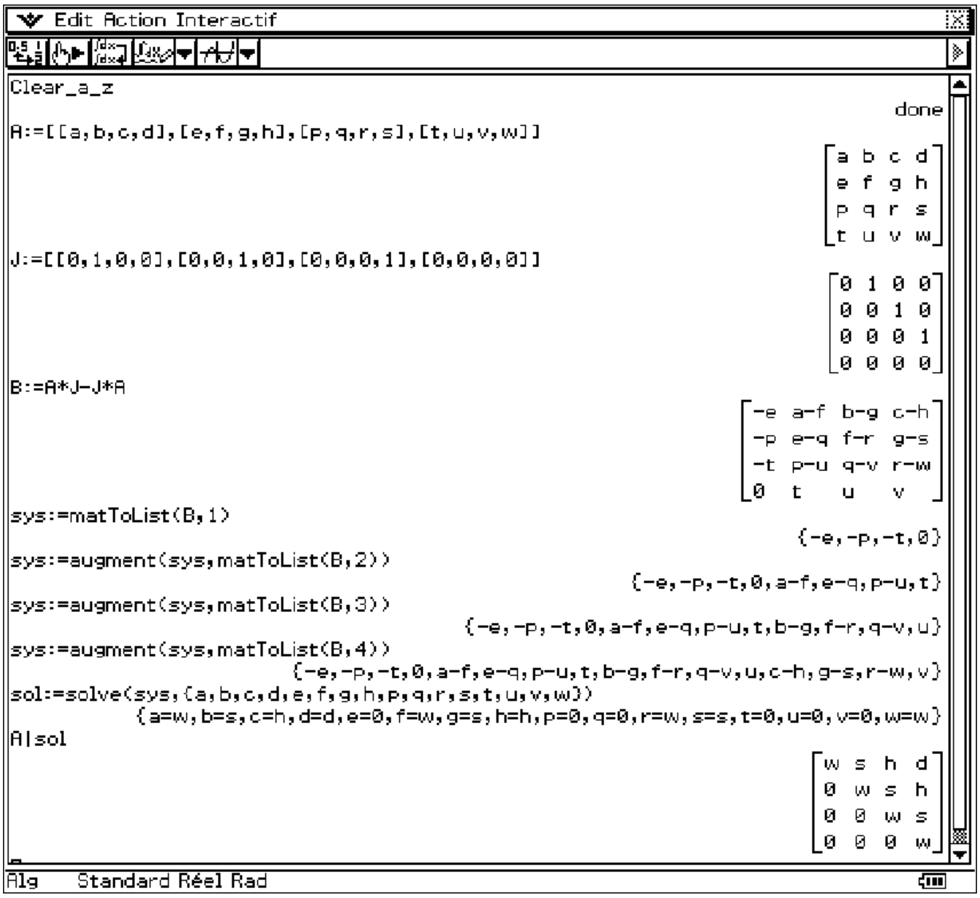

fig4

Exercice 3 :

Pour tout réel t, on pose $A(t) = \begin{pmatrix} 1+\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1-\frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A(s)A(t)$, puis $(A(t)-I)^3$.
2. Trouver $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n)$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A(t)^n = \alpha_n\, A(t)^2 + \beta_n\, A(t) + \gamma_n\, I$.

Solution :

Pour tout t de $\mathbb{R}$, on a $A(t) = I + tJ + \frac{t^2}{2}K$, avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On a $J^2 = K$, $K^2 = 0$ et $JK = KJ = 0$. Pour tout réels s, t, on en déduit :

$$\begin{aligned} A(t)A(s) &= \Big(I + tJ + \frac{t^2}{2}K\Big)\Big(I + sJ + \frac{s^2}{2}K\Big) \\ &= I + (t+s)J + \Big(\frac{s^2}{2} + \frac{t^2}{2} + st\Big)K = I + (t+s)J + \frac{(t+s)^2}{2}K = A(t+s) \end{aligned}$$

   On a : $(A(t)-I)^2 = \Big(tJ + \frac{t^2}{2}K\Big)^2 = t^2K$, puis $(A(t)-I)^3 = t^2\Big(tJ + \frac{t^2}{2}K\Big)K = 0$.

2. On a $A(t) = I + B(t)$ avec $B(t) = A(t) - I$. On sait que $B(t)^3 = 0$.

   On en déduit, en utilisant la formule du binôme :

$$\begin{aligned} A(t)^n &= I + nB(t) + \frac{n(n-1)}{2}B(t)^2 = I + n(A(t)-I) + \frac{n(n-1)}{2}(A(t)^2 - 2A(t) + I) \\ &= \frac{n(n-1)}{2}A(t)^2 - n(n-2)A(t) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}I \end{aligned}$$

   C'est le résultat attendu, avec : $\alpha_n = \dfrac{n(n-1)}{2}, \quad \beta_n = -n(n-2), \quad \gamma_n = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

   Par acquis de conscience, on vérifie que le résultat est correct si $n \in \{0, 1, 2\}$.

Voici quelques éléments de la résolution de cet exercice avec le Classpad.

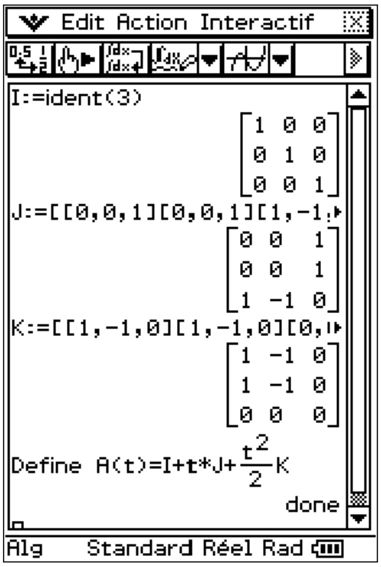

fig5

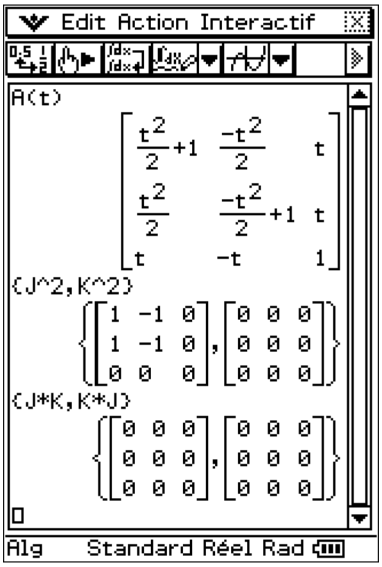

fig6

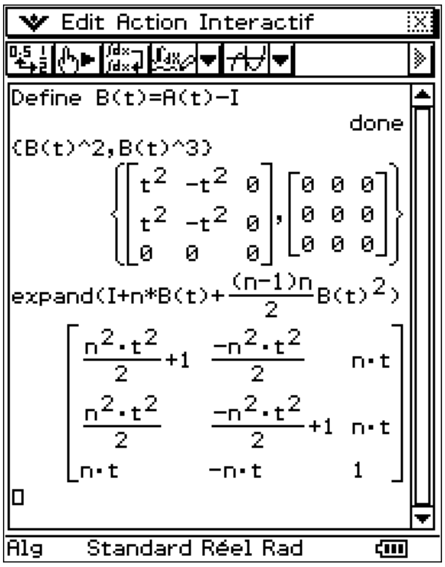

fig7

Il y a une autre méthode, pour calculer les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

On sait en effet que la matrice $A(t)$ est annulée par le polynôme $P(X) = (X-1)^3$.

Notons $X^n = (X-1)^3 Q(X) + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$ la division euclidienne de X^n par $(X-1)^3$.

Si on substitue la matrice $A(t)$ à l'indéterminée X, on trouve :

$$A(t)^n = \underbrace{(A(t)-I)^3}_{=0} Q(A(t)) + \alpha_n A(t)^2 + \beta_n A(t) + \gamma_n I = \alpha_n A(t)^2 + \beta_n A(t) + \gamma_n I.$$

Il reste à calculer $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ à partir de l'égalité (E) : $X^n = (X-1)^3 Q(X) + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$.

On substitue 1 à X et on trouve $1 = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n$.

On dérive (E) et on trouve $nX^{n-1} = (X-1)^2 R(X) + 2\alpha_n X + \beta_n$ puis $n = 2\alpha_n + \beta_n$.

On redérive (E) et on trouve $n(n-1)X^{n-2} = (X-1)S(X) + 2\alpha_n$ puis $n(n-1) = 2\alpha_n$.

Les trois égalités obtenues donnent successivement :

$$\alpha_n = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \beta_n = n - 2\alpha_n = -n(n-2), \quad \gamma_n = 1 - \alpha_n - \beta_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Voici comment on peut appliquer cette méthode dans l'application Principale (fig8).

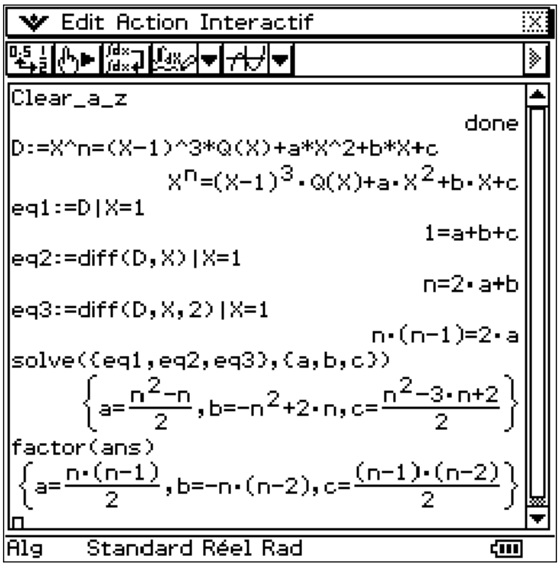

fig8

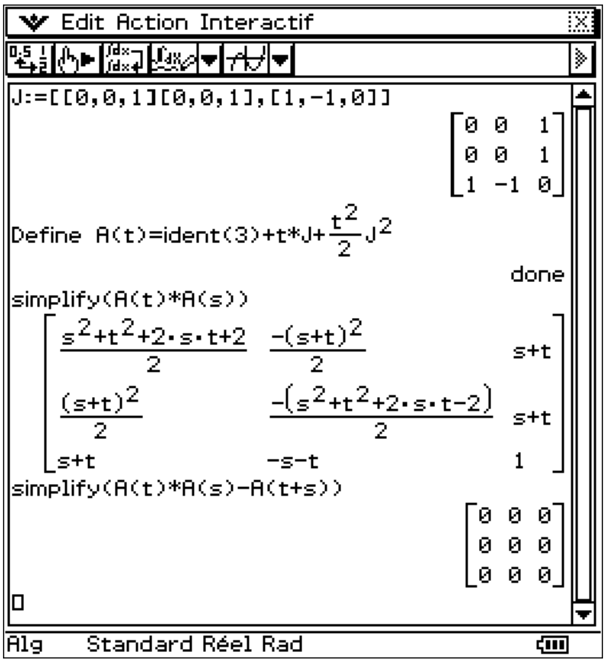

fig9

On voit également (fig9) comment vérifier directement $A(s)A(t) = A(s+t)$ avec le Classpad.

Remarque : sachant que J^3, la définition $A(t) = I_3 + tJ + \dfrac{t^2}{2}J^2$ s'écrit aussi $A(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tJ)^k}{k!}$.

Autrement dit, la matrice $A(t)$ est l'exponentielle de la matrice tJ.

On sait que si B, C sont des matrices carrées qui commutent, on a $e^B e^C = e^C e^B = e^{B+C}$.

Ce nouveau point de vue permet de retrouver $A(t)A(s) = e^{tJ}e^{sJ} = e^{(t+s)J} = A(s+t)$.

Exercice 4 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et A^3. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Solution :

On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

De même $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & -6 & -6 \\ 6 & -6 & 2 & -6 \\ 6 & -6 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.

On remarque que $A^3 = 6A - 4I$.

Ainsi $A(A^2 - 6I) = 4I$, donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{4}(A^2 - 6I)$.

Donc $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

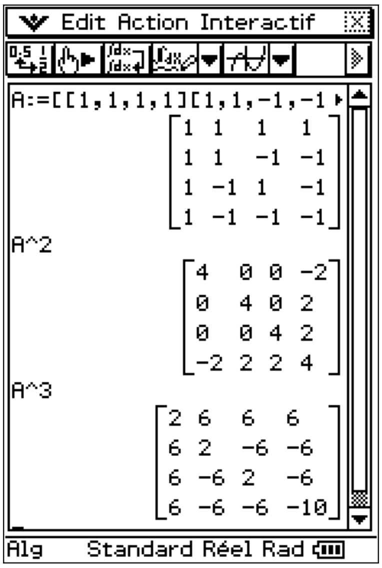

fig10

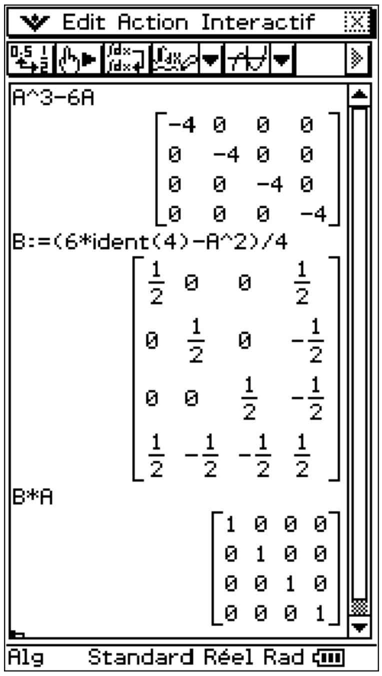

fig11

Exercice 6 :

On se donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 232 & -15 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe des matrices inversibles P telles que $P^{-1}AP = B$ et les trouver toutes.

Solution :

Soit P une matrice inversible. On a $B = P^{-1}AP$ si et seulement si $PB = AP$.

On va résoudre cette dernière équation (plus simple), et ne garder que les solutions inversibles.

Posons $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $PB = AP \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 16a + 232b & -a - 15b \\ 16c + 232d & -c - 15d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 8a + c & 8b + d \end{pmatrix}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases} 16a + 232b - c = 0 \\ a + 15b + d = 0 \\ 8a - 15c - 232d = 0 \\ 8b + c + 16d = 0 \end{cases}$ qui se réduit à $\begin{cases} a = -15b - d \\ c = -8b - 16d \end{cases}$

Les solutions sont donc les matrices $P(b, d) = \begin{pmatrix} -15b - d & b \\ -8b - 16d & d \end{pmatrix}$.

Le déterminant d'une telle matrice $P(b, d)$ est $\Delta = 8b^2 + bd - d^2$.

Si on considère Δ comme un trinôme en b, le discriminant est $33d^2$.

Ce déterminant est donc nul si $b = \dfrac{(-1 \pm \sqrt{33})d}{16}$.

Les matrices P cherchées sont donc les $P = \begin{pmatrix} -15b - d & b \\ -8b - 16d & d \end{pmatrix}$ avec $b \neq \dfrac{(-1 \pm \sqrt{33})d}{16}$.

Voici comment traiter l'exercice précédent dans l'application Principale du Classpad.

- Après avoir supprimé les variables dont le nom se réduit à une seule lettre (précaution utile ici), on définit les matrices A, B, P, puis la matrice $C = PB - AP$ (fig12).
- On crée ensuite le système exprimant que les coefficients de la matrice C sont nuls.
  On résout ce système avec l'instruction `solve` (fig13).
  On remarquera l'ordre des variables (ici a, c, b, d, ce qui signifie qu'on résout prioritairement par rapport à a et c, en considérant b et d comme des paramètres).
  On reporte dans la matrice P les solutions obtenues.
  On calcule enfin le déterminant Δ de P, puis on détermine dans quels cas il est nul.

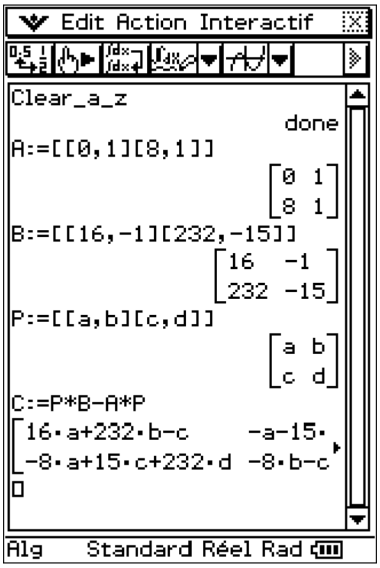

fig12

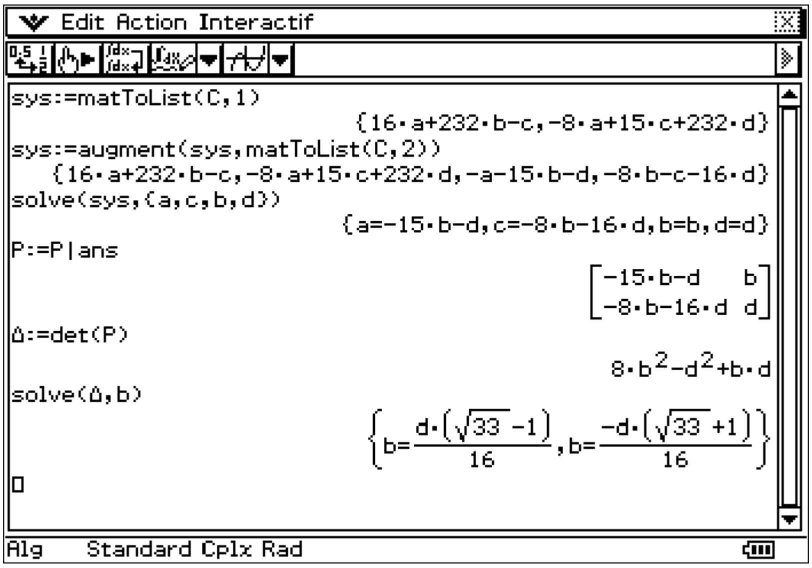

fig13

Exercice 7 :

Calculer A^n, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$.

Solution :

Posons $s = \sin\theta$ et $c = \cos\theta$.

On a $A^2 = \begin{pmatrix} -c^2 & -sc & c \\ -sc & -s^2 & s \\ -c & -s & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -s \\ -1 & 0 & c \\ -s & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c^2 & -sc & c \\ -sc & -s^2 & s \\ -c & -s & 1 \end{pmatrix} = 0$.

Finalement $A^n = 0$ pour $n \geqslant 3$.

On vérifie bien sûr que $A^3 = 0$ avec le Classpad.

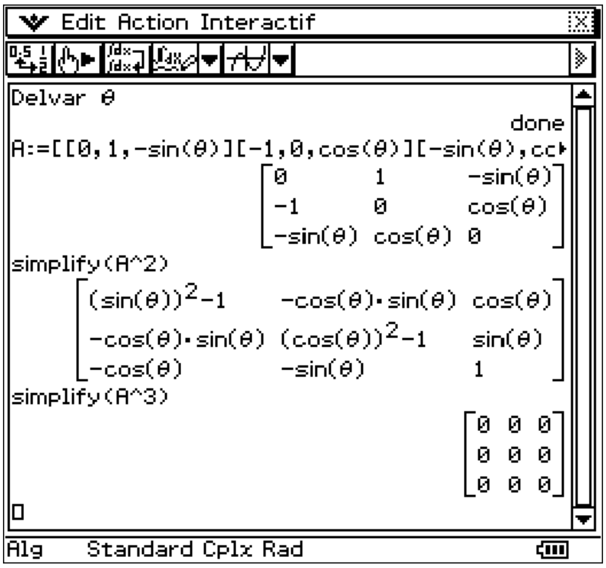

fig14