Mathématiques financières

EXERCICES CORRIGES

Cours correspondant disponible sur cours-assurance.org

Sommaire

Bibliographie

Cet enseignement est **entièrement** basé sur les sources suivantes :

- **Cours, Franck DUFAUD**
  http://math93.com/

- **Cours, Michelle LAUTON**
  http://gl.ml.free.fr/ML/COURS/080117_Transp-INTSIM_COMP.doc

- **Introduction aux mathématiques financières, Aymric KAMEGA**
  http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/fp-isfa.nsf/0/FE8AD6D32B953971C125773300703808/$FILE/AK_MFA1.pdf?OpenElement

- **Calculs bancaires, Hervé LE BORGNE**
  ISBN : 978-2-7178-4606-5

TD

TD Chapitre 1

Exercice 1 :
Soit un effet d'une valeur nominale de 30 000 venant à échéance le 1er juin. Il est escompté le 1er mars (date de valeur) au taux de 8%.
1°) Calculez le montant de l'intérêt payé sur cette opération, sachant que ce calcul s'effectue en nombre de jours exacts sur la base 360. On suppose qu'il n'y a pas de jours de banque.
2°) Quel aurait été ce même montant en adoptant un calcul en nombre de jours « en mois » / 360 ou en nombre de jours exacts / 365 ?
3°) Calculez l'écart en pourcentage.

Correction :

1°) Nombre de jours exact : j = 92 car $\begin{cases} \text{du 1 au 31 mars : 31 jours} \\ \text{du 1 au 30 avril : 30 jours} \\ \text{du 1 au 31 mai : 31 jours} \end{cases}$

Donc $I = 30\,000 \times 0{,}08 \times \dfrac{92}{360}$ soit $\boxed{\mathbf{I \approx 613{,}33}}$ *(à 0,01 près)*

2°)

- ✓ Dans le 1er cas j = 3×30=90 donc $I = 30\,000 \times 0{,}08 \times \dfrac{90}{360}$ $\boxed{\mathbf{I = 600}}$

  Soit un écart de $\dfrac{600-613.33}{613.33} \approx \boxed{\mathbf{-2{,}2\%}}$ environ par rapport au calcul du 1°).

- ✓ Dans le 2ème r cas j = 92 donc $I = 30\,000 \times 0{,}08 \times \dfrac{92}{365}$ $\boxed{\mathbf{I \approx 604{,}93}}$ *(à 0,01 près)*

  Soit un écart de $\boxed{\mathbf{-1{,}4\%}}$ environ par rapport au calcul du 1°).

Exercice 2 :
La société MIXE remet à 30 jours de l'échéance un effet à l'escompte d'une valeur de 55 000.
Le taux d'escompte est de 8% (intérêts précomptés, base 360)
1°) Calculez le montant des intérêts (on suppose qu'il n'y a pas de jours de banque).
2°) Quel serait le taux de l'opération équivalente si les intérêts étaient post-comptés ?

Correction :

1°) Les intérêts précomptés sont $I = 55\,000 \times 0{,}08 \times \dfrac{30}{360}$ soit $\boxed{\mathbf{I \approx 366{,}67}}$ à 0,01 près

2°) Si les intérêts sont pré-comptés, la société MIXE percevra lors de la remise à l'escompte 55 000 – 366,67 = **54 633,33**

Le taux postcompté est donc $\mathbf{T_{post}}$ tel que : $I = 366{,}67 = 54\,633{,}33 \times \dfrac{30}{360} \times \mathbf{T_{post}}$

On trouve $\boxed{\mathbf{T_{post}} = 8{,}05\ \%}$.

- **Exercice 3 : Taux**

Calculer les taux proportionnels annuels correspondant à un taux de 1% mensuel, 3% trimestriel, 6% semestriel et 12 % annuel.

Correction :

Taux périodique	Taux proportionnel annuel
1% mensuel	1 × 12% = 12%

3% trimestriel	$3 \times 4\% = 12\%$
6% semestriel	$6 \times 2\% = 12\%$
12% annuel	$1 \times 12\% = 12\%$

TD Chapitre 2

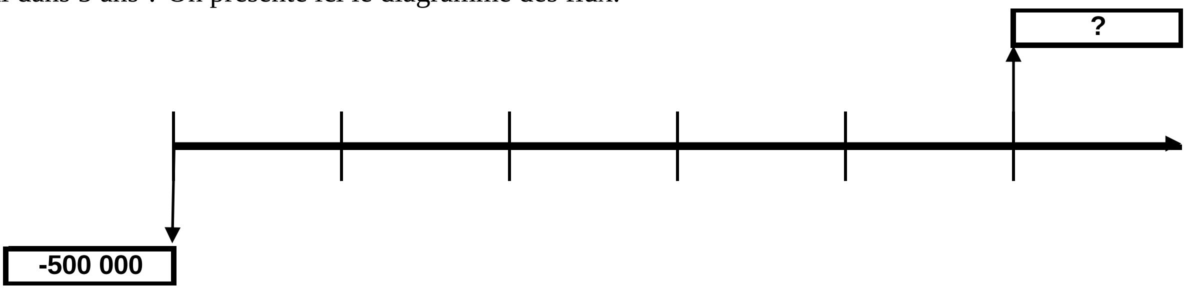
- **<u>Exercice 1</u> : Valeur future et diagramme des flux**

Soit un capital de 500 000 placé au taux annuel actuariel de 5%. Quelle est la valeur future de ce capital dans 5 ans ?

<u>Correction :</u> $Vf = 500\ 000 \times 1{,}05^5 \approx 638\ 140{,}78$

- **<u>Exercice 2</u> : Valeur future et diagramme des flux**

Soit un capital de 500 000 placé au taux annuel actuariel de 5%. Quelle est la valeur future de ce capital dans 5 ans ? On présente ici le diagramme des flux.



- La première flèche se situe au temps t_0 et correspond au versement par l'investisseur de la somme de 500 000 au titre du placement (flux négatif car il s'agit d'un décaissement). Elle représente la **valeur actuelle**.
- Les traits verticaux correspondent aux différentes périodes de capitalisation (il y en a 5).
- La seconde flèche est dirigée vers le haut (sens positif) car il s'agit pour l'investisseur d'un encaissement. C'est la **valeur future** (au terme des 5 années)

<u>Correction :</u> $Vf = 500\ 000 \times 1{,}05^5 \approx 638\ 140{,}78$

- **<u>Exercice 3</u>: Valeur future et calculs d'années**

*On place 10 000 pendant **n** années au taux actuariel annuel de 3.5%. La valeur future obtenue au bout des **n** années est de 15 110.69. Calculer **n**.*

On a l'équation : $15\ 110{,}69 = 10\ 000 \times (1 + 3{,}5\%)^n$ donc $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{15\ 110.69}{10\ 000}\right)}{\ln(1 + 3.5\%)} = 12$

- **<u>Exercice 4</u> : Valeur future et calculs de taux**

*On place 10 000 pendant 7 années au taux actuariel annuel de **t**%. La valeur future obtenue au bout des 7 années est de 20 000. Calculer **t**.*

On a l'équation : $20\ 000 = 10\ 000 \times (1 + t\%)^7$

donc $(1 + t\%)^7 = 2$ soit $t\% = 2^{1/7} - 1 \approx 0{,}10409$ d'où un taux de **<u>10,409 %</u>** (t = 10,409)

- **<u>Exercice 5</u> : Taux**

Calculer les taux actuariels correspondant à un taux de 1% mensuel, 3% trimestriel, 6% semestriel et 12 % annuel.

Taux périodique	Taux actuariel
1% mensuel	$Ta = (1 + 0{,}01)^{12} - 1 \approx 12{,}68\ \%$
3% trimestriel	$Ta = (1 + 0{,}03)^4 - 1 \approx 12{,}55\ \%$
6% semestriel	$Ta = (1 + 0{,}06)^2 - 1 \approx 12{,}36\ \%$
12% annuel	$Ta = (1 + 0{,}12)^1 - 1 = 12{,}00\ \%$

- **Exercice 6 : Taux**

Quel est le taux périodique trimestriel équivalent au taux annuel de 12 % ?

Correction :

$\boxed{C_0 \times (1 + T_{trimestre})^4 = C_0 \times (1 + T_{annuel})^1}$: donc $T_{trimestre} = 1{,}12^{1/4} - 1 \approx 0{,}02874 = \boxed{\mathbf{2{,}874\ \%}}$

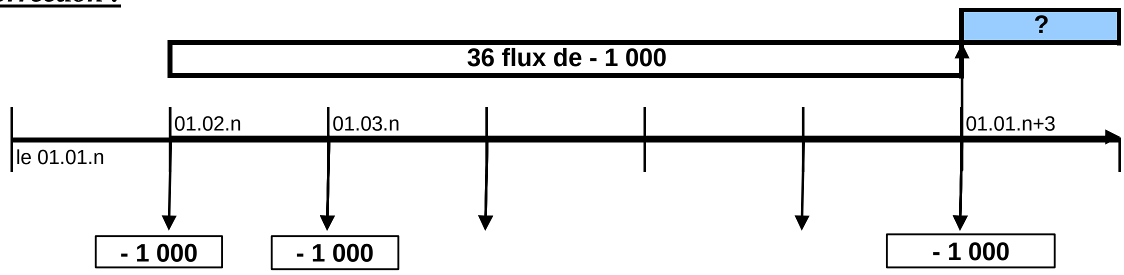
- **Exercice 7 : Valeur future**

Soit un contrat de placement de 1 000 par mois durant 3 ans au taux actuariel annuel de 5%.

- Signature du contrat le 01.01.n
- Premier versement le 01.02.n
- Fin du contrat et dernier versement le 01.01.n+3

Quelle est la valeur future de ce placement ? Présenter le diagramme des flux.

Correction :



Il s'agit de versements à termes échus.

Donc $Cu = 1\,000 + 1\,000 \times (1 + Tm) + 1\,000 \times (1 + Tm)^2 + \ldots + 1\,000 \times (1 + Tm)^{35}$

$\begin{cases} 1\,000 \text{ correspond au dernier versement} \\ 1\,000 \times (1 + Tm)^{35} \text{ au premier versement 01.02.n} \\ Tm \text{ est le taux mensuel équivalent (à calculer)} \end{cases}$

Soit après factorisation

$Cu = 1\,000 \times [1 + (1+Tm) + \ldots + (1+Tm)^{35}]$

$Cu = 1\,000 \times \dfrac{1 - (1 + Tm)^{36}}{1 - (1 + Tm)}$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison 1+Tm)

Il faut calculer Tm :

On a : $(1 + Tm)^{12} = (1 + Ta)^1$ soit $\boxed{Tm = 1{,}05^{1/12} - 1 \approx 0{,}4074\ \%}$

Donc $\boxed{\mathbf{Cu \approx 38\,689{,}22}}$

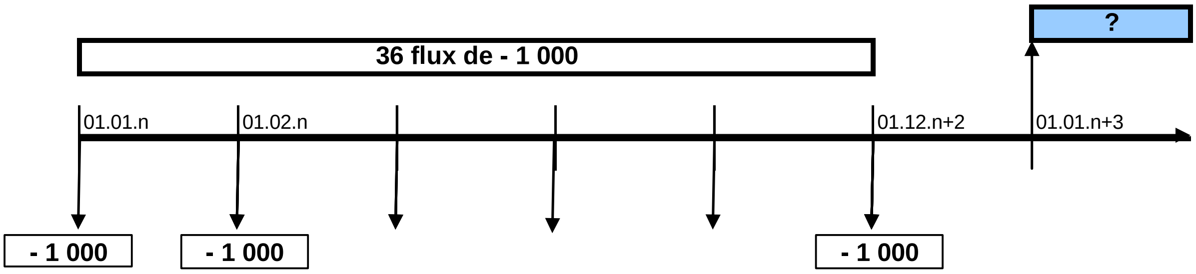
- **Exercice 8 : Valeur future.**

On reprend l'exercice précédent (exercice 8) avec cette fois.

- Début du contrat le 01.01.n
- Premier versement le 01.01.n
- Dernier versement le 01.12.n+2
- Fin du contrat le 01.01.n+3

Quelle est la valeur future de ce placement ? Présenter le diagramme des flux.

Correction :



Il s'agit de versements à termes <u>à échoir</u>.

Donc Vf = 1 000 × (1 + Tm) + 1 000 × $(1 + Tm)^2$ + …. + 1 000 × $(1 + Tm)^{36}$

$$\begin{cases} 1\,000(1 + Tm) \text{ correspond au dernier versement} \\ 1\,000 \times (1 + Tm)^{36} \text{ au premier versement 01.01.n} \\ Tm \text{ est le taux mensuel équivalent (à calculer)} \end{cases}$$

Soit après factorisation

$$Vf = 1\,000 \times [(1+Tm) + \ldots + (1+Tm)^{36}] = Cu \times (1 + Tm)$$

$$Vf = 1\,000 \times (1 + Tm) \times \frac{1 - (1 + Tm)^{36}}{1 - (1 + Tm)}$$

(Somme des termes d'une suite géométrique de raison 1+Tm)

Donc $\boxed{\mathbf{Vf \approx 38\,846{,}84}}$

TD Chapitre 3

- **Exercice 1 : Valeur actuelle**

Soit 100 000 acquis au terme d'un placement de 7 ans au taux annuel de 6%, calculer sa valeur actuelle.

$C_0 = \dfrac{100\,000}{1{,}06^7} = 100\,000 \times 1{,}06^{-7} \approx 66\,505{,}71.$

- **Exercice 2 : Valeur actuelle et calcul d'années.**

Soit 100 000 acquis au terme d'un placement de n années au taux annuel de 5%, sa valeur actuelle étant de 67 683,94. Calculer n.

$100\,000 \times 1{,}05^{-n} = 67\,683{,}94$ ou $67\,683{,}94 \times 1{,}05^{n} = 100\,000$ donc $1{,}05^{n} = \dfrac{100\,000}{67\,683{,}94}$

et $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{100\,000}{67\,683{,}94}\right)}{\ln(1{,}05)} \approx$ **8 années**

- **Exercice 3 : Valeur actuelle et calcul de taux.**

Soit 100 000 acquis au terme d'un placement de 10 années au taux annuel de t%, sa valeur actuelle étant de 64 392,77. Calculer t.

$100\,000 = 64\,392{,}77 \times (1 + t\%)^{10}$ soit $(1 + t\%)^{10} = \dfrac{100\,000}{64\,392.77}$

et $t\% = \left(\dfrac{100\,000}{64\,392.77}\right)^{1/10} - 1 \approx 0{,}04499$ donc le taux est de **4,5 % (t = 4,5)**

- **Exercice 4 : Valeur actuelle**

Soit une suite de 5 versements annuels à terme échu :

- le premier de 50 000 le 01.01.n+1
- le second de 10 000,
- les troisième et quatrième de 5 000
- le dernier de 15 000.

Déterminer la valeur actualisée au taux de 3% annuel au 01.01.n. *(Rép. : 79 926,92)*, puis cette même valeur si les flux sont début de période *(Rép : 82 324,73).*

Correction :

1°) $Va = 50\,000 \times 1{,}03^{-1} + 10\,000 \times 1{,}03^{-2} + 5\,000 \times 1{,}03^{-3} + 5\,000 \times 1{,}03^{-4} + 15\,000 \times 1{,}03^{-5}$

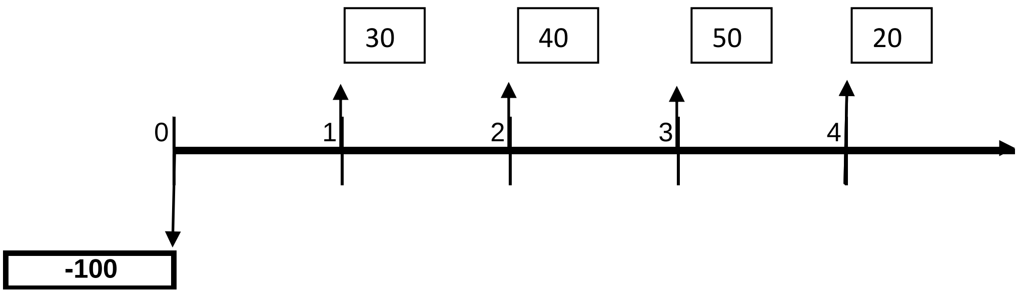
$\boxed{Va \approx 79\,926{,}92}$

2°) $Va = 50\,000 + 10\,000 \times 1{,}03^{-1} + 5\,000 \times 1{,}03^{-2} + 5\,000 \times 1{,}03^{-3} + 15\,000 \times 1{,}03^{-4}$

$\boxed{Va \approx 82\,324{,}73}$

- **Exercice 5 : Projet (VAN,IP)**

Calculer la VAN et l'Ip du projet d'investissement suivant (coût du capital = 10%)



VAN ≈ 11,56 et IP ≈ 1,1156

- **Exercice 6** : **Projet (VAN,IP)**

Soit un investissement financé à raison de 100 à la date 0, 200 six mois plus tard, et 100 douze mois plus tard.
Durée de vie 5 ans. Valeur résiduelle nulle. Cash-flows : 80,120, 130, 100, 90 (aux dates 2,3,4,5 et 6).
Coût du capital : 10%
Calculer La VAN et l'IP.
Remarque : Il faut déjà évaluer, à l'époque 0, le capital investi.

Correction.

- Evaluation, à l'époque 0, du capital investi.

$100 + 200\times(1,1)^{-0.5} + 100\times(1,1)^{-1} \approx 382$

- $VAN = 80\times(1,1)^{-2} + 120\times(1,1)^{-3} + 130\times(1,1)^{-4} + 100\times(1,1)^{-5} + 90\times(1,1)^{-6} - 382$

$\boxed{VAN = 358 - 382 = -24}$

- $IP = \frac{VAN}{I} + 1 = \frac{-24}{382} + 1$ soit $\boxed{IP \approx 0,937}$

TD Chapitre 4

- **Exercice 1**

Données :

La société « Chat » a pour projet d'investir dans la société « Ronron » afin de développer un partenariat dans le secteur de la complémentaire santé. L'investissement global de « Chat », entièrement fourni au 31/12/2013, sera de 12 M€. En contrepartie, "Ronron" s'engage à verser à « Chat» :

- Option 1 : tous ses bénéfices sur l'exercice 2014
- Option 2 : la moitié de ses bénéfices sur les exercices 2014 et 2015

Le choix de l'option étant laissé à la compagnie « Chat ».

Afin de prendre une décision, des prévisionnels ont été réalisés :

Exercice	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Résultat net "Ronron" en M€	13	14	17	20	21	22	24

Questions :

1/ Calculez le TRI de l'investissement dans le cas où "Chat" choisirait **l'option 1**.

2/ Calculez le TRI de l'investissement dans le cas où "Chat" choisirait **l'option 2**.

Correction

1/

i	0	1
Fi	-12	+13

$$\sum_{i=0}^{1} \frac{F_i}{(1+t)^i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{F_0}{(1+t)^0} + \frac{F_1}{(1+t)^1} = 0$$

$$\Leftrightarrow F_0 + \frac{F_1}{(1+t)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{F_0(1+t)}{(1+t)} + \frac{F_1}{(1+t)} = 0$$

$$\Leftrightarrow F_0(1+t) \quad + F_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow F_0 t \quad + F_0 + F_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{F_0 + F_1}{F_0}$$

Donc, le TRI est de 8,33%.

2/

i	0	1	2
Fi	-12	6,5	7

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{F_i}{(1+t)^i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{F_0}{(1+t)^0} + \frac{F_1}{(1+t)^1} + \frac{F_2}{(1+t)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow F_0 + \frac{F_1}{(1+t)} + \frac{F_2}{(1+t)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{F_0(1+t)^2}{(1+t)^2} + \frac{F_1(1+t)}{(1+t)^2} + \frac{F_2}{(1+t)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow F_0(1+t)^2 + F_1(1+t) + F_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow F_0(1+t^2+2t) + F_1(1+t) + F_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow F_0 t^2 + (2F_0 + F_1)t + F_0 + F_1 + F_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{-12}^{a} t^2 + \overbrace{-17.5}^{b} t + \overbrace{1.5}^{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{17.5 \pm \sqrt{17.5^2 + 4 * 12 * 1.5}}{2 * 10}$$

$$\Leftrightarrow t = 8.12\% \text{ ou t} = -154\%$$

Donc, le TRI est de 8.12%, l'autre valeur n'étant pas possible.

TD Chapitre 5

Exercice 1 : Etude de contradiction

On considère deux investissements. I1 : Investissement de 100 (date 0) et flux de 90, 20 et 20 aux dates 1, 2 et 3.

I2 : Investissement de 100 (date 0) et flux de 10, 20 et 130 aux dates 1, 2 et 3.

1°) Calculez les TRI et les VAN à 8%.

2°) Déterminez le taux d'indifférence qui est le taux pour lequel la VAN de I1 est égale à celle de I2.

3°) Comment comparer ces projets ?

Correction.

1°) $\boxed{\text{VAN1} = 16{,}36 \text{ et TRI1} \approx 20\%}$ $\boxed{\text{VAN2} = 29{,}61 \text{ et TRI2} \approx 19\%}$

2°) Cela revient après calculs à résoudre l'équation $80(1 + t)^{-1} - 110(1 + t)^{-3} = 0$ soit $80 - 110(1+t)^{-2} = 0$

on trouve $\boxed{t \approx 17{,}26\%}$

3°) Il y a discordance dans les critères, on doit donc utiliser un critère global ou choisir un des critères calculés (VAN ou TRI). On peut donc calculer le TRIG par exemple

---

Exercice 2 : TRIG

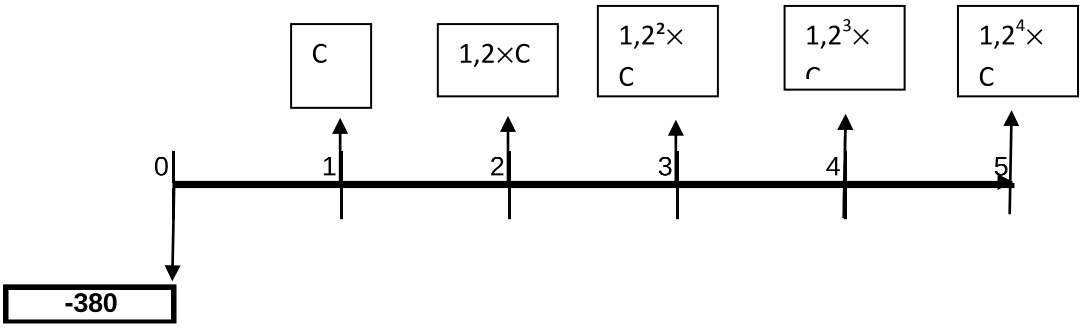
Un projet d'investissement est caractérisé par les données suivantes :

- Capital investi : 380 HT
- Cash-flows annuels en progression de 20 %
- Durée de vie : 5ans
- Valeur résiduelle nulle
- Indice de profitabilité à 6% : 1,130812.

1. Déterminez la série des cash-flows.
2. Le taux d'actualisation étant variable, résolvez l'équation : $I_p = 1$ et interprétez le résultat obtenu.
3. Sachant que les cash-flows sont réinvestis au taux de 14%, calculez le taux de rentabilité interne global.

Solution :

1°) Donc on a le diagramme des flux



Indice de profitabilité

$$I_P = \frac{1}{380} \times [C\times(1{,}06)^{-1} + 1{,}2\times C\times(1{,}06)^{-2} + 1{,}2^2C\times(1{,}06)^{-3} + 1{,}2^3\times C\times(1{,}06)^{-4} + 1{,}2^4\times C\times(1{,}06)^{-5}]$$

$$I_P = \frac{1}{380} \times C \times 1{,}06^{-1} \times \frac{1-(1{,}2\times1{,}06^{-1})^5}{1-1{,}2\times1{,}06^{-1}}$$

Car on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique $\begin{cases} \text{▪ de raison } (1{,}2\times1{,}06^{-1}) \\ \text{▪ de } 1^{er} \text{ terme : } C\times1{,}06^{-1} \end{cases}$

Donc : $$I_P = \frac{1}{380} \times C \times 1{,}06^{-1} \times \frac{1-(1{,}2\times1{,}06^{-1})^5}{1-1{,}2\times1{,}06^{-1}} = 1{,}130812$$

Soit $$C = 1{,}130812 \times 380 \times \frac{1-1{,}2\times1{,}06^{-1}}{1-(1{,}2\times1{,}06^{-1})^5} \times 1{,}06$$

$$\boxed{C = 70}$$

2°) L'équation $I_P = 1$ permet de trouver le taux de rentabilité interne (TRI).

Il faut résoudre l'équation :

$$\frac{1}{380}\left[70\times(1+t)^{-1} + (70\times1{,}2)\times(1+t)^{-2} + \ldots.. + (70\times1{,}2^4)\times(1+t)^{-5}\right] = 1$$

Soit

$$70\times(1+t)^{-1} + 84\times(1+t)^{-2} + \ldots.. + 145{,}152\times(1+t)^{-5} = 380$$

On trouve $\boxed{\mathbf{t = 10{,}14\ \%}}$

3°) Calculons la valeur acquise par les cash-flows.

$V_{acquise} = 70\times1{,}14^4 + 84\times1{,}14^3 + 100{,}8\times1{,}14^2 + 120{,}96\times1{,}14^1 + 145{,}152 = 656{,}723$

Donc le TRIG vérifie : $380 = 656{,}723\times(1 + \text{TRIG})^{-5}$

Soit $1 + \text{TRIG} = \left(\frac{656{,}723}{380}\right)^{1/5}$

Donc $\boxed{\mathbf{TRIG = 11{,}56\%}}$

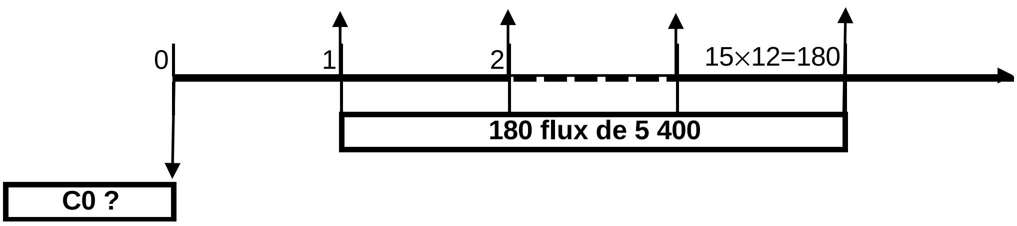
TD Chapitre 6

Exercice 1 : Emprunt immobilier
Monsieur DECEF gagne 18 000 euros par mois et n'anticipe pas de modification de ses revenus dans l'avenir. Il veut effectuer un emprunt immobilier sur 15 ans.
Sachant que le banquier accepte un ratio mensualité/revenu de 30% et qu'il lui propose un financement à 7%, quel est le montant peut-il emprunter ?

Solution :

Il faut calculer la capacité de remboursement du client : $R = 18\,000 \times \frac{30}{100} = 5\,400$.

Puis calculons le montant du prêt possible.



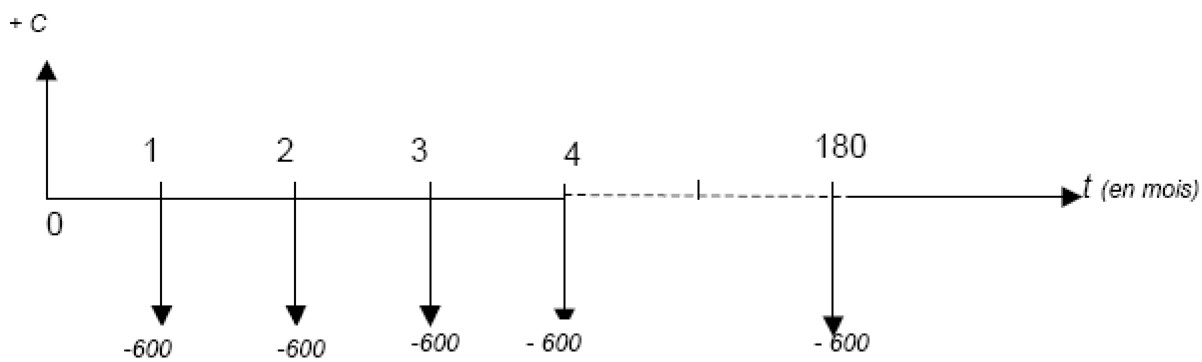
$$C_0 = 5\,400 \times \frac{1-(1+\frac{7\,\%}{12})^{-180}}{\frac{0.07}{12}} \approx 600\,782{,}17$$

Exercice 2 : Emprunt immobilier

Un particulier dispose de 600 par mois à consacrer à l'achat de sa résidence principale. Il souhaite souscrire un emprunt de 180 mensualités constantes payées terme échu au taux annuel proportionnel de 4 %. On cherche à calculer combien il peut emprunter dans ces conditions.

Soit *C* le capital emprunté.

1°) Tracez le diagramme des flux.



2°) Déduisez-en l'équation vérifiée par C. Simplifiez cette équation et calculez C.

Soit r = 4 % / 12

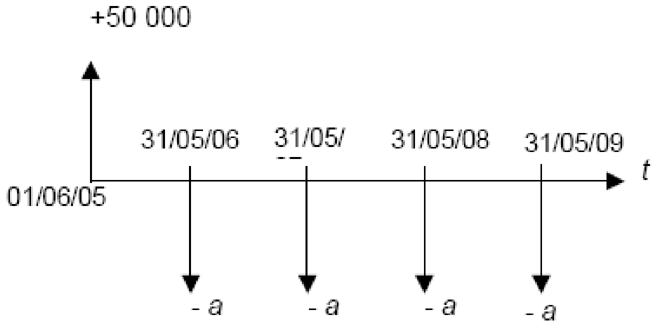
$$C = \frac{600}{1+r} + \frac{600}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{600}{(1+r)^{180}}$$

$$C = 600\frac{1-(1+r)^{-180}}{r} = 81\ 115{,}29$$

<u>Exercice 3</u> : Emprunt à annuités constantes

Une entreprise emprunte 50 000 le 1[er] juin 2005 au taux de 7 % pour financer l'achat d'une machine. Le remboursement s'effectue par 4 annuités constantes payées terme échu, la dernière annuité échéant le 31 mai 2009.

1°) Soit a le montant de l'annuité. Calculez a en détaillant votre calcul.



La valeur présente actualisée au taux r = 7 % de la séquence d'annuités est égale au capital emprunté. On a donc :

$$50000 = \frac{a}{1+r} + \frac{a}{(1+r)^2} + \frac{a}{(1+r)^3} + \frac{a}{(1+r)^4}$$

$$50000 = a\frac{1-(1+r)^{-4}}{r}$$

$$a = 50000\frac{r}{1-(1+r)^{-4}}$$

$$a = \frac{7\% \times 50000}{\left(1 - \frac{1}{(1+7\%)^4}\right)} = 14\ 761{,}41$$

2°) Dressez le tableau d'amortissement de l'emprunt puis remplissez-le.

Date	Total à payer	Intérêts	Amortissement du capital	Capital restant dû
01/06/2005				50 000
31/05/2006	14 761,41	3 500	11 261,41	38 738,59
31/05/2007	14 761,41	2 711,70	12 049,71	26 688,88
31/05/2008	14 761,41	1 868,22	12 893,19	13 795,69
31/05/2009	14 761,39	965,70	13 795,69	0

Exercice 4 : Tableaux d'amortissement

On considère un emprunt indivis de montant 200 000 le 01.01.2006, remboursable en 5 ans au taux d'intérêt de 7% (assurance comprise). 1er remboursement le 01.01.2007 (remboursements par annuités) Présenter le tableau d'amortissement correspondant à chacune des trois modalités possibles de remboursement, les annuités étant perçus tous les 1er janvier. Calculer la somme des intérêts versés.

Solution :

- Par annuités constantes : $\boxed{R = C_0 \times \frac{(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{a})}{1-[1+(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{a})]^{-n}}}$

Soit : $R = 200\ 000 \times \frac{0{,}07}{1-1.07^{-5}} \approx 48\ 778.14$

Date	Montant du remboursement	Intérêt	Créance amortie	Assurance	Capital restant dû
	R	$I_n = C_n \times i$	$K_n = R\text{-}I_n\text{-}A_n$	$An=C_n \times a$	$C_n=C_{n-1} - K_n$
01/01/2006					200 000.00
01/01/2007	48 778.14	14 000.00	34 778.14	0.00	165 221.86
01/01/2008	48 778.14	11 565.53	37 212.61	0.00	128 009.25
01/01/2009	48 778.14	8 960.65	39 817.49	0.00	88 191.76
01/01/2010	48 778.14	6 173.42	42 604.72	0.00	45 587.05
01/01/2011	48 778.14	3 191.09	45 587.05	0.00	0.00
total	**243 890.69**	**43 890.69**	**200 000.00**	**0.00**	

- Par amortissements constants

Date	Montant du remboursement	Intérêt	Créance amortie	Assurance	Capital restant dû
	R=I+K	$I_n = C_n \times i$	$K = C_0/n$	$An=C_n \times a$	$C_n=C_{n-1} - K_n$
01/01/2006					200 000.00
01/01/2007	54 000.00	14 000.00	40 000.00	0.00	160 000.00
01/01/2008	51 200.00	11 200.00	40 000.00	0.00	120 000.00
01/01/2009	48 400.00	8 400.00	40 000.00	0.00	80 000.00
01/01/2010	45 600.00	5 600.00	40 000.00	0.00	40 000.00
01/01/2011	42 800.00	2 800.00	40 000.00	0.00	0.00
total	**242 000.00**	**42 000.00**	**200 000.00**	**0.00**	

- In fine

Date	Montant du remboursement	Intérêt	Créance amortie	Assurance	Capital restant dû
	R=I+K	$I_n = C_n \times i$	$K = C_0/n$	$An=C_n \times a$	$C_n=C_{n-1} - K_n$
01/01/2006					200 000.00
01/01/2007	14 000.00	14 000.00	0.00	0.00	200 000.00
01/01/2008	14 000.00	14 000.00	0.00	0.00	200 000.00
01/01/2009	14 000.00	14 000.00	0.00	0.00	200 000.00
01/01/2010	14 000.00	14 000.00	0.00	0.00	200 000.00
01/01/2011	214 000.00	14 000.00	200 000.00	0.00	0.00
total	**270 000.00**	**70 000.00**	**200 000.00**	**0.00**	

TD Chapitre 7

1°) Soit une obligation de nominal 500 euros, au taux de 5%, émise le 25.10.N, remboursable le 25.10.N+5. Quel était le coupon couru à la date du mardi 12.12.N+3 (date de négociation) ?

Solution :
Nombre de jours du 25.10.N+3 au 22.12.N+3 : (31-25)+30+22 = 58 jours

▪ Coupon couru (en valeur) : $\frac{500 \times 0{,}05 \times 58}{365} \approx 3{,}97$ euros

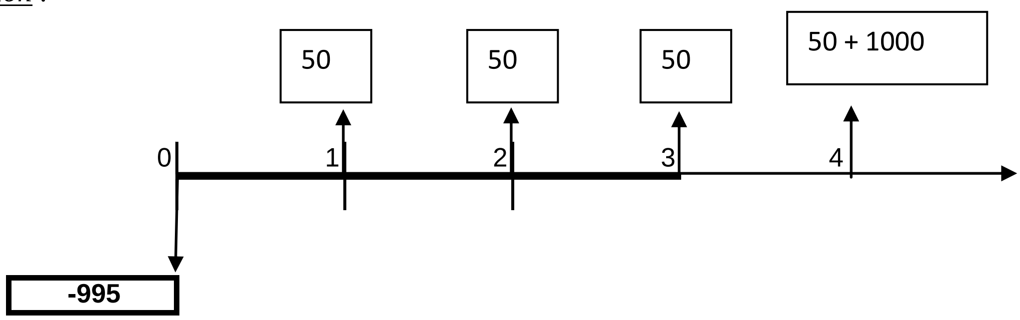
▪ Coupon couru (en % du nominal) : $\frac{5 \times 58}{365} \approx 0{,}79452$ ou $\frac{3{,}97}{500} \approx 0{,}00794 = 0{,}794$ %

2°) Soit une obligation de nominal 1 000 euros, cote du jour 65, coupon couru (en %) : 7,396. Calculez la valeur totale.

Solution :
Valeur totale = $\frac{(65 + 7{,}396)}{100} \times 1000 =$ **723,96 euros**

3°) Supposons que vous investissiez à l'émission dans une obligation de nominal 1 000€ à un prix d'émission de 995€ avec un taux nominal de 5% pendant 4 ans. Calculer le taux actuariel.

Solution :



$995 = 50\times (1+t)^{-1} + 50 \times (1+t)^{-2} + 50 \times (1+t)^{-3} + 50 \times (1+t)^{-4} + 1000 \times (1+t)^{-4}$

Donc t est la solution de l'équation : $995 = 50 \times (1+t)^{-1} \times \frac{1-(1+t)^{-4}}{1-(1+t)^{-1}} + 1000\times(1+t)^{-4}$

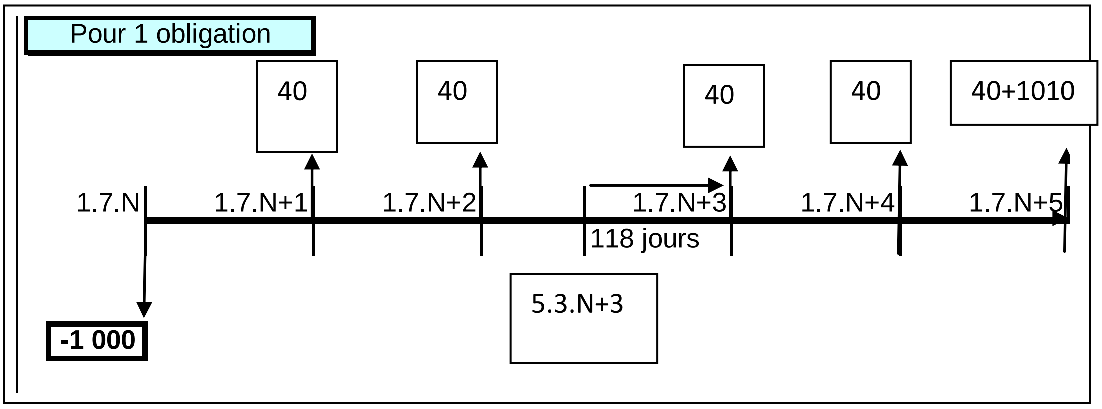
Soit $995 = 50\times\frac{1-(1+t)^{-4}}{t} + 1000\times(1+t)^{-4}$ **On trouve t ≈ 5,1415 %**

Remarque : *La différence entre le taux d'intérêt actuariel de 5,1415% et le taux d'intérêt nominal de 5% s'explique par le montant de la prime d'émission qui est positive (5€).*

4°) Soit un emprunt de 6 00 obligations émis le 1.7.N, de nominal 1 000 euros, prix de remboursement : 1 010 euros ; taux nominal de 4% ; remboursement : in fine, dans 5 ans.
a) Calculer le taux actuariel brut à l'émission t.

Solution : On peut raisonner sur 1 obligation
t solution de : $1000 = 40 \times \frac{1-(1+t)^{-5}}{t} + 1010\times(1+t)^{-5}$, on trouve **t ≈ 4,1842 %**

b) Calculer la valeur de l'obligation au 5.4.N+3, sachant que le taux pratiqué sur le marché est de 6 % pour ce type d'obligation. Retrouver alors la valeur cotée.



Solution : On peut raisonner sur 1 obligation
Calcul du nombre de jours du 5.4.N+3 au 1.7.N+3 : (30-5)+31+30+1 = 87 jours
Valeur = $40\times(1{,}06)^{-87/365} + 40\times(1{,}06)^{-(87+365)/365} + 1050\times(1{,}06)^{-(87+2\times365)/365}$

Valeur ≈ 998,27 euros La valeur trouvée est la valeur à payer pour acquérir l'obligation le 5.4.N+3.
On peut aussi retrouver la valeur cotée en déduisant les intérêts courus de ce montant.

Intérêts courus : $40\times\dfrac{365-(87+3)}{365} \approx 30{,}137$

Valeur cotée théorique = 998,27 – 30,137 ≈ **968,13**