

f'Intègre



Lionel Porcheron

LE FORMULAIRE MPSI, MP

1 500 formules
de mathématiques,
physique et chimie

**NOUVELLE
ÉDITION**

4^e édition

DUNOD

LE FORMULAIRE

MPSI, MP

Consultez nos parutions sur dunod.com

The screenshot shows the Dunod website interface. At the top, there is a search bar and navigation links for 'Recherche', 'Collections', and 'Index thématique'. Below the search bar, there are several category tabs: 'Sciences et Technologies', 'Informatique', 'Gestion et Management', and 'Sciences Humaines'. The main content area is divided into several sections:

- Interviews:** Features two interviews. The first is with 'Benoit Lemaire' about 'Devenir les 100 d'urgence'. The second is with 'Thierry de Fombelle' about 'Barracuda 2008: adage la nouvelle formule'. Below these are links for 'Toutes les interviews', 'Club Enseignants', and 'Infinitiesvous!'. There is also a section for 'Evénements' and 'Découvrez la collection Profession dirigeant'.
- En librairie ce mois-ci:** Promotes 'Développement personnel et coaching: découvrez le MOUTON BLEU' by 'M. Bricard'.
- Featured Books:**
 - Bacchus 2008:** 'Enjeux stratégiques et statistiques dans le monde vinicole' by Jean-Pierre Couderc, Pierre Marin, Françoise Chouffert, Éliane Fontaigne.
 - Profession dirigeant:** 'De la conception du changement à l'action' by Gérard Roth, Michel Kurlita.
 - PYTHON:** 'Prêt pour le langage de développement 3ème édition' by Tarek Ziad.
 - psychologie sport:** '150 petites expériences de psychologie de sport pour mieux comprendre les champions...' by Yann Pascal, Pascal Legrain, Elisabeth Rosset, Clotilde Rousseau.
- LES BIBLIOTHÈQUES DES METIERS:** A section for professional libraries with a list of subjects: 'Bibliothèque du DS', 'Gestion Industrielle', 'Métiers de la ligne et du air', 'Marketing et Communication', 'Directeur d'établissement social et médico-social', and 'Toutes les Bibliothèques'.
- LES NEWSLETTERS:** A section for newsletters with a list of topics: 'Action sociale', 'Psychologie', 'Développement personnel et Bien-être', 'Estratégie', 'Expertise comptable', 'Informatique et NTIC', and 'Marketing'.

At the bottom of the page, there are links for 'Méthodes des sciences', 'newsletters', 'Microsoft Press', 'éditions et diffusion', 'imprimé', and 'site légal'.

LE FORMULAIRE

MPSI, MP

**1 500 formules de mathématiques,
physique et chimie**

Lionel Porcheron

Ingénieur de l'ENSEEIH à Toulouse

4^e édition

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2000, 2003, 2004, 2008

ISBN 978-2-10-053787-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	IX
Chapitre 1 : Mathématiques	1
1. Algèbre	1
1.1 Relations	1
1.2 Structures algébriques	2
1.3 Nombres entiers, nombres rationnels	5
1.4 Arithmétique dans \mathbb{Z}	7
1.5 Polynômes et fractions rationnelles	8
1.6 Généralités sur les applications	11
1.7 Applications linéaires – Espaces vectoriels	12
1.8 Matrices – Déterminants – Systèmes linéaires	17
1.9 Espaces vectoriels euclidiens	22
1.10 Réduction des endomorphismes	26
2. Analyse	27
2.1 Espaces vectoriels normés	27
2.2 Nombres réels	31
2.3 Nombres complexes	32
2.4 Suites	34
2.5 Fonctions réelles de la variable réelle	35
2.6 Dérivation	38
2.7 Intégration	41
2.8 Équations différentielles	44
2.9 Séries	47
2.10 Séries entières	51
2.11 Suites et séries d'applications	52

2.12	Séries de Fourier	57
2.13	Fonctions de plusieurs variables	58
3.	Géométrie	59
3.1	Courbes du plan	59
3.2	Propriétés métriques des courbes	64
Chapitre 2 : Physique		65
0.	Éléments de mathématiques	65
0.1	Différentielles	65
0.2	Équations différentielles	66
0.3	Coniques	68
1.	Électronique	69
1.1	Lois générales	69
1.2	Régime variable	70
1.3	Montages avec amplificateur opérationnel	73
2.	Thermodynamique	76
2.1	Gaz parfait	76
2.2	Premier et second principes de la thermodynamique	77
2.3	Changements de phase d'un corps pur	81
2.4	Machines thermiques	83
2.5	Diffusion thermique	85
2.6	Rayonnement thermique	86
3.	Mécanique du point	88
3.1	Cinématique	88
3.2	Changement de référentiel	90
3.3	Lois générales de la mécanique	91
3.4	Oscillateurs	95
3.5	Mouvement d'une particule chargée	98
3.6	Systèmes de deux points matériels	99
4.	Mécanique du solide	101
4.1	Cinématique du solide	101
4.2	Théorèmes généraux de la dynamique	103
4.3	Contacts entre les solides	104
5.	Optique	105
5.1	Généralités	105
5.2	Optique géométrique	106
5.3	Interférences lumineuses	109
5.4	Interféromètre de Michelson	112
5.5	Autres dispositifs d'interférences	115
5.6	Diffraction des ondes lumineuses	116

6. Électromagnétisme	118
6.1 Electrostatique	118
6.2 Magnétostatique	121
6.3 Équations de Maxwell dans le vide	123
6.4 Conduction métallique	125
6.5 Induction dans un circuit fixe avec \mathbf{B} variable	126
6.6 Induction dans un circuit mobile soumis à \mathbf{B} stationnaire	128
6.7 Matériaux magnétiques	129
7. Ondes	131
7.1 Oscillateurs couplés	131
7.2 Équation de d'Alembert - Ondes stationnaires	132
7.3 Ondes électromagnétiques dans le vide	134
7.4 Dispersion – Absorption	137
7.5 Ondes électromagnétiques dans les milieux matériels	138
Chapitre 3 : Chimie	141
1. Atomistique	141
1.1 Spectroscopie	141
1.2 Modèle ondulatoire	142
1.3 Atome polyélectronique	143
1.4 Architecture moléculaire	145
1.5 Orbitales moléculaires	147
2. Cinétique	148
3. Cristallographie	150
3.1 Généralités	150
3.2 Mailles et sites dans les cristaux métalliques	150
3.3 Cristaux ioniques	152
4. Thermodynamique	153
4.1 Fonctions d'état	153
4.2 Potentiel chimique	154
4.3 Grandeurs standards de réaction	155
4.4 Équilibres chimiques	157
4.5 Équilibres liquide–vapeur	160
4.6 Réactions d'oxydoréduction	163
5. Matériaux métalliques	165
5.1 Diagrammes d'Ellingham	165
5.2 Diagrammes potentiel-pH	166
5.3 Courbes intensité–potentiel	168
5.4 Corrosion	170

Annexe B : Développements limités	175
Annexe C : Formules trigonométriques	177
1. Angles remarquables	177
2. Relations trigonométriques	178
Annexe D : Opérateurs vectoriels	181
1. Notations	181
2. Gradient	182
3. Divergence	183
4. Rotationnel	183
5. Laplacien	184
6. Relations entre les opérateurs	185
7. Théorèmes géométriques	186
Annexe E : Unités et constantes fondamentales	187
1. Unités du Système International	187
1.1 Unités principales du système international	187
1.2 Unités secondaires du système international	188
1.3 Unités courantes du système international	188
1.4 Multiples décimaux pour les unités	188
2. Constantes fondamentales	189
3. Ordres de grandeurs	189
Annexe F : Constantes chimiques	191
Annexe G : Tableau périodique	193
Index	197

Avant-propos

La quatrième édition de ce formulaire rassemble les principaux résultats des cours de mathématiques, de physique et de chimie établis tout au long des deux années de classes préparatoires dans la filière MP. Cette nouvelle édition, s'améliore encore un peu avec l'apparition de la couleur. Ce formulaire s'avérera fort utile aussi bien pendant votre « prépa » que lorsque la période fatidique des concours approchera.

Il a été scindé en trois parties : les parties relatives aux mathématiques, à la physique et à la chimie, chacune d'entre elles rassemblant les principaux résultats établis en cours pour chacune des filières auxquelles s'adresse cet ouvrage. À la fin de l'ouvrage, figurent en annexes les données qui ne sont pas nécessairement à connaître, mais qui sont néanmoins fort utiles au quotidien.

Un effort tout particulier a été fait pour rendre ces formules les plus « lisibles » possible en détaillant la signification de chaque symbole et en précisant bien à chaque fois les conditions d'application de ces formules. Soulignons tout de même que l'apprentissage de ces formules ne se substitue pas à l'apprentissage du cours...

Merci à tous ceux qui ont accepté de collaborer à cet ouvrage et en particulier à Pascal OLIVE et Jean-Marie MONIER pour leur consciencieuse relecture respective des parties physique et mathématiques, à Bruno COURTET pour avoir parfaitement assuré le suivi de ce nouveau venu dans la collection « J'intègre ».

Lionel PORCHERON
lionel.porcheron@free.fr

Mathématiques

1. Algèbre

1.1 Relations

Propriétés d'une relation binaire

Soit \mathcal{R} une relation binaire dans E ; elle est dite :

réflexive si et seulement si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$

symétrique si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$

antisymétrique si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2, \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \implies x = y$

transitive si et seulement si $\forall (x, y, z) \in E^3, \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \implies x\mathcal{R}z$

Relation d'ordre

Une relation binaire \mathcal{R} de E est dite **relation d'ordre** si et seulement si \mathcal{R} est réflexive, antisymétrique et transitive.

Relation d'équivalence

Une relation binaire \mathcal{R} de E est une **relation d'équivalence** si et seulement si \mathcal{R} est réflexive, symétrique et transitive.

Classe d'équivalence

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence dans E ; pour $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence** de x (modulo \mathcal{R}) l'ensemble défini par :

$$\text{cl}_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in E, x\mathcal{R}y\}$$

Ensemble-quotient

On appelle **ensemble-quotient** de E par \mathcal{R} , et on note E/\mathcal{R} , l'ensemble des classes d'équivalence modulo \mathcal{R} :

$$E/\mathcal{R} = \{\text{cl}_{\mathcal{R}}, x \in E\}$$

1.2 Structures algébriques

Lois de compositions

On appelle loi interne toute application de $E \times E \rightarrow E$.

Un loi $*$ est dite associative si et seulement si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, x * (y * z) = (x * y) * z$$

Une loi $*$ interne est dite commutative si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, x * y = y * x$$

On dit que e est un élément neutre pour $*$ si et seulement si :

$$\forall x \in E, x * e = e * x = x$$

On appelle symétrique de $x \in E$ un élément de E noté x^{-1} vérifiant :

$$x^{-1} * x = x * x^{-1} = e$$

On dit que rHE est stable par $*$ si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in H^2, x * y \in H$$

Groupe

Un ensemble muni d'une loi interne (G, \cdot) est un **groupe** si et seulement si :

- \cdot est associative ;
- \cdot admet un élément neutre : e ;
- tout élément de G admet un symétrique pour la loi \cdot .

Si la loi \cdot est commutative, on dit que le groupe G est abélien ou commutatif.

Sous-groupe

Soit (G, \cdot) un groupe. Une partie H de G est un **sous groupe** de G si et seulement si :

- H est stable par la loi \cdot ;
- H contient l'élément neutre ;
- $\forall x \in H, x^{-1} \in H$.

Groupe commutatif

- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.
- l'application $p_n : \mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, appelée surjection canonique, est un morphisme surjectif de groupes.

$$x \mapsto x \pmod n$$

Générateurs du groupe

Les générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sont les \hat{k} , avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k \wedge n = 1$.

Groupe monogène – Groupe cyclique

- Un groupe G est dit **monogène** si et seulement s'il admet un générateur, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $a \in G$ tel que $G = \langle a \rangle$
- Un groupe G est dit **cyclique** si et seulement si G est monogène et fini.

Anneau

Un ensemble A muni de deux lois internes notées $+$ et \cdot est un **anneau** si et seulement si :

- $(A, +)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre 0_A ;
- \cdot est associative et admet un élément neutre 1_A ;
- \cdot est distributive par rapport à $+$, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y, z) \in A^3, x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z);$$

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z).$$

Si \cdot est commutative, on dit que l'anneau A est **commutatif**.

Anneau intègre

On dit qu'un anneau $(A, +, \cdot)$ est **intègre** si et seulement si A est commutatif et :

$$\forall (x, y) \in A^2, (x \cdot y = 0_A) \Rightarrow (x = 0_A \text{ ou } y = 0_A)$$

Sous-anneau

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau ; B une partie de A est un **sous-anneau** si et seulement si :

- $(B, +)$ est un sous groupe de $(A, +)$;
- B est stable par \cdot ;
- $1_A \in B$.

Idéal d'un anneau commutatif

I est dit un **idéal** de A , anneau commutatif avec $I \subset A$ si et seulement s'il vérifie les propriétés :

$$\begin{cases} I \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in I^2, x + y \in I \\ \forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I \end{cases}$$

Corps

Un ensemble $(K, +, \cdot)$ muni de deux lois internes est un **corps** si et seulement si :

- $(K, +, \cdot)$ est un anneau commutatif ;
- Tout élément de $K \setminus \{0_K\}$ est inversible par la loi \cdot .

Espace vectoriel

Un ensemble E est dit un **K -espace vectoriel**, si E est non vide et si on dispose de deux lois, une loi interne notée $+$, et d'une loi externe ($K \times E \rightarrow E$) vérifiant :

$(E, +)$ est un groupe abélien

$$1. \forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$2. \forall \lambda \in K, \forall (x, y) \in E^2, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$3. \forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall x \in E, \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$$

$$4. \forall x \in E, 1x = x$$

Algèbre

On appelle K -algèbre tout ensemble A muni d'une loi interne notée $+$, d'une loi externe $K \times A \rightarrow A$ et d'une loi interne notée $*$ vérifiant :

1. $(A, +, \cdot)$ est un K -espace vectoriel

2. $*$ est distributive par rapport à $+$

$$3. \forall \lambda \in K, \forall (x, y) \in A^2, \lambda(x * y) = (\lambda x) * y = x * (\lambda y)$$

Cette algèbre est associative si et seulement si $*$ est associative, commutative si et seulement si $*$ est commutative, unitaire si et seulement si A admet un élément neutre pour $*$.

1.3 Nombres entiers, nombres rationnels

Factorielle – Définition

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

$n!$: factorielle n
Par convention : $0! = 1$

Permutations

$$\text{card}\mathfrak{S}(n) = n!$$

$n!$: factorielle n , nombre de permutations d'un ensemble à n éléments

Arrangements

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$

On note A_n^p le nombre d'arrangements de p éléments à partir d'un ensemble de n éléments (c'est-à-dire le nombre de p -uplets composés d'éléments deux à deux distincts)

Combinaisons

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$
On appelle **combinaison** (notée C_n^p) toute partie de cardinal p d'un ensemble à n éléments.

Combinaisons – Propriétés

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$$

Binôme de Newton

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

$n \in \mathbb{N}$
 $(x, y) \in A^2$ et $xy = yx$, avec A un anneau commutatif

Divisibilité

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on dit que a **divise** b si et seulement si il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ac$.

Division euclidienne

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \exists!(q, r) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b.$$

 \mathbb{Q} est archimédien

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \forall A \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}^*, N\varepsilon > A$$

 \mathbb{Q} est dense

$$x < y \implies (\exists z \in \mathbb{Q} / x < z < y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2$$

1.4 Arithmétique dans \mathbb{Z}

Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$, une famille d'entiers relatifs non tous nuls ; la famille des diviseurs communs à tous les $(x_i)_{i \in [1, n]}$ admet un plus grand élément appelé **plus grand commun diviseur**.

Plus Petit Commun Multiple (PPCM)

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$; la famille des multiples communs non nuls aux $(x_i)_{i \in [1, n]}$ admet un **plus petit élément appelé plus petit commun multiple**.

Nombres premiers entre eux

Soient $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{Z}^*)^n$, ces nombres sont premiers entre eux si et seulement si ils vérifient la propriété : $\text{pgcd}(x_1, \dots, x_n) = 1$.

Théorème de Bezout

Soient $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{Z}^*)^n$, pour que tous ces entiers soient premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il existe $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que

$$\sum_{i=1}^n x_i u_i = 1.$$

Théorème de Gauss

$$\begin{cases} a|bc \\ \text{pgcd}(a, b) = 1 \end{cases} \implies a|c \quad \forall (a, b, c) \in (\mathbb{Z}^*)^3$$

Produit du PGCD par le PPCM

$$\text{pgcd}(a, b) \cdot \text{ppcm}(a, b) = |a \cdot b| \quad \forall (a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$$

Nombres premiers

On dit qu'un entier $p \in \mathbb{N}$ est **premier** si et seulement si $p \geq 2$ et s'il vérifie :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, (a|p \implies (a = 1 \text{ ou } a = p))$$

Décomposition en nombres premiers

Tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ admet une décomposition unique en un produit de nombres premiers à l'ordre près des facteurs.

1.5 Polynômes et fractions rationnelles

Support d'une suite – Définition d'un polynôme

Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $K^{\mathbb{N}}$, on appelle support l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $a_n \neq 0$.

On appelle polynôme à une indéterminée à coefficients constants toute suite de $K^{\mathbb{N}}$ à support fini.

Polynôme à une indéterminée

On note $K[X]$ le corps des polynômes à une indéterminée X à valeurs dans K . Tout élément P de $K[X]$ peut s'écrire sur la base canonique $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous la forme : $P = \sum_n a_n X^n$.

Degré d'un polynôme – Définition

$$\deg P = \max \{n \in \mathbb{N} / a_n \neq 0\}$$

$\deg P$: degré du polynôme P

Degré d'un polynôme – Propriétés

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

$$(P, Q) \in K[X]$$

Lorsque $\deg P \neq \deg Q$, alors :
 $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

Produit

$$PQ = \sum_n c_n X^n$$

$$c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}$$

$$P = \sum_n a_n X^n \in K[X]$$

$$Q = \sum_n b_n X^n \in K[X]$$

Composition

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_n a_n Q^n$$

$P \circ Q$: polynôme composé

$$P = \sum_n a_n X^n \in K[X]$$

$$Q \in K[X]$$

Dérivation

$$P' = \sum_{n \geq 1} n a_n X^{n-1}$$

$$P = \sum_n a_n X^n \in K[X]$$

P' : polynôme dérivé de P

Division euclidienne

$\forall (A, B) \in (K[X])^2, \exists ! (Q, R) \in (K[X])^2 / A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$.

Q : quotient de la division euclidienne de A par B

R : reste de la division euclidienne de A par B

Divisibilité dans $K[X]$

On dit que A divise P deux polynômes de $K[X]$ si et seulement si il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = AQ$.

On appelle plus grand commun diviseur de $(P_k)_{k \in [1, n]} \in (K[X] \setminus \{0\})$, le polynôme de plus haut degré parmi les diviseurs des P_k .

Soient $(P, Q) \in (K[X])^2$, ils sont dits premiers entre eux si et seulement si leur plus grand commun diviseur est 1.

Propriété de Gauss : Soient A, B et C trois polynômes non nuls de $K[X]$: si A divise BC et si A et B sont premiers entre eux, alors A divise C .

Si A est premier avec B et avec C , alors A est premier avec BC

Égalité de Bezout pour deux polynômes

Soient A et B deux polynômes non nuls de $K[X]$. Ces deux polynômes sont premiers entre eux, si et seulement si il existe un unique couple (U, V) de polynômes de $K[X]$ tels que :

$$AU + BV = 1$$

Polynôme irréductible

Un polynôme $P \in K[X]$ est dit **irréductible** si et seulement si $\deg P \geq 1$ et si P n'admet comme diviseurs que les éléments non nuls du corps K et les multiples de lui-même.

Fonction polynomiale

À tout polynôme $P = \sum_n a_n X^n$ on associe la **fonction polynomiale** :

$$\tilde{P} : \xi \mapsto \sum_n a_n \xi^n.$$

Racine d'un polynôme

$$\tilde{P}(\alpha) = 0$$

α est appelée **racine** du polynôme $P \in K[X]$ si elle vérifie la propriété ci-contre.

Soit $(\alpha)_{i \in I}$ famille des racines deux à deux distinctes du polynôme P . Ce polynôme peut alors s'exprimer sous la forme $P = Q \prod_{i \in I} (x - \alpha_i)^{m_i}$ où m_i est la multiplicité de la racine α_i et Q un polynôme n'ayant pas de zéro dans K .

Multiplicité d'une racine d'un polynôme

$$\tilde{P}^{(m-1)}(\alpha) = 0$$

$$\tilde{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

α est une racine P de multiplicité m si elle vérifie la propriété ci-contre.

Polynôme scindé

Un polynôme $P \in K[X]$ est dit **scindé** sur K si et seulement si il existe $\lambda \in K \setminus \{0\}$ et une famille d'éléments non nécessairement distincts $(x_i)_{i \in [1, n]}$ tels que :

$$P = \lambda \prod (X - x_i)$$

Théorème de d'Alembert & Conséquence

Le corps \mathbb{C} est algébriquement clos : tout polynôme non constant de $K[X]$ admet au moins un zéro dans \mathbb{C}

Conséquence : Tout polynôme non constant est scindé sur \mathbb{C} .

Fraction rationnelle – Définition

$$R = \frac{\sum_n a_n X^n}{\sum_n b_n X^n}$$

$R \in K(X)$: fraction rationnelle
 $K(X)$: corps des fractions rationnelles
 $(a_n, b_n) \in K^2$: coefficients

Zéros et pôles d'une fraction rationnelle

Soit $R = \frac{P}{Q} \in K(X)$ avec $(P, Q) \in K[X]^2$, une fraction rationnelle.

Si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux :

- on appelle **zéros** de R les zéros de P .
- on appelle **pôles** de R les zéros de Q .

Décomposition en éléments simples

$$R = \frac{P}{S_1^{\alpha_1} \times \dots \times S_n^{\alpha_n}}$$

$$R = E + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{C_{\alpha_i, j}}{S_i^j}$$

$R \in K(X)$: une fraction rationnelle
 $S_i^{\alpha_i} \in K[X]$: polynôme irréductibles premiers deux à deux entre eux.
 $\forall i, \alpha_i \in \mathbb{N}^*$
 $E \in K[X]$: partie entière de R

1.6 Généralités sur les applications

Application injective

$$\forall (x, y) \in E^2$$

$$(f(x) = f(y) \implies x = y)$$

Une application f est dite **injective** si et seulement si elle vérifie la propriété ci-contre.

Application surjective

$$\forall y \in F, \exists x \in E / f(x) = y$$

Une application linéaire f de E dans F est dite **surjective** si et seulement si elle vérifie la propriété ci-contre.

Composition de fonctions injectives, de fonctions surjectives

$$g \circ f \text{ injective} \implies f \text{ injective}$$

$$g \circ f \text{ surjective} \implies g \text{ surjective}$$

f et g : deux applications

1.7 Applications linéaires – Espaces vectoriels

Espace vectoriel – Définition

Soit E un ensemble muni d'une loi interne notée $+$, d'une loi externe $K \times E \rightarrow E$ notée \cdot telles que :

$(E, +)$ est un groupe abélien

$$\forall \lambda \in K, \forall (x, y) \in E^2, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall x \in E, \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$$

$$\forall x \in E, 1x = x$$

Un tel ensemble est appelé **K -espace vectoriel**.

Sous-espace vectoriel

Soit E un K -espace vectoriel et $F \subset E$. F est dit **sous-espace vectoriel** de E si et seulement si il vérifie les propriétés suivantes :

(1) $F \neq \emptyset$

(2) $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$

(3) $\forall \lambda \in K, \forall x \in F, \lambda x \in F$

Sous-espace engendré par une partie

$$\text{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \subset E, \\ F \supset A}} F$$

E : K -espace vectoriel

$$A \subset E$$

$\text{Vect}(A)$: **sous-espace vectoriel engendré par A**

Autrement dit, $\text{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A ou, si $A \neq \emptyset$, l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de E .

Somme directe de sous-espaces vectoriels

$$E = \sum_{i \in I} E_i$$

$$\forall (i, j) \in I^2 \quad E_i \cap \sum_{j \neq i} E_j = \{0\}$$

$(E_i)_{i \in I}$: famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

Si la somme des E_i vérifie les deux propriétés ci-contre, elle est dite **directe**.

Dans ce cas : $\forall x \in E$, il existe une unique décomposition $x = \sum_{i \in I} x_i$

avec $x_i \in E_i$.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

$$E = \bigoplus_{i \in I} E_i$$

$(E_i)_{i \in I}$: famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .
Ils sont dits **supplémentaires** si et seulement s'ils sont en somme directe et que leur somme est égale à E .

Famille génératrice

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel de E sur K .
On dit que cette famille est **génératrice** si et seulement si tout élément x de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire des x_i , c'est-à-dire qu'il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ telle que : $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.

Famille libre

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

$(x_i)_{i \in I}$: famille de vecteurs de E
 $(\lambda_i)_{i \in I}$: famille de scalaires de K
Une famille est **libre** si elle vérifie la propriété ci-contre.

Propriétés fondamentales des familles

- Toute sur-famille d'une famille génératrice d'une famille génératrice est génératrice.
- Toute sous famille d'une famille libre est une famille libre.
- Si (x_1, \dots, x_n) libre et $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ liée, alors $x_{n+1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$
- Une famille comportant le vecteur nul est liée.

Base d'un espace vectoriel – Définition

Une **base** de E est une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ de E libre et génératrice.

Autres formulations : une base est une famille libre maximale ou encore une famille génératrice minimale.

Théorie de la dimension

Un K -espace vectoriel est dit de **dimension finie** si et seulement si E admet au moins une famille génératrice de dimension finie.

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, alors :

1. E admet au moins une base de dimension finie.
2. Toutes les bases de E sont finies et ont le même cardinal appelé **dimension** de E et noté $\dim E$.

Théorème de la base incomplète

Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_r)$ une famille libre de E . Il y a au moins une façon de compléter \mathcal{F} par $n - r$ vecteurs d'une base de E pour obtenir une base de E .

Base duale définition

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

E : K -espace-vectoriel
 E^* : dual de E
 $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E
 $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ base de E^*
 \mathcal{B}^* est appelé **base duale** de \mathcal{B}

Propriétés des familles libres et des familles génératrices

Soient E un K -espace vectoriel de dimension n

- Toute famille libre de E comporte au plus n éléments.
- Toute famille génératrice de E comporte au moins n éléments.

Droite vectorielle – Hyperplan

On appelle droite vectorielle tout sous-espace vectoriel de dimension 1.
 On appelle hyperplan tout sous-espace vectoriel, de dimension $n - 1$, d'un espace vectoriel de dimension n .

Codimension

Soit F un sous-espace vectoriel de E , il est dit de **codimension finie** si et seulement si F admet au moins un supplémentaire de dimension finie dans E .

Application linéaire – Définition

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in K :$$

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

On dit que f est une application linéaire de E dans F si et seulement si elle vérifie la propriété ci-contre.

Forme linéaire – Définition

On appelle forme linéaire une application linéaire qui va de E dans le corps de référence : K .

Applications linéaires et famille de vecteurs

- $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$, et pour toute famille finie \mathcal{F} d'éléments de E :
- $f(\text{Vect}(\mathcal{F})) = \text{Vect}(f(\mathcal{F}))$.
 - si \mathcal{F} est liée alors $f(\mathcal{F})$ est liée.

- si $f(\mathcal{F})$ est libre, alors \mathcal{F} est libre.
- si f est bijective, pour toute base \mathcal{B} de E , $f(\mathcal{B})$ est une base de F .

Image et noyau d'une application linéaire – Définition

$$\text{Im } f = \{y \in F / \exists x \in E, f(x) = y\}$$

On appelle **image** de f , le sous-espace vectoriel de F noté $\text{Im } f$ défini ci-contre.

$$\text{Ker } f = \{x \in E / f(x) = 0\}$$

On appelle **noyau** de f , le sous-espace vectoriel de E noté $\text{Ker } f$ défini ci-contre.

Noyau d'une forme linéaire

Le noyau d'une forme linéaire, autre que la forme nulle, est un hyperplan.

Rang d'une application linéaire – Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et f une application linéaire de E dans F . Si $\text{Im } f$ est de dimension finie, $\dim \text{Im } f$ s'appelle **rang** de f et se note $\text{rg } f$.

Formule du rang

$$\dim E = \text{rg } f + \dim(\text{Ker } f)$$

E : espace vectoriel de dimension finie
 f : application linéaire
 $\text{rg } f$: rang de f
 $\text{Ker } f$: noyau de f

Isomorphisme – Endomorphisme – Automorphisme

- Un **isomorphisme** d'espaces vectoriels est une application linéaire de E dans F bijective.
- Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans E .
- Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif. On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

Endomorphisme nilpotent

On dit qu'un endomorphisme f d'un K -espace-vectoriel E est **nilpotent** si et seulement si : $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$. L'ordre de nilpotence est alors le plus petit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.

Applications linéaires – Cas de la dimension finie

- (1) f isomorphisme
- (2) f injective
- (3) f surjective
- (4) $\text{rg } f = n$

E et F : deux espaces vectoriels de même dimension n sur K
 $f \in \mathcal{L}(E, F)$
 Les propositions ci-contre sont deux à deux équivalentes.

- (1) f automorphisme
- (2) f injective
- (3) f surjective
- (4) $\text{rg } f = n$

E : espace vectoriel de dimension n sur K
 $f \in \mathcal{L}(E)$
 Les propositions ci-contre sont deux à deux équivalentes.

Image et noyau d'une application linéaire – Propriétés

$$\begin{aligned} f \text{ surjective} &\iff \text{Im } f = F \\ f \text{ injective} &\iff \text{Ker } f = \{0\} \end{aligned}$$

f application linéaire de E dans F .

Projecteur – Définition

$$p^2 = p \quad (1)$$

Un **projecteur** est une application linéaire vérifiant la relation (1).
 p est alors le projecteur sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Symétrie – Définition

$$s^2 = \text{Id}_E$$

$p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$ est un projecteur.
 s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$, parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$

Une **symétrie** est une application linéaire vérifiant la relation ci-contre.

Une symétrie est une application linéaire vérifiant les propriétés ci-contre.

Formule de Grassman

$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$, où A et B sont deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies.

1.8 Matrices – Déterminants – Systèmes linéaires

Ensemble des matrices

On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes.

Matrices et applications linéaires

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$$

f : application linéaire de E dans F , deux espaces vectoriels de dimension finie.

$M = (a_{ij})_{i \in [1,m], j \in [1,n]}$: matrice associée à l'application linéaire f

$\mathcal{B} = (e_j)_{j \in [1,n]}$: base de E

$\mathcal{B}' = (f_i)_{i \in [1,m]}$: base de F

Somme de deux matrices

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$$

$$M = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$$

$$N = (\beta_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$$

$$M + N = (\gamma_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$$

Produit d'une matrice par un scalaire

$$M = \lambda N$$

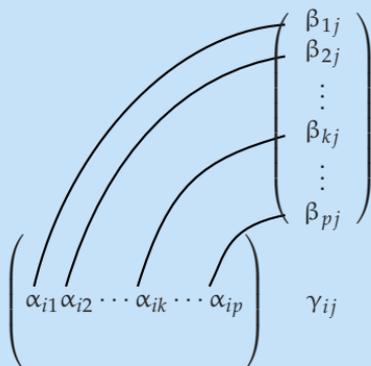
$$(\gamma_{ij}) = (\lambda \cdot \alpha_{ij})$$

$$\lambda \in \mathbb{K}$$

$$M = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$$

$$N = (\gamma_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$$

Produit de matrices



$$\begin{aligned}
 M &= (\alpha_{ik}) \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K}) \\
 N &= (\beta_{kj}) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\
 MN &= (\gamma_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \\
 \gamma_{ij} &= \sum_{k=1}^p \alpha_{ik} \cdot \beta_{kj}
 \end{aligned}$$

Propriétés des opérations sur les matrices

$$(M + N)P = MP + NP$$

$$(M, N) \in (\mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K}))^2, P \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$$

$$(\mu M)(\lambda N) = \mu\lambda(MN)$$

$$\begin{aligned}
 M &\in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K}) \\
 N &\in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\
 (\lambda, \mu)^2 &\in \mathbb{K}^2
 \end{aligned}$$

$$(MN)P = M(NP)$$

$$\begin{aligned}
 M &\in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K}) \\
 N &\in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\
 P &\in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})
 \end{aligned}$$

Attention : En général, $MN \neq NM$

Transposée d'une matrice

$$\begin{aligned}
 A &= (a_{ij})_{\substack{i \in [1, n] \\ j \in [1, p]}} \\
 {}^t A &= (a_{ji})_{\substack{j \in [1, p] \\ i \in [1, n]}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &\in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\
 {}^t A &\in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) : \text{matrice transposée de } A
 \end{aligned}$$

Changement de base

$$A' = Q^{-1}AP$$

A' : matrice d'une application linéaire de E (dans la base \mathcal{B}') vers F (dans la base \mathcal{C}')
 A : matrice de la même application linéaire de E (dans la base \mathcal{B}) vers F (dans la base \mathcal{C})
 P : matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}'
 Q : matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{C}'
 Dans le cas d'un endomorphisme, $Q = P$ (seulement deux bases sont nécessaires).

Exponentielle de matrice

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
 $\exp(A)$: **exponentielle** de la matrice A

Déterminant – Définition

Un déterminant est une forme multilinéaire alternée.

Multilinéarité : $(\det(\alpha_1 V_1, \dots, \alpha_n V_n) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \det(V_1, \dots, V_n))$

Alternée : $V_i = V_j$ avec $i \neq j \implies \det(V_1, \dots, V_n) = 0$

Dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , on note $\det_{\mathcal{B}}$ l'application :

$$\det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Avec $V_j = \sum_{i_j=1}^n a_{i_j j} e_{i_j}$

Déterminant d'un produit de matrices

$$\det(M \cdot N) = \det M \cdot \det N$$

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Déterminant et matrice inversible

$$M \text{ inversible} \iff \det M \neq 0$$

$$\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1}$$

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible

Déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

Matrice inversible – Définition

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice N telle que :

$$M \cdot N = N \cdot M = I_n$$

La matrice N est alors appelée inverse de M et se note M^{-1} .

Matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f un endomorphisme représenté par A dans une base. Les propriétés ci-dessous sont deux à deux équivalentes :

- (1) f est bijective.
- (2) A est inversible à gauche.
- (3) A est inversible à droite.
- (4) A est inversible.
- (5) A est régulière à gauche.
- (6) A est régulière à droite.
- (7) A est régulière.

Matrice des cofacteurs – Comatrice

$$\text{com}M = (\det M_{ij})_{\substack{i \in [1, n] \\ j \in [1, n]}}$$

$\text{com}M$: comatrice de M (ou matrice des cofacteurs)

M_{ij} : matrice M « privée » de sa i^{e} ligne et de sa j^{e} colonne.

Matrice inverse

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t \text{com}(M)$$

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice inversible
 $\text{com}(M)$: matrice des cofacteurs de M

Système linéaire – Définition

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

On peut interpréter ce système comme le produit de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i \in [1,n] \\ j \in [1,p]}}$ par le vecteur $X = (x_i)_{i \in [1,p]}$ (vecteur inconnu). Ce produit est égal au vecteur second membre : $B = (b_i)_{i \in [1,n]}$

Système de Cramer

$$\forall j \in [1, p], x_j = \frac{\det A_j(b)}{\det A}$$

Dans le cas d'un système de Cramer, $n = p = \text{rg } A$.

Le système admet alors une solution unique donnée par les formules de Cramer ci-contre.

$A_j(b)$ est obtenue à partir de A en remplaçant le vecteur colonne c_j par b .

Cas où $\text{rg } A = n < p$

Après permutation des inconnues, on peut supposer que la matrice $A' = (a_{ij})_{\substack{i \in [1,n] \\ j \in [1,n]}}$ extraite de A est inversible. On établit alors le système suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 - (a_{1n+1}x_{n+1} + \cdots + a_{1p}x_p) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n - (a_{nn+1}x_{n+1} + \cdots + a_{np}x_p) \end{cases}$$

Ce système est de Cramer et admet donc une solution unique. Cet ensemble est un sous-espace affine de dimension $p - n$.

Cas où $\text{rg } A < n$

Soit on peut se ramener au cas précédent par combinaison linéaire des équations, soit le système n'admet pas de solution.

1.9 Espaces vectoriels euclidiens

Produit scalaire – Définition

Un **produit scalaire euclidien** sur E est une application φ de E^2 dans \mathbb{R} vérifiant :

- (1) φ est bilinéaire
- (2) φ est symétrique
- (3) $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$
- (4) $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

φ vérifiant (3) est dite **positive**
 φ vérifiant (4) est dite **définie**
 φ vérifiant (3) et (4) est dite **définie-positive**

On note ce produit scalaire $(\cdot | \cdot)$

Forme quadratique

$$\forall x \in E, q(x) = \varphi(x, x)$$

φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$
 $q : E \rightarrow \mathbb{R}$: forme quadratique associée à φ

Matrice associée

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{i \in [1, n] \\ j \in [1, n]}}$$

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$: matrice de φ dans \mathcal{B}
 \mathcal{B} : base de E
 $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$: forme bilinéaire symétrique.

Expression matricielle

$$\varphi(x, y) = {}^t XAY$$

$\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$: forme bilinéaire symétrique
 $(x, y) \in E^2$
 $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$
 $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$

Norme euclidienne – Définition

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x|x)}$$

$\|\cdot\|_2$: norme euclidienne sur E
 $x \in E$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\forall (x, y) \in E^2$$

Il y a égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont liés.

Inégalité triangulaire ou de Minkowski

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\forall (x, y) \in E^2$$

Il y a égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont positivement liés ou si $x = 0$.

Relations entre produit scalaire et norme

$$\forall (x, y) \in E^2 :$$

$$1. \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$$

$$2. \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$$

$$3. (x|y) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

$$4. (x|y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Vecteurs orthogonaux

Soit $(x, y) \in E^2$, on dit que ces deux vecteurs sont **orthogonaux** si et seulement si $(x|y) = 0$.

Parties orthogonales – Orthogonal d'une partie

$$\forall (x, y) \in A \times B, (x|y) = 0$$

$$A^\perp = \{x \in E / \forall y \in A, (x|y) = 0\}$$

x, y : deux vecteurs respectivement de A et de B

A, B : deux parties **orthogonales** de E

A^\perp : **orthogonal** de la partie A

Inégalité de Bessel

$$\sum_{j=1}^n |(e_j|x)|^2 \leq \|x\|^2$$

E : espace vectoriel préhilbertien

x : vecteur de E

$(e_j)_{j \in [1, n]}$: famille orthonormale de E

Projecteur orthogonal

$$\text{Ker } p = (\text{Im } p)^\perp$$

$$\text{Im } p = (\text{Ker } p)^\perp$$

p : **projecteur orthogonal** sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$

Attention : un projecteur orthogonal n'est pas une application orthogonale.

Diagonalisation d'une matrice symétrique

$$\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \exists (\Omega, D) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), S = \Omega D \Omega^{-1}$$

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices symétriques de \mathbb{R}

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: groupe orthogonal

$\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices diagonales de \mathbb{R}

Valeurs propres de matrices symétriques

Les valeurs propres d'une matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont réelles.

Endomorphisme adjoint – Définition

$\forall f \in \mathcal{L}(E), \exists ! f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (f(x)|y) = (x|f^*(y))$$

E : espace vectoriel euclidien
 $\mathcal{L}(E)$: ensemble des endomorphismes de E
 f : endomorphisme de E
 f^* : l'**adjoint** de f
 x, y : deux vecteurs de E

Automorphismes orthogonaux, symétriques, antisymétriques

- (1) $f^* = f^{-1}$
- (2) $f^* = f$
- (3) $f^* = -f$

Un automorphisme f vérifiant :

- (1) est dit **orthogonal**
- (2) est dit **symétrique** ou **auto-adjoint**
- (3) est dit **antisymétrique**

Propriétés des adjoints

$$\text{Ker } f^* = (\text{Im } f)^\perp, \text{Im } f^* = (\text{Ker } f)^\perp$$

$$(\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*$$

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

$$(\text{Id}_E)^* = \text{Id}_E$$

$$(f^*)^* = f$$

$$(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$$

$$\text{Mat } f^* = {}^t \text{Mat } f$$

$(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$: endomorphismes de E admettant des adjoints
 f^* : endomorphisme adjoint de E
 A^\perp : orthogonal de A , A étant une partie de E

Définition et propriétés des automorphismes orthogonaux

- (1) $\forall (x, y) \in E^2$:
 $(f(x)|f(y)) = (x|y)$
 (2) $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$
 (3) $f \in \mathcal{O}(E)$

Les propriétés (1), (2) et (3) sont équivalentes.

(1) traduit la conservation du produit scalaire.

(2) traduit la conservation de la norme.

$\mathcal{O}(E)$: ensemble des automorphismes orthogonaux de E
 $f \in \mathcal{L}(E)$

Caractérisation des automorphismes orthogonaux

$${}^t M \cdot M = I_n \text{ ou } M \cdot {}^t M = I_n$$

$$f^* \circ f = f \circ f^* = \text{Id}_E$$

M : matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

f : automorphisme orthogonal de E

Id_E : application identité de E

I_n : matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1.10 Réduction des endomorphismes

Valeur propre – Définition

$\exists x \in E, x \neq 0$ tel que :

$$f(x) = \lambda x$$

$f \in \mathcal{L}(E)$
 $\lambda \in \mathbb{K}$: **valeur propre** de f
 Autre formulation : $f - \lambda \text{Id}_E$ est non injectif.

Spectre d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle spectre de f noté $\text{Sp}(f)$ l'ensemble :

$$\text{Sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \exists x \in E \setminus \{0\} / f(x) = \lambda x\}$$

Vecteur propre – Définition

$x \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$

$$f(x) = \lambda x$$

$x \in E$: **vecteur propre** de f
 $f \in \mathcal{L}(E)$
 (alors $\lambda \in \text{Sp}(f)$)

Sous-espace propre – Définition

$$\text{SEP}(f, \lambda) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$$

$\text{SEP}(f, \lambda)$: **sous-espace propre** associé à λ
 $f \in \mathcal{L}(E)$
 $\lambda \in \text{Sp}(f)$

Polynôme caractéristique – Définition

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

$$\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda \text{Id}_E)$$

$\chi_A(\lambda)$: **polynôme caractéristique** de A
 $\chi_f(\lambda)$: **polynôme caractéristique** de f
 $f \in \mathcal{L}(E)$
 A : matrice d'ordre n associée à f

Polynôme caractéristique – Propriétés

- Le coefficient dominant est $(-1)^n$
- Le coefficient de λ^{n-1} est $(-1)^{n-1} \text{tr } A$
- Le terme constant est $\det A$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
 $\chi_A(\lambda)$: polynôme caractéristique de A
 λ : indéterminée du polynôme

Diagonalisabilité

1. f est diagonalisable.
2. Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .
3. La somme des sous-espaces propres pour f est égale à E .
4. La somme des dimensions des sous-espaces propres pour f est égale à $\dim E$.

Les propriétés ci-contre sont deux à deux équivalentes.

E : espace vectoriel de dimension finie

$f \in \mathcal{L}(E)$

Trigonalisation

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est trigonalisable
2. χ_f est scindé sur \mathbb{K}

Drapeau

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \dim(E_i) = i \\ \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, E_i \subset E_{i+1} \end{cases}$$

E : un \mathbb{K} -espace-vectoriel
 (E_1, \dots, E_n) : famille de sous-espaces vectoriels de E
 $n = \dim E$

Théorème de Cayley - Hamilton

Le polynôme caractéristique de f annule f , c'est-à-dire $\forall f \in \mathcal{L}(E), \chi_f = 0$.

2. Analyse

2.1 Espaces vectoriels normés

Norme – Définition

On appelle **norme** sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois points suivants :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
2. $\forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0$
3. $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Normes équivalentes

Deux normes N_1 et N_2 sont dites équivalentes si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$$

Distance – Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, on appelle distance associée à la norme $\|\cdot\|$ l'application $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.

La distance possède les propriétés suivantes :

1. $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$
2. $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \implies x = y$
3. $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
4. $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$
5. $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x + z, y + z) = d(x, y)$

Distance d'un point à une partie

On appelle distance de $x \in E$ à A , une partie non vide de E , \mathbb{R} espace vectoriel, le réel défini par :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

Boule ouverte – Définition

$$B(a, r) = \{x \in E / \|a - x\| < r\}$$

Boule fermée – Définition

$$B(a, r) = \{x \in E / \|a - x\| \leq r\}$$

Partie ouverte de E

On appelle **ouvert de E** toute partie X de E vérifiant la propriété

$$\forall x \in X, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, B(x, r) \subset X$$

Partie fermée de E

On appelle **fermé de E** toute partie de E dont le complémentaire dans E est un ouvert de E

Partie bornée – Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, une partie A de E est dite **bornée** si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in A^2, d(x, y) \leq M$$

Voisinage

Soit $a \in E$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, on dit que V est un **voisinage** de a si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$

Intérieur – Frontière – Adhérence

On appelle **intérieur** d'une partie $A \subset E$, avec E un \mathbb{K} -espace vectoriel :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{\Omega \text{ ouvert de } E \\ \Omega \subset A}} \Omega$$

On appelle **adhérence** de A (notée \bar{A}) la partie : $\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé de } E \\ F \supset A}} F$

On appelle **frontière** de A la partie de A notée ∂A , la partie définie par $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

Valeur d'adhérence

On dit que a est valeur d'adhérence de la suite de E $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement s'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{\sigma(n)} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} a$.

Caractérisation de la continuité pour une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est continue
- (2) $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$

Partie compacte

On dit que $X \subset E$, E étant un \mathbb{K} -espace vectoriel, est une partie **compacte** de E si et seulement toute suite d'éléments de X admet au moins une valeur d'adhérence dans X .

Partie compacte en dimension finie

Les parties compactes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie sont les parties fermées bornées.

Normes en dimension finie

Toutes les normes sur un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

Applications linéaires en dimension finie

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés, si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $E \rightarrow F$ est continue.

Suites de Cauchy

On appelle **suite de Cauchy** dans un \mathbb{K} -espace vectoriel normé toute suite vérifiant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, p \geq N \implies \|u_p - u_{p+q}\| \leq \varepsilon$$

Toute suite convergente dans un \mathbb{K} -espace vectoriel normé est de Cauchy.

Partie complète – Définition

Une partie A d'un \mathbb{K} -espace vectoriel normé est dite complète si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de A converge dans A

Partie complète – Propriétés

Toute partie X d'un K -espace vectoriel normé complet vérifie :

$$X \text{ fermée} \iff X \text{ complète}$$

Toute partie compacte d'un K -espace vectoriel normé est complète.

Connexité par arcs

Une partie A d'un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie est dite **connexe par arcs** si et seulement si $\forall (x, y) \in A^2, \exists \gamma \in \mathcal{C}^0([a, b], E)$ tel que :

$$\begin{cases} \gamma(a) = x, \gamma(b) = y \\ \forall t \in [a; b], \gamma(t) \in A \end{cases}$$

Espace préhilbertien – Espace euclidien

On appelle espace préhilbertien tout couple (E, φ) où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel et φ un produit scalaire sur E .

On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien de dimension finie.

Théorème de Pythagore

Pour toute famille orthogonale finie $(x_i)_{i \in I}$ d'un espace préhilbertien $(E, (\cdot | \cdot))$ on a :

$$\left\| \sum_{i \in I} x_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|x_i\|^2$$

2.2 Nombres réels

Présentation

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

\leq est une relation d'ordre total dans \mathbb{R} .

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \left\{ \begin{array}{l} a \leq b \implies a + c \leq b + c \\ \left\{ \begin{array}{l} a \leq b \\ 0 \leq c \end{array} \right. \implies ac \leq bc \end{array} \right.$$

Toute partie non vide majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure dans \mathbb{R} .

Distance usuelle dans \mathbb{R}

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto |x - y|$$

Le nombre réel $d(x, y)$ est la distance usuelle dans \mathbb{R} .

 \mathbb{R} : corps archimédien

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, n\varepsilon > A$$

Partie entière – Définition

$$\forall x \in \mathbb{R} : \\ E(x) \leq x \leq E(x) + 1$$

$x \in \mathbb{R}$
 $E(x)$: partie entière de x
 $E(x)$ est l'unique entier relatif vérifiant la propriété ci-contre.

Densité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ (x < y \implies (\exists d \in D, x < d < y))$$

$D \subset \mathbb{R}$
 Cette partie D est dite dense dans \mathbb{R} si et seulement si elle vérifie la propriété ci-contre.

Théorème : \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

2.3 Nombres complexes

Forme cartésienne / Forme polaire d'un nombre complexe

$$z = a + ib$$

$$z = \rho e^{i\theta}$$

z : nombre complexe ($z \in \mathbb{C}$)
 a : partie réelle de z ($a \in \mathbb{R}$), on la note aussi $\text{Re}(z)$
 b : partie imaginaire de z ($b \in \mathbb{R}$), on la note aussi $\text{Im}(z)$
 ρ : module de z , ($\rho \in \mathbb{R}_+$)
 θ : argument de z , ($\theta \in \mathbb{R}$)

Nombre complexe conjugué – Définition

$$z = a + ib$$

$$\bar{z} = a - ib$$

$z \in \mathbb{C}$: nombre complexe
 $\bar{z} \in \mathbb{C}$: nombre complexe conjugué de z
 a : partie réelle de z et de \bar{z}
 b : partie imaginaire de z

Nombre complexe conjugué – Propriétés

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i \text{Im}(z)$$

$$\bar{\bar{z}} = z$$

$$\bar{\bar{z}} = -z$$

z : nombre complexe
 \bar{z} : nombre complexe conjugué de z

si z est réel

si z est imaginaire pur

Module d'un nombre complexe

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$|z|$: module de z

Module d'un produit – Module d'un quotient

$$|zz'| = |z| \cdot |z'|$$

$$z' \neq 0 \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$z \in \mathbb{C}$: nombre complexe
 $z' \in \mathbb{C}$: nombre complexe

Inégalité triangulaire

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$z \in \mathbb{C}$: nombre complexe
 $z' \in \mathbb{C}$: nombre complexe

Condition de cocyclicité ou d'alignement de quatre points

$$\frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_1} / \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R}$$

M_i point du plan d'affixe z_i
 $z_i \in \mathbb{C}$
 Les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont cocycliques ou alignés si et seulement si leurs affixes vérifient la propriété ci-contre.

Formule de Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \begin{array}{l} \theta \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Formule d'Euler

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned} \quad x \in \mathbb{R}$$

Racines nièmes d'un complexe

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \right)$$

Les z_k sont les solutions de l'équation $z^n = r e^{i\varphi}$.
 $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leq k \leq n - 1$
 $z \in \mathbb{C}$
 $r \in \mathbb{R}_+$
 En particulier, les racines nièmes de l'unité : $z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$

Groupe des racines nièmes de l'unité

$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ est un groupe pour la multiplication.

2.4 Suites

Convergence – Définition

On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers une limite $l \in \mathbb{K}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \in \mathbb{N}, n \implies |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$\exists l \in \mathbb{K}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Suite bornée

Une suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

Théorème d'encadrement

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \leq v_n \leq w_n \\ (u_n)_n \text{ et } (w_n)_n \text{ convergent vers une même limite } l \end{cases}$$

Alors $(v_n)_n$ converge aussi vers l .

Suite arithmétique

$$u_n = u_{n-1} + r$$

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$$

u_n : n^{e} terme de la suite

r : raison

u_1 : premier terme de la suite

S_n : somme des n premiers termes de la suite u_n

Suite géométrique

$$u_n = q \cdot u_{n-1}$$

$$S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad q \neq 1$$

u_n : n^{e} terme de la suite

q : raison de la suite

u_1 : premier terme de la suite

S_n : somme des n premiers termes de la suite u_n

Suites réelles monotones

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$$

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$$

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement croissante** si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$$

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$$

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **(strictement) monotone** si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante. Toute suite réelle croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) est convergente.

Suites adjacentes

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \\ (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ (v_n - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{array} \right.$$

Si deux suites réelles vérifient les propriétés ci-contre, ces suites sont dites **adjacentes**.
Si deux suites sont adjacentes, elles convergent vers la même limite.

Suites extraites

On appelle **suite extraite** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite $(u_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{K}$, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers l .

Valeur d'adhérence

On dira que a est une valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement s'il existe une suite extraite telle que $u_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$

Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée de \mathbb{R} on peut extraire une suite convergente.

2.5 Fonctions réelles de la variable réelle

Parité

Soit $X \subset \mathbb{R}$ vérifiant $x \in X \implies -x \in X$

$$\forall x \in X, f(-x) = f(x)$$

Une fonction f est **paire** si et seulement si elle vérifie la relation ci-contre.

$$\forall x \in X, f(-x) = -f(x)$$

Une fonction f est **impaire** si et seulement si elle vérifie la relation ci-contre.

Périodicité

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ avec $X \subset \mathbb{R}$, on dit que f est T -périodique si et seulement si elle vérifie :

$$\forall x \in X, \begin{cases} x + T \in X \\ f(x + T) = f(x) \end{cases}$$

Application en escalier

On dit qu'une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est en escalier si et seulement s'il existe une famille $(a_i)_{i \in [0, n]}$ telle que $(a_0, \dots, a_n) \in [a; b]^{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\begin{cases} a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b \\ \forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \forall x \in]a_i; a_{i+1}[, f(x) = \lambda_i \end{cases}$$

Application majorée – minorée – bornée

Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite :

- **majorée** si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X, f(x) \leq A$.
- **minorée** si et seulement s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X, f(x) \geq B$.
- **bornée** si et seulement s'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in X, B \leq f(x) \leq A$.

Limites

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On dit que f admet une **limite l en $a \in \bar{I}$** si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On dit que f admet une **limite l en $+\infty$** si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On dit que f admet comme **limite $+\infty$ en $a \in \bar{I}$** si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq A$$

On dit que f admet comme **limite $+\infty$ en $+\infty$** si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geq B \implies f(x) \geq A$$

On dit que f admet comme **limite $-\infty$ en $-\infty$** si et seulement si :

$$\forall A < 0, \exists B < 0, \forall x \in I, x \leq B \implies f(x) \leq A$$

Continuité

soit $f : I \rightarrow K, a \in I$, on dit que cette fonction est continue en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Discontinuité

Soit $f : I \rightarrow K$, on dit que :

- f est **discontinue** en a si et seulement si elle n'est pas continue en a .
- f admet une **discontinuité de première espèce** en a si et seulement si f n'est pas continue en a mais admet une limite finie à droite et une limite finie à gauche en a .

Si f n'est pas continue et ne présente pas de continuité de première espèce en a , on dit que f admet une **discontinuité de seconde espèce** en a .

Composition et continuité

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow K$ où I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} tels que $f(I) \subset J$, si f et g sont respectivement continues en a et $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

Continuité sur un segment

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$ et une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Continuité uniforme

Soit $f : I \rightarrow K$, on dit que cette fonction est **uniformément continue** sur I si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x_1, x_2) \in I^2, |x_1 - x_2| \leq \eta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$$

L'uniforme continuité implique la continuité.

Théorème de Heine

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq b$ et une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Applications lipschitziennes

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$, on dit que la fonction f est **k -lipschitzienne** si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

Si $k \in [0; 1[$, l'application f est dite **contractante**.

Une application lipschitzienne est uniformément continue.

Fonctions trigonométriques circulaires réciproques

$$\text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\forall x \in]-1, 1[:$$

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

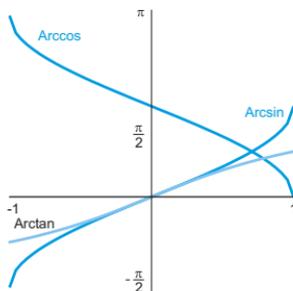
$$\forall x \in]-1, 1[:$$

$$\text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\forall x \in \mathbb{R} :$$

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



Fonctions hyperboliques

$$\text{ch}'x = \text{sh } x$$

$$\text{th}'x = \frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$$

$$\text{sh}'x = \text{ch } x$$

2.6 Dérivation

Dérivée en un point

Soient un point $a \in I$, où I est un intervalle, et une fonction $f : I \rightarrow K$.

On dit que f est dérivable en a si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est appelée dérivée de f en a et est notée $f'(a)$.

Dérivation et continuité

Soient un point $a \in I$ et une fonction $f : I \rightarrow K$, si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Propriétés des dérivées

Soient f et g deux fonctions de I dans K dérivables en a , alors :

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

$$g(a) \neq 0, \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

$$g(a) \neq 0, \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

$f : I \rightarrow K$, où I est un intervalle est dite dérivable sur un intervalle $J \subset I$ si et seulement si : $\forall a \in J$, f est dérivable en a .

Formule de Leibniz

$f : I \rightarrow K$ et $g : I \rightarrow E$ on suppose que λ et f sont dérivables sur I :

Alors $f \cdot g$ est n fois dérivable sur I et $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$

Classe d'une fonction

Soient $f : I \rightarrow K$ et $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe C^k sur I si et seulement si f est k fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est continue sur I .

Soient $f : [a; b] \rightarrow K$ avec $a \leq b$ et $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe C^k par morceaux sur $[a; b]$ si et seulement si :

– il existe une famille $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ telle que :

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{p-1} < a_p = b$$

– Chaque restriction de f sur $]a_i; a_{i+1}[$ admet un prolongement de classe C^k sur $[a_i; a_{i+1}]$, $\forall i \in [0; p-1]$.

Théorème de Rolle

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, $f(a) = f(b)$; alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = 0$$

Théorème des accroissements finis

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

$f : [a, b] \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ et f de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$, $(n+1)$ fois dérivable sur $]a, b[$ et telle que $\forall t \in]a, b[, \|f^{(n+1)}(t)\| \leq M$ alors :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Reste intégral

$f : [a, b] \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$ alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt}_{\text{Reste de Laplace}}$$

Formule de Taylor-Young

$f : I \rightarrow E, I$ un intervalle de \mathbb{R} où $f^{(n)}(a)$ existe :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

Difféomorphisme – Définition

Soient $f : I \rightarrow J$ avec I, J deux intervalles de \mathbb{R} , $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, on dit que f est un **\mathcal{C}^k -difféomorphisme** de I sur J si et seulement si :

- f est de classe \mathcal{C}^k sur I
- f est bijective
- f^{-1} est de classe \mathcal{C}^k sur J

Convexité – Définitions

Soit $f : I \rightarrow K$, on dit que cette fonction est convexe si et seulement si :

$$\forall \theta \in [0, 1], \forall (x, y) \in I^2, f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

Inégalité de convexité

Si f est convexe, soit $\lambda_j \geq 0$ tel que $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, alors :

$$f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j f(a_j).$$

Fonction convexe – Fonction concave

Une fonction f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

2.7 Intégration

Linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$$

f et g : deux fonctions continues par morceaux

Inégalité de la moyenne

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \text{Sup}_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$$

f, g : deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$
 $[a, b]$: intervalle de \mathbb{R}

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq (b - a) \text{Sup}_{[a,b]} |f|$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right)$$

f, g : deux applications continues par morceaux $[a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, on a l'inégalité ci-contre.

Si $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que : $\lambda f + \mu g = 0$, il y a égalité.

Sommes de Riemann

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right)$$

$f : [a, b] \rightarrow E$: une fonction continue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f$$

Intégration par parties

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

$u, v : [a, b] \rightarrow E$, fonctions continues \mathcal{C}^1 par morceaux sur $[a, b]$

Intégrabilité – Définition

$$\int_I f \leq M$$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: fonction positive continue par morceaux.

f est dite intégrable sur $[a, b]$ si et seulement s'il existe un $M \in \mathbb{R}_+$ pour tout segment J inclus dans $[a, b]$, vérifiant l'inégalité ci-contre.

Intégrabilité sur un segment

Soit f une fonction positive continue par morceaux de I dans \mathbb{R} . Les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) f est intégrable sur I .

(ii) Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour toute suite croissante de segments

$(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont la réunion est égale à I : $\forall n \in \mathbb{N}^* \int_{J_n} f \leq M$.

Théorème de domination

$$0 \leq f \leq g \quad (1)$$

$$0 \leq \int_I f \leq \int_I g \quad (2)$$

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux de I dans \mathbb{R} vérifiant (1) et si g intégrable, alors f est intégrable sur I et on a l'inégalité (2).

Exemple de Riemann

Fonctions de Riemann :

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

Une fonction de Riemann est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Une fonction de Riemann est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Théorème d'équivalence

Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, f et g deux fonctions positives continues par morceaux de $[a, b[$ dans \mathbb{R} vérifiant en b : $f \underset{b}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g l'est.

Règle $x^\alpha f(x)$

Intégrabilité en $+\infty$:

– S'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = 0$ alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

– S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ alors f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Intégrabilité en 0 :

– S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha f(x) = 0$ alors f est intégrable sur $]0, a]$ avec $a > 0$.

– S'il existe $\alpha \in [1, +\infty[$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha f(x) = +\infty$ alors f n'est pas intégrable sur $]0, a]$ avec $a > 0$.

Relation de Chasles

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

f : une fonction continue par morceaux intégrable sur un intervalle I contenant les intervalles ouverts $]a, b[$, $]b, c[$ et $]a, c[$.

$$(a, b, c) \in \overline{\mathbb{R}}^3$$

Croissance de l'intégration

$$f \leq g \implies \int_I f \leq \int_I g$$

f, g : deux fonctions continues et intégrables sur I

Fonctions continues à valeurs complexes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On dira que f est intégrable sur I si et seulement si $|f|$ l'est.

Intégrale impropre

$$(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$$

$$\int_a^X f$$

f : fonction continue par morceaux sur $[a, b[$

On dit que cette intégrale impropre converge si et seulement si elle admet une limite finie lorsque X tend vers b . On note alors cette intégrale $\int_a^b f$.

Intégrale dépendant d'un paramètre – Définition

$$f(x) = \int_I F(x, t) dt$$

x : paramètre
 t : variable d'intégration
 I : intervalle de \mathbb{R}

Continuité d'une intégrale à paramètre

$\forall x \in A, F(x, \cdot)$ intégrable sur I

$f : A \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur A

$$x \mapsto \int_I F(x, t) dt$$

F : fonction continue sur $A \times I$ vérifiant l'hypothèse de domination : Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

Si $\begin{cases} 0 \leq f \leq g \\ g \text{ est intégrable sur } I \end{cases}$, alors

f est intégrable sur I et $\int_I f \leq \int_I g$

Sous ces hypothèses, F vérifie les relations ci-contre.

Dérivation d'une intégrale à paramètre

$\forall x \in A$
 $F(x, \cdot)$ et $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \cdot)$ intégrables sur I

$f :$

$A \rightarrow \mathbb{K}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A

$$x \mapsto \int_I F(x, t) dt$$

$$\forall x \in A, f'(x) = \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt$$

F : fonction continue sur $A \times I$ vérifiant une hypothèse de domination sur $A \times I$:

Soient $F, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

Si $\begin{cases} 0 \leq F \leq g \\ g \text{ est intégrable sur } I \end{cases}$, alors

F est intégrable sur I et $\int_I F \leq \int_I g$

$\frac{\partial F}{\partial x}$ existe et est continue sur $A \times I$.

$\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie une hypothèse de domination sur $A \times I$.

Sous ces hypothèses, on a les relations ci-contre.

2.8 Équations différentielles

Équations différentielles linéaires du premier ordre

$$\alpha y' + \beta y = \gamma \quad (E)$$

$\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{K}$ des applications continues.

y est une solution de cette équation sur $J \subset I$ si et seulement si y est dérivable sur J et si $\forall x \in J, y$ vérifie (E).

Équation résolue

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est dite **normalisée** ou **résolue** en y' si et seulement si $\alpha = 1$.

Solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

$$S = \{\lambda e^{-A} + B e^{-A}, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

La solution ci-contre est la solution de l'équation résolue avec $\alpha = 1$

A : primitive de β

B : primitive de γe^A

La solution de (E) est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée à (E) et d'une solution particulière de (E) .

Méthode de résolution de E

1. Résolution de l'équation homogène associée, solution de la forme $\lambda y_0(x)$.
2. Réinjecter la solution trouvée dans l'équation complète avec la méthode de variation de la constante qui permet de trouver la fonction qui vérifie l'équation complète.

Nature de la solution

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre est une droite affine dont la direction est donnée par l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f : U \rightarrow E$ une application localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable et continue, un couple $(t_0, y_0) \in U$.

Sous ces conditions, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy, c'est-à-dire vérifiant :

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{problème de Cauchy})$$

Et possédant en plus les propriétés suivantes (solution maximale) :

- l'intervalle de définition est un ouvert,
- toute solution du problème de Cauchy est une restriction de cette solution.

Équation différentielle du second ordre homogène

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$$

α, β, γ : fonctions continues $I \rightarrow \mathbb{K}$
 y : fonction de $J \subset I$ dans \mathbb{K} solution de cette équation

Équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$y'' + \beta y' + \gamma y = 0$$

$$(E_c) : r^2 + \beta r + \gamma$$

$(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$: coefficients de l'équation différentielle

Soit (E_c) l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle. Si cette équation caractéristique admet :

- deux racines distinctes r_1 et r_2 , les solutions de l'équation sont de la forme $\lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$
- une racine double r , les solutions sont de la forme $(\lambda x + \mu) e^{r x}$
- deux racines complexes conjuguées $r = a \pm ib$, les solutions sont de la forme $(\lambda \cos bx + \mu \sin bx) e^{ax}$

Équation du second ordre avec second membre $e^{\gamma x} R(x)$

$$y'' + \beta y' + \gamma y = e^{m x} P(x)$$

$(\beta, \gamma, m) \in \mathbb{K}^3$: coefficients constants de l'équation différentielle

$$P \in \mathbb{K}[X]$$

L'équation différentielle admet une solution de la forme $e^{m x} S(x)$

avec $S \in \mathbb{K}[X]$:

- $\deg S = \deg P$ si m n'est pas racine de (E_c)
- $\deg S = 1 + \deg P$ si m est racine simple de (E_c)
- $\deg S = 2 + \deg P$ si m est racine double de (E_c)

Résolution grâce aux séries entières

Lorsque les coefficients et le second membre de l'équation différentielle sont constitués par des polynômes, on peut chercher les solutions sous la forme de séries entières, on obtient ainsi une relation de récurrence sur les coefficients. Une fois ces coefficients calculés, le rayon de convergence déterminés et, si possible, la somme calculée, on a une solution de l'équation différentielle.

Système d'équations différentielles du premier ordre

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $B = (b_i)_{i \in [1;n]}$ un vecteur de E et $A = (a_{ij})_{\substack{i \in [1;n] \\ j \in [1;n]}} : I \rightarrow E$ une application continue. On appelle système d'équations différentielles du premier ordre le système :

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Résolution dans le cas où A est diagonalisable

Dans le cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si A est diagonalisable, le système homogène admet une solution du type :

$$Y = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} V_i$$

λ_i : valeur propre de A

c_i : constante liée aux conditions initiales

V_i : colonne de la matrice de passage de A à la matrice diagonale associée.

2.9 Séries

Définition

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n$$

On appelle série le couple $((u_n), (S_n))$.

S_N : somme partielle d'ordre N

u_n : terme général de la série

Condition nécessaire de convergence

Une condition nécessaire **mais non suffisante** de convergence d'une série est que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Si le terme général de la série ne tend pas vers zéro, la série est dite grossièrement divergente.

Changement d'indice de départ

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série de E et $n_0 \in \mathbb{N}$, les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ sont de même nature.

Série géométrique

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1 - u_0} \quad (1)$$

u_0 : terme général de la suite de rang 0

u_n : terme général de la suite, $u_n = (u_0)^n$

Une **condition nécessaire et suffisante** de convergence d'une telle série est $|u_0| < 1$. Dans ce cas, la série vérifie (1).

Série à termes positifs

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Série de Riemann

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \quad (1)$$

Une série vérifiant (1) est dite de Riemann. Une telle série converge si et seulement si :

$$\alpha > 1$$

Valeur remarquable : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Série de Bertrand

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

On appelle série de Bertrand la série définie ci-contre.

Cette série converge si et seulement si :

$$\alpha > 1$$

$$\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1$$

Comparaison de deux séries à termes positifs

$$\forall n \in \mathbb{N} :$$

$$0 \leq u_n \leq v_n \quad (1)$$

u_n : terme général de la série S

v_n : terme général de la série S'

Si (1) est vérifiée et si S' converge, alors S converge.

Remarque : Si S diverge et (1) est vérifiée, la série S' diverge.

Règle de d'Alembert

Soit une série de terme général u_n telle que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta :$

- Si $\beta < 1$ la série de terme général u_n converge ;
- Si $\beta > 1$ la série de terme général u_n diverge grossièrement ;
- Si $\beta = 1$ on ne peut rien dire de la nature de la série.

Règle de Cauchy

Soit une série de terme général u_n réel positif telle que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta :$

- Si $\beta < 1$ la série de terme général u_n converge ;
- Si $\beta > 1$ la série de terme général u_n diverge grossièrement ;
- Si $\beta = 1$ on ne peut rien dire de la nature de la série.

Séries de même nature

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles à termes positifs telles que, au voisinage de $+\infty$, $v_n \geq 0$, et $u_n \sim v_n$. Alors, on a également $u_n \geq 0$ au voisinage de $+\infty$ et les deux séries sont de même nature (elles convergent ou divergent en même temps).

Série alternée

$$\left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n \right| \leq |u_{p+1}|$$

Une série de terme général u_n est dite **alternée** si et seulement si la suite $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

Une telle série converge si :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
2. la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Sous ces hypothèses, la série vérifie la relation ci-contre.

Critère de Cauchy

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 :$

$$N \leq p < q \implies \left\| \sum_{n=p+1}^q u_n \right\| \leq \varepsilon$$

Le critère ci-contre est une condition nécessaire et suffisante de convergence pour une série dans un **espace de Banach** (K -espace vectoriel normé complet).

Formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

$n \in \mathbb{N}$

La formule de Stirling fournit un équivalent simple de $n!$ en $+\infty$.

Convergence absolue – Semi convergence

Une série est dite **absolument convergente** si et seulement si la série de terme général $|u_n|$ converge.

Une série alternée est dite **semi-convergente** si et seulement si la série de terme général u_n converge alors que celle de terme général $|u_n|$ diverge.

Séries doubles – Interspersion des sommations

Soit une suite double d'éléments de $\mathbb{K} : (u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ que l'on suppose sommable (c'est-à-dire $\exists M \in \mathbb{R}_+ / \forall J \subset \mathbb{N} \sum_{\substack{p \in J \\ q \in J}} u_{p,q} \leq M$), alors :

- $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum_{p \geq 0} u_{p,q}$ est convergente et la série $\sum_{q \geq 0} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ est convergente.
- $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{q \geq 0} u_{p,q}$ est convergente et la série $\sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ est convergente.
- $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$.

Produit de Cauchy

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k \cdot v_{n-k} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) \quad (2)$$

On appelle produit de Cauchy des deux séries de terme général u_n et v_n la série dont le terme général vérifie (1).

Si les deux séries de terme général u_n et v_n sont absolument convergentes, alors la série w_n est elle aussi absolument convergente et vérifie (2).

2.10 Séries entières

Série entière

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

$S(z)$: somme de la série entière
 a_n : coefficient de la série entière
 z : variable de la série entière

Rayon de convergence – Définition

$$I = \left\{ r \in \mathbb{R}_+ / \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

La borne supérieure de l'intervalle I dans $\overline{\mathbb{R}}$ est appelée **rayon de convergence** de la série $\sum a_n z^n$, on le note $R = \text{Sup } I$.

Série entière somme

Soient deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$, on appelle série entière somme la série $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$.

Soit R_a et R_b les deux rayons de convergence respectifs de ces deux séries, on a $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$ (avec égalité si $R_a \neq R_b$).

Lemme d'Abel

Soit $r_0 > 0$, si la suite $(|a_n| r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, alors $\forall r \in [0, r_0[$ la série $\sum |a_n| r^n$ est convergente.

Dérivation d'une série entière

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

S : série de terme général $a_n x^n$
 S' : dérivée de la série S
 La série dérivée a le même rayon de convergence que la série à dériver.

Intégration d'une série entière

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

La série des intégrales a le même rayon de convergence que la série intégrée.

Développement en série entière d'une fonction

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **développable en série entière** autour d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ si et s'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que :

$$\forall x \in]x_0 - R; x_0 + R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Le développement en série entière est unique.

Développement en série entière d'une fraction rationnelle

Une fraction rationnelle R est développable en série entière autour de 0 si et seulement si 0 n'est pas un pôle de cette fraction rationnelle. Le rayon de convergence du développement en série entière est alors égal au plus petit module des pôles complexes de la fraction rationnelle.

2.11 Suites et séries d'applications

Convergence simple – Définition

$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in D, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 :$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$: suite d'applications
 E : un \mathbb{K} -espace vectoriel normé
 f : limite de la suite d'applications dans D (domaine de convergence)
 D : domaine de convergence

Convergence uniforme – Définition

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in D, \forall n \geq n_0 :$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$: suite d'applications
 E : un \mathbb{K} -espace vectoriel normé
 f : limite de la suite d'applications dans D (domaine de convergence)

Convergence uniforme et convergence simple

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X , il y a également convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f dans ce même domaine.

Propriété de la convergence uniforme

Si les fonctions f_n sont continues (respectivement admettent une limite en a), alors la limite uniforme (si elle existe) de ces fonctions f est continue (respectivement admet une limite en a).

Convergence uniforme et intégration sur un segment

f est continue sur $[a, b]$

$\left(\int_a^b f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n$$

$(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$: suite d'applications continues convergeant uniformément vers f sur X .

E : un \mathbb{K} -espace vectoriel normé
 f : limite de la suite d'applications
 Sous ces hypothèses, f vérifie les propriétés énoncées ci-contre.

Convergence uniforme et dérivation

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f

f est de classe \mathcal{C}^1 sur I

$$f' = g$$

$(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$: suite d'applications \mathcal{C}^1 convergeant simplement vers f sur X

$(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$: converge uniformément vers une application notée g
 Sous ces hypothèses, f vérifie les propriétés énoncées ci-contre.

Soit $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications \mathcal{C}^1 sur X convergeant simplement vers f sur X .

Soit $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur tout segment de X vers une application g .

Soit f la limite de la suite d'applications vérifiant les hypothèses précédentes. Sous ces hypothèses, on a f de classe \mathcal{C}^1 sur X et $f' = g$.

Théorème de convergence monotone

$$\int_I f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_I f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I .

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une **hypothèse de monotonie** : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f_{n+1}$.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une application notée f continue par morceaux sur I .

Sous ces hypothèses, f **est intégrable** si et seulement si la suite

$\left(\int_I f_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et vérifie alors les propriétés ci-contre.

Théorème de convergence dominée

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I .

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une application notée f continue par morceaux sur I .

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une **hypothèse de domination** : $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$ où φ est une fonction continue par morceaux positive et intégrable sur I .

Sous ces hypothèses, f vérifie la propriété ci-contre.

Premier théorème de Weierstrass

Pour toute application continue $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$, il existe une suite $(P_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{K})_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a; b]$.

Deuxième théorème de Weierstrass

Pour toute application continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ et T -périodique, il existe une suite $(T_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{K})_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers f sur \mathbb{R} .

Séries d'applications : convergence simple – Définition

On dit qu'une série d'applications **converge simplement** si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, avec

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \text{ converge simplement.}$$

Séries d'applications : convergence absolue – Définition

On dit qu'une série d'applications **converge absolument** si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, avec

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \|f_k(x)\|, \text{ converge absolument.}$$

Séries d'applications : convergence uniforme – Définition

On dit qu'une série d'applications converge uniformément si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, avec $S_n(x) =$

$$\sum_{k=0}^n f_k(x), \text{ converge uniformément.}$$

Séries d'applications : convergence normale – Définition

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} :$$

$$\sum_{n \geq n_0} \|f_n\|_{\infty} \text{ converge}$$

On dit que $\sum_n f_n$ converge normalement et seulement si elle vérifie la propriété ci-contre.

Convergences normale, uniforme et simple

La convergence normale entraîne la convergence uniforme qui elle-même entraîne la convergence simple.

Convergence uniforme – Limite et continuité

Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur X et si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en a (respectivement admet une limite en a), alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ est continue en a (respectivement admet une limite en a).

Convergence uniforme et intégration sur un segment

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$

$\sum_{n \geq 0} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$ converge dans E

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$: série d'applications avec f_n continue sur $[a, b]$

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$

Sous ces hypothèses, la série de fonctions vérifie les propriétés ci-contre.

Convergence uniforme et dérivation

$\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment I

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

$\sum_{n \geq 0} f_n$: série d'applications convergeant simplement sur I

$f_n : I \rightarrow E$ de classe C^1

$\sum_{n \geq 0} f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I .

Sous ces hypothèses, f_n et f_n' vérifient les propriétés ci-contre.

Intégration sur un intervalle quelconque des fonctions

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I

$$\int_I \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$$

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

$\sum_{n \geq 0} (f_n)$: série d'applications convergeant simplement sur I

$f_n : I \rightarrow E$: fonction continue par morceaux sur I

$\sum_{n \geq 0} \int_I |f_n|$ converge

Sous ces hypothèses, f_n vérifie les propriétés ci-contre.

2.12 Séries de Fourier

Coefficients de Fourier exponentiels

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

c_n : coefficient de Fourier exponentiel
 f : fonction 2π -périodique continue par morceaux à valeurs complexes
 $n \in \mathbb{Z}$

Coefficients de Fourier trigonométriques

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

a_n : coefficient de Fourier trigonométrique en cosinus
 b_n : coefficient de Fourier trigonométrique en sinus
 f : fonction dont on souhaite obtenir les coefficients de Fourier
 Lorsque la fonction f est paire (respectivement impaire), les coefficients b_n (respectivement a_n) sont nuls.

Théorème de Dirichlet

Si f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et 2π -périodique, pour tout réel x , on a l'égalité suivante :

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$$

$$S(x) = \frac{1}{2} (f(x^-) + f(x^+))$$

Dans ce cas, il y a convergence simple de la série vers $S(x)$.

Égalité de Parseval

Si f est continue par morceaux, on a l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Convergence normale

Si f est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} , la série de Fourier de f est normalement convergente sur \mathbb{R} et a pour somme f .

2.13 Fonctions de plusieurs variables

Dérivée partielle

$$D_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a_1, \dots, a_j + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}$$

f : une fonction de plusieurs variables.

On définit ci-dessus la dérivée partielle par rapport à la variable x_j (sa j^{e} variable) de la fonction f en un point $a = (a_1, \dots, a_n)$.

Dérivée selon un vecteur

On dit que f admet une dérivée en a selon un vecteur v que l'on note $d_v f(a)$ si et seulement si la limite suivante existe :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a + tv) - f(a))$$

Si elle existe, cette limite est $d_v f(a)$.

Théorème fondamental

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^p , si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^p , alors f admet en tout point a de \mathbb{R}^p , une dérivée selon tout vecteur h et

$$D_h f(a) = \sum_{j=1}^p h_j D_j f(a).$$

Gradient

$$\mathbf{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$: fonction de classe \mathcal{C}^1
sur U

U : ouvert de \mathbb{R}^2

$\mathbf{grad} f$: gradient de f

Alors : $D_v f(a) = (\mathbf{grad} f(a)) \cdot v$

Différentielle d'une fonction de deux variables

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$: fonction de classe \mathcal{C}^1
sur U

U : ouvert de \mathbb{R}^2

Applications de classe \mathcal{C}^k

On dit que f est de classe \mathcal{C}^k , avec $k \in \mathbb{N}^*$ sur U si et seulement si f admet des dérivées partielles successives sur U jusqu'à l'ordre k et ce, quel que soit l'ordre de dérivation, et chacune de ces dérivées partielles est continue sur U .

Théorème de Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad f : \text{fonction } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^p.$$

Point critique

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $a \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^n . On dira que a est un point critique pour f si et seulement si toutes les dérivées partielles de f existent et s'annulent en a .

Extremum local

On dira que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ admet un extremum local sur $X \subset U$ en un point $a \in X$ si et seulement si $\forall x \in X$, $f(x) \leq f(a)$ (f admettant alors un maximum en a) ou $\forall x \in X$, $f(x) \geq f(a)$ (f admettant alors un minimum en a).

Théorème des fonctions implicites

Soient $x = (x_1, x_2) \in U$, où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^k sur U telle que $f(x) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \neq 0$, alors il existe deux intervalles ouverts J et K respectivement centrés en x_1 et x_2 tels qu'il existe une unique fonction de classe \mathcal{C}^1 , $\varphi : J \rightarrow K$ telle que :

$$\forall (x, y) \in J \times K, (f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x))$$

3. Géométrie

3.1 Courbes du plan

Point régulier – Point birégulier

Un point $M(t)$ est dit **régulier** si et seulement s'il vérifie $f'(t) \neq 0$; il est dit **birégulier** si et seulement si la famille $(f'(t), f''(t))$ est libre.

Tangente – Définition

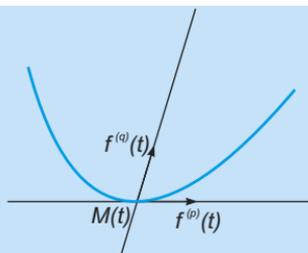
$$\mathbf{M}_0\mathbf{P} = \lambda \mathbf{f}'(t_0)$$

Si $\mathbf{f}'(t_0) \neq 0$, la tangente en un point M de coordonnées t_0 est l'ensemble des points P vérifiant la propriété ci-contre avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

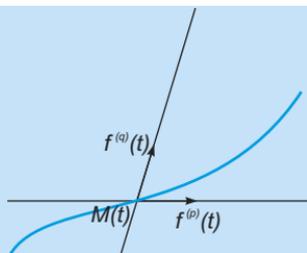
Si cette limite n'existe qu'en t_0^+ (respectivement en t_0^-), on dira que la courbe admet une demi-tangente en $M(t_0^+)$ (respectivement en $M(t_0^-)$). Si les limites en t_0^+ et en t_0^- sont différentes, la courbe admet deux demi-tangentes en M .

Position d'un arc par rapport à la tangente

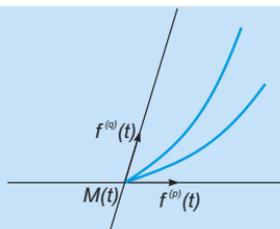
Dans les figures ci-dessous, $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$ représentent les deux premiers vecteurs dérivés non nuls.



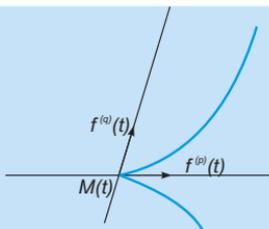
p impair, q pair : allure générale



p impair, q impair : point d'inflexion



p pair, q pair point de rebroussement de seconde espèce



p pair, q impair : point de rebroussement de première espèce

Branche infinie – Définition

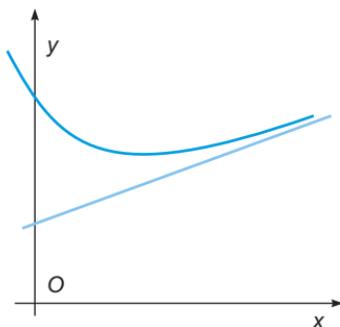
On dit que la courbe Γ admet une branche infinie en t_0 si et seulement si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t)\| = +\infty$.

Direction asymptotique – Asymptote

Si la branche infinie forme un angle θ_0 par rapport à l'axe des abscisses, pour savoir s'il s'agit d'une asymptote ou d'une direction asymptotique, on étudie la limite :

$$Y = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho \sin(\theta - \theta_0)$$

Si cette limite vaut $+\infty$, il s'agit d'une direction asymptotique, si la limite vaut 0, il s'agit d'une asymptote, si la limite vaut b avec $b \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = \theta_0 x + b$ est asymptote à la courbe.



Branche parabolique

On dira que la courbe Γ admet une **branche parabolique** quand t tend vers t_0 si cette même courbe admet une direction asymptotique quand t tend vers t_0 mais pas d'asymptote.

Symétries

Soit $\varphi : t \mapsto \varphi(t)$ une fonction de changement de paramétrage. On donne ci-dessous les symétries classiques qui permettent de limiter l'intervalle d'étude de la courbe :

$$\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) \\ y(\varphi(t)) = y(t) \end{cases}$$

Identité

$$\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$$

Symétrie par rapport à l'origine

$$\begin{cases} x(\varphi(t)) = y(t) \\ y(\varphi(t)) = x(t) \end{cases}$$

Symétrie par rapport à la première bissectrice

$$\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = y(t) \end{cases}$$

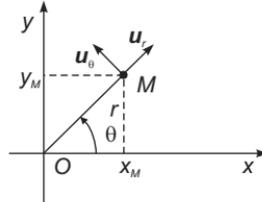
Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

$$\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$$

Symétrie par rapport à l'axe des abscisses

Coordonnées polaires

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$



Équations en coordonnées polaires

La droite :

$$\rho = \frac{1}{\lambda \cos \theta + \mu \sin \theta}$$

$$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Cette équation représente la droite d'équation cartésienne $\lambda x + \mu y - 1 = 0$.

Le cercle :

$$\rho = \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta$$

$$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Cette équation représente le cercle centré en O d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - \lambda x - \mu y = 0$.

Conique dont le foyer est à l'origine :

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varphi)}$$

p : paramètre de la conique

e : excentricité de la conique

θ : angle polaire

φ : phase

Branches infinies – Définitions

Si $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho = 0$, on dit que O est un **point-asymptote** de la courbe.

Si $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho = a$, on dit que le cercle de centre O et de rayon $|a|$ est un **cercle-asymptote** à la courbe.

Si $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho = \pm\infty$, on dit que la courbe admet une **branche-spirale**.

Si la branche infinie forme un angle θ_0 par rapport à l'axe des abscisses, pour savoir s'il s'agit d'une **asymptote** ou d'une direction asymptotique, on étudie la limite :

$$Y = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho \sin(\theta - \theta_0)$$

Si cette limite vaut $+\infty$, il s'agit d'une direction asymptotique, si la limite vaut 0, il s'agit d'une asymptote, si la limite vaut b avec $b \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = \theta_0 x + b$ est asymptote à la courbe.

Symétries

Soit T la **période** de ρ (c'est-à-dire $\rho(\theta + T) = \rho(\theta)$). S'il existe T' tel que $\rho(\theta + T') = -\rho(\theta)$, T' est appelé **antipériode** de ρ .

$$\rho(-\theta) = \rho(\theta)$$

Symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On fait varier θ dans $[0; +\infty[$ avant d'effectuer la symétrie.

$$\rho(\alpha - \theta) = \rho(\alpha)$$

On fait varier θ dans $\left[\frac{\alpha}{2}; +\infty\right[$ puis on effectue la symétrie par rapport à la droite passant par O et d'angle polaire $\alpha/2$.

$$\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$$

Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. On fait varier θ dans $[0; +\infty[$ avant d'effectuer la symétrie.

$$\rho(\alpha - \theta) = -\rho(\alpha)$$

On fait varier θ dans $\left[\frac{\alpha}{2}; +\infty\right[$ puis on effectue la symétrie par rapport à la droite passant par O et d'angle polaire $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$.

3.2 Propriétés métriques des courbes

Abscisse curviligne

$$\forall t \in I, s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| \, du$$

$$\begin{aligned} f &: t \mapsto M(t) \\ s &: t \mapsto s(t) \end{aligned}$$

Longueur d'un arc

$$l(AB) = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt$$

$l(AB)$: longueur de l'arc AB

Rayon de courbure – Courbure

$$R = \frac{ds}{d\alpha}$$

$$\gamma = \frac{1}{R}$$

R : rayon de courbure

s : abscisse curviligne

$\alpha = (\mathbf{i}, \mathbf{T})$ où \mathbf{T} est le vecteur tangent

γ : courbure au point $M(t)$

Chapitre 2

Physique

0. Éléments de mathématiques

0.1 Différentielles

Développements limités

Soit $f : x \mapsto f(x)$, alors $f(x + \delta x) = f(x) + \delta x f'(x) + \frac{(\delta x)^2}{2} f''(x) +$

...

Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Soit f une fonction des variables x et y , alors :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x dy$$

On peut étendre cette définition de df pour une fonction de n variables.

On a par définition du gradient :

$$df = (\mathbf{grad} f) \cdot d\mathbf{M}$$

Théorème de Schwarz

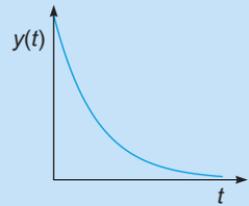
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

(les dérivées croisées d'une fonction C^2 sont égales)

0.2 Équations différentielles

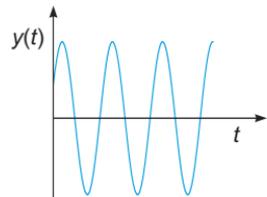
Équation de relaxation

$y'(t) + \frac{y(t)}{\tau} = \gamma$ (où γ est une constante). Sa solution est $y(t) = \gamma\tau + (y(0) - \gamma\tau)e^{-t/\tau}$.



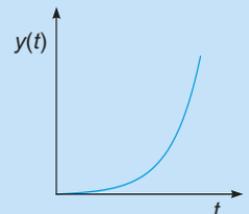
Équation de l'oscillateur harmonique

$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$. Sa solution est $y(t) = \lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t)$ ou $y(t) = \delta \cos(\omega_0 t + \varphi)$



Équation d'un système explosif

$y''(t) - \omega_0^2 y(t) = 0$. Sa solution est $y(t) = \lambda \operatorname{ch}(\omega_0 t) + \mu \operatorname{sh}(\omega_0 t)$

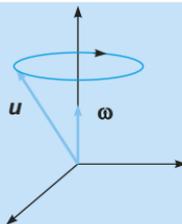


Équation de diffusion

$\frac{\partial y}{\partial t} = D\Delta y$. Les solutions dépendent des conditions aux limites et des conditions initiales. On la résoud généralement en régime permanent où la solution est sinusoïdale.

Équation de précession

$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$. \mathbf{u} est en rotation autour du vecteur $\boldsymbol{\omega}$



Équation du second ordre

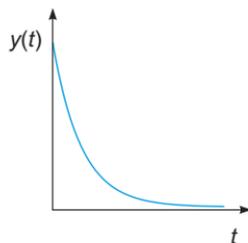
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t)$$

Le discriminant de son équation caractéristique ($(E_c) ar^2 + br + c = 0$) est $\Delta = b^2 - 4ac$. Soient r_1 et r_2 les deux racines de cette équation caractéristique.

Dans un premier temps, intéressons nous au cas où $g(t) = \gamma$, une constante.

Si $\Delta > 0$, les deux racines r_1 et r_2 sont réelles, la solution est du type apériodique :

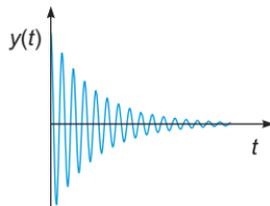
$$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} + \frac{\gamma}{c}$$



Si $\Delta < 0$, les deux racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées, la solution est alors pseudo-périodique :

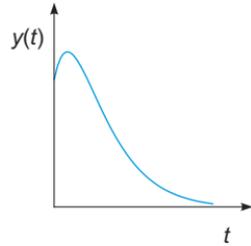
$$y(t) = (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))e^{\alpha t} + \frac{\gamma}{c}$$

avec α et β respectivement partie réelle et partie imaginaire de r_1



Si $\Delta = 0$, le régime est critique, l'équation caractéristique admet une racine double.

La solution est : $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_1 t} + \frac{\gamma}{c}$



Si $g(t)$ est une excitation sinusoïdale, on résout en complexes en posant $\underline{y}(t) = \underline{Y}e^{j\omega t}$ pour obtenir une solution particulière.

0.3 Coniques

Équation polaire d'une conique avec origine au foyer

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

r : distance du point courant à l'origine

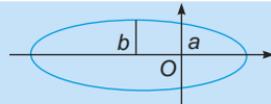
θ : angle polaire

p : paramètre

e : excentricité

Nature de la conique

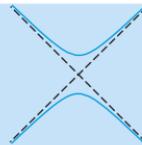
– une ellipse si $0 < e = \frac{a}{b} < 1$



– une parabole si $e = 1$



– une hyperbole si $e > 1$



Aire d'une ellipse

$$S = \pi ab$$

S : surface de la conique

a : demi grand axe

b : demi petit axe

1. Électronique

1.1 Lois générales

Loi de Pouillet

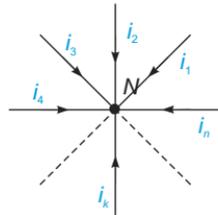
$$i = \frac{E}{\sum_k R_k}$$

i : intensité du courant dans le circuit
 E : tension délivrée par le générateur
 R_k : résistance k du circuit

Loi des nœuds

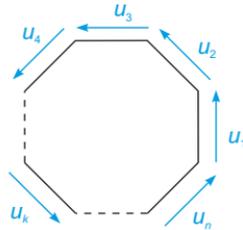
La loi des nœuds en N s'écrit :

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$



Loi des mailles

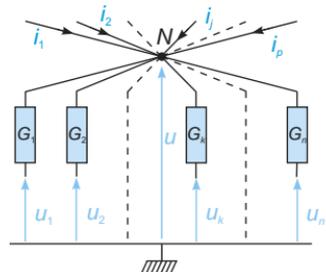
La loi des mailles sur la maille ci-contre s'écrit : $\sum_{k=1}^n u_k = 0$



Théorème de Millman

Le théorème de Millman appliqué en N donne :

$$u = \frac{\sum_{k=1}^n G_k \cdot u_k + \sum_{j=1}^p i_j}{\sum_{k=1}^n G_k}$$



Théorème de superposition (Helmholtz)

Dans un réseau de dipôles linéaires comportant n sources, la tension aux bornes de chaque dipôle est la somme algébrique des tensions qu'il y aurait aux bornes de ce dipôle si une seule source autonome fonctionnait. De même, l'intensité dans une branche d'un circuit est la somme des intensités qui règneraient dans la branche si une seule source autonome fonctionnait.

1.2 Régime variable

Puissance reçue par un dipôle

$$p(t) = u(t)i(t)$$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

$$\langle p \rangle_{\text{sinusoïdal}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$$

On se place en **convention récepteur**.

$p(t)$: puissance instantanée reçue par le dipôle

$\langle p \rangle$: puissance moyenne reçue par le dipôle

$u(t)$: tension aux bornes de ce dipôle

$i(t)$: intensité traversant le dipôle

U_{eff} : tension efficace aux bornes du dipôle

I_{eff} : intensité efficace traversant le dipôle

φ : déphasage entre la tension et l'intensité $\varphi = \arg \underline{Z}$ où \underline{Z} est l'impédance complexe

Impédance complexe et phase des composants usuels

Résistance :

$$Z = R$$

$$\varphi = 0$$

Bobine :

$$Z = jL\omega$$

$$\varphi = +\frac{\pi}{2}$$

Condensateur :

$$Z = \frac{1}{jC\omega}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Z : impédance

R : valeur de la résistance

C : capacité du condensateur

L : inductance de la bobine

ω : pulsation

φ : déphasage de u par rapport à i

Fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

$\underline{H}(j\omega)$: fonction de transfert

\underline{s} : signal de sortie

\underline{e} : signal d'entrée

Gain en décibels – Phase

$$H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$$

$$G_{dB} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|$$

$$\varphi = \arg \underline{H}$$

$H(\omega)$: gain

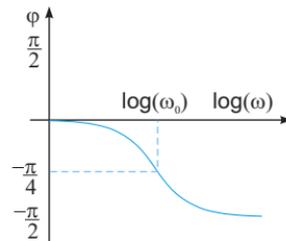
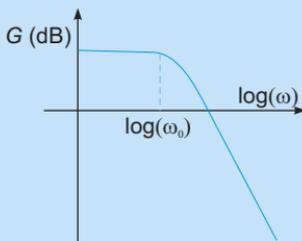
G_{dB} : gain en décibels

$\underline{H}(j\omega)$: fonction de transfert

φ : phase (avance de la sortie sur l'entrée)

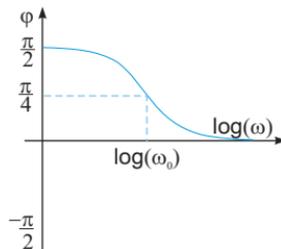
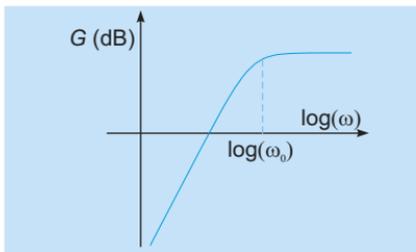
Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode en gain (respectivement en phase) consiste à représenter le gain en décibel (respectivement la phase) en fonction de $\log \frac{\omega}{\omega_0}$ ou de $\log \omega$.

Filtre passe-bas du premier ordre

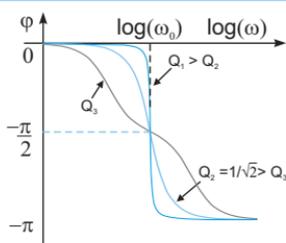
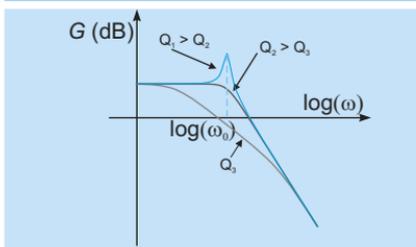
$$H(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Filtre passe-haut du premier ordre



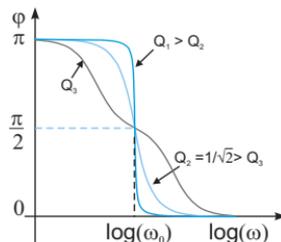
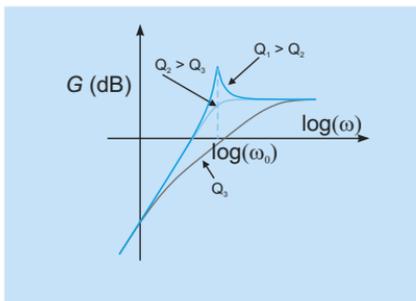
$$H(\omega) = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Filtre passe-bas du deuxième ordre



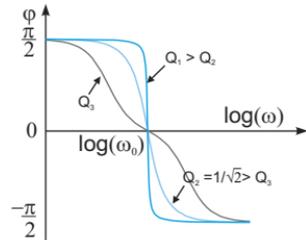
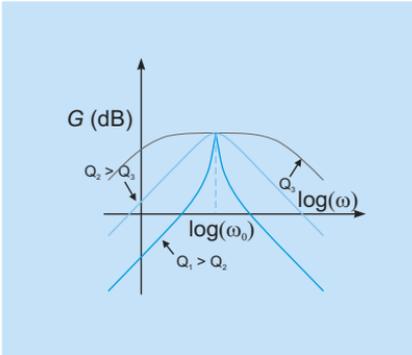
$$H(\omega) = \frac{H_0}{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

Filtre passe-haut du deuxième ordre



$$H(\omega) = \frac{H_0 \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)}{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

Filtere passe bande de deuxième ordre



$$H(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

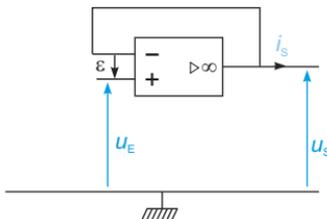
1.3 Montages avec amplificateur opérationnel

Généralités

Pour un amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire :

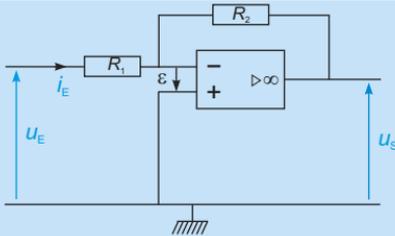
- $\varepsilon = V_+ - V_- = 0 \iff |u_S| \leq V_{sat}$.
- Si $\varepsilon < 0$, $u_S = -V_{sat}$, si $\varepsilon > 0$, $u_S = V_{sat}$: on est en régime saturé.
- L'intensité entrant par les bornes + et - est nulle.

Suiveur de tension



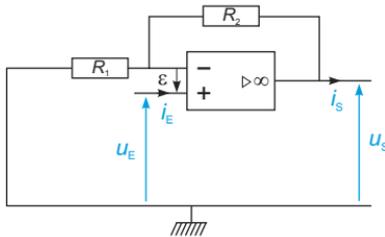
$$u_S = u_E$$

Amplificateur inverseur



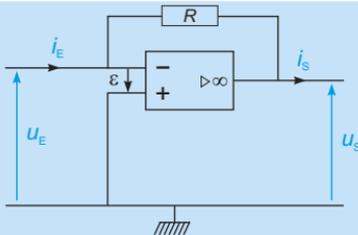
$$u_S = -\frac{R_2}{R_1} u_E$$

Amplificateur non inverseur



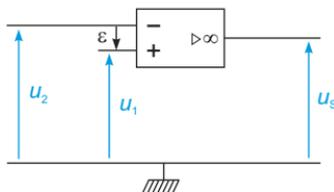
$$u_S = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) u_E$$

Convertisseur courant-tension



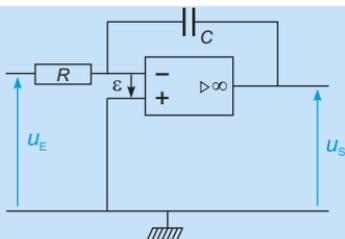
$$u_S = -R \cdot i_E$$

Comparateur simple



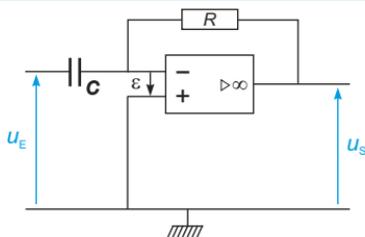
$$\begin{aligned} \text{Si } u_1 > u_2, u_S &= +V_{\text{sat}} \\ \text{Si } u_1 < u_2, u_S &= -V_{\text{sat}} \end{aligned}$$

Intégrateur théorique



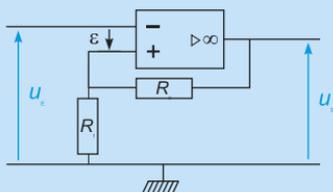
$$u_S = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^t u_E(t) dt + u_S(t_0)$$

Dérivateur théorique



$$u_S = -RC \frac{du_E}{dt}$$

Comparateur à hystérésis



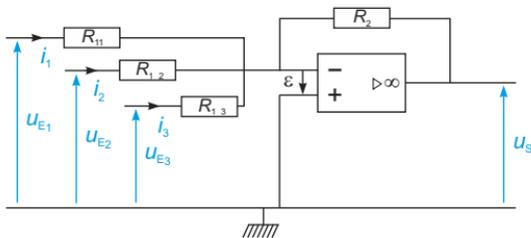
$$\varepsilon = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_S - u_E$$

$$\text{- Si } u_S = +V_{\text{sat}} \Rightarrow \varepsilon > 0 \Rightarrow u_E < \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$$

$$\text{- Si } u_S = -V_{\text{sat}} \Rightarrow \varepsilon < 0 \Rightarrow u_E > -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$$

$$\text{- Si } u_E \in \left] -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}, \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} \right[\text{ alors le montage est bistable } (u_S = \pm V_{\text{sat}})$$

Sommateur inverseur



$$i_k = \frac{u_{E_k}}{R_{1k}} \quad u_S = -R_2 \sum_k \frac{u_{E_k}}{R_{1k}}$$

2. Thermodynamique

2.1 Gaz parfait

Équation d'état

$$pV = nRT$$

p : pression du gaz
 V : volume du gaz
 $R = \mathcal{N} \cdot k$: constante des gaz parfaits
 T : température
 n : quantité de matière

Vitesse quadratique moyenne

$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k T$$

m : masse atomique du gaz
 u : vitesse quadratique moyenne
 k : constante de Boltzmann
 T : température

Coefficients thermoélastiques

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

$$\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

α : coefficient de dilatation isobare
 β : coefficient d'augmentation de pression à volume constant

χ_T : coefficient de compressibilité isotherme

p : pression

T : température

V : volume

Relation entre les coefficients thermoélastiques

$$\alpha = p\beta\chi_T$$

Modèle de Van der Waals

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

a, b : constantes positives

n : quantité de matière

p : pression

T : température

V : volume

nb : covolume

R : constante des gaz parfaits

2.2 Premier et second principes de la thermodynamique

Premier principe

$$\Delta U = W + Q$$

ΔU : variation d'énergie interne

W : transfert mécaniques reçus par le système

Q : transferts thermiques vers le système

Travail réversible des forces de pression

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} p \, dV$$

W : travail des forces de pression
 V_i : volume initial
 V_f : volume final
 p : pression
 Si la transformation est isobare,
 alors : $W = -p\Delta V$

Enthalpie

$$H = U + pV$$

H : enthalpie
 U : énergie interne
 p : pression
 V : volume du système
 L'enthalpie est une fonction d'état.

Première loi de Joule pour un gaz parfait

$$dU = C_V \, dT$$

dU : variation d'énergie interne
 C_V : capacité thermique à volume constant
 dT : variation de température

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

Autre formulation : U ne dépend que de T

Seconde loi de Joule pour un gaz parfait

$$dH = C_p \, dT$$

dH : variation d'enthalpie
 C_p : capacité thermique à pression constante
 dT : variation de température

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p$$

Autre formulation : H ne dépend que de T

Gaz parfait monoatomique

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

$$H = \frac{5}{2}nRT$$

U : énergie interne

H : enthalpie

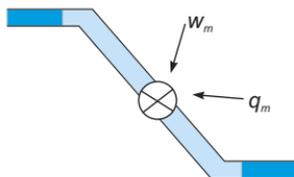
n : quantité de matière

R : constante des gaz parfaits

T : température

Bilan sur les écoulements permanents

$$(h_2 + e_{k_2} + \rho g z_2) - (h_1 + e_{k_1} + \rho g z_1) = w_m + q_m$$



Cette relation est aussi appelée **relation de Zeuner**.

On indexe par 1 et 2 les grandeurs relatives au fluide respectivement en amont et en aval de la machine.

h_i : enthalpie massique

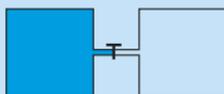
e_{k_i} : énergie cinétique massique

$\rho g z_i$: énergie potentielle de pesanteur massique

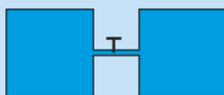
w_m : travail reçu par l'unité de masse de fluide qui traverse la machine

q_m : transfert thermique reçu par l'unité de masse de fluide qui traverse la machine

Détente de Joule Gay-Lussac



état initial



état final

$$\Delta U = 0$$

U : énergie interne

Détente de Joule–Kelvin



$$h_1 + e_{k_1} = h_2 + e_{k_2}$$

En écoulement lent ($e_{k_i} \ll h_i$), la détente est isenthalpique ($h_2 = h_1$).

Rapport des capacités thermiques

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} > 1$$

$$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$$

R : constante des gaz parfaits
 γ : rapport des capacités thermiques

Second principe – Entropie

$$dS = \frac{\delta Q}{T_\Sigma} + \delta S_{\text{irrev}}$$

S : entropie
 Q : transferts thermiques vers le système
 T_Σ : température de surface du système
 $\delta S_{\text{irrev}} \geq 0$: création d'entropie
 L'entropie est une mesure statistique du désordre

Identités thermodynamiques

$$dU = T dS - p dV$$

$$dH = T dS + V dp$$

dU : variation d'énergie interne
 dH : variation d'enthalpie
 dS : variation d'entropie
 p : pression du gaz
 V : volume du système
 T : température

Lois de Laplace

$$p V^\gamma = \text{cste}_1$$

$$T V^{\gamma-1} = \text{cste}_2$$

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cste}_3$$

Ces lois décrivent l'évolution des paramètres thermodynamiques pour une transformation isentropique (adiabatique réversible) de gaz parfait.

p : pression du gaz

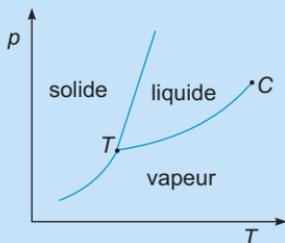
V : volume du système

T : température

γ : rapport isentropique

2.3 Changements de phase d'un corps pur

Diagramme d'état



Le point C est le point critique au delà duquel on ne fait plus la différence entre la phase liquide et la phase vapeur (état fluide).

Le point T est le point triple où toutes les phases coexistent.

p : pression

T : température

Nomenclature des changements de phase

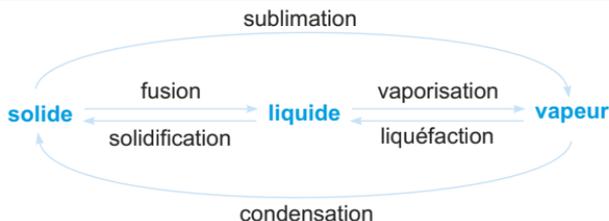
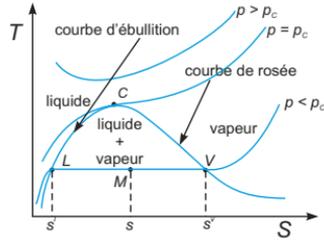
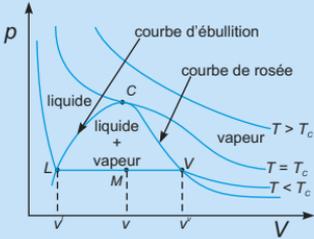


Diagramme d'équilibre liquide-vapeur



Titre de vapeur – Titre de liquide

$$x_v = \frac{m_v}{m} = \frac{LM}{LV}$$

$$x_l = \frac{m_l}{m} = \frac{MV}{LV}$$

x_l : titre massique de liquide
 x_v : titre massique de vapeur
 m_l, m_v : masse de liquide et de vapeur
 LM, LV, MV : distance LM, LV, MV mesurées sur un des deux diagrammes d'état précédent.

On a également la relation :
 $x_l + x_v = 1$

Expression des fonctions d'état

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2$$

$$h = x_1 h_1 + x_2 h_2$$

$$s = x_1 s_1 + x_2 s_2$$

x_i : le titre massique du corps pur dans la phase i
 u_i, h_i, s_i : l'énergie interne massique, l'enthalpie massique et l'entropie massique du corps dans la phase i
 u, h, s : l'énergie interne massique, l'enthalpie massique et l'entropie massique du corps

Chaleur latente

$$l_{1 \rightarrow 2} = h_2 - h_1 = T(s_2 - s_1)$$

$l_{1 \rightarrow 2}$: chaleur latente massique de passage de la phase 1 à la phase 2
 h_i : enthalpie massique du corps dans la phase i
 s_i : entropie massique du corps dans la phase i
 T : température de coexistence des phases

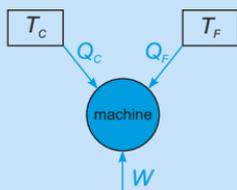
Relation de Clapeyron

$$l_{1 \rightarrow 2} = T(v_2 - v_1) \frac{\partial p}{\partial T}$$

$l_{1 \rightarrow 2}$: chaleur latente massique de passage de la phase 1 à la phase 2
 v_i : volume massique du corps dans la phase i
 p : pression
 T : température de changement d'état

2.4 Machines thermiques

Machines dithermes



T_C : température de la source chaude
 Q_C : transfert thermique algébrique de la source chaude vers la machine
 T_F : température de la source froide
 Q_F : transfert thermique algébrique de la source froide vers la machine
 W : transfert mécanique reçu par la machine

Premier et second principes appliqués sur un cycle

$$\Delta U = 0$$

$$\Delta S = 0$$

Sur un cycle, la variation d'énergie interne (U) et d'entropie (S) est nulle (fonctions d'état).

Inégalité de Clausius

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$$

(Second principe appliqué à la machine)

T_C : température de la source chaude

Q_C : transfert thermique algébrique de la source chaude vers la machine

T_F : température de la source froide

Q_F : transfert thermique algébrique de la source froide vers la machine

Efficacité de Carnot du moteur ditherme

$$e_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

$$e \leq e_C$$

e_C : efficacité de Carnot (machine réversible)

T_C : température de la source chaude

T_F : température de la source froide

e : efficacité réelle

Efficacité de Carnot du réfrigérateur ditherme

$$e_C = \frac{T_F}{T_C - T_F}$$

$$e \leq e_C$$

e_C : efficacité de Carnot (machine réversible)

T_C : température de la source chaude

T_F : température de la source froide

e : efficacité réelle

Efficacité de Carnot de la pompe à chaleur

$$e_C = \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

$$e \leq e_C$$

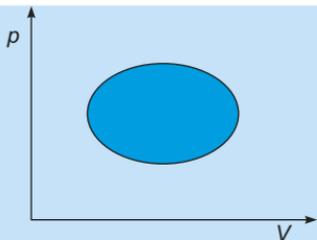
e_C : efficacité de Carnot (machine réversible)

T_C : température de la source chaude

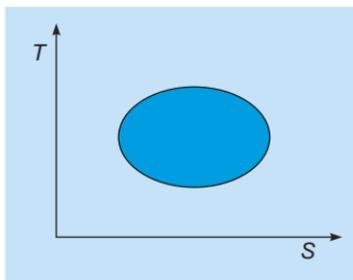
T_F : température de la source froide

e : efficacité réelle

Représentation du cycle



Le transfert mécanique reçu par la machine correspond à l'aire intérieure de la courbe dans le diagramme de Clapeyron (p, V). Cette aire doit donc être négative (parcourue dans le sens horaire) pour obtenir un moteur. ($w < 0$)



Le transfert thermique reçu correspond à l'aire intérieure à la courbe dans le diagramme (S, T) .

2.5 Diffusion thermique

Flux thermique

$$\Phi_{th} = \iint_S \mathbf{j}_{th} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Φ_{th} : flux thermique

\mathbf{j}_{th} : vecteur courant de diffusion thermique

\mathbf{n} : normale à la surface dS

Loi de Fourier

$$\mathbf{j}_{th} = -\lambda \mathbf{grad}T$$

\mathbf{j}_{th} : vecteur courant de diffusion thermique

T : température

λ : conductivité thermique

Équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T$$

$$\kappa = \frac{\lambda}{\rho C}$$

κ : diffusivité thermique

T : température

Δ : laplacien scalaire

λ : conductivité thermique

ρ : masse volumique

C : capacité thermique

Convection

$$j_c = -h(T_{int} - T_{ext})$$

j_c : courant de convection algébrique

h : coefficient de convection

T_{int} : température intérieure

T_{ext} : température extérieure

Conductance thermique

$$\Phi = G(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})$$

$$G = h_{\text{eq}}S$$

$$h_{\text{eq}} = \left(\sum_i \frac{1}{h_i} + \sum_j \frac{e_j}{\lambda_j} \right)^{-1}$$

En régime permanent, on définit ainsi la conductance thermique.

Φ : flux thermique total

G : conductance thermique

T_{int} : température intérieure

T_{ext} : température extérieure

h : coefficient de convection

λ : conductivité thermique

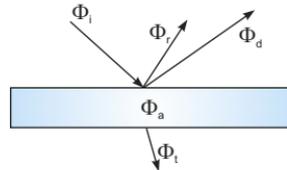
e_j : épaisseur de la paroi de conductivité λ_j

2.6 Rayonnement thermique

Flux thermique

$$\underbrace{\varphi_i}_{\text{incident}} = \underbrace{\varphi_r}_{\text{réfléchi}} + \underbrace{\varphi_a}_{\text{absorbé}}$$

$$\underbrace{\varphi_p}_{\text{partant}} = \underbrace{\varphi_e}_{\text{émis}} + \underbrace{\varphi_r}_{\text{réfléchi}} + \underbrace{\varphi_t}_{\text{transmis}}$$



Loi de Planck

$$F_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}$$

$F_{\lambda}(\lambda, T)$: émittance

λ : longueur d'onde

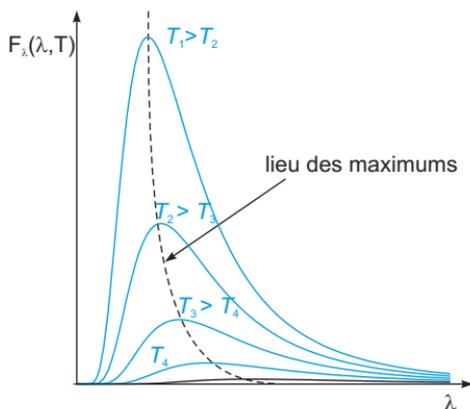
T : température

h : constante de Planck

c : vitesse de la lumière dans le vide

k : constante de Boltzmann

Représentation graphique de la loi de Planck



Loi du déplacement de Wien

$$\lambda_m T = 2897,8 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

λ_m : longueur d'onde où l'émission est maximale
 T : température

Loi de Stefan

Cette loi est valable pour tout corps à l'équilibre thermodynamique et à l'équilibre thermique pour φ_p .

$$\varphi_e = \int_0^{+\infty} F_\lambda(\lambda, T) d\lambda$$

$$\varphi_e = \sigma T^4$$

φ_e : flux émis
 $F_\lambda(\lambda, T)$: luminance (décrite par la loi de Planck)
 σ : constante de Stefan
 λ : longueur d'onde
 T : température

Corps noir

Un corps noir absorbe le flux incident pour toute longueur d'onde et quelque soit son incidence. Il est en équilibre radiatif ($\varphi_p = \varphi_i$ et $\varphi_e = \varphi_a$, où φ_p est le flux partant, φ_i le flux incident, φ_e le flux émis et φ_a le flux absorbé) et thermique.

3. Mécanique du point

3.1 Cinématique

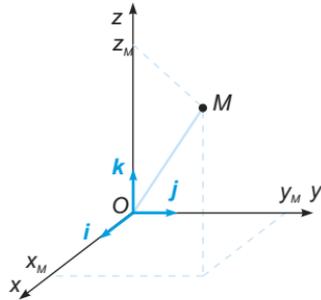
Coordonnées cartésiennes

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

x : abscisse
 y : ordonnée
 z : cote

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$



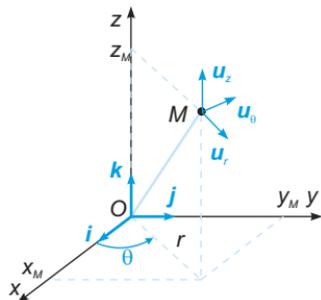
Coordonnées cylindriques

$$\mathbf{OM} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$$

r : rayon polaire
 θ : angle polaire
 z : cote

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{u}_z \end{matrix}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{u}_z \end{matrix}$$



Coordonnées sphériques

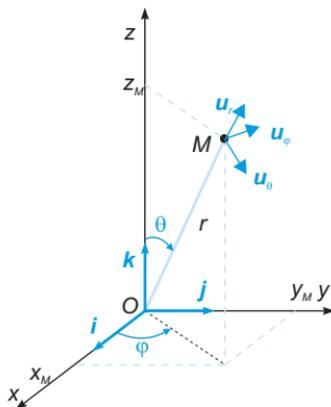
$$\mathbf{OM} = r\mathbf{u}_r$$

r : rayon

θ : colatitude variant dans $[0, \pi]$

φ : longitude variant dans $[0, 2\pi]$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r\sin\theta\dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{u}_\varphi \end{matrix}$$



Mouvement circulaire uniforme

$$\mathbf{OM} = r\mathbf{u}_r$$

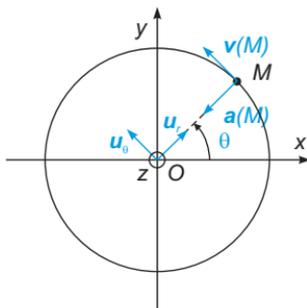
r : rayon polaire

θ : angle polaire

ω : vitesse angulaire uniforme

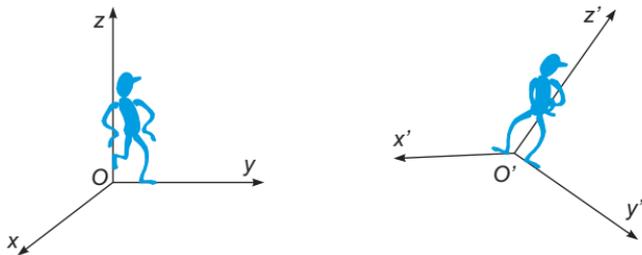
($\omega = \omega\mathbf{u}_z$)

$$\mathbf{v} = \omega\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{OM} = \omega r\mathbf{u}_\theta$$



$$\mathbf{a} = -\omega^2 r\mathbf{u}_r = -\frac{v^2}{r}\mathbf{u}_r$$

3.2 Changement de référentiel



Composition des vitesses

$$\mathbf{v}(M)_R = \underbrace{\mathbf{v}(M)_{R'}}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\mathbf{v}(O')_R + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}}_{\text{vitesse d'entraînement}}$$

$\boldsymbol{\Omega}$: vecteur de rotation instantannée de R' par rapport à R

Composition d'accélération

$$\mathbf{a}(M)_R = \mathbf{a}(M)_{R'} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}(M)_{R'}}_{\text{accélération de Coriolis } (a_c)} + \underbrace{\mathbf{a}(O')_R + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}}_{\text{accélération d'entraînement } (a_e)}$$

Forces associées

$$\mathbf{f}_e = -m\mathbf{a}_e$$

$$\mathbf{f}_c = -m\mathbf{a}_c$$

\mathbf{f}_e : force d'entraînement

\mathbf{f}_c : force de Coriolis

\mathbf{a}_e : accélération d'entraînement

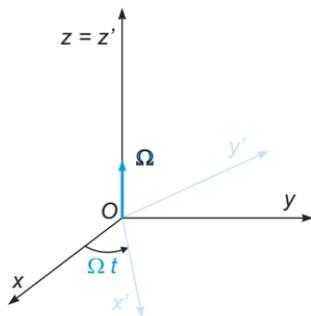
\mathbf{a}_c : accélération de Coriolis

Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe

$$\mathbf{f}_e = m\Omega^2 r \mathbf{u}_r$$

(force centrifuge)

$$\mathbf{f}_c = -2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}(M)_{R'}$$



Référentiel galiléen

Dans un référentiel galiléen un point matériel isolé est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

3.3 Lois générales de la mécanique

Principe des actions réciproques

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$$

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \wedge \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{F}_{i \rightarrow j}$: force de i sur j

M_i : point d'application de la force

$\mathbf{F}_{i \rightarrow j}$

Principe fondamental de la dynamique

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_i \mathbf{f}_i$$

$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$: quantité de mouvement du système

\mathbf{f}_i : force appliquée au système

$\sum_i \mathbf{f}_i$: résultante des forces

Quantité de mouvement d'un système fermé

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}(P_i) = M\mathbf{v}(G)$$

\mathbf{p} : quantité de mouvement du système

m_i : masse associée au point matériel P_i

M : masse du système

G : centre de masse du système

Théorème du moment cinétique en un point fixe

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathcal{M}_O \left(\sum_i \mathbf{f}_i \right)$$

\mathbf{L}_O : moment cinétique au point de réduction O

$\mathcal{M}_O \left(\sum_i \mathbf{f}_i \right)$: moment de la résultante des forces en O

Moment cinétique – Moment cinétique barycentrique

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_A + \mathbf{BA} \wedge m\mathbf{v}(M)$$

$$\mathbf{L}_{\text{système}}^* = \mathbf{L}_G$$

\mathbf{L}_P : moment cinétique en P

m : masse du système

$\mathbf{v}(M)$: vitesse du point M

$\mathbf{L}_{\text{système}}^*$: moment cinétique barycentrique du système

Théorème de Kœnig du moment cinétique

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{L}^* + \mathbf{AG} \wedge M\mathbf{v}(G)$$

$\mathbf{L}(P)$: moment cinétique en P

\mathbf{L}^* : moment cinétique barycentrique

M : masse du système

$\mathbf{v}(G)$: vitesse du centre de gravité du système

Moment de forces

$$\mathcal{M}_B(\mathbf{f}) = \mathcal{M}_A(\mathbf{f}) + \mathbf{BA} \wedge \mathbf{f}$$

\mathcal{M}_P : moment de force en P

\mathbf{f} : force appliquée au système

Théorème du moment cinétique en un point mobile

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \mathcal{M}_A \left(\sum_i \mathbf{f}_i \right) - \mathbf{v}(A) \wedge m\mathbf{v}(P)$$

\mathbf{L} : moment cinétique

$\mathcal{M} \left(\sum_i \mathbf{f}_i \right)$: moment de la résultante des forces

m : masse du système

$\mathbf{v}(P)$: vitesse de P

Puissance d'une force

$$\mathcal{P} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

\mathcal{P} : puissance de la force \mathbf{f}
 \mathbf{f} : force
 $\mathbf{v}(G)$: vitesse du point matériel

Énergie cinétique d'un point et d'un système de points

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_k = \sum_i \frac{m_i}{2}v_i^2$$

E_k : énergie cinétique
 m : masse du système
 m_i : masse du point matériel P_i
 v : vitesse du système
 v_i : vitesse du point matériel P_i

Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{dE_k}{dt} = \mathcal{P}$$

E_k : énergie cinétique
 \mathcal{P} : puissance des forces appliquées au système

Théorème de Kœnig de l'énergie cinétique

$$E_k = E_k^* + \frac{1}{2}mv^2(G)$$

E_k : énergie cinétique
 E_k^* : énergie cinétique barycentrique
 m : masse du système
 $v(G)$: vitesse du centre de gravité du système

Énergie mécanique

$$E_m = E_k + E_p$$

E_m : énergie mécanique
 E_k : énergie cinétique
 E_p : énergie potentielle

Énergies potentielles

– énergie potentielle de pesanteur

$$E_{P_{pes}} = Mgz_G$$

$E_{P_{pes}}$: énergie potentielle de pesanteur
 m : masse du système
 g : accélération de la pesanteur
 z_G : cote du centre de gravité du système

– énergie potentielle élastique

$$E_{P_{elas}} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

$E_{P_{elas}}$: énergie potentielle élastique
 k : constante de raideur du ressort
 Δl : allongement du ressort

– énergie potentielle de gravitation

$$E_{P_{grav}} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

$E_{P_{grav}}$: énergie potentielle de gravitation
 G : constante universelle de gravitation
 m_1, m_2 : masses en interaction
 r : distance séparant les deux masses

– énergie potentielle électrique

$$E_{P_{el}} = qV$$

$E_{P_{el}}$: énergie potentielle électrique
 q : charge ponctuelle
 V : potentiel au point où se trouve la charge

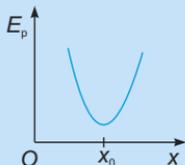
Équilibre

$$\frac{dE_P}{dx}(x_0) = 0$$

x_0 : position d'équilibre
 E_P : énergie potentielle

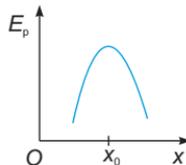
Équilibre stable – Équilibre instable

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_0) \geq 0$$



Minimum d'énergie potentielle :
équilibre stable

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_0) \leq 0$$



Maximum d'énergie potentielle :
équilibre instable

Forces conservatives

$$\mathbf{F}_{\text{cons}} = -\text{grad}E_p$$

Les forces conservatives dérivent
d'une énergie potentielle.

Théorème de l'énergie mécanique

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext non cons}} + \mathcal{P}_{\text{int non cons}}$$

E_m : énergie mécanique
 $\mathcal{P}_{\text{ext non cons}}$: puissance des forces
 extérieures au système non
 conservatives
 $\mathcal{P}_{\text{int non cons}}$: puissance des forces
 intérieures au système (dans le
 cas d'un système de points) non
 conservatives

3.4 Oscillateurs

On se reportera également aux oscillateurs électriques dans la partie électronique de cet ouvrage.

Oscillateur harmonique

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \omega_0^2 A = 0$$

$$A = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t$$

$$A = \gamma \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

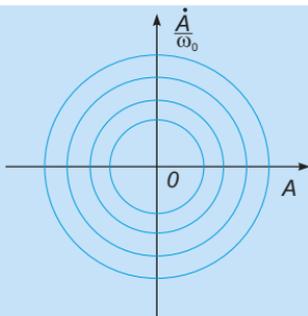
Un oscillateur harmonique est régi par l'équation ci-contre où :

A : grandeur physique

ω_0 : pulsation de l'oscillateur

$\alpha, \beta, \gamma, \varphi$: constantes déterminées par les conditions initiales

Portrait de phase d'un oscillateur harmonique



Le portrait de phase d'un oscillateur harmonique est constitué de cercles concentriques.

Oscillateur harmonique amorti

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dA}{dt} + \omega_0^2 A = 0$$

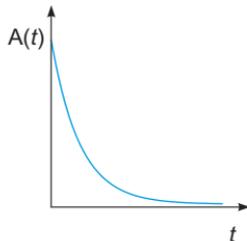
A : grandeur physique

ω_0 : pulsation de l'oscillateur harmonique

Q : facteur de qualité de l'oscillateur

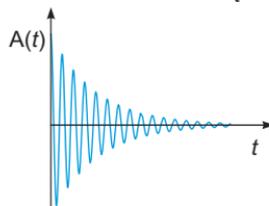
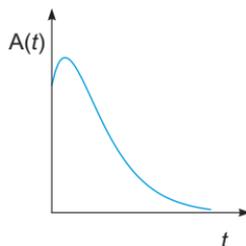
Réponses d'un oscillateur harmonique amorti

$Q > 1/2$, les deux racines de l'équation caractéristique r_1 et r_2 sont réelles, la solution est du type apériodique : $A(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$

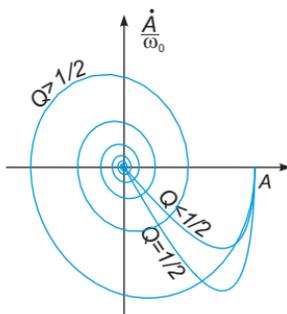


$Q = 1/2$, on est en régime critique, l'équation caractéristique admet une racine double r . La solution est : $A(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$

$Q < 1/2$, les deux racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées, la solution est alors pseudo-périodique : $A(t) = (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))e^{\alpha t}$ avec α et β respectivement parties réelle et imaginaire de la solution.



Portrait de phase d'un oscillateur amorti



Oscillations forcées

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dA}{dt} + \omega_0^2 A = E(t)$$

A : grandeur physique
 ω_0 : pulsation de l'oscillateur harmonique

Q : facteur de qualité de l'oscillateur

$E(t)$: excitation

Si l'excitation est sinusoïdale, on résout une telle équation en utilisant la notation complexe et en posant $\underline{A}(t) = \underline{A}_0 e^{j\omega t}$.

Il ne peut y avoir résonance que si $Q > 1/\sqrt{2}$

3.5 Mouvement d'une particule chargée

Force de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

\mathbf{F} : force de Lorentz
 q : charge de la particule
 \mathbf{v} : vitesse de la particule
 \mathbf{B} : champ magnétique
 \mathbf{E} : champ électrique

Mouvement dans un champ magnétique stationnaire uniforme

$$R = \left| \frac{mv_0}{qB} \right|$$

$$\omega = \left| \frac{qB}{m} \right|$$

Ces lois décrivent la trajectoire circulaire d'une particule de masse m et de charge q abandonnée dans un champ magnétique avec une vitesse \mathbf{v}_0 orthogonale au champ magnétique \mathbf{B} .

R : rayon de la trajectoire
 ω : vitesse angulaire de la particule

Un champ magnétique ne fait que dévier une particule : il ne l'accélère pas

Effet Hall

$$\mathbf{E}_{\text{Hall}} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

$$U_{\text{Hall}} = \frac{BI}{nq\ell}$$

\mathbf{E}_{Hall} : champ électrique créé par effet Hall

U_{Hall} : différence de potentiel qui apparaît aux bornes de la sonde

\mathbf{v} : vitesse des particules

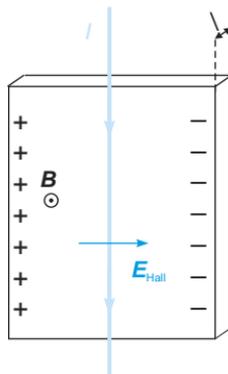
\mathbf{B} : champ magnétique

I : intensité du courant traversant la sonde

n : densité particulaire

q : charge de la particule

ℓ : largeur de la sonde



3.6 Systèmes de deux points matériels

Système isolé de deux points matériels

Pour étudier un système isolé de deux points matériels de masse m_1 et m_2 , on étudie le mouvement d'une particule équivalente dans le référentiel barycentrique et de masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ située en un point M tel que $\mathbf{GM} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 = \mathbf{r}$.

$$\mathbf{GM}_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$$

$$\mathbf{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$$

$$(m_1 + m_2) \mathbf{v}(G) = \mathbf{cste}$$

m_i : masse de la particule se trouvant en M_i

μ : masse réduite

G : centre de gravité du système

$\mathbf{v}(G)$: vitesse de ce centre de gravité

\mathbf{v}_i : vitesse de la particule se trouvant en M_i

Conservation du moment cinétique

$$\mathbf{L}_O = m\mathbf{C}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{Cste}$$

Dans le cas d'un système isolé de deux particules, il y a conservation du moment cinétique et de la quantité de mouvement.

\mathbf{L} : moment cinétique

P : point fictif (représentant le mobile équivalent)

$\mathbf{v}(P)$: vitesse de ce point

m : masse du système

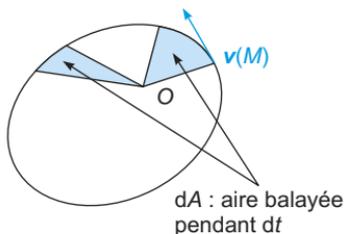
\mathbf{C} : constante des aires

Planéité de la trajectoire – Loi des aires

La trajectoire est plane et la vitesse aréolaire est constante :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$$

« Pour des temps égaux, les aires balayées sont égales. »



Énergie potentielle efficace

$$E_m^* = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + E_{\text{peff}} = E_0$$

$$E_{\text{peff}} = \frac{\mu C^2}{2r^2} + E_{\text{pint}}(r)$$

Pour un système isolé de deux point matériels, il y a conservation de l'énergie mécanique barycentrique.

E_m^* : énergie mécanique barycentrique

E_{peff} : énergie potentielle efficace

$E_{\text{pint}}(r)$: énergie potentielle intérieure

μ : masse réduite $\left(\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)$

$r = M_1 M_2$

C : constante des aires

Formules de Binet

$$\mathbf{v} = -C \frac{du}{d\theta} \mathbf{u}_r + C u \mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{a} = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \mathbf{u}_r$$

$$u = \frac{1}{r}$$

\mathbf{v} : vitesse

\mathbf{a} : accélération

C : constante des aires

θ : angle polaire

\mathbf{u}_r : vecteur radial

\mathbf{u}_θ : vecteur orthoradial

Trajectoires newtonniennes en coordonnées polaires

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

p : paramètre de la conique

e : excentricité de la conique

e et θ_0 sont déterminés par les conditions initiales

Lois de Kepler

Ces lois décrivent les trajectoires des planètes en supposant le référentiel de Kepler centré sur le soleil galiléen et les trajectoires des différentes planètes indépendantes.

1. Les orbites des planètes sont des ellipses ayant le soleil pour foyer.
2. La vitesse aréolaire est constante : pour des temps égaux, les aires balayées sont égales.

3. Le carré de la période est proportionnelle au cube du grand axe :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_{\text{soleil}}}$$

4. Mécanique du solide

4.1 Cinématique du solide

Champ de vitesse du solide

$$\mathbf{v}(A, t) = \mathbf{v}(B, t) + \mathbf{AB} \wedge \boldsymbol{\Omega}(t)$$

\mathbf{v} : vitesse du point du solide considéré
 $\boldsymbol{\Omega}$: vecteur instantané de rotation du solide

Roulement sans glissement

$$\mathbf{v}_{g S_1/S_2} = \mathbf{v}(I_{S_1}) - \mathbf{v}(I_{S_2}) = \mathbf{0}$$

$\mathbf{v}(I_{S_k})$: vitesse du point appartenant au solide S_k et coïncident avec le point I de contact entre les deux solides
 $\mathbf{v}_{g S_1/S_2}$: vitesse de glissement de S_1 par rapport à S_2

Énergie cinétique du solide

$$E_k = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2(G)}_{\text{translation}} + \underbrace{\frac{1}{2} J_{\Delta} \Omega^2}_{\text{rotation propre}}$$

E_k : énergie cinétique
 m : masse du solide
 $v(G)$: vitesse du centre d'inertie
 J_{Δ} : moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation instantané du solide dans le référentiel barycentrique
 $\boldsymbol{\Omega}$: vecteur vitesse de rotation instantané

Moment d'inertie

Moment d'inertie par rapport à l'axe Δ :

$$J_{\Delta} = \iiint_{\text{solide}} r^2 dm$$

Éléments cinétiques :

$$L_{\Delta} = J_{\Delta} \Omega \text{ (Moment cinétique)}$$

$$E_k = \frac{1}{2} J_{\Delta} \Omega^2 \text{ (Énergie cinétique)}$$



Théorème d'Huygens

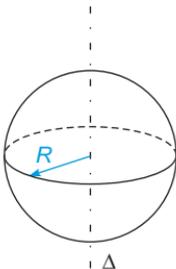
$$J_{\Delta} = J_G + ma^2$$

J_{Δ} : moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation

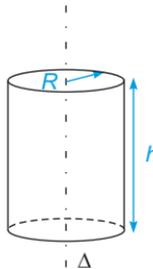
J_G : moment d'inertie par rapport à l'axe passant par G et parallèle à Δ



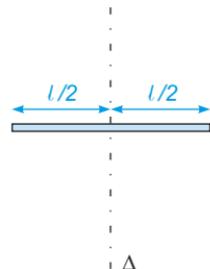
Quelques moments d'inertie classiques



sphère pleine
homogène de masse
 m



cylindre plein
homogène de masse
 m



tige mince
homogène de masse
 m

$$J_{\Delta} = \frac{2}{5}mR^2$$

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2}mR^2$$

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12}m\ell^2$$

4.2 Théorèmes généraux de la dynamique

Théorème du centre d'inertie

$$m \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \sum_i \mathbf{f}_i$$

\mathbf{v}_G : vitesse du centre d'inertie du solide
 \mathbf{f}_i : force extérieure appliquée au solide

Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum_i \mathbf{OM}_i \wedge \mathbf{f}_i$$

\mathbf{L}_O : moment cinétique du solide en O , point immobile
 \mathbf{f}_i : force extérieure appliquée au solide
 M_i : point d'application de la force f_i

Moment cinétique – Moment cinétique barycentrique

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_A + \mathbf{BA} \wedge m\mathbf{v}(P)$$

$$\mathbf{L}_{\text{système}}^* = \mathbf{L}_G$$

\mathbf{L} : moment cinétique
 m : masse du solide
 $\mathbf{v}(P)$: vitesse du point P
 $\mathbf{L}_{\text{système}}^*$: moment cinétique barycentrique du solide

Théorème de Kœnig du moment cinétique

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{L}^* + \mathbf{AG} \wedge m\mathbf{v}(G)$$

\mathbf{L} : moment cinétique
 \mathbf{L}^* : moment cinétique barycentrique
 m : masse du système
 $\mathbf{v}(G)$: vitesse du centre de gravité du solide

Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{dE_k}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}}$$

E_k : énergie cinétique
 \mathcal{P}_{ext} : puissance des forces extérieures appliquées au solide

Puissance des forces appliquées à un solide

$$\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(G) + \mathcal{M}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

\mathcal{P} : puissance des forces appliquées au solide
 \mathbf{F} : force résultante
 $\mathbf{v}(G)$: vitesse du centre d'inertie du solide
 \mathcal{M} : moment des forces extérieures en G
 $\boldsymbol{\Omega}$: vecteur de rotation instantanée du solide

Théorème de Kœnig de l'énergie cinétique

$$E_k = E_k^* + \frac{1}{2}mv^2(G)$$

E_k : énergie cinétique
 E_k^* : énergie cinétique barycentrique
 m : masse du solide
 $\mathbf{v}(G)$: vitesse du centre d'inertie du solide

Théorème de l'énergie mécanique

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext non cons}}$$

E_m : énergie mécanique
 $\mathcal{P}_{\text{ext non cons}}$: puissance des forces extérieures non conservatives

Liaison pivot

Pour une liaison pivot parfaite, $\mathcal{M}_\Delta = 0$, où \mathcal{M}_Δ est le moment des actions de contact.

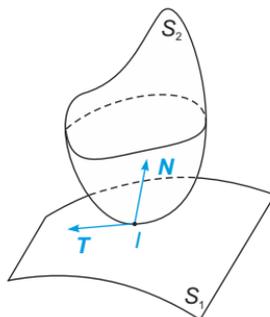
4.3 Contacts entre les solides

Roulement sans glissement

$$\mathbf{v}_g \text{ de } S_1/S_2 = \mathbf{v}(I_{S_1}) - \mathbf{v}(I_{S_2}) = \mathbf{0}$$

$\mathbf{v}(I_{S_k})$: vitesse du point appartenant au solide S_k et coïncident avec le point I de contact entre les deux solides

\mathbf{v}_g de S_1/S_2 : vitesse de glissement du solide S_1 par rapport au solide S_2



Lois de Coulomb

1. La réaction normale \mathbf{N} est dirigée vers l'extérieur du support.
2. Condition de roulement sans glissement :

$$\|\mathbf{T}\| < f_s \|\mathbf{N}\|$$

où \mathbf{T} est la réaction tangentielle ou force de frottement, \mathbf{N} la réaction normale et f_s le coefficient de frottements statiques.

3. S'il y a glissement, \mathbf{T} est dans la même direction que la vitesse de glissement et de sens opposé. Alors :

$$\|\mathbf{T}\| = f_d \|\mathbf{N}\|$$

où f_d est le coefficient de frottement dynamique, souvent confondu avec f_s .

5. Optique

5.1 Généralités

Propagation dans le vide d'une onde lumineuse

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$$

λ : longueur d'onde du signal
 c : vitesse de la lumière dans le vide
 ν : fréquence du signal
 T : période du signal

Propagation dans un milieu transparent, isotrope, homogène

$$v = \frac{c}{n}$$

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}$$

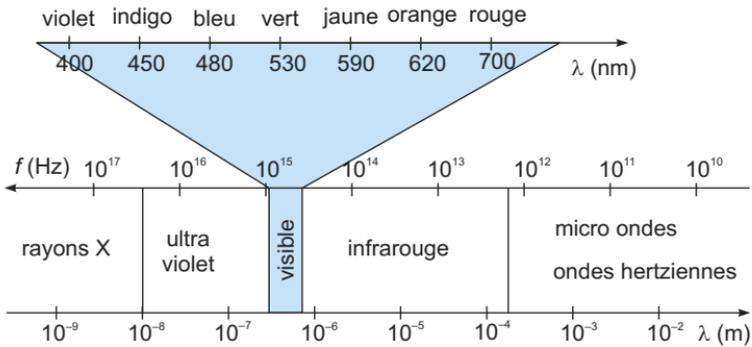
v : vitesse de la lumière dans le milieu

n : indice du milieu

T : période du signal

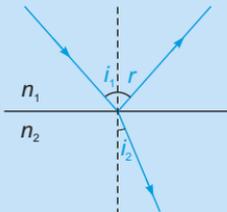
ν : fréquence du signal

Spectre



5.2 Optique géométrique

Loi de Snell–Descartes



$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

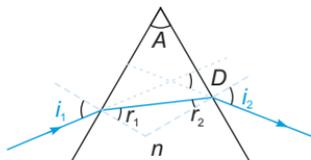
$$r = i_1$$

Prisme

$$\sin i_1 = n \sin r_1$$

$$\sin i_2 = n \sin r_2$$

$$r_1 + r_2 = A$$



Déviation du prisme

$$D = i_1 + i_2 - A$$

$$D_m = 2 \arcsin \left(n \sin \frac{A}{2} \right) - A$$

D : déviation

A : angle au sommet du prisme

D_m : minimum de déviation

i : angle d'incidence au minimum de déviation

Approximation de Gauss

Pour se placer dans l'approximation de Gauss, il faut des faisceaux peu ouverts et des angles d'incidence petits.

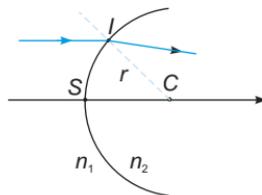
Dioptre sphérique

$$\frac{n_1}{p'} - \frac{n_2}{p} = \frac{n_1 - n_2}{r}$$

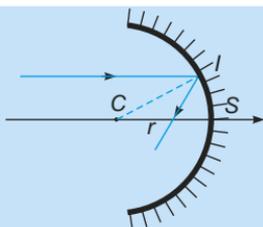
p : abscisse du point objet

p' : abscisse du point image

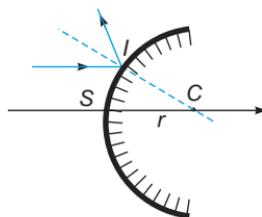
$R = \overline{SC}$: rayon algébrique du dioptre



Miroirs sphériques



Miroir concave ($R = \overline{SC} < 0$)



Miroir convexe ($R = \overline{SC} > 0$)

Relation de conjugaison des miroirs sphériques

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{2}{R}$$

R : rayon algébrique du miroir
($R < 0$ pour un miroir concave et
 $R > 0$ pour un miroir divergent).

p' : distance algébrique de S au
point image

p : distance algébrique de S au
point objet

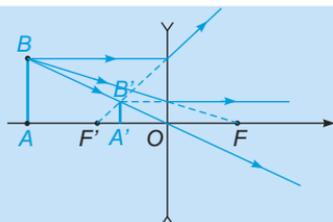
Miroir plan

$$p' = -p$$

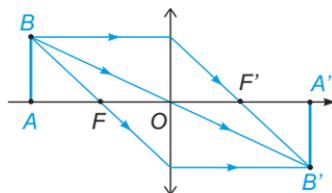
p' : distance algébrique de S au
point image

p : distance algébrique de S au
point objet

Lentilles minces



Lentille divergente



Lentille convergente

Relation de conjugaison des lentilles minces

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

f' : distance focale de la lentille
($f' < 0$ pour une lentille diver-
gente et $f' > 0$ pour une lentille
convergente).

p' : distance algébrique du foyer
au point image

p : distance algébrique du foyer au
point objet

Relation de Descartes – Relation de Newton

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$$

(relation de Descartes)

$$ff' = (p' - f')(p - f)$$

(relation de Newton)

Grandissement

$$\gamma = \frac{p'}{p}$$

γ : grandissement

p' : distance algébrique de O au point image

p : distance algébrique de O au point objet

5.3 Interférences lumineuses

Obtention d'interférences

On ne peut obtenir d'interférences qu'avec des rayons lumineux issus de deux sources cohérentes secondaires, obtenues avec une seule source par division ou du front d'onde ou de l'amplitude.

Chemin optique dans un milieu homogène isotrope

$$[SM] = c \cdot \tau_{SM}$$

$[SM]$: chemin optique de S à M

c : vitesse de la lumière dans le vide

τ_{SM} : temps mis par le signal pour parcourir la distance SM

Différence de marche

$$\delta = [SP_1M] - [SP_2M]$$

δ : différence de marche

$[SP_jM]$: chemin optique du rayon passant par P_j

Vibration lumineuse

$$s(M) = s_0 \cos \left(\omega t - \varphi_S - \frac{2\pi}{\lambda} [SM] \right)$$

$s(M)$: vibration lumineuse en M

s_0 : amplitude de la vibration

ω : pulsation de la vibration lumineuse

φ_S : phase de la vibration à la source

λ : longueur d'onde

$[SM]$: chemin optique de S à M

Vibration complexe

$$\underline{s}(M) = S_0 e^{i(\omega t - \varphi_s)} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda} [SM]}$$

$\underline{s}(M)$: vibration lumineuse complexe en M

S_0 : amplitude de la vibration

ω : pulsation de la vibration lumineuse

φ_S : phase de la vibration à la source

λ : longueur d'onde

$[SM]$: chemin optique de S à M

Plan d'onde

On appelle plan d'onde un plan où tous les points sont dans le même état vibratoire.

Théorème de Malus

Les rayons lumineux sont perpendiculaires en tout point aux surfaces d'ondes.

Éclairement

$$E(M) = \alpha s^2(M)$$

$$E(M) = \frac{1}{2} \alpha \underline{s}(M) \underline{s}^*(M)$$

$E(M)$: éclairement au point M

$\alpha = c\varepsilon_0$: une constante positive (E est en fait le vecteur de Poyting, voir cours d'électromagnétisme)

$s(M)$: vibration lumineuse en M

$\underline{s}(M)$: vibration lumineuse complexe en M

Interférences

$$E(M) = 2E_0(1 + \cos \Delta\varphi(M))$$

$E(M)$: éclairement

E_0 : éclairement de la source

$\Delta\varphi(M)$: déphasage en M

L'écran est brillant si $\Delta\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

L'écran est noir si :

$$\Delta\varphi = (2k + 1) \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Ordre d'interférence

$$p = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda}$$

p : ordre d'interférence

$\Delta\varphi$: déphasage en M

δ : différence de marche

λ : longueur d'onde

L'écran est brillant si $p \in \mathbb{Z}$

L'écran est sombre si $p \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$

Contraste

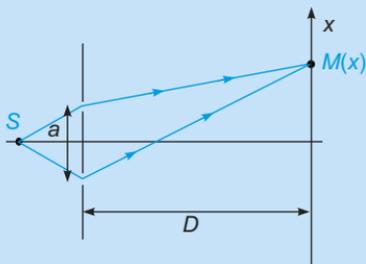
$$C = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}$$

C : contraste

E_{\max} : éclairement maximum

E_{\min} : éclairement minimum

Trous d'Young

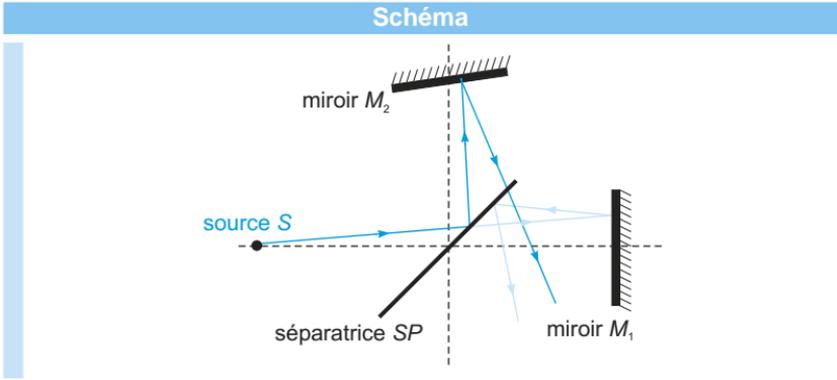


$$\delta(x) = \frac{ax}{D} \quad (\text{différence de marche})$$

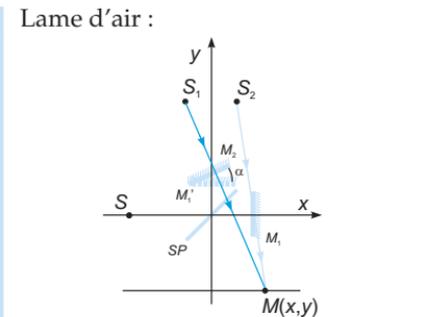
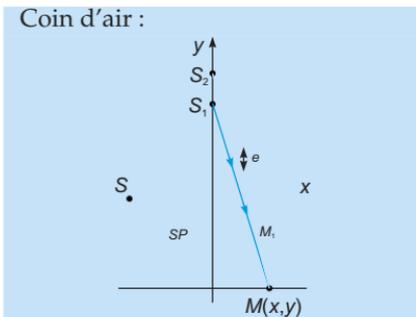
$$E(x) = 2E_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda D} \right)$$

$$i = \frac{\lambda D}{a} \quad (\text{interfrange})$$

5.4 Interféromètre de Michelson



Schémas équivalents avec une source ponctuelle



Source ponctuelle – Source étendue

Dans la suite nous considérerons que l'interféromètre est éclairé avec une source étendue : les interférences sont localisées à l'infini (observables dans le plan focal image d'une lentille convergente) alors qu'elles sont délocalisées avec une source ponctuelle.

Lame d'air

$\delta = 2e \cos i$

δ : différence de marche
 i : angle d'incidence
 e : « épaisseur » entre les miroirs

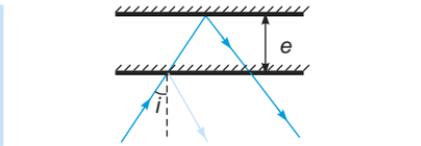
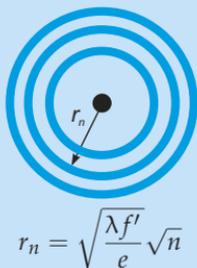


Figure d'interférence



Par symétrie, des anneaux.

r_n : rayon du n^{e} anneau

λ : longueur d'onde

e : « épaisseur » entre les miroirs

f' : distance focale de la lentille utilisée pour l'observation

(valable si le centre de la figure d'interférence est brillant)

Coin d'air

$$\delta = 2\alpha x$$

δ : différence de marche

α : angle entre les deux miroirs (quelques dixièmes de degrés)

x : abscisse du point du miroir considéré

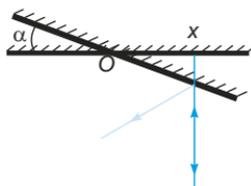
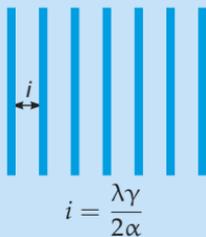


Figure d'interférence



Par symétrie, des franges.

i : interfrange

λ : longueur d'onde

α : angle entre les deux miroirs

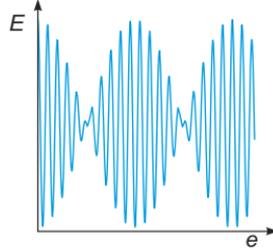
γ : grandissement de la lentille utilisée pour l'observation

Source émettant un doublet

$$E(e) = 4E_0 \left(1 + V(e) \cos \left(\frac{4\pi e}{\lambda_0} \right) \right)$$

$$V(e) = \cos \left(2\pi \frac{\delta\lambda}{\lambda_0^2} e \right)$$

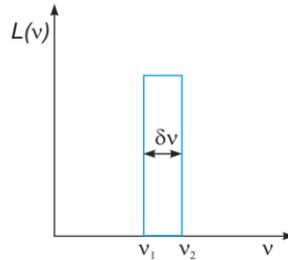
On observe des battements :



Luminance

Entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$ la source émet :

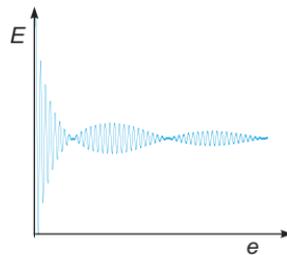
$$dE = L(\nu) d\nu$$



Source à raie spectrale

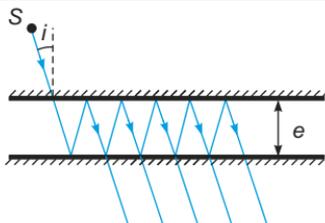
$$E(e) = 4E_0 \left(1 + V(e) \cos \left(\frac{4\pi e}{\lambda_0} \right) \right)$$

$$V(e) = \text{sin}_c \left(2\pi \frac{\delta\lambda}{\lambda_0^2} e \right)$$



5.5 Autres dispositifs d'interférences

Le Fabry—Pérot



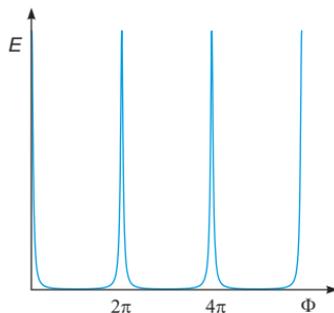
Le Fabry—Pérot permet de réaliser des interférences entre une infinité d'ondes, il est donc d'une très grande précision.

Expression de l'éclairement d'un Fabry—Pérot

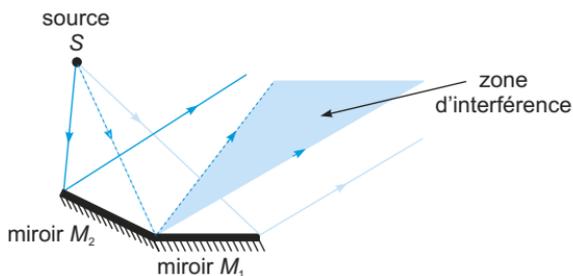
$$E(\Phi) = \frac{E_0}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)}$$

$$\Phi = \frac{4\pi e}{\lambda_0} \cos i$$

$$F = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} : \text{ finesse}$$



Miroirs de Fresnel



Expression de l'éclairement des miroirs de Fresnel

$$E(x) = \frac{E_0}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right)$$

$$\delta = \frac{2d\alpha}{d+D}$$

α : angle entre les miroirs
 x : abscisse d'un point de l'écran
 d : distance entre la source et l'arrête des miroirs
 D : distance entre l'arrête des miroirs et l'écran
 λ : longueur d'onde

5.6 Diffraction des ondes lumineuses

Principe d'Huygens–Fresnel

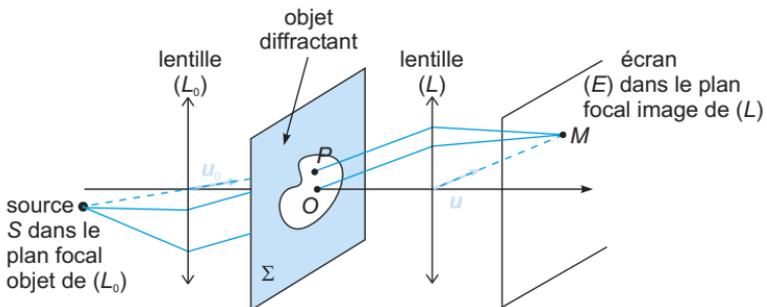
Quand une onde lumineuse traverse une ouverture (Σ) qui la limite, pour décrire l'onde diffractée au delà de (Σ), on suppose que chaque surface élémentaire ($d\Sigma$) autour du point courant P de (Σ) réemet vers l'avant une ondelette sphérique :

- de même fréquence que l'onde incidente ;
 - en phase en P avec l'onde incidente ;
 - d'amplitude proportionnelle à celle de l'onde incidente et à ($d\Sigma$).
- C'est la superposition de ces ondelettes qui décrit l'onde diffractée.

Conditions de Fraunhofer

On observe la diffraction à l'infini (c'est-à-dire à une distance très grande devant les dimensions de l'objet diffractant ou, mieux, au foyer objet d'une lentille convergente).

Montage de la diffraction à l'infini



Formulation pratique du principe d'Huygens–Fresnel

$$s(M, t) = kS_0 e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}[SOM])} \iint_{P \in \Sigma} t(P) e^{i \frac{\pi}{\lambda} n \mathbf{OP} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)} d\Sigma$$

k : constante de Fraunhofer

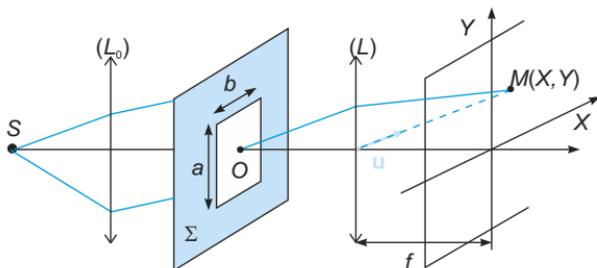
S_0 : amplitude de la vibration lumineuse

$t(P)$: transparence de l'objet diffractant

n : indice du milieu (supposé homogène)

λ : longueur d'onde de la lumière utilisée

Diffraction par une ouverture rectangulaire



$$E(X, Y) = k^2 S_0^2 a^2 b^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a X}{\lambda f} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b Y}{\lambda f} \right)$$

k : constante de Fraunhofer

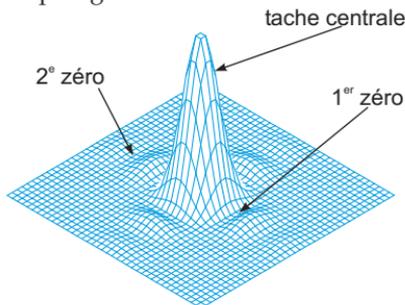
a : longueur de la fente

b : largeur de la fente

f : distance focale de la lentille utilisée pour l'observation

λ : longueur d'onde de la lumière utilisée

On suppose ici que $t(P) = 1$ en tout point de l'ouverture et que cette même ouverture est plongée dans un milieu d'indice uniforme 1.



Diffraction par un motif circulaire

La majorité de la lumière est dans un disque de rayon angulaire $\theta = 0,61 \frac{\lambda}{r}$ (**tache d'Airy**), où θ est le rayon angulaire du premier anneau sombre.

Critère de séparation de Rayleigh : deux taches lumineuses sont séparées si leur centres sont distincts de plus du rayon de la tache d'Airy.

Diffraction par un objet opaque

On obtient la même figure à l'écran que pour une ouverture de la même forme, si ce n'est que le centre est très brillant.

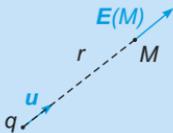
6. Électromagnétisme

6.1 Électrostatique

Symétries du champ électrique

Le champ \mathbf{E} est symétrique par rapport aux plans de symétrie des charges et antisymétrique par rapport aux plans d'antisymétrie des charges.

Champ et potentiel créés par une charge fixe



$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\mathbf{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V$$

q : charge ponctuelle fixe

ϵ_0 : perméabilité du vide

r : distance entre le point M et la charge

$\mathbf{E}(M)$: champ électrique en M

$V(M)$: potentiel électrique en M

Distribution discrète – Distribution continue

Distribution discrète :

$$\mathbf{E}(M) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i$$

q_i : charge ponctuelle située en r_i
 ϵ_0 : permittivité du vide

Distribution continue :

$$\mathbf{E}(M) = \iiint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{r^2} \mathbf{u} \, d\tau$$

ρ : densité de charge
 ϵ_0 : permittivité du vide

Équation de Poisson

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Équation vérifiée par le potentiel électrique en régime permanent.
 V : potentiel électrique
 ρ : densité de charge
 ϵ_0 : permittivité du vide

Théorème de Gauss

$$\oiint \mathbf{E}(M) \mathbf{n} \, dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$\mathbf{E}(M)$: champ électrique au point M
 \mathbf{n} : normale en M à la surface
 Q_{int} : charges intérieures à la surface fermée
 ϵ_0 : permittivité du vide

Théorème de Gauss pour la gravitation

$$\oiint \mathbf{G}(M) \mathbf{n} \, dS = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}$$

$\mathbf{G}(M)$: champ de gravitation au point M
 \mathbf{n} : normale en M à la surface
 M_{int} : masse intérieure à la surface fermée
 \mathcal{G} : constante universelle de gravitation

Champ électrique créés par un plan infini

$$\mathbf{E}(M) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_z$$

$$\begin{cases} + \text{ si } z > 0 \\ - \text{ si } z < 0 \end{cases}$$

$\mathbf{E}(M)$: champ électrique créé en M par le plan
 σ : charge surfacique
 ϵ_0 : permittivité du vide
 \mathbf{u}_z : vecteur normal à la surface

Condensateur plan

$\mathbf{E} = 0$ à l'extérieur

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_z \text{ à l'intérieur}$$

\mathbf{E} : champ électrique

σ : charge surfacique

ϵ_0 : permittivité du vide

On définit la capacité C du condensateur :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

S : surface des armatures

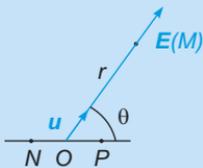
e : distance entre les armatures

Dipôle électrostatique

$$\mathbf{p} = q\mathbf{NP}$$

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{OM}}{4\pi\epsilon_0 OM^3}$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V$$



q : charge positive

N : barycentre des charges négatives

P : barycentre des charges positives

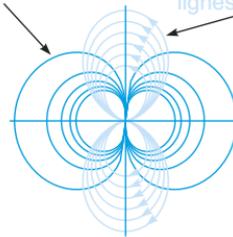
\mathbf{p} : moment dipolaire

$V(M)$: potentiel électrique du dipôle

\mathbf{E} : champ électrique

équipotentielles

lignes de champ



Énergie potentielle – Moment subi dans un champ extérieur

$$E_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(M)$$

$$\mathcal{M} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}_{\text{ext}}(M)$$

E_p : Énergie potentielle

\mathcal{M} : moment résultant des forces électriques

\mathbf{p} : moment dipolaire

\mathbf{E}_{ext} : champ électrique auquel est soumis le dipôle

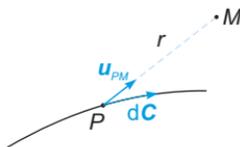
6.2 Magnétostatique

Symétries du champ magnétique

Le champs \mathbf{B} est symétrique par rapport aux plans d'antisymétrie des courants et symétrique par rapport aux plans d'antisymétrie des courants.

Loi de Biot et Savart

$$d\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 d\mathbf{C}(P)}{4\pi r^2} \wedge \mathbf{u}_{PM}$$



$$d\mathbf{C} = \begin{cases} I d\mathbf{l} & \text{pour un circuit filiforme} \\ q\mathbf{v} & \text{pour une charge ponctuelle} \\ \mathbf{j} d\tau & \text{pour un courant volumique} \\ \mathbf{j}_S dS & \text{pour un courant surfacique} \end{cases}$$

$d\mathbf{B}$: champ magnétique créé par l'élément de courant $d\mathbf{C}$

$d\mathbf{C}$: élément de courant

μ_0 : perméabilité du vide

r : distance du point courant au point M

q : charge ponctuelle

\mathbf{j}_S : vecteur courant surfacique

\mathbf{j} : vecteur courant

Théorème d'Ampère

$$\oint \mathbf{B}(M) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$

$\mathbf{B}(M)$: champ magnétique

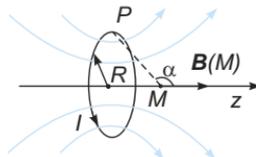
μ_0 : perméabilité du vide

$I_{\text{enlacée}}$: intensité enlacée par la courbe fermée d'Ampère

$d\mathbf{l}$: choisi en accord avec l'orientation de l'intensité

Champ magnétique créé par une spire circulaire

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \mathbf{e}_z$$



Champ magnétique à l'intérieur un solénoïde infini

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 j_S \mathbf{e}_z$$

\mathbf{B} : champ à l'intérieur du solénoïde

n : nombre de spires par unité de longueur

I : intensité du courant

j_S : courant surfacique

\mathbf{e}_z : vecteur directeur sur l'axe du solénoïde orienté par le sens du courant

μ_0 : perméabilité du vide

Moment magnétique d'une spire

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{n}$$

\mathbf{m} : moment magnétique de la spire

S : surface de la spire

I : intensité parcourant la spire

\mathbf{n} : normale à la spire dirigée par le sens du courant

Énergie potentielle – Moment magnétique

$$E_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathcal{M} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}$$

E_p : énergie potentielle magnétique

\mathbf{m} : moment de force exercé sur la spire

\mathbf{B} : champ magnétique auquel est soumis la spire

\mathbf{m} : moment magnétique de la spire

Force de Laplace

$$d\mathbf{f} = d\mathbf{C} \wedge \mathbf{B}$$

$d\mathbf{f}$: force élémentaire

$d\mathbf{C}$: élément de courant

\mathbf{B} : champ magnétique

6.3 Équations de Maxwell dans le vide

Vecteur courant

$$\mathbf{j} = n_p q \mathbf{v} = \rho \mathbf{v}$$

$$\mathbf{j}_S = \sigma \mathbf{v}$$

\mathbf{j} : vecteur courant
 \mathbf{j}_S : vecteur de courant surfacique
 \mathbf{v} : vitesse des porteurs de charge
 n_p : densité particulière de porteurs
 q : charge d'un porteur
 ρ : densité volumique de charge
 σ : densité surfacique de charge

Équation de conservation de la charge

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

\mathbf{j} : vecteur courant
 ρ : charge volumique

Équations de Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Ces équations portent les noms respectifs de :

- Maxwell-Gauss
- Maxwell-Faraday
- sans nom
- Maxwell-Ampère

Le terme $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ est appelé courant de déplacement.

\mathbf{E}, \mathbf{B} : champs électrique et magnétique

\mathbf{j} : vecteur densité de courant

ρ : charge volumique

ϵ_0, μ_0 : permittivité et perméabilité du vide

Superposition

Les équations de Maxwell sont linéaires : toute combinaison linéaire de solutions est encore une solution.

Puissance des forces électromagnétiques

$$dP = \mathbf{j} \mathbf{E} d\tau$$

dP : puissance élémentaire par unité de volume $d\tau$
 \mathbf{j} : vecteur courant
 \mathbf{E} : champ électrique

Densité d'énergie électromagnétique

$$W_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

W_{em} : énergie électromagnétique
 E : champ électrique
 B : champ magnétique
 ε_0 : permittivité du vide
 μ_0 : perméabilité du vide

Vecteur de Poynting

$$\boldsymbol{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}$$

$\boldsymbol{\Pi}$: vecteur de Poynting
 \mathbf{E} : champ électrique
 \mathbf{B} : champ magnétique
 μ_0 : perméabilité du vide

Théorème de Poynting : forme locale

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \text{div} \left(\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \right)$$

La perte d'énergie électromagnétique est due à l'effet Joule et au rayonnement du vecteur de Poynting.

Potentiel vecteur

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{circuit}} \frac{i \cdot d\mathbf{l}}{r}$$

\mathbf{A} : potentiel vecteur
 \mathbf{B} : champ magnétique
 i : intensité dans le circuit filiforme
 r : distance du point M au point courant du circuit
 μ_0 : perméabilité du vide

Expression générale du champ électrique

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

\mathbf{E} : champ électrique
 V : potentiel électrique
 \mathbf{A} : potentiel vecteur

Jauge de Lorentz

$$\text{div } \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

\mathbf{A} : potentiel vecteur
 V : potentiel électrique
 ε_0 : permittivité du vide
 μ_0 : perméabilité du vide
 Cette jauge permet de fixer le potentiel V

Relations de passage

$$E_{2t} = E_{1t}$$

$$\mathbf{E}_{2n} - \mathbf{E}_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \mu_0 \mathbf{j}_S \wedge \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$B_{2n} = B_{1n}$$

\mathbf{E}_{in} : composante normale du champ \mathbf{E}_i

\mathbf{B}_{it} : composante tangentielle du champ \mathbf{B}_i

σ : charge surfacique

\mathbf{j}_S : vecteur densité de courant surfacique

$\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$: normale à la surface

ϵ_0 : permittivité du vide

μ_0 : perméabilité du vide

6.4 Conduction métallique

Loi d'Ohm locale

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$$

\mathbf{j} : vecteur courant

\mathbf{E} : champ électrique

γ : conductivité

Loi d'Ohm globale

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = R_{AB} \cdot I$$

\mathbf{E} : champ électrique

I : intensité circulant dans le circuit

$R = \frac{\ell}{\gamma S}$: résistance d'un circuit de longueur ℓ et de section S

Propriétés locales des champs dans les métaux

1. $\rho = 0$: les charges sont surfaciques

2. $f \ll 10^{17} \text{ Hz} \implies \left\| \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\| \ll \|\mathbf{j}_{\text{conduction}}\|$

3. En haute fréquence, les courants sont surfaciques (sur une épaisseur

dite épaisseur de peau : $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$).

6.5 Induction dans un circuit fixe avec B variable

Force électromotrice

$$e_{AB} = \int_A^B \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} \right)$$

e_{AB} : force électromotrice
 \mathbf{A} : potentiel vecteur

Différence de potentiel

$$V(B) - V(A) = e_{AB} - R_{AB}i$$

e_{AB} : force électromotrice
 $V(B) - V(A)$: différence de potentiel entre les points A et B
 R_{AB} : résistance du circuit AB
 i : intensité du courant circulant dans le circuit

Flux de B à travers le circuit

$$\Phi = \iint_{\text{circuit}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

Φ : flux de \mathbf{B} à travers le circuit
 \mathbf{B} : champ magnétique
 \mathbf{n} : normale \mathbf{n} au circuit compatible avec le sens du courant

Loi de Faraday

$$e_{\text{circuit}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Φ : le flux de \mathbf{B} à travers le circuit
 e_{circuit} : la force électromotrice du circuit

Loi de Lenz

Les conséquences des phénomènes d'induction s'opposent toujours aux causes qui leur ont donné naissance. En terme de flux, cela signifie que si le flux du champ magnétique varie, l'induction va produire un champ magnétique qui tendra à compenser cette variation de flux.

Auto inductance d'un circuit

$$\Phi = Li$$

Φ : flux de \mathbf{B} à travers le circuit
 L : coefficient d'auto inductance du circuit
 i : intensité dans le circuit

Mutuelle inductance d'un circuit

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = Mi_1$$

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = Mi_2$$

$\Phi_{i \rightarrow j}$: flux du champ \mathbf{B} , induit par le circuit i , à travers le circuit j
 i_k : courant dans le circuit k
 M : coefficient de mutuelle inductance

Flux total

$$\Phi_1 = Li_1 + Mi_2$$

Φ_1 : flux de \mathbf{B} à travers le circuit 1
 L : coefficient d'auto inductance
 M : coefficient de mutuelle inductance
 i_k : intensité dans le circuit k

Énergie magnétique

$$W_{em} = \frac{Li_1^2}{2} + Mi_1i_2$$

W_{em} : énergie électromagnétique stockée dans le circuit
 L : coefficient d'auto inductance
 M : coefficient de mutuelle inductance
 i_k : intensité dans le circuit k

Propriétés du transformateur idéal

$$1. \frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$2. \text{ Si le secondaire est en court-circuit alors } \left| \frac{i_2}{i_1} \right| = \frac{N_1}{N_2}$$

3. Le rapport de puissance du primaire au secondaire est de 100%

$$4. \text{ On a } R_{vue \text{ du primaire}} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_{charge}$$

6.6 Induction dans un circuit mobile soumis à \mathbf{B} stationnaire

Changement de référentiel

$$\begin{aligned}\mathbf{B}' &= \mathbf{B} \\ \mathbf{E}' &= \underbrace{\mathbf{E}}_{-\text{grad}V} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \\ \mathbf{j}_{\text{sol}} &= \mathbf{j}_{\text{cond}}\end{aligned}$$

\mathbf{B}' : champ magnétique dans le référentiel du conducteur
 \mathbf{B} : champ magnétique dans le référentiel du sol
 \mathbf{E}' : champ électrique dans le référentiel du conducteur
 \mathbf{E} : champ électrique dans le référentiel du sol
 \mathbf{v} : vitesse du conducteur par rapport au sol
 \mathbf{j}_{sol} : vecteur densité de courant dans le référentiel lié au sol
 \mathbf{j}_{cond} : vecteur densité de courant dans le référentiel du conducteur

Champ électromoteur

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

\mathbf{E}_m : champ électromoteur
 \mathbf{v} : vitesse du conducteur
 \mathbf{B} : champ magnétique

Force électromotrice

$$\begin{aligned}e_{AB} &= \int_A^B (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ V(B) - V(A) &= e_{AB} - R_{AB}i\end{aligned}$$

e_{AB} : force électromotrice du circuit
 R_{AB} : résistance du circuit
 i : intensité du circuit
 \mathbf{v} : vitesse du conducteur
 \mathbf{B} : champ magnétique
 $V(M)$: potentiel au point M

Loi de Faraday

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

e : force électromotrice
 Φ : flux de \mathbf{B} à travers le circuit

6.7 Matériaux magnétiques

Aimantation

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M} d\tau$$

\mathbf{M} : aimantation
 \mathbf{m} : moment magnétique

Courants d'aimantation

$$\mathbf{j}_{\text{aimantation}} = \text{rot } \mathbf{M}$$

$$\mathbf{j}_{\text{S aimantation}} = \mathbf{M} \wedge \mathbf{n}$$

$\mathbf{j}_{\text{aimantation}}$: vecteur courant d'aimantation
 $\mathbf{j}_{\text{S aimantation}}$: vecteur courant surfacique d'aimantation
 \mathbf{M} : aimantation
 \mathbf{n} : normale à la surface

Excitation magnétique

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

\mathbf{H} : excitation magnétique
 \mathbf{B} : champ magnétique
 \mathbf{M} : aimantation
 μ_0 : perméabilité du vide

Équation de Maxwell – Ampère en ARQS

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{conduction}}$$

\mathbf{H} : excitation magnétique
 $\mathbf{j}_{\text{conduction}}$: vecteur courant de conduction

Aimantation des matériaux linéaires

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

\mathbf{M} : aimantation
 \mathbf{H} : excitation magnétique
 χ_m : susceptibilité magnétique

Différentes catégories de matériaux magnétiques

- diamagnétiques : $\chi_m \sim -10^{-5} < 0$
- paramagnétiques : $\chi_m \sim 10^{-4} > 0$
- ceux pour lesquels $\chi_m \ll 1$ qui ne sont pas linéaires

Champ magnétique dans les matériaux linéaires

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

\mathbf{B} : champ magnétique
 \mathbf{H} : excitation magnétique
 μ_0 : perméabilité du vide
 μ_r : perméabilité relative
 χ_m : susceptibilité magnétique

Diamagnétiques

$$\chi_m = -n\mu_0 \frac{Ze^2}{6m_e} \langle r^2 \rangle$$

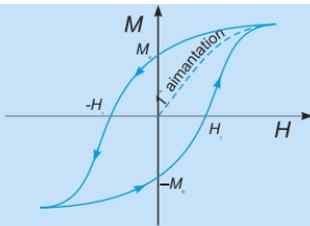
χ_m : susceptibilité magnétique
 μ_0 : perméabilité du vide
 n : densité particulaire
 Z : charge du noyau
 e : charge élémentaire
 m_e : masse de l'électron
 $\langle r^2 \rangle$: distance moyenne de l'électron au noyau

Paramagnétiques

$$\chi_m = \frac{n\mu_0 m^2}{3kT}$$

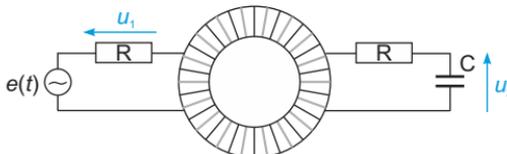
χ_m : susceptibilité magnétique
 n : densité particulaire
 μ_0 : perméabilité du vide
 m : moment magnétique
 k : constante de Boltzmann
 T : température

Aimantation : cycle d'hystérésis



M : aimantation
 H : excitation magnétique
 M_r : aimantation rémanente
 H_c : champ coercitif

Dispositif de mesure de H et de B



$$H(t) = \frac{N_1}{\ell R} u_1(t)$$

$$B(t) = \frac{RC}{N_2 S} u_2(t)$$

H : valeur de l'excitation magnétique

B : valeur du champ magnétique

N_1 : nombre de spires du primaire

N_2 : nombre de spires du secondaire

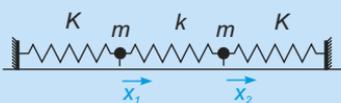
ℓ : longueur du tore

S : section du tore

7. Ondes

7.1 Oscillateurs couplés

Couplage par un ressort



$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - Kx_1 \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - Kx_2 \quad (2)$$

Résolution

Dans ces cas simples, on combine linéairement les équations (1) et (2).

$$s = (1) + (2)$$

$$\ddot{s} + \omega_s^2 s = 0$$

$$d = (1) - (2)$$

$$\ddot{d} + \omega_d^2 d = 0$$

Modes propres

$$\omega_s = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

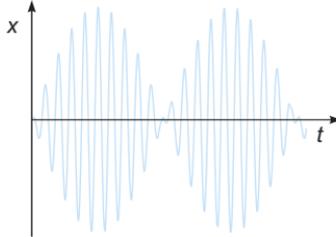
$$\omega_d = \sqrt{\frac{2k + K}{m}}$$

Le système d'oscillateurs couplés vibre uniquement à ω_s si $d = 0$, c'est-à-dire si les oscillateurs sont lancés en phase.

Le système d'oscillateurs couplés vibre uniquement à ω_d si $s = 0$, c'est-à-dire si les oscillateurs sont lancés en opposition de phase.

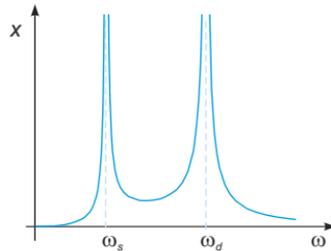
Battements

Si le couplage est fort et que l'on écarte un seul oscillateur de l'équilibre, on observe un phénomène de battements :



Résonance

Si on force l'oscillateur à osciller, on observera aux pulsations ω_s et ω_d des résonances :



7.2 Équation de d'Alembert - Ondes stationnaires

Équation de d'Alembert

$$\Delta F = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

$F(\mathbf{r}, t)$: une grandeur physique qui vérifie l'équation de d'Alembert
 c : vitesse de propagation de l'onde
 Δ : laplacien

Solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension

$$F(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

f : partie onde progressive de la solution
 g : partie onde régressive de la solution

Onde stationnaire

$$F(\mathbf{r}, t) = f(r)g(t)$$

Dans le cas d'une onde stationnaire, il y a découplage entre le temps et le repérage spatial.

Onde plane progressive harmonique (OPPH)

$$F = F_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{OM})$$

$$\underline{F} = \underline{F}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{OM})}$$

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{u}$$

Ces notations sont intrinsèques à l'OPPH.

F : la grandeur physique qui décrit l'onde

\mathbf{k} : vecteur d'onde donnant la direction de propagation

\mathbf{OM} : vecteur position

\mathbf{u} : vecteur unitaire selon la direction de propagation

ω : pulsation de l'onde

c : vitesse de propagation de l'onde

Onde plane progressive harmonique : notation complexe

$$\frac{\partial \cdot}{\partial t} = i\omega \cdot$$

$$\nabla \cdot = -ik \cdot$$

Lorsqu'on utilise la notation complexe, les opérateurs usuels prennent des formes très simples.

Onde sur une file d'atomes – Onde sur une corde

$$\frac{\partial^2 \xi_n}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{ka^2}{m}}$$

ξ_n : le déplacement du n^{e} atome

k : constante de raideur des ressorts

a : distance au repos entre deux atomes

m : masse d'un atome

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_l}}$$

y : ordonnée du point

T_0 : tension au repos de la corde

ρ_l : masse linéique de la corde

7.3 Ondes électromagnétiques dans le vide

Équations de propagation des champs

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

\mathbf{E} : champ électrique
 \mathbf{B} : champ magnétique
 μ_0 : perméabilité du vide
 ϵ_0 : permittivité du vide

Vecteur d'onde d'une OPPH

$$\mathbf{k} = k\mathbf{u}$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

\mathbf{k} : vecteur d'onde
 \mathbf{u} : vecteur unitaire directeur
 ω : pulsation de l'onde
 λ : longueur d'onde de l'onde
 c : vitesse de propagation de l'onde

Champs transverse

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 = -ikE$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 = -ikB$$

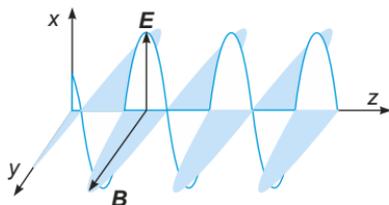
\mathbf{k} : vecteur d'onde
 \mathbf{E} : champ électrique
 \mathbf{B} : champ magnétique
 \mathbf{E} et \mathbf{B} sont orthogonaux à la direction de propagation.

Relation de dispersion – Relation de structure

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \wedge \mathbf{E}$$

Représentation du champ électromagnétique dans le vide



Polarisation

– elliptique :

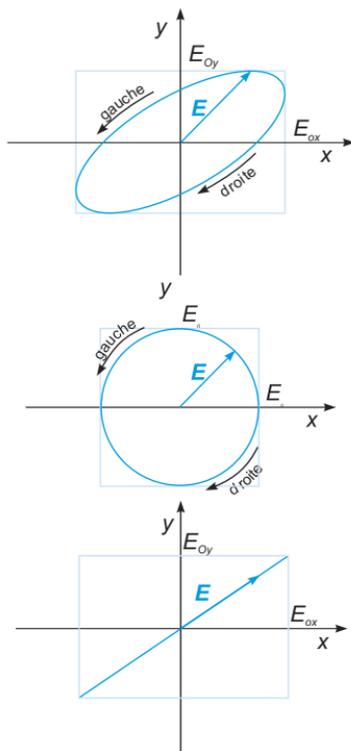
$$\mathbf{E}(z = 0, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos \omega t \\ E_{0y} \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$

– circulaire :

$$\mathbf{E}(z = 0, t) = \begin{pmatrix} E_0 \cos \omega t \\ E_0 \sin \omega t \end{pmatrix}$$

– rectiligne :

$$\mathbf{E}(z = 0, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos \omega t \\ E_{0y} \cos \omega t \end{pmatrix}$$



Lames à retard

Une lame 1/4 d'onde déphase de $\pi/2$.

- une onde polarisée rectilignement ressort de ce type de lame polarisée elliptiquement.
- une onde polarisée elliptiquement ressort de ce type de lame polarisée rectilignement.

Une lame 1/2 d'onde déphase de π .

- une onde polarisée elliptiquement droite ressort elliptiquement gauche de ce type de lame.
- une onde polarisée rectilignement ressort symétrique par rapport à son axe lent de ce type de lame.

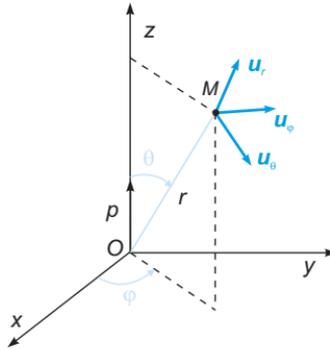
Vecteur de Poynting

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \mathbf{u} = \frac{\varepsilon B^2}{c} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}^*}{\mu_0}$$

$\mathbf{\Pi}$: vecteur de Poynting
 \mathbf{E} : champ électrique
 \mathbf{B} : champ magnétique
 μ_0 : perméabilité du vide

Rayonnement dipolaire



$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r c} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \mathbf{u}_\theta$$

\mathbf{B} : champ magnétique
 \mathbf{E} : champ électrique
 p : moment dipolaire
 μ_0 : perméabilité du vide
 c : vitesse de la lumière dans le vide

Puissance rayonnée en régime sinusoïdal

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

$$p = p_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$\langle \mathcal{P} \rangle$: puissance moyenne rayonnée
 p : moment dipolaire
 c : vitesse de la lumière dans le vide
 μ_0 : perméabilité du vide

7.4 Dispersion – Absorption

Relation de dispersion

$$k(\omega) = k'(\omega) + ik''(\omega)$$

$k(\omega)$: vecteur d'onde
 $k'(\omega)$: partie réelle du vecteur d'onde
 $k''(\omega)$: partie imaginaire du vecteur d'onde
 ω : pulsation de l'onde

Vitesse de phase – Vitesse de groupe

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k'}$$

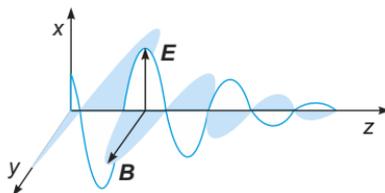
v_φ : vitesse de phase
 v_g : vitesse de groupe
 ω : pulsation de l'onde
 k' : partie réelle du vecteur d'onde
 v_φ est la **vitesse de propagation de l'amplitude** et v_g est en général la **vitesse de propagation de l'énergie**.

Absorption

$$\delta = \frac{1}{|k''|}$$

δ : profondeur caractéristique de l'absorption
 k'' : partie imaginaire du vecteur d'onde

Représentation du champ électromagnétique dans les métaux



7.5 Ondes électromagnétiques dans les milieux matériels

Polarisation

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}$$

$$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

\mathbf{p} : moment dipolaire
 \mathbf{P} : polarisation
 ρ_p : charges dues à la polarisation
 \mathbf{j}_p : vecteur courant de polarisation

Aimantation

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{d\tau}$$

$$\mathbf{j}_a = \operatorname{rot} \mathbf{M}$$

\mathbf{m} : moment magnétique
 \mathbf{M} : aimantation
 \mathbf{j}_a : vecteur courant d'aimantation

Vecteurs \mathbf{H} et \mathbf{D}

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

\mathbf{H} : vecteur excitation magnétique
 \mathbf{B} : champ magnétique
 \mathbf{D} : vecteur \mathbf{D}
 \mathbf{E} : champ électrique
 \mathbf{M} : aimantation
 \mathbf{P} : polarisation
 μ_0 : perméabilité du vide
 ε_0 : permittivité du vide

Milieux linéaires

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

\mathbf{H} : vecteur excitation magnétique

\mathbf{B} : champ magnétique

\mathbf{D} : vecteur D

\mathbf{M} : aimantation

\mathbf{P} : polarisation

\mathbf{E} : champ électrique

μ_0 : perméabilité du vide

μ_r : perméabilité relative

ϵ_0 : permittivité du vide

ϵ_r : permittivité relative

χ_e : susceptibilité électrique du milieu

χ_m : susceptibilité magnétique du milieu

Équations de Maxwell dans les milieux

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

\mathbf{D} : vecteur D

\mathbf{E} : champ électrique

\mathbf{B} : champ magnétique

\mathbf{j} : vecteur courant vrai

ρ_{libre} : densité de charges libres

Relation de dispersion – Indice

$$k^2 = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

$$v_\varphi = \frac{c}{n}$$

k : vecteur d'onde

ϵ_r : permittivité relative

ω : pulsation de l'onde

c : vitesse de la lumière dans le vide

n : indice du milieu

(En utilisant ici, comme dans les cas courants, l'approximation : $\mu_r \sim 1$)

Réflexion – Transmission

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$R = r^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$T = t^2 = \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$R + T = 1$$

r : coefficient de réflexion en amplitude

t : coefficient de transmission en amplitude

R : coefficient de réflexion énergétique

T : coefficient de transmission énergétique

n_1 : indice du milieu de l'onde incidente

n_2 : indice du milieu de l'onde transmise

$R + T = 1$ traduit la conservation énergétique

Un changement de milieu donne naissance à :

- une onde progressive (onde transmise)
- une onde régressive (onde réfléchie)

Relation de continuité sur la séparation de deux diélectriques

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1$$

$$\mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t}$$

$$\varepsilon_r 2 \mathbf{E}_{2n} = \varepsilon_r 1 \mathbf{E}_{1n}$$

(loi de Snell–Descartes)

On indice par 1 les grandeurs du milieu de l'onde incidente et par 2 les grandeurs du milieu de l'onde transmise.

Le champ magnétique, comme la composante tangentielle du champ électrique, est continue à la surface d'un diélectrique.

Le comportement de la composante normale du champ électrique est décrite par la loi de Snell–Descartes.

Chapitre 3

Chimie

1. Atomistique

1.1 Spectroscopie

Spectroscopie

Lors d'une transition électronique, une particule émet un rayonnement décrit par :

$$\Delta E = h\nu$$

Relation de De Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

h : constante de Planck
 ν : fréquence du rayonnement émis par la particule
 λ : longueur d'onde du rayonnement émis par la particule
 m : masse de la particule
 v : vitesse de la particule

La relation de Ritz établit que :

$$\nu = R_H \cdot c \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (n, m) \in \mathbb{N}^2$$

ν : fréquence de rayonnement

R_H : constante de Rydberg

n : nombre quantique principal du niveau énergétique final de la particule

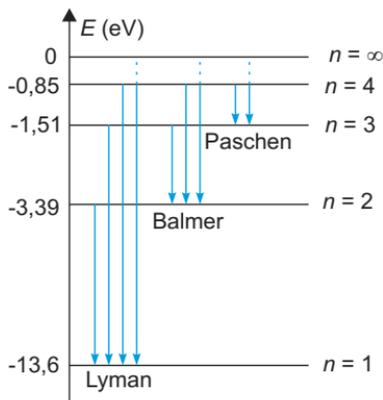
m : nombre quantique principal du niveau énergétique initial de la particule

c : vitesse de propagation de la lumière dans le vide

- $n = 1$ correspond à la série de Lyman (ultraviolet)

- $n = 2$ correspond à la série de Balmer (visible)

- $n = 3$ correspond à la série de Paschen (infrarouge)



1.2 Modèle ondulatoire

Principe d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi}$$

Δx : incertitude sur la position

Δp_x : incertitude sur la quantité de mouvement selon l'axe des x

m : masse de l'atome

En mécanique quantique, on ne peut pas connaître précisément à la fois la position et la vitesse.

Équation de Schrödinger en régime stationnaire

$$H \Psi = E \Psi$$

$$\iiint_{\text{espace}} \Psi^2 d\tau = 1$$

$\Psi(\mathbf{r})$: fonction d'onde

\mathbf{r} : vecteur position

E : énergie totale de l'électron

H : opérateur hamiltonien appliqué à Ψ

$|\Psi^2| d\tau$ représente la probabilité de présence de l'électron dans un volume $d\tau$ autour d'un point $M(\mathbf{r})$.

Énergie de l'atome d'hydrogène

$$E_n = \frac{-13,6}{n^2}$$

$$E_n = -13,6 \frac{Z^2}{n^2}$$

L'énergie de l'atome d'hydrogène est quantifiée (n nombre quantique principal).

Décrit l'énergie de l'atome hydrogénoïde (qui ne comporte qu'un seul électron).

Nombres quantiques

Principal : $n \in \mathbb{N}^*$

Décrit le niveau énergétique de l'atome :

$$E_n = -13,6 \frac{Z^2}{n^2}$$

Secondaire : $0 \leq l \leq n - 1$
 $l \in \mathbb{N}$

Quantifie le module du moment cinétique \mathbf{L} de l'atome :

$$|\boldsymbol{\sigma}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

($\hbar = h/2\pi$, h constante de Planck)

Magnétique : $-l \leq m \leq l$
 $m \in \mathbb{Z}$

Quantifie la projection du moment cinétique : $L_{Oz} = m\hbar$

Spin

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

1.3 Atome polyélectronique

Charge nucléaire effective

$$Z_i^* = Z - \sigma_i$$

Z_i^* : charge nucléaire effective

Z : numéro atomique

σ : constante d'écran de Slater

Position de l'électron	σ_i s et p	σ_i d
même couche	0	0,35
couche $> n$	0	0
couche $n - 1$	0,85	1
couches $< n - 1$	1	1

Énergie

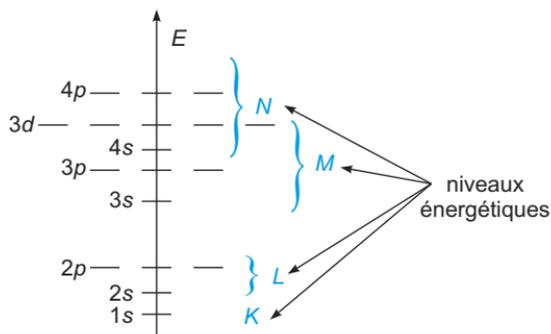
$$E_i = -13,6 \frac{Z_i^{*2}}{n^2}$$

Z_i^* : charge nucléaire effective
 E_i : énergie de l'électron
 n : nombre quantique principal

$$E = \sum_i E_i$$

Énergie totale de la molécule

Diagramme énergétique



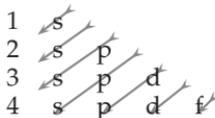
Règles de remplissage des niveaux électroniques

Principe de stabilité : on remplit les orbitales atomiques par ordre d'énergie croissante (règle de Klechkowsky).

Principe de Pauli : sur une même orbitale atomique, les deux électrons sont de spin opposés.

Principe de Hund : lorsque plusieurs orbitales atomiques sont de même niveau énergétique, les électrons occupent le maximum d'orbitales atomiques.

Règle de Klechkowsky :



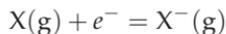
Énergie d'ionisation

C'est l'énergie de la réaction d'arrachement d'un électron d'une molécule sous forme gazeuse.



Affinité électronique

C'est l'énergie **libérée** par la réaction de capture d'un électron par une molécule sous forme gazeuse.



1.4 Architecture moléculaire

Règle de l'octet

Les éléments de la deuxième période du tableau périodique peuvent s'entourer au maximum de huit électrons.

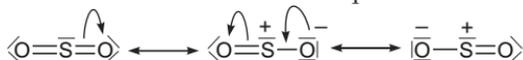
Charge formelle

$$n = n_i - n_e$$

n : charge formelle de l'atome
 n_i : nombre d'électrons de valence dans l'atome isolé
 n_e : nombre d'électrons de valence dans l'atome lié

Mésomérie

C'est l'ensemble des formules mésomères qui modélise la réalité.



Niveau de représentativité des formules mésomères

Les formules mésomères qui vérifient la règle de l'octet, qui sont neutres ou dont la charge négative est portée par l'atome le plus électronégatif sont plus représentatives que les autres.

VSEPR

On compte les doublets d'un atome A : AX_pE_q où :

p : nombre d'atomes directement liés à A (X)

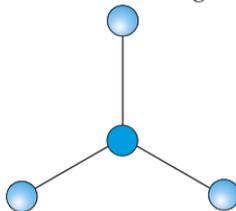
q : nombre de doublets libres portés par A (E)

Ces $n = p + q$ doublets tendent à s'éloigner au maximum les uns des autres. (Théorie de Gillespie)

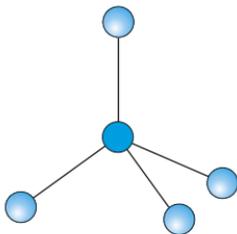
$n = 2$: molécule linéaire



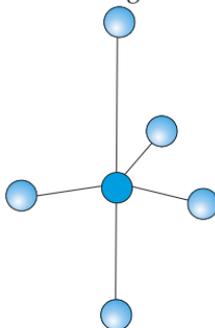
$n = 3$: molécule trigonale



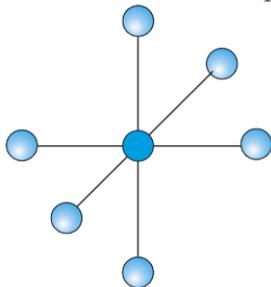
$n = 4$: molécule tétraédrique



$n = 5$: molécule bipyramidale à base triangulaire



$n = 6$: molécule octaédrique



1.5 Orbitales moléculaires

Combinaison linéaire des orbitales atomiques

La combinaison linéaire de deux orbitales atomiques de même énergie donne naissance à deux orbitales moléculaires : l'une liante et l'autre antiliante



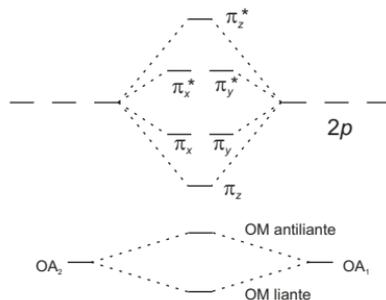
Indice de liaison

$$i = \frac{n - n^*}{2}$$

n : nombre d'électrons de l'orbitale moléculaire liante
 n^* : nombre d'électrons de l'orbitale moléculaire antiliante

Diagramme des orbitales moléculaires

Diagramme moléculaire des molécules A_2 de la deuxième ligne du tableau périodique à partir de O_2 inclus. Pour les autres molécules, π_x et π_y sont plus stables que σ_p



2. Cinétique

Avancement de la réaction

$$d\xi = \frac{dn_i}{\nu_i}$$

ξ : avancement de la réaction
 ν_i : nombre stœchiométrique algébrique ($\nu_i > 0$ pour un produit et $\nu_i < 0$ pour un réactif)
 n_i : quantité de matière échangée

Quantité de matière en cours de réaction

$$n_i = n_{i0} + \nu_i \xi$$

n_i : quantité de matière à la date t
 n_{i0} : quantité de matière initiale
 ν_i : nombre stœchimétrique algébrique
 ξ : avancement

Vitesse de réaction

$$r = \frac{1}{\nu_i} \frac{dc_i}{dt} = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}$$

r : vitesse de la réaction
 ν_i : nombre stœchiométrique algébrique
 c_i : concentration
 ξ : avancement
 V : volume du réacteur

Ordre d'une réaction



$$v = k[A_1]^{p_1}[A_2]^{p_2}$$

k : constante de vitesse de la réaction
 $[A_i]$: concentration de l'espèce A_i
 p_i : ordre partiel en A_i
 $\sum_i p_i = p$: ordre global de la réaction

Dégénérescence de l'ordre

Si $[A_2]_0 \gg [A_1]_0$ alors $v = \frac{k'[A_2]_0^{p_2}}{k'[A_1]^{p_1}}$: constante de vitesse apparente de la réaction
 p_1 : ordre apparent de la réaction

Loi de Van't Hoff

Lorsque la réaction est un processus élémentaire, les ordres partiels se confondent avec les coefficients stœchiométriques et l'ordre total à la molécularité

Loi d'Arrhénius

$$\frac{d \ln k}{dT} = \frac{E_a}{RT^2}$$

k : constante de vitesse
 E_a : énergie d'activation
 R : constante des gaz parfaits
 T : température

Loi de vitesse d'une réaction d'ordre 1

$$c = c_0 e^{-kt}$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\alpha k}$$

c : concentration de l'espèce
 c_0 : concentration initiale
 k : constante de vitesse

Le temps de demi-réaction est indépendant de c_0 (α étant le nombre stœchiométrique du réactif limitant).

AEQS : théorème de Bodenstein

$$\frac{d[A]}{dt} = 0$$

Conditions d'application de l'Approximation des États Quasi Stationnaires :
 - $[A]$ très faible
 - A espèce très réactive (intermédiaire réactionnel)

Longueur de chaîne

$$l = \frac{\text{vitesse de disparition réactif}}{\text{vitesse d'initiation}}$$

3. Cristallographie

3.1 Généralités

Définitions

Réseau : disposition spatiale des noeuds

Compacité : Rapport entre le volume de la maille et le volume réellement occupé par les entités de la maille.

Une maille est entièrement décrite par son réseau et son motif.

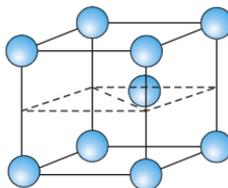
Motif : description des entités qui occupent ces noeuds

Coordinance : nombre d'entités en contact avec une autre entité.

3.2 Mailles et sites dans les cristaux métalliques

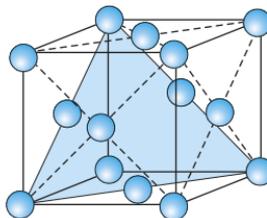
Maille hexagonale compacte

Coordinance : 12
Compacité : 0,74
2 atomes par maille



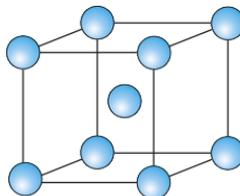
Maille cubique à faces centrées

Coordinance : 12
Compacité : 0,74
4 atomes par maille



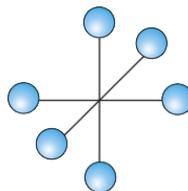
Maille cubique centrée

Coordinnence : 8
 Compacité : 0,68
 2 atomes par maille



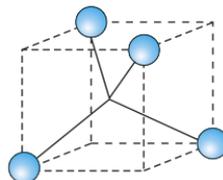
Sites octaédriques

Dimension : $r_O = (\sqrt{2} - 1)r$
 – Au centre et au milieu de chaque arête de la maille cubique face centrée (4 sites par maille)
 – À $\frac{c}{4}$ et $\frac{3c}{4}$ dans la maille hexagonale compacte (2 sites par maille)



Sites tétraédriques

Dimension : $r_T = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)r$
 – Au centre de huit petits cubes d'arête $\frac{a}{2}$ dans la maille cubique face centrée (8 sites par maille)
 – À $\frac{c}{8}$ et $\frac{7c}{8}$ sur chaque côté vertical dans l'hexagonale compacte (4 sites par maille)



3.3 Cristaux ioniques

Chlorure de césium (CsCl)

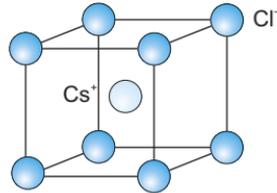
Les ions Cl^- forment un réseau cubique (1 atome par maille)

Les ions Cs^+ sont aux centres de ces cubes (1 atome par maille)

Coordination : [8-8]

Structure adoptée si :

$$\sqrt{3} - 1 \leq \frac{r_+}{r_-} < 1$$



Chlorure de sodium (NaCl)

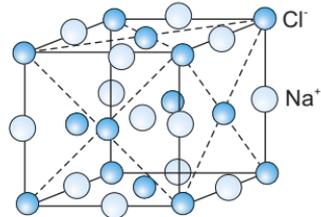
Les ions Cl^- forment un réseau cubique faces centrées (4 atomes par maille)

Les ions Na^+ occupent les sites octaédriques de ce réseau (4 atomes par maille)

Coordination : [6-6]

Structure adoptée si :

$$\sqrt{2} - 1 \leq \frac{r_+}{r_-} < \sqrt{3} - 1$$



Blende (ZnS)

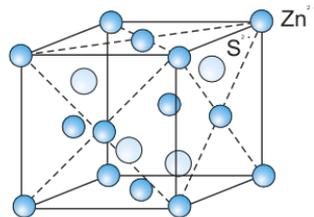
Les ions Zn^{2+} forment un réseau cubique faces centrées (4 atomes par maille)

Les ions S^{2-} occupent un site tétraédrique sur deux dans le réseau précédent (4 atomes par maille)

Coordination : [4-4]

Structure adoptée si :

$$0 \leq \frac{r_+}{r_-} < \sqrt{2} - 1$$



4. Thermodynamique

La thermodynamique a déjà été abordée au cours du chapitre de physique. Il est conseillé de se reporter à cette section, les notions préalablement traitées n'étant pas à nouveau abordées ici.

4.1 Fonctions d'état

Définition

$$X_i = \left(\frac{\partial X}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_j \neq n_i}$$

X : fonction d'état extensive
 X_i : grandeur molaire partielle relative au composé A_i
 n_i : quantité de matière du constituant A_i

Relation de Gibbs–Duhem

$$\sum_i n_i dX_i_{T,p} = 0$$

n_i : quantité de matière du constituant A_i
 $dX_i_{T,p}$: grandeur standard de réaction concernant le constituant A_i à T et p constantes

Grandeurs de réaction associées aux fonctions d'état

$$\Delta_r X = \sum_i \nu_i X_i = \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right)_{T,p}$$

$\Delta_r X$: grandeur de réaction
 ν_i : nombre stœchiométrique relatif au composé A_i
 X_i : grandeur molaire partielle relative au corps A_i

Relation de Gibbs–Helmoltz

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\Delta_r G}{T} \right) = -\frac{\Delta_r H}{T^2}$$

$\Delta_r G$: enthalpie libre de réaction
 $\Delta_r H$: enthalpie de réaction
 T : température

4.2 Potentiel chimique

Définition

$$\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_j \neq n_i}$$

$$\mu_i = \left(\frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{V,S,n_j \neq n_i}$$

$$\mu_i = \left(\frac{\partial H}{\partial n_i} \right)_{p,S,n_j \neq n_i}$$

$$\mu_i = \left(\frac{\partial F}{\partial n_i} \right)_{V,T,n_j \neq n_i}$$

μ_i : potentiel chimique du composé A_i
 U, H, F, G : énergie interne, enthalpie, énergie libre, enthalpie libre
 T, p, V : température, pression, volume
 n_i : quantité de matière du composé A_i

Condition d'équilibre physique

$$\mu_{\varphi_1} = \mu_{\varphi_2}$$

Le potentiel chimique du corps pur dans les deux phases est le même.
 μ_{φ_i} : potentiel chimique du corps pur dans la phase i

Évolution vers un état d'équilibre

S'il n'est pas à l'équilibre, le corps pur passe irréversiblement de la phase de plus haut potentiel chimique vers la phase de plus bas potentiel chimique et ce, jusqu'à l'obtention de l'égalité précédente.

Potentiel d'un gaz

$$\mu_{i(g)} = \mu_{i(g)}^0 + RT \ln \frac{p_i}{p^0}$$

$\mu_{i(g)}$: potentiel chimique du gaz A_i
 $\mu_{i(g)}^0$: potentiel chimique standard du gaz A_i (à la pression p^0)
 R : constante des gaz parfaits
 T : température
 p_i : pression partielle du gaz A_i
 p^0 : pression standard (1 bar = 10^5 Pa)

Potentiel d'un soluté

$$\mu_{i(s)} = \mu_{i(s)}^0 + RT \ln \frac{c_i}{c^0}$$

R : constante des gaz parfaits
 T : température
 c_i : concentration du composé A_i
 c^0 : concentration standard
 ($1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$)

4.3 Grandeurs standards de réaction

Enthalpie standard de réaction

$$\Delta_r H^0 = \sum_i \nu_i H_i^0$$

$\Delta_r H^0$: enthalpie standard de réaction
 ν_i : nombre stœchiométrique du composé A_i
 H_i^0 : enthalpie standard molaire de A_i pris dans son état standard

Entropie standard de réaction

$$\Delta_r S^0 = \sum_i \nu_i S_i^0$$

$\Delta_r S^0$: entropie standard de réaction
 ν_i : nombre stœchiométrique du composé A_i
 S_i^0 : entropie standard molaire de A_i pris dans son état standard

Enthalpie libre standard de réaction

$$\Delta_r G^0 = \sum_i \nu_i G_i^0$$

$\Delta_r G^0$: enthalpie libre standard de réaction
 ν_i : nombre stœchiométrique du composé A_i
 G_i^0 : enthalpie libre standard molaire de A_i pris dans son état standard

Relation entre grandeurs de réaction

$$\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0$$

$\Delta_r S^0$: entropie standard de réaction
 $\Delta_r H^0$: enthalpie standard de réaction
 $\Delta_r G^0$: enthalpie libre standard de réaction
 T : température

Première loi de Kirchhoff

$$\frac{d\Delta_r H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0 = \sum_i \nu_i C_{p,i}^0$$

$\Delta_r H^0$: enthalpie standard de réaction
 $C_{p,i}^0$: capacité thermique molaire du constituant A_i à pression constante
 ν_i : nombre stœchimétrique du composé A_i
 T : température

Deuxième loi de Kirchhoff

$$\frac{d\Delta_r S^0}{dT} = \frac{\Delta_r C_p^0}{T} = \sum_i \frac{\nu_i C_{p,i}^0}{T}$$

$\Delta_r S^0$: entropie standard de réaction
 $C_{p,i}^0$: capacité thermique molaire du constituant A_i à pression constante
 ν_i : nombre stœchimétrique du composé A_i
 T : température

Relations de Gibbs–Helmoltz

$$\Delta_r S^0 = -\frac{d\Delta_r G^0}{dT}$$

$$\Delta_r H^0 = -T^2 \frac{d}{dT} \left(\frac{\Delta_r G^0}{T} \right)$$

$\Delta_r S^0$: entropie standard de réaction
 $\Delta_r H^0$: enthalpie standard de réaction
 $\Delta_r G^0$: enthalpie libre standard de réaction
 T : température

Relation de Hess

$$\Delta_r H^0 = \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^0$$

$$\Delta_r G^0 = \sum_i \nu_i \Delta_f G_i^0$$

$\Delta_r H^0$: enthalpie standard de réaction

$\Delta_r G^0$: enthalpie libre standard de réaction

$\Delta_f H^0$: enthalpie standard de formation du composé A_i (nulle pour les corps purs)

$\Delta_f G^0$: enthalpie libre standard de formation du composé A_i

Cycle de Born–Haber

C'est un cycle thermodynamique qui permet de calculer avec la loi de Hess l'enthalpie standard de réaction en décomposant les réactifs en atomes et en recomposant ces mêmes atomes pour former les produits.

4.4 Équilibres chimiques

Définition de l'affinité chimique

$$\mathcal{A} = - \sum_i \nu_i \mu_i = -\Delta_r G$$

\mathcal{A} : affinité chimique

$\Delta_r G^0$: enthalpie libre standard de réaction

ν_i : nombre stœchiométrique du composé A_i

μ_i : potentiel chimique du composé A_i

Expression de l'affinité

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^0 - RT \ln \left(\prod_i a_i^{\nu_i} \right)$$

\mathcal{A} : affinité chimique

\mathcal{A}^0 : affinité chimique standard

a_i : activité du composé A_i

ν_i : nombre stœchiométrique du composé A_i

R : constante des gaz parfaits

T : température

Condition d'équilibre

$$\mathcal{A} = 0$$

Dans ce cas :

$$\mathcal{A}^0 = RT \ln K^0 = RT \ln \left(\prod_i a_i^{\nu_i} \right)$$

K^0 est la constante d'équilibre de la réaction

Sens d'évolution

$$\mathcal{A} \cdot d\xi \geq 0$$

Si $\mathcal{A} > 0$, $d\xi > 0$: il y a évolution dans le sens $\xrightarrow{1}$

Si $\mathcal{A} < 0$, $d\xi < 0$: il y a évolution dans le sens $\xleftarrow{2}$

Constante d'équilibre

$$K^0(T) = \prod_i a_i^{\nu_i} \text{ équilibre}$$

$K^0(T)$: constante d'équilibre de la réaction qui ne dépend que de la température

$a_i \text{ équilibre}$: coefficient d'activité du composé A_i à l'équilibre

ν_i : nombre stœchiométrique du composé A_i

Température d'inversion

$$\Delta_r G^0(T_i) = 0$$

$$K^0(T_i) = 1$$

À cette température, la réaction prépondérante passe du sens $\xrightarrow{1}$ au sens $\xleftarrow{2}$

Effet de la température : loi de Van't Hoff

$$\frac{d \ln K^0}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2}$$

K^0 : constante d'équilibre de la réaction

$\Delta_r H^0$: enthalpie standard de la réaction

R : constante des gaz parfaits

T : température

Une augmentation de la température déplace la réaction dans le sens endothermique.

Effet de la pression : loi de Le Châtelier

Une augmentation de la pression déplace l'équilibre dans le sens de diminution de la quantité de matière de gaz ($\Delta\nu_{\text{gaz}} < 0$).

Introduction d'un constituant actif

$$d\mathcal{A} = RT \left(\Delta\nu_{\text{gaz}} - \frac{\nu_i}{x_i} \right) \frac{dn_i}{n}$$

$d\mathcal{A}$: variation de l'affinité
 ν_i : nombre stœchiométrique du composé A_i
 x_i : titre molaire du composé A_i
 n : quantité de matière totale
 dn_i : variation de quantité de matière du composé A_i

Ajout d'un constituant inactif

$$d\mathcal{A} = RT\Delta\nu_{\text{gaz}} \frac{dn}{n}$$

$d\mathcal{A}$: variation de l'affinité
 n : quantité de matière
 dn : variation de quantité de matière du constituant introduit

Variance – Règle des phases de Gibbs

$$v = c + 2 - \varphi$$

$$c = n - k - r$$

v : variance
 c : nombre de constituants indépendants
 φ : nombre de phases
 n : nombre de constituants
 k : nombre de relations entre les constituants
 r : relation particulières (imposées par le manipulateur)

4.5 Équilibres liquide–vapeur

Loi de Raoult

$$p_i = p_i^* x_i^l$$

p_i : pression partielle du composé A_i
 p_i^* : pression saturante du composé A_i
 x_i^l : titre molaire de A_i liquide

Loi de Henry

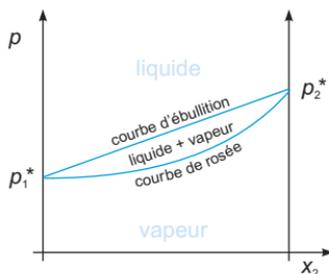
$$p_i = k x_i^l$$

p_i : pression partielle du composé A_i
 $k \neq p_i^*$: constante de Henry
 x_i^l : titre molaire de A_i liquide

Solution idéale : définition

Une solution est dite idéale si toutes les interactions entre les espèces qui la composent sont identiques : interactions A_1-A_1, A_2-A_2 et A_1-A_2

Diagramme binaire d'une solution idéale



Équations des courbes

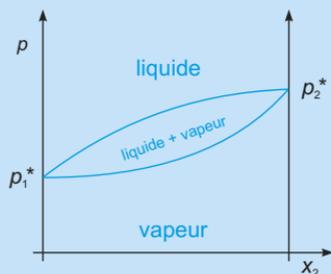
Courbe d'ébullition :

$$p = p_1^* + (p_2^* - p_1^*) x_2^l$$

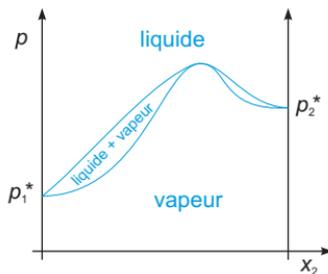
Courbe de rosée :

$$p = \frac{p_1^* p_2^*}{p_2^* - (p_2^* - p_1^*) x_2^v}$$

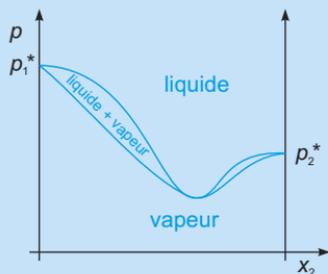
Diagrammes isothermes



Fuseau simple



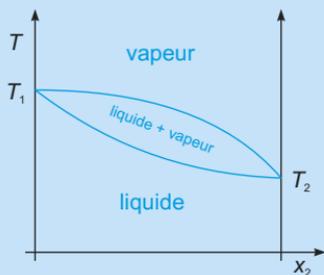
Azéotrope positif



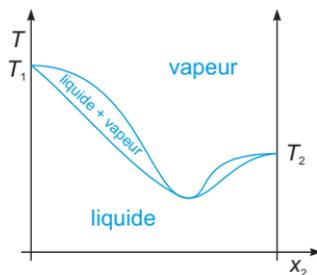
Azéotrope négatif

L'azéotrope est la manifestation de l'écart de la solution par rapport à la solution idéale.

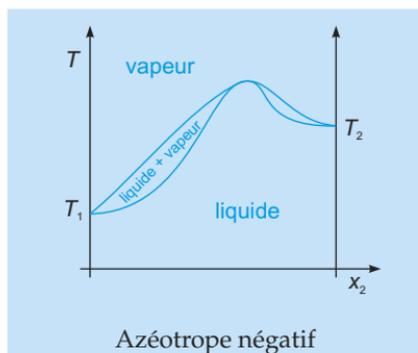
Diagrammes isobares



Fuseau simple

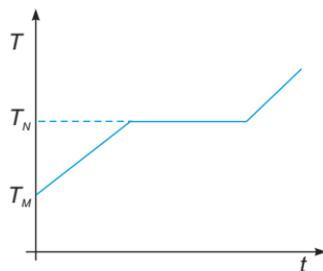
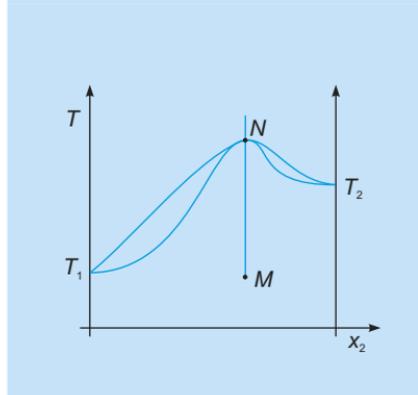
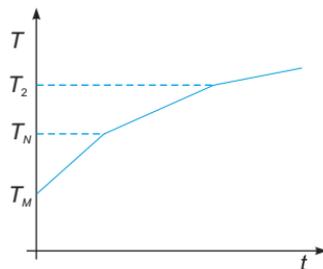
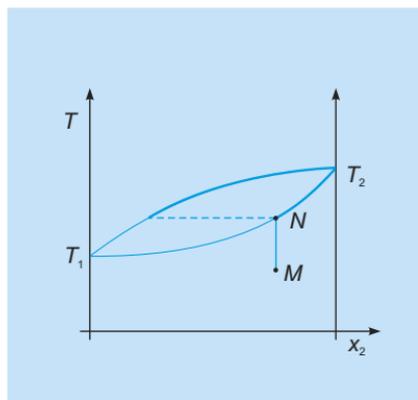


Azéotrope positif

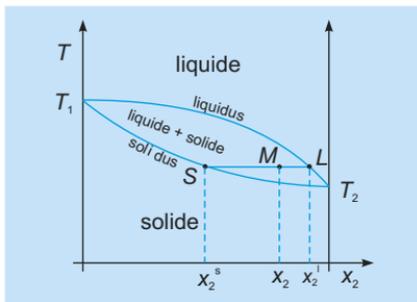


À pression constante, un azéotrope bout à température constante et donne une vapeur de même composition.

Analyse thermique



Théorème des moments

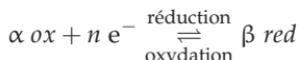


$$n^l \overline{ML} + n^v \overline{MV} = 0$$

n^l : quantité de matière de liquide
 n^v : quantité de matière de vapeur
 \overline{ML} : distance algébrique de M à la courbe d'ébullition
 \overline{MV} : distance algébrique de M à la courbe de rosée

4.6 Réactions d'oxydoréduction

Couple redox



Nombre d'oxydation – Définition

C'est le nombre d'électrons « perdus » par rapport à l'atome neutre.

Nombre d'oxydations – Règles de détermination

- atome isolé neutre : n.o. : 0 ;
- ion simple : le nombre d'oxydations est la charge de l'ion ;
- molécule ou ion complexe :
 - entre deux atomes du même élément, on attribue à chacun l'un des électrons du doublet de liaison ;
 - entre deux atomes différents, on attribue les électrons de liaison au plus électronégatif.

Dans tous les cas : $\sum n.o. = q$ avec q la charge de l'édifice atomique.

Oxydant – Réducteur

Un oxydant est une espèce dont le nombre d'oxydation peut diminuer.

Un réducteur est une espèce dont le nombre d'oxydation peut augmenter.

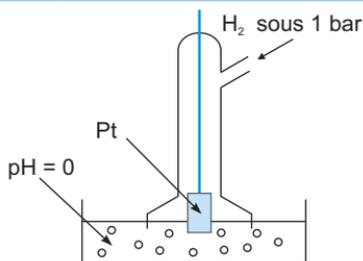
Équilibrage d'une équation redox

Pour équilibrer une équation on procède en :

1. déterminant le nombre d'électrons échangés avec le nombre d'oxydations ;
2. effectuant un bilan des charges et en assurant l'électronneutralité avec H^+ et l'équilibre en atomes d'oxygène avec H_2O ;
3. effectuant un bilan de matière.

Électrode à hydrogène

C'est l'électrode de référence pour les mesures de potentiels redox (à toute température $E^0(H^+/H_2) = 0,000$ V). Cette électrode est fictive.



Formule de Nernst

$$E = E^0 + \frac{RT}{n\mathcal{F}} \ln \frac{a_{\text{ox}}^\alpha}{a_{\text{red}}^\beta}$$

a_{ox} : activité de l'oxydant

a_{red} : activité du réducteur

Avec :

- $a = 1$ pour tout solide ou un liquide pur dans la phase

- $a = \frac{c}{c^0}$ pour un soluté

- $a = \frac{p_i}{p^0}$ la pression partielle pour un gaz (dans le cas des solutions diluées)

E : potentiel de l'électrode

E^0 : potentiel standard du couple redox

n : nombre d'électrons échangés

$\mathcal{F} = \mathcal{N} \cdot e$: nombre de Faraday

R : constante des gaz parfaits

T : température

Formule de Nernst : forme usuelle

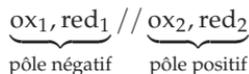
$$E = E^0 + \frac{0,06}{n} \log \frac{a_{\text{ox}}^\alpha}{a_{\text{red}}^\beta}$$

$$\text{À } 25^\circ\text{C}, \frac{RT}{\mathcal{F} \ln 10} = 0,06$$

Réactions aux électrodes d'une pile

La réduction se produit à la cathode
L'oxydation se produit à l'anode

On symbolise une pile par :



Force électromotrice d'une pile

$$E = E_2 - E_1$$

E : force électromotrice (fém) de la pile

E_1 : potentiel du couple constituant l'anode

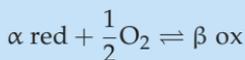
E_2 : potentiel du couple constituant la cathode

5. Matériaux métalliques

5.1 Diagrammes d'Ellingham

Principe

On étudie la formation des oxydes ramenée à une même quantité de dioxygène, réaction qui s'écrit sous la forme générale :



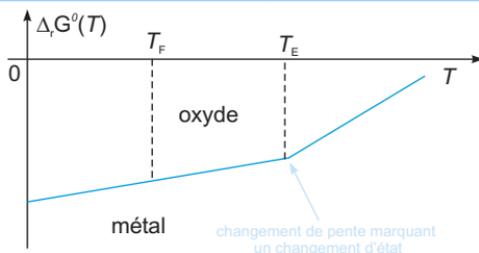
On trace la courbe :

$$\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0$$

Approximation d'Ellingham

Pour construire ces diagrammes, on considère que $\Delta_r G^0$, $\Delta_r H^0$ et $\Delta_r S^0$ sont indépendants de la température. Cette approximation est appelée approximation d'Ellingham.

Allure du diagramme



Affinité du système

$$A = \frac{1}{2} RT \ln \frac{p}{p_e}$$

A : affinité chimique
 p : pression du réacteur
 p_e : pression d'équilibre à une température donnée
 T : température
 R : constante des gaz parfaits

Corrosion d'un métal

Un métal est oxydé par un oxyde dont la droite d'Ellingham se situe au-dessus de sa propre droite.

5.2 Diagrammes potentiel-pH

Conventions

Convention 1 : sur le domaine frontière les concentrations des deux espèces sont égales à une concentration arbitrairement choisie

Convention 2 : on fixe la concentration totale en un élément donné. Sur le domaine frontière, les concentrations sont réparties équitablement.

Construction du diagramme potentiel-pH

1. On détermine le degré d'oxydation des espèces mises en jeu.
2. On calcule le pH frontière pour les espèces de même degré d'oxydation.
3. On calcule avec la formule de Nernst l'équation des droites séparant les domaines des espèces de degré d'oxydation distincts.

Les droites verticales marquent des réactions acido-basiques.

Les droites horizontales marquent des réactions redox.

Définition du pH

$$\text{pH} = -\log \left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{c^0} \right)$$

La relation ci-contre n'est valable qu'en milieu dilués.

$[\text{H}_3\text{O}^+]$: concentration en ions H_3O^+ dans le milieu

c^0 : concentration standard ($1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$)

Produit ionique de l'eau

$$K_e = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{OH}^-]}{(c^0)^2} = 10^{-14}$$

$$\text{p}K_e = -\log K_e = 14$$

K_e : produit ionique de l'eau

$[\text{H}_3\text{O}^+]$: concentration en ions H_3O^+ dans le milieu

$[\text{OH}^-]$: concentration en ions OH^- dans le milieu

c^0 : concentration standard

Constante d'acidité d'un couple acidobasique



$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{A}^-]}{[\text{HA}] \cdot c^0}$$

$$\text{p}K_a = -\log K_a$$

K_a : constante d'acidité du couple acidobasique (ne dépend que de la température).

$[\text{H}_3\text{O}^+]$: concentration en ions H_3O^+ dans le milieu

$[\text{HA}]$: concentration de l'espèce acide dans le milieu

$[\text{A}^-]$: concentration de l'espèce basique dans le milieu

c^0 : concentration standard

Principaux diagrammes potentiels – pH

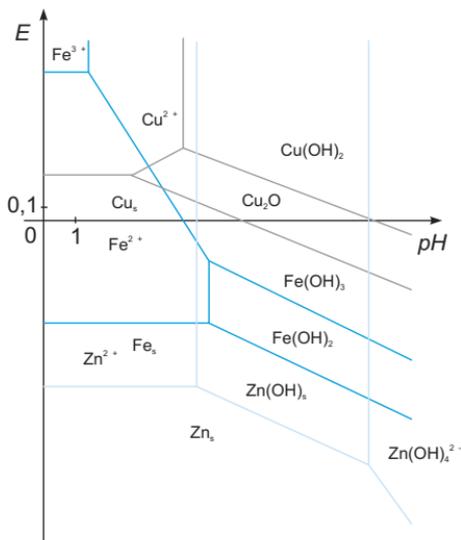


Diagramme potentiel – pH de l'eau

Le couple $\text{H}_2 / \text{H}_2\text{O}$ est représenté par une droite de pente $-0,06$ et d'ordonnée à l'origine $0,00$ V.

Le couple $\text{H}_2\text{O} / \text{OH}^-$ est représenté par une droite de pente $-0,06$ et d'ordonnée à l'origine $1,23$ V.

5.3 Courbes intensité–potentiel

Tension minimale à appliquer

$$U \geq \frac{\Delta_r G}{2F}$$

U : tension appliquée
 $\Delta_r G$: enthalpie libre de la réaction
 F : nombre de Faraday

Intensité du courant – Vitesse de réaction

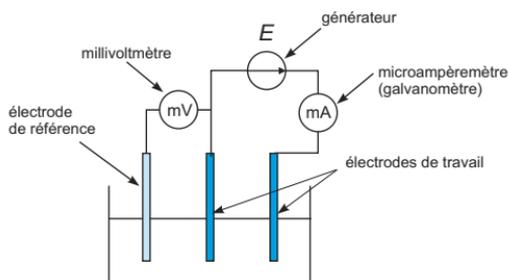
$$i = nF \frac{d\xi}{dt}$$

$$v = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}$$

i : intensité du courant
 n : nombre d'électrons échangés au cours de la réaction
 F : nombre de Faraday
 ξ : avancement de la réaction
 V : volume de solution électrolyte

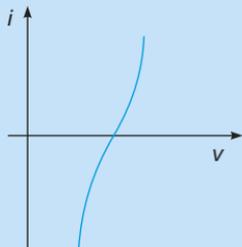
La vitesse de réaction et l'intensité sont proportionnelles.

Montage expérimental

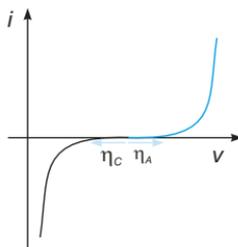


Système lent – Système rapide

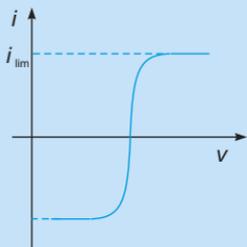
Système rapide



Système lent (existence de surtensions η_A et η_C respectivement anodiques et cathodiques)



Courant limite de diffusion



Le phénomène de diffusion limite la vitesse de déplacement des électrons ; il existe donc un courant limite.

Tension à appliquer

$$U = \underbrace{E_A - E_C}_{\text{thermodynamique}} + \underbrace{\eta_A - \eta_C}_{\text{cinétique}} + ri$$

U : tension à appliquer

E_A : potentiel du couple de l'anode

E_C : potentiel du couple de la cathode

η_A : surtension anodique

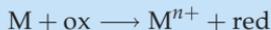
η_C : surtension cathodique

r : résistance interne de l'électrolyte

i : intensité du courant

5.4 Corrosion

Réaction de corrosion



M : métal qui va être corrodé

ox : un meilleur oxydant que le métal

M^{n+} : cation associé au métal dans un couple redox

red : réducteur associé à l'oxydant ox

Corrosion avec des électrodes différentes

Quand les électrodes sont différentes, c'est le métal qui a le plus petit potentiel redox qui se corrode.

Corrosion avec des électrodes identiques

Dans le cas d'une pile de concentration, c'est le métal qui plonge dans la solution la plus diluée qui se corrode.

C'est le métal qui plonge dans la solution la moins aérée qui se corrode.

Domaines de corrosion, d'immunité et de passivation

- On appelle **domaine de corrosion** le(s) domaine(s) d'un diagramme E-pH où le métal se retrouve sous forme d'ions.
- On appelle **domaine d'immunité** le domaine d'un diagramme E-pH où le métal est stable (il n'est pas corrodé).
- On appelle **domaine de passivation** le domaine d'un diagramme E-pH où le métal se retrouve sous forme de précipité qui est susceptible de former une couche protectrice à la surface du métal.

Annexe A

Primitives usuelles

Primitive	Intervalle
$\int \frac{dt}{t} = \ln t + k$	\mathbb{R}^*
$\int \cos t \, dt = \sin t + k$	\mathbb{R}
$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + k$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln \left \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + k$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$
$\int \tan t \, dt = -\ln \cos t + k$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$
$\int \operatorname{ch} t \, dt = \operatorname{sh} t + k$	\mathbb{R}
$\int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t + k$	\mathbb{R}
$\int \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = 2 \operatorname{Arctan} e^t + k$	\mathbb{R}
$\int \operatorname{th} t \, dt = \ln \operatorname{ch} t + k$	\mathbb{R}
$\int e^{mt} \, dt = \frac{1}{m} e^{mt} + k, (m \in \mathbb{C}^*)$	\mathbb{R}
$\int t^\alpha \, dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, (\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\})$	\mathbb{R}
$\int \sin t \, dt = -\cos t + k$	\mathbb{R}

$$\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\cot t + k \quad \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + k \quad \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \cot t \, dt = \ln |\sin t| + k \quad \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \operatorname{sh} t \, dt = \operatorname{ch} t + k \quad \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{coth} t + k \quad \mathbb{R}^*$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{t}{2} \right| + k \quad \mathbb{R}^*$$

$$\int \operatorname{coth} t \, dt = \ln |\operatorname{sh} t| + k \quad \mathbb{R}$$

$$\int a^t \, dt = \frac{a^t}{\ln a} + k, (a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}) \quad \mathbb{R}$$

Dans la suite on suppose : $a \in \mathbb{R}^*$

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{t}{a} + k \quad \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \begin{cases} \operatorname{Arcsin} \frac{t}{|a|} + k \\ -\operatorname{Arccos} \frac{t}{|a|} + k \end{cases} \quad] -a, a[$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + a^2}} = \begin{cases} \operatorname{Argsh} \frac{t}{|a|} + k \\ \ln \left(t + \sqrt{t^2 + a^2} \right) + k \end{cases} \quad \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \begin{cases} \begin{cases} \operatorname{Argch} \frac{t}{|a|} + k \\ \ln \left(t + \sqrt{t^2 - a^2} \right) + k \end{cases} &]|a|, +\infty[\\ \begin{cases} -\operatorname{Argch} \left| \frac{t}{a} \right| + k \\ \ln \left| t + \sqrt{t^2 - a^2} \right| + k \end{cases} &] -\infty, |a|[\end{cases}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + b}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 + b} \right| + k, (b \in \mathbb{R}^*) \quad \mathbb{R} [-b, b]$$

$$\int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \begin{cases} \operatorname{Argth} t + k \\ \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{t-a}{t+a} \right) + k \end{cases}$$

Développements limités

Principaux développements limités

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(a+x) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{a^n} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$$

$$\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$$

$\operatorname{Argch} x$ n'est pas défini au voisinage de 0 et n'admet pas de développement limité au voisinage de 1 (tangente verticale).

$$\operatorname{Argsh} = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$$

Formules trigonométriques

1. Angles remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

2. Relations trigonométriques

Relations entre les rapports trigonométriques d'un même arc

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \tan^2 a}$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

$$\sin^2 a = \frac{1}{1 + \cot^2 a}$$

Formules d'addition

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Formules de duplication

$$\cos(2a) = \begin{cases} \cos^2 a - \sin^2 a \\ 2 \cos^2 a - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 a \end{cases}$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Expression de $\cos a$, $\sin a$, $\tan a$, en fonction de $\tan a/2$

$$\cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$\sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$\tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}$$

Transformations de produits en sommes

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) + \cos(a + b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

$$\sin b \cos a = \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

Transformation des sommes en produits

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

Arcs associés

$$\cos(-a) = \cos a$$

$$\cos(\pi + a) = -\cos a$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$$

$$\tan(\pi + a) = \tan a$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$$

$$\sin(-a) = -\sin a$$

$$\sin(\pi + a) = -\sin a$$

$$\sin(\pi - a) = \sin a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$$

$$\cot(\pi + a) = \cot a$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$$

Fonctions circulaires réciproques

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 :$$

$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \begin{cases} \operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab} & \text{si } ab < 1 \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a & \text{si } ab = 1 \\ \operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab} + \pi \operatorname{sgn} a & \text{si } ab > 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$$

Trigonométrie hyperbolique

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

$$\operatorname{ch} 2a = \begin{cases} \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a \\ 2 \operatorname{ch}^2 a - 1 \\ 1 + 2 \operatorname{sh}^2 a \end{cases}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

$$\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{th} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}$$

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$$

Opérateurs vectoriels

Cette annexe sert essentiellement en physique mais elle peut trouver son utilité en chimie (par exemple l'Hamiltonien comporte un laplacien) ou en maths (notamment dans le cadre du chapitre des fonctions de plusieurs variables).

1. Notations

Opérateur Nabla

On utilise très souvent l'opérateur « Nabla » :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right)$$

Champs utilisés par la suite

Dans la suite, on considère un champ vectoriel :

$$\mathbf{A}(M) = \left(\begin{array}{c} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{array} \right) \begin{array}{l} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{array}$$

On considérera également un champs vectoriel \mathbf{B} et le champs scalaire $V(x, y, z)$

2. Gradient

Coordonnées cartésiennes

$$\mathbf{grad}V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Coordonnées cylindriques

$$\mathbf{grad}V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{u}_z \end{matrix}$$

Coordonnées sphériques

$$\mathbf{grad}V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{u}_\varphi \end{matrix}$$

3. Divergence

Coordonnées cartésiennes

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

Coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordonnées sphériques

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

4. Rotationnel

Coordonnées cartésiennes

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Coordonnées cylindriques

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_x}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Coordonnées sphériques

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\varphi) \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$$

5. Laplacien

Coordonnées cartésiennes

Laplacien scalaire :

$$\Delta V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \text{div}(\text{grad } V)$$

Laplacien vectoriel :

$$\Delta \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Coordonnées cylindriques

Laplacien scalaire :

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Le Laplacien vectoriel n'a pas ici d'expression simple.

Coordonnées sphériques

Le Laplacien scalaire est :

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r^2} (rV) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)$$

6. Relations entre les opérateurs

Opérateur A · grad

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} (\mathbf{B} \cdot \nabla) A_x \\ (\mathbf{B} \cdot \nabla) A_y \\ (\mathbf{B} \cdot \nabla) A_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ B_x \frac{\partial A_y}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_x \frac{\partial A_z}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_z}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques et sphériques l'expression n'est plus li-
sible.

Autres relations

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}U) = 0$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) = 0$$

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A})$$

$$\mathbf{grad}(U \cdot V) = U \mathbf{grad}V + V \mathbf{grad}U$$

$$\operatorname{div}(V \cdot \mathbf{A}) = V \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad}V$$

$$\mathbf{rot}(V \cdot \mathbf{A}) = V \mathbf{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{grad}V) \wedge \mathbf{A}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{B}$$

7. Théorèmes géométriques

Théorème d'Ostrogradski

$$\oint_{M \in (S)} \mathbf{A}(M) \mathbf{n}_{\text{ext}} dS = \iiint_{M \in (V)} \operatorname{div} \mathbf{A}(M) dV$$

Théorème de Stokes

$$\oint_{M \in (C)} \mathbf{A}(M) \cdot d\mathbf{M} = \iint_{M \in (S)} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}(P) dS$$

Théorème du gradient

$$\oint_{M \in (S)} U(M) \mathbf{n}_{\text{ext}} dS = \iiint_{M \in (V)} \mathbf{grad}U(M) dV$$

Autre formulation (avec les notations adoptées pour le théorème de Stokes) :

$$\oint_{M \in (C)} U(M) \cdot d\mathbf{M} = \iint_{M \in (S)} \mathbf{n}(M) \wedge \mathbf{grad}U(M) dS$$

Unités et constantes fondamentales

1. Unités du Système International

On distingue trois types d'unités dans le Système International : les unités de base, les unités supplémentaires (ces deux premières catégories étant dimensionnellement indépendante) et les unités supplémentaires et dérivées qui peuvent s'exprimer en fonction des premières.

1.1 Unités principales du système international

Grandeur physique	Unité	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Courant électrique	ampère	A
Température	kelvin	K
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

1.2 Unités secondaires du système international

Grandeur physique	Unité	Symbole
Angle	radian	rad
Angle solide	steradian	sr

1.3 Unités courantes du système international

Grandeur physique	Unité	Symbole
Fréquence	hertz	Hz \leftrightarrow s ⁻¹
Force	newton	N \leftrightarrow kg · m · s ⁻²
Énergie	joule	J \leftrightarrow m · N
Puissance	watt	W \leftrightarrow J · s ⁻¹
Pression	pascal	Pa \leftrightarrow N · m ⁻²
Charge électrique	coulomb	C \leftrightarrow A · s
Différence de potentiel électrique	volt	V \leftrightarrow A ⁻¹ · m · N · s ⁻¹
Résistance électrique	ohm	Ω \leftrightarrow A ⁻¹ · m · N · s ⁻²
Conductance électrique	siemens	S \leftrightarrow A ² · N · s
Capacité électrique	farad	F \leftrightarrow A ² · m ⁻¹ · N ⁻¹ · s ²
Champ magnétique	tesla	T \leftrightarrow A ⁻¹ · m ⁻¹ · N
Inductance	henry	H \leftrightarrow A ⁻² · m · N
Flux magnétique	weber	Wb \leftrightarrow A ⁻¹ · m · N
Flux lumineux	lumen	lm \leftrightarrow cd · sr
Illumination	lux	lx \leftrightarrow cd · m ⁻² · sr

1.4 Multiples décimaux pour les unités

Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole
10	déca-	da	10 ⁻¹	déci-	d
10 ²	hecto-	h	10 ⁻²	centi-	c
10 ³	kilo-	k	10 ⁻³	milli-	m
10 ⁶	méga-	M	10 ⁻⁶	micro-	μ
10 ⁹	giga-	G	10 ⁻⁹	nano-	n
10 ¹²	tera-	T	10 ⁻¹²	pico-	p
10 ¹⁵	peta-	P	10 ⁻¹⁵	femto	f
10 ¹⁸	exa-	E	10 ⁻¹⁸	atto-	a

2. Constantes fondamentales

Constante	Valeur
Constante de gravitation	$G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ $\mu_0 \approx 1,25664 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 \approx 8,85419 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$ $h = 4,135669 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Nombre d'Avogadro	$\mathcal{N} = 6,0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k = 1,380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Constante de Faraday	$\mathcal{F} = 96485,309 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,67051 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

3. Ordres de grandeurs

Grandeur	Valeur
Conductivité du métal	$\sigma \approx 10^8 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
Tension de seuil pour une diode	$V_d \approx 0,6 \text{ V}$
Champ de pesanteur à la surface de la Terre	$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Rayon terrestre	$R_T = 6400 \text{ km}$
Masse de la Terre	$M_T \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Altitude d'un satellite géostationnaire	$H \approx 36\,000 \text{ km}$
Distance Terre-Soleil	$d_{T-S} \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Distance Terre-Lune	$d_{T-L} \approx 3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$
Masse du soleil	$M_S \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Coefficient de frottement acier-acier	$\mu \approx 0,2$
Raideur d'un ressort	$k \approx 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
Masse du proton	$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du neutron	$m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Constantes chimiques

Potentiels standards redox

(À 25°C, 1,013 bar, pH=0)

Couples redox	E ₀ en volts
$\text{MnO}_4^- + 4\text{H}^+ + 3e^- \longleftrightarrow \text{MnO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,700
$\text{MnO}_4^- + 8\text{H}^+ + 5e^- \longleftrightarrow \text{Mn}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$	1,490
$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14\text{H}^+ + 6e^- \longleftrightarrow 2\text{Cr}^{3+} + 7\text{H}_2\text{O}$	1,330
$\text{MnO}_2 + 4\text{H}^+ + 2e^- \longleftrightarrow \text{Mn}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,230
$\text{Br}_2 + 2e^- \longleftrightarrow 2\text{Br}^-$	1,090
$\text{Hg}^{2+} + 2e^- \longleftrightarrow \text{Hg}$	0,850
$\text{Ag}^+ + e^- \longleftrightarrow \text{Ag}$	0,798
$\text{Hg}^+ + e^- \longleftrightarrow \text{Hg}^-$	0,790
$\text{Fe}^{3+} + e^- \longleftrightarrow \text{Fe}^{2+}$	0,780
$\text{MnO}_4^- + e^- \longleftrightarrow \text{MnO}_4^{2-}$	0,560
$\text{I}_2 + 2e^- \longleftrightarrow 2\text{I}^-$	0,540
$\text{Cu}^{2+} + 2e^- \longleftrightarrow \text{Cu}$	0,340
$\text{Cu}^{2+} + e^- \longleftrightarrow \text{Cu}^+$	0,150
$2\text{H}^+ + 2e^- \longleftrightarrow \text{H}_2$	0,000
$\text{Fe}^{3+} + 3e^- \longleftrightarrow \text{Fe}$	-0,040

Couples redox	E_0 en volts
$\text{Pb}^{2+} + 2e^- \longleftrightarrow \text{Pb}$	-0,120
$\text{Sn}^{2+} + 2e^- \longleftrightarrow \text{Sn}$	-0,140
$\text{Fe}^{2+} + 2e^- \longleftrightarrow \text{Fe}$	-0,441
$\text{Zn}^{2+} + 2e^- \longleftrightarrow \text{Zn}$	-0,762
$\text{Mn}^{2+} + 2e^- \longleftrightarrow \text{Mn}$	-1,180
$\text{Al}^{3+} + 3e^- \longleftrightarrow \text{Al}$	-1,660
$\text{Na}^+ + e^- \longleftrightarrow \text{Na}$	-2,715
$\text{Ca}^{2+} + 2e^- \longleftrightarrow \text{Ca}$	-2,763
$\text{Ba}^{2+} + 2e^- \longleftrightarrow \text{Ba}$	-2,900
$\text{K}^+ + e^- \longleftrightarrow \text{K}$	-2,924

Tableau périodique

1^{re} colonne : alcalins métalliques

2^e colonne : alcalino terreux

Colonnes 3–11 : métaux de transition

Colonne 17 : halogènes

Colonnes 18 : gaz rares



Gaz noble



Métaux



Métaux de transition



Alcalin métalliques



Halogène



Espèce rare



Non métaux



Alcalino terreux

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
--	---	---	---	---	---	---	---	---	---

I	1 H hydrogène 1,008								
II	3 Li lithium 6,94	4 Be béryllium 9,01							
III	11 Na sodium 22,99	12 Mg magnésium 24,31							
IV	19 K potassium 39,10	20 Ca calcium 40,08	21 Sc scandium 44,96	22 Ti titane 47,88	23 V vanadium 50,94	24 Cr chrome 52,00	25 Mn manganèse 54,94	26 Fe fer 55,85	27 Co cobalt 58,93
V	37 Rb rubidium 85,47	38 Sr strontium 87,62	39 Y yttrium 88,91	40 Zr zirconium 91,22	41 Nb niobium 92,21	42 Mo molybdène 95,94	43 Tc technétium 98,91	44 Ru ruthénium 101,1	45 Rh rhodium 102,9
VI	55 Cs césium 132,9	56 Ba baryum 137,3	57 La lanthane 138,9	72 Hf hafnium 178,5	73 Ta tantale 180,9	74 W tungstène 183,9	75 Re rhénium 186,2	76 Os osmium 190,2	77 Ir iridium 192,2
VII	87 Fr francium 223,0	88 Ra radium 226,0	89 Ac actinium 227,0						

numéro atomique → 6
 nom de l'élément → carbone
 symbole ← C
 masse atomique ← 12,01

58 Ce cérium 140,1	59 Pr praséodyme 140,9	60 Nd néodyme 144,2	61 Pm prométhium 144,9	62 Sm samarium 150,4
90 Th thorium 232,0	91 Pa protactinium 231,0	92 U uranium 238,0	93 Np neptunium 237,0	94 Pu plutonium 244,1

10	11	12	13	14	15	16	17	18
----	----	----	----	----	----	----	----	----

								2 He hélium 4,003
			5 B bore 10,81	6 C carbone 12,01	7 N azote 14,01	8 O oxygène 16,00	9 F fluor 19,00	10 Ne néon 20,18
			13 Al aluminium 26,98	14 Si silicium 28,09	15 P phosphore 30,97	16 S soufre 32,07	17 Cl chlore 35,45	18 Ar argon 39,95
28 Ni nickel 58,69	29 Cu cuivre 63,55	30 Zn zinc 65,39	31 Ga gallium 69,72	32 Ge germanium 72,59	33 As arsenic 74,92	34 Se sélénium 78,96	35 Br brome 79,90	36 Kr krypton 83,80
46 Pd palladium 106,4	47 Ag argent 107,9	48 Cd cadmium 112,4	49 In indium 114,8	50 Sn étain 118,7	51 Sb antimoine 121,8	52 Te tellure 127,6	53 I iode 126,9	54 Xe xénon 131,3
78 Pt platine 195,1	79 Au or 197,0	80 Hg mercure 200,6	81 Tl thallium 204,4	82 Pb plomb 207,2	83 Bi bismuth 209,0	84 Po polonium 210,0	85 At astate 210,0	86 Rn radon 222,0

63 Eu europium 152,0	64 Gd gadolinium 157,3	65 Tb terbium 158,9	66 Dy dysprosium 162,5	67 Ho holmium 164,9	68 Er erbium 167,3	69 Tm thulium 168,9	70 Yb ytterbium 173,0	71 Lu lutétium 175,0
95 Am américium 243,1	96 Cm curium 247,1	97 Bk berkélium 247,1	98 Cf californium 252,1	99 Es einsteinium 252,1	100 Fm fermium 257,1	101 Md mendélévium 256,1	102 No nobélium 259,1	103 Lr lawrencium 260,1

Index

- Abel (lemme d'–), 51
- absorption, 137
- accroissements finis
(théorème des), 39
- activité, 164
- adhérence, 29
- adiabatique (transformation –), 81
- adjoint (d'un
endormorphisme), 24
- affinité, 145
- Alembert
 - équation d'–, 132
 - règle de d'–, 49
 - théorème de d'–, 10
- algèbre, 5
- Ampère (théorème d'–), 121
- amplificateur opérationnel, 73
- angles remarquables, 177
- anneau, 3
- application
 - composition, 11
 - injective, 11
 - lipschitzienne, 37
 - surjective, 11
- application linéaire, 12–17
 - image, 15, 16
 - noyau, 15, 16
 - rang, 15
- application lineaire
 - spectre, 26
- approximation des états quasi
stationnaires (AEQS), 149
- arrangement, 5
- Arrhénius (loi d'–), 149
- asymptote, 61
- asymptote, 63
- auto-induction, 126
- automorphisme, 15
- automorphismes
orthogonaux, 25
- avancement d'une réaction, 148
- base, 13
 - changement de –, 19
 - duale, 14
- Bertrand
 - série de –, 48
- Bessel (inégalité de –), 23
- Bezout
 - égalité de, 9
- Bezout (théorème de –), 7
- binôme (de Newton), 6
- Binet (formules de –), 100
- Biot et Savart (loi de –), 121
- Bolzano-Weierstrass
(théorème de –), 35
- boule
 - fermée, 28
 - ouverte, 28
- branche infinie, 61

- branche parabolique, 61
- capacités thermiques, 78
- Cauchy
 - critère de –, 49
 - produit de –, 50
 - règle de –, 49
 - suite de –, 30
- Cauchy-Lipschitz (théorème de –), 45
- Cauchy-Schwarz (inégalité de –), 22
- Cayley-Hamilton (théorème de –), 27
- centre d'inertie (théorème du –), 91
- chaleur latente, 83
- champ
 - gravitationnel, 119
 - magnétostatique, 121
- champ électrostatique, 118
- changement de référentiel, 90
- Chasles (relation de –), 43
- cinétique chimique, 148
- Clapeyron (relation de –), 83
- classe (d'une fonction), 39
- classe d'équivalence, 2
- codimension, 14
- coefficients thermoélastiques, 77
- combinaison, 6
- compacte (partie), 29
- complète (partie –), 30
- complexe (nombre –), 32–33
- composition
 - des accélérations, 90
 - des vitesses, 90
- conduction de la chaleur, 85
- coniques, 68
- conjugué (d'un nombre complexe), 32
- connexité par arcs, 30
- constante
 - d'écran, 143
 - d'acidité, 167
 - de vitesse (d'une réaction), 148
- continuité, 36
- continuité uniforme, 37
- convection, 85
- convergence
 - simple (série d'applications), 55
- convergence
 - absolue (série d'applications), 55
 - absolue (série), 50
 - normale (série d'applications), 55
 - normale (série de Fourier), 57
 - semi-convergence (série), 50
 - simple (suite d'applications), 52
 - théorème de – dominée (suite d'applications), 54
 - théorème de – monotone (suite d'applications), 54
 - uniforme (série d'applications), 55
 - uniforme (suite d'applications), 52
- convexité, 40
- convexité (inégalité de –), 40
- coordonnées
 - cartésiennes, 88
 - cylindriques, 88
 - polaires, 62
 - sphériques, 89
- Coriolis
 - accélération de –, 90
 - force de –, 90
- corps, 4
- Coulomb (lois de –), 105
- couple
 - redox, 163
- courbure, 64
- Cramer (système de –), 21
- dérivée, 38
 - partielle, 58
 - selon un vecteur, 58
- dérivabilité, 39
- déterminant, 19

- développements limités, 175
degré (d'un polynôme), 8
Descartes (loi de -), 106
diélectriques (milieux -), 138
diagonalisabilité, 27
diagramme
 binaires, 160–163
 d'Ellingham, 165
 E-pH, 166
 intensité-potentiel, 168
difféomorphisme, 40
diffraction, 116–118
diffusion
 équation de -, 67
 de chaleur, 85
direction asymptotique, 61, 63
Dirichlet (théorème de -), 57
dispersion, 137
 relation de, 134
divisibilité
 dans \mathbb{N} , 6
 dans $K[X]$, 9
division euclidienne
 d'un polynôme, 9
 dans \mathbb{N} , 6
domination (théorème de -), 42
- électrostatique, 118
endomorphisme, 15
 adjoint, 24
énergie
 cinétique, 93
 cinétique (du solide), 101
 interne, 77
 mécanique, 93
 magnétique, 127
 potentielle, 94
enthalpie, 78
entropie, 80
équation
 d'onde, 132
 différentielle, 66
 redox, 164
équation différentielle, 44
 linéaire du premier ordre, 44
 linéaire du second ordre, 45
équilibre, 94
 stabilité d'un -, 95
espace
 euclidien, 30
 préhilbertien, 30
 vectoriel, 5, 12–17
 vectoriel normé, 27–31
extremum local, 59
- factorielle, 5
famille
 génératrice, 13
 libre, 13
Faraday (loi de -), 126, 128
fermé, 28
filtre, 71–73
flux
 du champ magnétique, 126
 thermique, 85
fonction
 de plusieurs variables, 58
 de transfert, 71
 réelle de la variable
 réelle, 35–38
 trigonométrique
 réciproque, 38
fonctions implicites (théorème
des -), 59
force
 centrale, 99
 d'inertie, 90
 de Lorentz, 98
forme
 linéaire, 14
 quadratique, 22
forttements solide, 105
Fourier
 loi de -, 85
 séries de -, 57
fraction rationnelle, 10–11
Fresnel
 miroirs de -, 115
 principe d'Huyghens -, 116
- Gauss
 approximation de -, 107

- théorème de –, 7, 119
gaz parfait, 76
Gibbs
 règle des phases de –, 159
 relation de Gibbs–Duhem, 153
 relation de Gibbs–Helmoltz, 153
gradient, 58
Grassman (formule de –), 17
groupe, 2
 cyclique, 3
 générateurs de –, 3
 monogène, 3
- Heine (théorème de –), 37
Henry (loi de –), 160
Hess (loi de –), 157
Hund (principe de –), 145
hystéresis, 130
- idéal, 4
identités thermodynamiques, 80
inégalité de la moyenne, 41
induction
 de Lorentz, 128
 de Neumann, 126
inertie (force d'–), 90
injective, 11
intégrale
 dépendant d'un paramètre, 43
 de Riemann, 42
 impropre, 43
intégration, 41–44
intérieur (d'une partie), 29
interférences, 109–116
interféromètre
 de Fabry-Perot, 115
 de Michelson, 112
intégration
 par parties, 41
isomorphisme, 15
- jauge de Lorentz, 124
- Kœnig (théorèmes de –), 92, 93, 103, 104
Kepler (lois de –), 100
Klechkowsky (règle de –), 145
- lames à retard, 135
Laplace (force de –), 122
Le Châtelier (loi de –), 159
Leibniz (formule de –), 39
lemme d'Abel, 51
lentille mince, 108
Lenz (loi de –), 126
limite, 36
lipschitzienne (application –), 37
loi
 d'Arrhénius, 149
 d'Ohm, 125
 de Biot et Savart, 121
 de composition, 2
 de Faraday, 126, 128
 de Fourier, 85
 de Hess, 157
 de Le Châtelier, 159
 de Lenz, 126
 de Planck, 86
 de Pouillet, 69
 de Raoult, 160
 de Snell–Descartes, 106, 140
 de Stefan, 87
 de Van't Hoff, 149
 des mailles, 69
 des noeuds, 69
longueur (d'un arc), 64
- machines
 thermiques, 83
magnétostatique, 121
Malus (théorème de –), 110
matériaux magnétiques, 129
matrice, 17–22
 exponentielle de –, 19
 inverse, 20
 opérations, 18
 produit, 18
- Maxwell
 équations de – dans le vide, 123

- équations de – dans les milieux, 139
- équation de – en ARQS, 129
- Minkowski (inégalité de –), 23
- miroirs
 - de Fresnel, 115
 - sphériques, 107
- modes propres, 131
- module (d'un nombre complexe), 32
- Moirve (formule de –), 33
- moment cinétique, 92
 - théorème du –, 92, 103
- multiplicité (des racines), 10

- Nernst (formule de –), 164
- Newton
 - binôme de –, 6
- nombre
 - d'oxydations, 163
 - entier, 5–7
 - premier, 7
 - quantique, 143
 - rationnel, 5–7
- norme
 - équivalente, 28
 - euclidienne, 22

- Ohm (loi d'–), 125
- onde
 - électromagnétique, 134–140
 - équation d'–, 132
 - lumineuse, 109
 - plane progressive, 133
 - stationnaire, 133
- orbitale
 - atomique, 144
 - moléculaire, 147
- orthogonalité, 23
- oscillateurs, 95
 - couplés, 131
- ouvert, 28
- oxydo-réduction, 163

- paramagnétisme, 129
- Parseval (égalité de –), 57

- Pauli (principe de –), 145
- pgcd dans \mathbb{Z} , 7
- pKa, 167
- Planck (loi de –), 86
- point
 - birégulier, 59
 - régulier, 59
- polarisation
 - d'un diélectrique, 138
 - de la lumière, 135
- polynôme, 8–11
 - caractéristique, 26
 - scindé, 10
- potentiel
 - électrique, 118
 - chimique, 154
 - redox, 164
- Pouillet (loi de –), 69
- Poynting (vecteur de –), 124
- Poyting (vecteur de –), 136
- ppcm dans \mathbb{Z} , 7
- premier principe (thermodynamique), 77
- primitives usuelles, 173
- principe fondamental de la dynamique, 91
- prisme, 107
- produit scalaire, 22
- projecteur, 16
- puissance
 - d'une force, 93, 104
 - rayonnée, 136
- puissance électromagnétique, 123
- Pythagore (théorème de –), 30

- référentiel
 - changement de –, 90
 - galiléen, 91
- réflexion d'une onde, 140
- résultante cinétique (théorème de la –), 103
- règle
 - de Klechkowsky, 145
- règle des $x^\alpha f(x)$, 42

- racine
 - d'un polynôme, 10
 - nièmes d'un complexe, 33
 - nièmes de l'unité, 33
- rang
 - d'une application linéaire, 15
 - formule du –, 15
- Raoult (loi de –), 160
- rayon de courbure, 64
- relation
 - binaire, 1
 - d'équivalence, 1
 - d'ordre, 1
 - de conjugaison, 108
 - de dispersion, 134
 - de structure, 134
- Riemann
 - intégrale de –, 42
 - série de –, 48
 - somme de –, 41
- Rolle (théorème de –), 39
- roulement sans glissement, 101, 105
- série, 47–51
 - alternée, 49
 - de Bertrand, 48
 - de Fourier, 57
 - de Riemann, 48
 - géométrique, 48
 - produit de Cauchy, 50
- série entière, 51–52
 - dérivation, 51
 - intégration, 51
 - rayon de convergence, 51
- Schwarz (théorème de –), 59
- Snell–Descartes (loi de –), 140
- solide (mécanique du –), 101
- somme de Riemann, 41
- somme directe, 12
- sous-anneau, 4
- sous-espace
 - supplémentaire, 13
- sous-espace propre, 26
- sous-groupe, 3
- spectroscopie, 141
- Stefan (loi de –), 87
- Stirling (formule de –), 50
- suite, 34–35
 - adjacente, 35
 - arithmétique, 34
 - extraite, 35
 - géométrique, 34
- supplémentaire (sous-espaces), 13
- surjective, 11
- susceptibilité
 - électrique, 139
 - magnétique, 129, 130
- symétrie, 16
 - d'une courbe paramétrée, 61
 - d'une courbe polaire, 63
- système linéaire, 21
 - de Cramer, 21
- tangente (à une courbe), 60
- Taylor-Lagrange
 - inégalité de –, 40
- Taylor-Young (formule de –), 40
- température d'inversion, 158
- Théorème
 - de Dirichlet, 57
 - de Scharz, 59
- théorème
 - d'équivalence., 42
 - de domination, 42
 - de Rolle, 39
 - des accroissements finis, 39
- topologie, 27
- torseur cinétique, 101
- valeur d'adhérence, 29
- valeur propre, 26
- Van der Waals (gaz de –), 77
- Van't Hoff (loi de –), 149
- variance, 159
- vecteur propre, 26
- vitesse
 - d'entraînement, 90
 - de groupe, 137
 - de phase, 137
 - de réaction, 148
 - quadratique moyenne, 76

voisinage, 29

Weierstrass

deuxième théorème de –, 54

premier théorème de –, 54

Young (trous d'–), 111

J'INTÈGRE

Lionel Porcheron

LE FORMULAIRE MPSI, MP

- **Toutes les formules et définitions** du programme de MPSI et MP en mathématiques, physique et chimie.
- Pour chaque formule : la **signification des termes**, les **unités**, les limites d'usage.
- De très nombreux **schémas**, des **exemples** et des **conseils**.
- Un **index** fourni pour trouver rapidement l'information recherchée.

L'outil indispensable pour réviser !

ISBN 210051941-7

ISBN 978-2-10-053787-7

www.dunod.com

J'intègre

4^e édition

LIONEL PORCHERON
Ingénieur de
l'ENSEEIH à Toulouse.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE



DUNOD