

**ENSA 2019****EPREUVE DE MATHÉMATIQUES****EXERCICE 1 : (/ 4 points)**

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$

Déterminez l'ensemble de définition de f .

Déterminez sa fonction dérivée.

2. A l'aide d'une intégration par parties, déterminez la valeur exacte du réel :

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^2 t \cdot \sin t}$$

EXERCICE 2 : (/ 6 points)

On considère dans le plan complexe les points A d'affixe 1; M d'affixe z et N d'affixe $iz - (1 + i)$. On note T_λ l'application qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' barycentre des points pondérés $\{(M; \lambda); (N; -\lambda); (A; 1)\}$ où λ est réel non nul.

1. Démontrer que, pour tout point M du plan, le point N est l'image de M par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

2.

a- Démontrer que l'affixe z' de M' est telle que :

$$z' = \lambda(1 - i)z + \lambda(1 + i) + 1$$

b- Démontrer que T est une similitude directe dont on précisera l'affixe du centre, le rapport et l'angle.

Pour quelles valeurs de λ , T_λ est-elle une rotation ?

Donner, dans chaque cas, son angle et l'affixe de son centre.

c- Exprimer les coordonnées $(x' ; y')$ de M' en fonction des coordonnées $(x ; y)$ de M .

3. Le nombre réel λ étant strictement positif, on lui associe le point P de coordonnées $(-\ln \lambda; \ln \lambda)$

Soit P' le point tel que : $P' = T_\lambda(P)$

a- Déterminer les coordonnées de P' en fonction de λ .

b- Démontrer que, lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+^*$, l'ensemble des points P' est la courbe (C) d'équation: $y = 2(x - 1)\ln(x - 1) + (x - 1)$

Problème : (/ 10 points)

Partie A : (/2 points)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par: $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ et $f(0) = 0$

1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 En donner une interprétation graphique.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2°) Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par: $\varphi(x) = \ln x + x + 1$.
Etudier les variations de φ . Etablir que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution β et une seule et que $0,27 \leq \beta \leq 0,28$ (on ne demande pas de construire la courbe de φ)

3°) Pour $x > 0$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$. En déduire le tableau de variations de f .

4°) Déterminer la limite en $+\infty$ de $[\ln x - f(x)]$. Qu'en déduire ?

5°) Construire les courbes représentatives C de f et Γ de $x \mapsto \ln x$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4 cm)

Partie B : (/3 points)

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = 1$. A cet effet, on introduit la fonction g définie par : $g(x) = e \cdot e^{\frac{1}{x}}$

1°) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α et une seule et que : $3,5 \leq \alpha \leq 3,7$.

Placer le point de C d'abscisse α .

2°) a) Prouver que l'équation $f(x) = 1$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

b) Étudier la monotonie de g .

c) Prouver que, pour tout élément x de $[3,5; 3,7]$, $g(x)$ appartient aussi à $[3,5; 3,7]$.

d) Établir que, pour tout élément x de $[3,5; 3,7]$, $|g'(x)| \leq |g'(3,5)| \leq \frac{1}{3}$.
En déduire que : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3} |x - \alpha|$.

3°) Soit (u_n) la suite d'éléments de $[3,5; 3,7]$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale : $u_0 = 3,5$.

a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{5} \times \frac{1}{3^n}$. En déduire la limite de (u_n) .

b) Préciser un entier n_0 tel que $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-3}$ et donner la valeur de u_{n_0} .

En déduire une valeur décimale approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C (/5 points)

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Montrer que, pour tout n , cette équation admet une solution α_n et une seule.

(en particulier $\alpha_1 = \alpha$).

2°) Comparaison de α_n à e^n

a) Établir que $f(e^n) \leq n$. En déduire que : $\alpha_n \geq e^n$.

b) Prouver que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut s'écrire sous la forme: $\ln \left(\frac{\alpha_n}{e^n} \right) = \frac{n}{\alpha_n} (1)$.

c) En déduire, à l'aide de 1°, la limite de $\frac{\alpha_n}{e^n}$ lorsque n tend vers l'infini.

3°) Comparaison de α_n à $e^n + n$

On écrit α_n sous la forme : $\alpha_n = e^n(1 + \varepsilon_n)$, où $\varepsilon_n \geq 0$ (2).

1°) A l'aide de (1), exprimer $(1 + \varepsilon_n)\ln(1 + \varepsilon_n)$ en fonction de n .

2°) Établir que pour $t \geq 0$: $0 \leq (1 + t)\ln(1 + t) - t \leq \frac{t^2}{2}$.

3°) Déduire de 1° et 2° que pour tout $n \geq 1$: $\varepsilon_n \leq ne^{-n} \leq \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2}$, puis que

$$0 \leq ne^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2} e^{-2n} (3).$$

4°) A l'aide de (2) et (3), déterminer la limite de $e^n + n - \alpha_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.



THIAM SCIENCES



Préparation

AU CONCOURS ENSA

MATIÈRE:

- MATHS

DATE:

- Le 12 AVRIL 2024

INSCRIPTION:

2.500 FCFA



+221 77-850-82-72

