Optimisation sous contraintes

Méthode de Lagrange

Rappels de cours

Si on considère un programme d'optimisation convexe noté

$$(P)=\begin{cases}\min f(x)\\ s.c. \quad g(x)=c\\ x\in R^n\end{cases}$$

On suppose que les fonctions f et g sont continûment différentiables.

Le lagrangien associé à ce programme est la fonction :

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y) \qquad \lambda\in R$$

λ est appelé le multiplicateur de Lagrange.

Le théorème suivant nous indique comment faire :

Théorème 1 : (Conditions du 1er ordre):

Si les fonctions f et g sont continûment dérivables, alors pour tout extrémum (x_0,y_0) de la fonction f sous contrainte $g(x,y)=c$ qui n'est pas un point critique de la fonction g ,

Il existe $\lambda_0\in R$ tel que :
$$(1)\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}(x_0,y_0,\lambda_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-\lambda_0\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial L}{\partial y}(x_0,y_0,\lambda_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)-\lambda_0\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\\ g(x_0,y_0)=c\end{cases}$$

Le théorème nous dit que si un point (x_0,y_0) est extremum de f sous contrainte $g(x,y)=c$ alors il est solution du système (1).

Mais un qui solution du système (1) n'est pas un extremum de f .

Pour réussir à distinguer ce genre de cas, on a besoin de vérifier une condition qui ressemble au discriminant $\Delta = B^2 - AC$ vu pour l'optimisation sans contraintes des fonctions à deux variables; car l'introduction de la variable λ peut sembler artificielle, mais elle joue en fait un rôle dans la détermination de la nature des points critiques.

$$D(x,y,\lambda) == \frac{\vartheta^2 L}{\vartheta x^2}(x,y,\lambda)\left(\frac{\vartheta g}{\vartheta y}(x,y)\right)^2 + \frac{\vartheta^2 L}{\vartheta y^2}(x,y,\lambda)\left(\frac{\vartheta g}{\vartheta x}(x,y)\right)^2$$
$$-2\frac{\vartheta^2 L}{\vartheta x \vartheta y}(x,y,\lambda)\frac{\vartheta g}{\vartheta x}(x,y)\frac{\vartheta g}{\vartheta y}(x,y)$$

Ceci nous conduit au $2^{\text{èmè}}$ théorème qui va nous donner la nature du point critique.

Théorème 2 : (Conditions du 2^{er} ordre):

Si (x_0, y_0, λ_0) ***est une solution du système (1), alors :***

- $D(x_0, y_0, \lambda_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ est un maximum de f sous la contrainte g .
- $D(x_0, y_0, \lambda_0) > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ est un minimum de f sous la contrainte g .
- $D(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$ on ne peut pas conclure sur la nature du point (x_0, y_0).

Remarques :

1. Le théorème 1 nous donne les points critiques ; alors que le théorème 2 nous donne la nature de chaque point critique.
2. La fonction $D(x,y,\lambda)$ ressemble au $\Delta = B^2 - AC$ sauf que le premier concerne les fonctions à trois variables alors que le deuxième est à utiliser pour les fonctions à deux variables.

<u>**Exemple N° 1**</u>

On considère le problème d'optimisation :

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \ -4x_1x_2 \\ g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 8 \\ (x_1, x_2) \in R^2 \end{cases}$$

Quels sont les extrémums de cette fonction ?

Corrigé :

f et g sont deux fonctions à deux variables. La fonction objectif et la contrainte d'égalité sont des polynômes donc admettent des dérivées continues de tout ordre. On utilise la méthode du Lagrangien.

1°/ formons le Lagrangien :

$$L(x_1,x_2,\lambda)= f(x_1,x_2)- \lambda g(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2 -4x_1x_2-\lambda(x_1^2+x_2^2-8)$$

2°/ Déterminons les points critique. On doit résoudre le système :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_1-4x_2-2\lambda x_1=0 & (1)\\ 2x_2-4x_1-2\lambda x_2=0 & (2)\\ x_1^2+x_2^2=8 & (3)\end{cases}$$

Discussion :

a) Si $x_1=0$ $alors\ d'après$ $(1)\Rightarrow x_2=0$ or $d'après$ (3) $x_1 et$ x_2 ne peuvent pas être nuls tous les deux. Donc sont nécessairement non nuls. On peut donc tirer λ.

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{x_1-2x_2}{x_1}\\ \lambda=\dfrac{x_2-2x_1}{x_2}\\ x_1^2+x_2^2=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=\dfrac{x_1-2x_2}{x_1}\\ \dfrac{x_1-2x_2}{x_1}=\dfrac{x_2-2x_1}{x_2}\\ x_1^2+x_2^2=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=\dfrac{x_1-2x_2}{x_1}\\ x_1x_2-2x_2^2=x_1x_2-2x_1^2\\ x_1^2+x_2^2=8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=\dfrac{x_1-2x_2}{x_1}\\ x_2^2=x_1^2\\ x_1^2+x_2^2=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=\pm 2\\ y=\pm 2\\ \lambda=\dfrac{x_1-2x_2}{x_1}\end{cases}$$

Les points critiques sont
$P_1=(-2,-2,-1)$. $P_2=(2,-2,3)$; $P_3=(-2,2,3)$; $P_4=(2,2,-1)$

b) Calculons les valeurs de la fonction D aux différentes solutions de notre système :

$$D(x,y,\lambda)=\frac{\vartheta^2 L}{\vartheta x^2}(x,y,\lambda)\left(\frac{\vartheta g}{\vartheta y}(x,y)\right)^2+\frac{\vartheta^2 L}{\vartheta y^2}(x,y,\lambda)\left(\frac{\vartheta g}{\vartheta x}(x,y)\right)^2$$

$$-2\frac{\vartheta^2 L}{\vartheta x \vartheta y}(x,y,\lambda)\frac{\vartheta g}{\vartheta x}(x,y)\frac{\vartheta g}{\vartheta y}(x,y)$$

$$=(2-2\lambda)(2y)^2+(2-2\lambda)(2x)^2-2(-4)(2x)(2y)$$

Nature des points critiques :

$P_1=(-2,-2,-1)$: D = $(2-2\lambda)(2y)^2+(2-2\lambda)(2x)^2-2(-4)(2x)(2y)$= 256 >0

$\Rightarrow$ P_1 est un minimum local de f sous la contraint g .

$P_2=(2,-2,3)$: D = - 256 $<0 \Rightarrow$ P_2 est un maximum local de f sous la contraint g .

$P_3=(-2,2,3)$: D = - 256 $<0 \Rightarrow$ P_3 est un maximum local de f sous la contraint g .

$P_4=(2,2,-1)$: D= 256 $>0 \Rightarrow$ P_4 est un minimum local de f sous la contraint g .

Donc notre fonction f admet deux minima locaux : P_1 et P_4 sous la contrainte g

Si on avait à maximiser notre f sous la même contrainte, on aurait deux points maxima : P_2 *et* P_{34}

<u>Vérification :</u>

Calculons la valeur de $f(x,y)$ en chacun des points critiques :

P_1 :	$f(-2,-2)=-8$	P_2 :	$f(2,-2)=24$
P_3 :	$f(-2,2)=24$	P_4 :	$f(2,2)=-8$

Calculons la valeur de $L(x,y,\lambda)$ en chacun des points critiques :

P_1 :	$L(-2,-2,-1)=-8$	P_2 :	$L(-2,-2,3)=24$
P_3 :	$L(-2,2,3)=24$	P_4 :	$L(2,2,-1)=-8$

Les fonctions $f(x,y)$ et $L(x,y,\lambda)$ ont bien leur optimum aux même points.