

Sous-groupe additif de $\mathbb{R}$: Topologie de $\mathbb{R}$

Exercice 4. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

Démontrer G est soit dense dans $\mathbb{R}$ soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \geq 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

Solution. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

Si G est le groupe trivial alors il n'y a rien à démontrer. On suppose $G \neq \{0\}$.

Considérons l'ensemble $G_+ = G \cap \mathbb{R}_+ = \{x \geq 0, x \in G\}$. Il est clair que $G \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$ et $G \cap \mathbb{R}_+$ est une partie de $\mathbb{R}$ minorée. Soit alors $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+ \geq 0$. Ainsi, on a deux cas :

- Cas $a = 0$. Montrons que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g_\varepsilon \in G$ tel que $0 < g_\varepsilon < \varepsilon$. Notons $n = E\left(\frac{x}{g_\varepsilon}\right)$. On a $0 \leq x - ng_\varepsilon < g_\varepsilon$. Or, G est un groupe donc ng_ε est un élément de G d'où, on a montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y = ng_\varepsilon \in G$ tel que $|x - y| < \varepsilon$.

$$n \leq \frac{x}{g_\varepsilon} < n + 1$$

par suite, $ng_\varepsilon \leq x < g_\varepsilon n + g_\varepsilon$ c'est-à-dire $0 \leq x - g_\varepsilon n < \varepsilon$. Or, G est un groupe donc $g_\varepsilon n$ est un élément de G d'où, on a montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y = ng_\varepsilon \in G$ tel que $|x - y| < \varepsilon$.

Conclusion : G est dense dans $\mathbb{R}$.

- Cas $a > 0$. Montrons que G est de la forme $a\mathbb{Z}$.

Montrons d'abord que $a \in G$.

Par définition de a , il existe une suite $(g_n)_n$ d'éléments de G converge vers a . Cette suite est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, dès que $p \geq N$, $n \geq N$ on a $0 \leq |g_n - g_p| < a$ mais puisque $|g_n - g_p| \in G$ on a alors $g_n = g_p$ ce qui nous permet d'affirmer qu'il existe $g_N \in G$ tel que $a = g_N$ et de ce fait $a \in G$.

Montrons que G est de la forme $a\mathbb{Z}$.

$a \in G$ et $(G, +)$ est un groupe implique que $a\mathbb{Z} \subset G$.

Soit $g \in G$. En posant $n = E\left(\frac{g}{a}\right)$. On a :

$$na \leq g < na + a$$

$0 \leq g - na < a$. Or, G est un groupe donc na est un élément de G ainsi, on en déduit que $g - na = 0$ et donc $g = na \in a\mathbb{Z}$.

Conclusion : G est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$

Matrice diagonalisable

Exercice 5. Soit A une matrice de taille $n \geq 1$ à coefficients réels telle que $A^3 = A^t A$.

Démontrer que A est $\mathbb{C}$ -diagonalisable.

Solution. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n > 0$) telle que $A^3 = A^t A$.

Par les propriétés de la trace on en déduit que ${}^t(A^3) = {}^t(A^t A) = A^t A = A^3$ par suite, A^3 est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans une base orthonormale ce qui est équivalent à dire, qu'il existe P polynôme à coefficients réels scindés à racines simples telle que $P(A^3) = 0$. On pose alors :

$$P = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A^3)} (X - \lambda) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$



avec pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le polynôme $z^3 - a$ est scindé et racines simples dans $\mathbb{C}$ et on a :

$$z^3 - a = 0 \iff (z - \sqrt[3]{a})(z - \sqrt[3]{a}j)(z - \sqrt[3]{a}j^2) = 0$$

où $j = \exp(\frac{2\pi}{3}i)$. Ainsi, le polynôme $Q = \prod_{k=1}^n (X^3 - \lambda_k) = \prod_{k=1}^n (X - \sqrt[3]{\lambda_k})(X - \sqrt[3]{\lambda_k}j)(X - \sqrt[3]{\lambda_k}j^2)$ est scindé dans $\mathbb{C}$ et à racines simples. De plus, $Q(A) = 0$. De ce fait, on a montré qu'il existe un polynôme scindé à racines simples annulateur de A et à coefficients dans $\mathbb{C}$ du coup A est $\mathbb{C}$ -diagonalisable.

Caractérisation des sous-groupe d'un groupe cyclique fini

Exercice 6. Soit $G = \langle x \rangle$ un sous-groupe cyclique d'ordre n et d un diviseur de n . Démontrer qu'il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d .

Solution. Soit H un sous-groupe de G .

- **Première étape : H est cyclique.**

Si $H = \{e\}$ alors H est cyclique.

On suppose que H n'est pas le groupe trivial. Soit $\mathcal{N} = \{k \in \mathbb{N}^*, x^k \in H\}$.

Puisque H est un sous-groupe de G , on en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^k \in H$ ainsi, $\mathcal{N}$ est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide donc elle admet un plus petit élément $n_0 = \min \mathcal{N}$. De toute évidence, on a $\langle x^{n_0} \rangle \subset H$. Soit $h \in H$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $h = x^k$. En effectuant la division euclidienne de k par n_0 , il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que $k = n_0 q + r$ avec $0 \leq r < n_0$ mais on a $x^r = x^k \times x^{-n_0 q} \in H$ d'où $x^r \in H$ et $0 \leq r < n_0$ par suite $r = 0$ c'est-à-dire $x^k = x^{n_0 q} \in \langle x^{n_0} \rangle$. On vient de montrer que $H = \langle x^{n_0} \rangle$ ce qui permet de conclure que H est cyclique.

- **Deuxième étape : G admet un unique sous-groupe d'ordre d .**

Lemme. Soit G un groupe fini et $x \in G$ d'ordre n . On a $n = \text{card}(\langle x \rangle)$.

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \langle x \rangle$, $k \mapsto x^k$.

φ est un morphisme de groupe surjectif par construction. On a $\langle x \rangle = \varphi(\mathbb{Z}) = \{x^k, k \in \mathbb{Z}\}$. Soit $h \in \langle x \rangle$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $h = x^k$. En effectuant la division euclidienne de k par n il existe, un unique couple d'entiers (q, r) tel que $k = nq + r$ avec $0 \leq r < n$ donc $x^r = x^k \in H$ par suite, $\langle x \rangle = \varphi(\mathbb{Z}) = \{x^k, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$.

Supposons qu'il existe $k, k' \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $x^k = x^{k'}$. On a

$$x^{k-k'} = e \text{ avec } 0 \leq |k - k'| < n$$

ainsi, on en déduit que $k = k'$ par suite, $\text{card}(\langle x \rangle) = \text{card}(\{x^k, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}) = n$

□

Soit $H = \langle x^{\frac{n}{d}} \rangle$. Il est clair que H est un groupe de G d'ordre d .

Montrons que c'est le seul.

Supposons qu'il existe $H' = \langle x^k \rangle$ un sous-groupe de G d'ordre d . On a $dk \in n\mathbb{Z}$ par suite on a $k \in \frac{n}{d}\mathbb{Z}$ c'est-à-dire $H' \subset H$. Or, de plus, $\text{card}(H) = \text{card}(H') = d$ de ce fait, $H = H'$.

Matrice triangulaire supérieure nilpotente

Exercice 7. Soit $n > 0$ et $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure ayant uniquement des zéros sur la diagonale. Montrer que $A^n = 0$.

Solution. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f l'application linéaire associée à A dans la base B . On a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



d'où

$$f(e_1) = 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, f(e_k) \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$$

par suite, $f^2(e_2) = 0, \forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket, f^2(e_k) \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{k-2})$. Par récurrence on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f^p(e_k) = 0, \forall k \in \llbracket p+1, n \rrbracket, f^p(e_k) \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{k-p})$$

ainsi, on en déduit $f^n(e_k) = 0 \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ c'est-à-dire $A^n = 0$.

Décomposition canonique d'un homomorphisme de groupe

Exercice 8.

Soit f de G dans G' homomorphisme de groupe et π de G dans $G/\ker(f)$ la projection canonique. Démontrer qu'il existe un unique homomorphisme f^* de $G/\ker(f)$ dans G' tel que :

$$f = f^* \circ \pi$$

Solution. Soit $f : G \longrightarrow G'$ morphisme de groupe.

Lemme. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G .

H est distingué dans G si et seulement si, il existe une unique structure de groupe sur G/H telle que l'application $\pi : G \longrightarrow G/\ker(f), x \in G \mapsto \pi(x) = \bar{x}$ soit un morphisme de groupe.

Démonstration. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G .

- **Condition nécessaire.**

Pour tout $g, g' \in G$ on a nécessairement $\bar{g}\bar{g}' = \pi(g)\pi(g') = \overline{gg'}$ car π est morphisme de groupe.

Il s'agit de montrer sous cette condition que H est distingué dans G .

Soit $(g, h) \in G \times H$. On a $\pi(ghg^{-1}) = \pi(g)\pi(h)\pi(g^{-1}) = \pi(g)\pi(g^{-1}) = \pi(1) = H$. Ainsi, on en déduit que pour tout $(g, h) \in G \times H, ghg^{-1} \in H$ c'est-à-dire que H est distingué dans G .

- **Condition suffisante.**

On a vu que si l'application $\pi : G \longrightarrow G/\ker(f), x \in G \mapsto \pi(x) = \bar{x}$ est un morphisme de G alors il existe une seule loi possible sur $G/\ker(f)$ définie par pour tout $g, g' \in G, \bar{g}\bar{g}' = \overline{gg'}$.

- Première étape on montre que cette loi est bien définie.

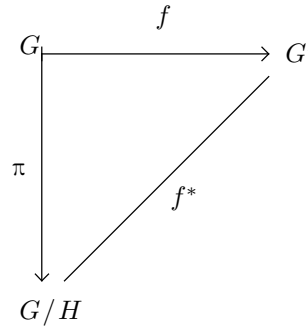
Soit $g_1\mathcal{R}g'_1$ et $g_2\mathcal{R}g'_2$. Comme que H est distingué dans G il s'ensuit, que la loi de G est compatible avec $\mathcal{R}$ donc $g_1g_2\mathcal{R}g'_1g'_2$ c'est-à-dire que $\overline{g_1g_2} = \overline{g'_1g'_2}$. Ainsi, on a montré que la loi ne dépend pas des représentants mais uniquement de la classe.

- Deuxième étape : on montre que G/H muni de cette loi est un groupe.

On vérifie facilement que cette loi est associative, d'élément neutre la classe de 1 c'est-à-dire H , chaque classe $\bar{g}$ admet un inverse dans G/H défini par $\bar{g}^{-1}$.

Conclusion : il existe un unique morphisme définie par $\pi : G \longrightarrow G/H, x \in G \mapsto \pi(x) = \bar{x}$. $\square$

D'après le lemme précédent, $\ker(f)$ est un sous-groupe de G distingué par suite, peut munir l'ensemble $G/\ker(f)$ d'une unique structure de groupe en posant pour tout $g, g' \in G, \bar{g}\bar{g}' = \overline{gg'}$. L'élément neutre du groupe $G/\ker(f)$ est $\ker(f)$ c'est-à-dire la classe de $\bar{e}$ où e désigne l'élément neutre de G . En posant pour tout $g \in G, f^*(g) = f^* \circ \pi(g) = f(g)$ on en déduit que f^* est unique et de plus, pour tout $g, g' \in G$. On a $f^*(\bar{g}\bar{g}') = f(gg') = f(g)f(g') = f^*(\bar{g})f^*(\bar{g}')$ et $f^*(\bar{e}) = f(e) = e$. Ainsi, f^* est un homomorphisme de groupe.



Décomposition canonique d'un homomorphisme de groupe .

Série numérique définie par une intégrale-intégrale de Wallis

Exercice 9.On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$$

Montrer que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Solution. On a $u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$.

- Montrons d'abord que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

On a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)(\sin(x) - 1) dx \leq 0$$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$ ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minoré par 0 donc elle converge.

Pour tout un entier naturel n on a :

- Montrons que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Pour tout un entier naturel $n \geq 2$ on a :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(x)) \sin^{n-2}(x) dx = u_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin^{n-2}(x) dx$$

et à l'aide d'une intégration par parties on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin^{n-2}(x) dx = \left[\frac{\sin^{n-1}(x)}{n-1} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) dx$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin^{n-1}(x) dx = -\frac{1}{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = -\frac{u_n}{n-1}$$

par suite, $u_n = u_{n-2} - \frac{u_n}{n-1}$ ce qui permet d'établir la relation de récurrence suivante

$$u_n = \frac{n-1}{n} u_{n-2}$$

On a également pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} = \frac{2n-1}{2n} u_{2(n-1)}$ et par récurrence on a :

$$u_{2n} = \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 3 \times 1}{2n \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2} u_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

et

$$u_{2n+1} = \frac{2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 3} u_1 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ étant décroissante et positive on a :

$$1 \leq \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} \leq \frac{u_{2n-1}}{u_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

donc la suite $\left(\frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}\right)_n$ converge vers 1. De plus, on a :

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{2n+1} \left[\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right]^2 = \frac{2}{\pi} \times \frac{n}{2n+1} v_n$$

où $v_n = \frac{1}{n} \left[\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right]^2$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2n+1}{2n} \times \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \right] = \pi$.

Les suites de termes généraux $(2n+1)u_{2n+1}^2$ et $2nu_{2n}^2$ convergent vers la même limite $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, on en déduit la convergence de la suite $(nu_n^2)_{n \geq 0}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$ en conséquence, on a

$$u_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$$



Série numérique définie par une intégrale

Exercice 10. Soit n un entier naturel non nul.

Etudier la convergence des séries de termes généraux u_n et v_n définie par :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n(x)}{n} dx \quad \text{et} \quad v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Solution. Soit n un entier naturel non nul.

- $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n(x)}{n} dx$
On remarque d'abord que $\sum u_n$ est une série à terme positif et $\forall n \geq 1, u_n \leq v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.
On reconnaît l'intégrale de Wallis donc on en déduit :

$$v_n \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

par suite, on a :

$$u_n \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{est une série qui converge.}$$

Ainsi, la série $\sum u_n$ converge.

- $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$
Par une intégration par parties on en déduit l'égalité :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

En posant $w_n = \frac{(-1)^n}{n\pi}$, $t_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)\pi}$ et $h_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$, il est facile de voir que les séries de termes généraux w_n et t_n sont des séries alternées qui convergent.

- Convergence de la série de terme général h_n
Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$|h_n| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\pi n^2}$$

donc la série $\sum h_n$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}$ par conséquent convergente.

Finalement, on vient de montrer que la série $\sum v_n$ converge car somme de trois séries convergentes.

Lien entre ordre et exposant d'un groupe commutatif

Exercice 11. Soit G un groupe commutatif fini d'ordre $n \geq 2$.
Montrer que n et $m = \max_{g \in G} \{o(g)\}$ ont les mêmes facteurs premiers.

Solution. Soit G un groupe commutatif fini d'ordre $n \geq 2$ et posons $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

Puis que $m = \max_{g \in G} \{o(g)\}$ alors il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $m = o(g_i)$ ainsi, m divise n et par conséquent l'ensemble des diviseurs premiers est contenu dans celui de n .

Posons $H = \prod_{k=1}^n \langle g_k \rangle$ et soit φ l'application $H = \prod_{k=1}^n \langle g_k \rangle$ dans G définie pour $h = (h_k)_{1 \leq k \leq n} \in H$ par

$$\varphi(h) = \prod_{k=1}^n h_k.$$



- D'une part, φ est un morphisme de groupe surjectif;
- d'autre part, φ induit un isomorphisme $\bar{\varphi}$ de $H/\ker(\varphi)$ dans G .

Puisque G est fini, on a

$$\text{card}(H) = \text{card}(\ker(\varphi)) \times \text{card}(G)$$

du coup, $n = \text{card}(G)$ divise $\text{card}(H) = \prod_{k=1}^n o(g_k)$. Mais m est multiple de chaque ordre $o(g_k)$, par suite m^n est un multiple de $\text{card}(H)$ donc par conséquent n divise m^n ainsi, l'ensemble des diviseurs premiers de n est contenu dans celui de m . D'où le résultat attendu.

Groupe dérivée d'un groupe

Exercice 12. Soit G un groupe.
Montrer que le groupe dérivée $D(G)$ est le plus petit sous-groupe de G distingué tel que le groupe quotient $\frac{D}{H}$ soit commutatif.

Solution. On sait que $D(G)$ est engendré par des éléments de la forme $[ab] = aba^{-1}b^{-1}$ avec $a, b \in G$

- Montrons que $D(G)$ est distingué.
Soit $c \in G$. On a

$$c[ab]c^{-1} = c(aba^{-1}b^{-1})c^{-1} = (cac^{-1})(cbc^{-1})(ca^{-1}c^{-1})(cb^{-1}c^{-1}) = [cac^{-1}cbc^{-1}] \in D(G).$$

Ce qui prouve le résultat.

- Montrons que $\frac{G}{D(G)}$ est commutatif.
Soit $a, b \in G$. On a

$$\bar{a}\bar{b} = \overline{ab} = abD(G) = ba(a^{-1}b^{-1}ab)D(G) = ba[a^{-1}b^{-1}]D(G) = baD(G) = \bar{b}\bar{a}$$

Ce qui prouve que $\frac{G}{D(G)}$ est commutatif.

- Soit H un sous-groupe de G distingué tel que le groupe quotient $\frac{D}{H}$ soit commutatif.
Soit $a, b \in G$. On a

$$\overline{[ab]} = [\bar{a}\bar{b}] = \bar{1} = H$$

donc H contient tous les commutateurs $[ab]$ par conséquent contient $D(G)$. $\square$