ESATIC
ECOLE SUPÉRIEURE AFRICAINE DES TIC

CONCOURS D'ENTREE EN MASTER

Session : 2017

EPREUVE : MATHEMATIQUES
Durée : 2h00

EXERCICE 1 (08 points)

Pour chaque question de cet exercice, une seule des réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Toute note négative est ramenée à zéro.

On considère la fonction 2π périodique f définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi;\pi]$.

1) f est :
   A : impaire ; B : paire ; C : ni paire, ni impaire

2) Soit $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$. On a :
   A : $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$; B : $a_0 = \frac{\pi^2}{2}$; C : $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$; D : $a_0 = 0$

3) Soit $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$ pour $n \geq 1$:
   A : $a_n = 0$; B : $a_n = 4\frac{(-1)^n}{n^2}$; C : $a_n = \frac{4}{n^2}$; D : $a_n = 3\frac{(-1)^n}{n^2}$

4) Soit $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$ pour $n \geq 1$:
   A : $b_n = 0$; B : $b_n = 4\frac{(-1)^n}{n^2}$; C : $b_n = \frac{4}{n^2}$; D : $b_n = 3\frac{(-1)^n}{n^2}$

5) La série de Fourier de f est :
   A : $\frac{\pi^2}{6} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$; B : $\frac{\pi^2}{6} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin nx$;
   C : $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$; D : $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin nx$

6) La valeur de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est :
   A : $\frac{\pi^2}{6}$; B : $\frac{\pi^2}{12}$; C : $\frac{\pi^2}{3}$; D : $\frac{\pi^2}{4}$

7) La valeur de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ est :
   A : $\frac{\pi^2}{6}$; B : $\frac{\pi^2}{12}$; C : $\frac{\pi^2}{5}$; D : $\frac{\pi^2}{4}$

8) La valeur de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$ est :
   A : $\frac{\pi^4}{6}$; B : $\frac{\pi^4}{12}$; C : $\frac{\pi^4}{3}$; D : $\frac{\pi^4}{90}$

EXERCICE 2 (04 points)

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}$$

EXERCICE 3 (08 points)

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$q(x, y, z) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz$ où a est un nombre réel.

La matrice A de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & -a \\ 0 & -a & 1+a+a^2 \end{pmatrix}$

1) Calculer le déterminant de A.
2) Pour quelles valeurs de a la forme q est-elle dégénérée ?
3) Réduire q et donner son rang et sa signature en fonction de a.
4) Déterminer une base orthogonale pour q.
5) En déduire une matrice inversible P telle que ${}^tPAP$ soit une matrice diagonale.