

CHAPITRE 1

Théorie des Groupes

I) Structures de Groupes

1.1 Définitions

On appelle groupe tout couple $(G; *)$ composé d'un ensemble G et d'une *loi de composition interne* $*$ (stabilité) satisfaisant aux propriétés suivantes :

P_1 : $*$ est *associative* :

$$\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z).$$

P_2 : Il existe un *élément neutre* e pour $*$ (dans G) :

$$\exists e \in G / \forall x \in G, \text{ on a : } x * e = x = e * x$$

P_3 : Tout élément de G est *symétrisable* par $*$:

$$\forall x \in G, \exists x' \in G / x * x' = e = x' * x$$

où e est l'élément neutre de $*$ dans G .
 x' est alors appelé le *symétrique* de x dans G .

On appelle *groupe abélien* ou *groupe commutatif* tout groupe dont la loi est commutative c'est à dire

$$\forall x, y \in G, x * y = y * x.$$

on appelle *groupe fini* tout groupe dont l'ensemble est fini.

Le cardinal de l'ensemble est alors appelé *l'ordre du groupe*.

La loi sera *notée multiplicativement*: on écrira xy au lieu de $x * y$,

l'élément neutre de G sera *noté* 1_G et le symétrique de x sera *noté* x^{-1} .

Mais lorsque le groupe est commutatif la loi peut être notée *additivement* et dans ce cas l'élément neutre de G sera noté 0 et le symétrique de x sera noté $-x$.

Le groupe $(G; *)$	l'élément neutre e	x' : l'élément symétrique de x	$x * y$	$x * y'$ où y' est le symétrique de y
$(G; \cdot)$	1_G	inverse de x noté : x^{-1}	$x \cdot y$ ou $x y$	$x \cdot y^{-1}$ ou $x y^{-1}$
$(G; +)$	0	opposé de x noté : $-x$	$x + y$	$x - y$

RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE

UNION – DISCIPLINE – TRAVAIL

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Nangui Abrogoua

UFR SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES

L2

Algèbre 3 : Groupes, déterminants

Tome 1

Cours et épreuves corrigées

Année 2015 – 2016

Prof. DIAGANA Youssouf

Remarques: Si G est un groupe, alors

i) l'elt neutre de G est unique.

ii) pour tout $x \in G$, le symétrique de x est unique.

Preuve :

i) Supposons que e et e' sont des éléments neutres du groupe G .

Alors comme e est élément neutre de G , $ee' = e'$ et comme e' est élément neutre de G , $ee' = e$ donc $e' = e$.

ii) soit $x \in G$, supposons que x' et x'' sont des éléments symétriques de x .

Alors comme x' est élément symétrique de x , $x'x'' = 1_G x'' = x''$ et comme x'' est élément symétrique de x , $x'x'' = x'1_G = x'$ donc $x' = x''$.

1.2 Exemples

1) $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$; $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes abéliens d'élément neutre 0.

$(\mathbb{Q}^*, \times)$; $(\mathbb{R}^*, \times)$; $(\mathbb{R}_+^*, \times)$; $(\mathbb{C}^*, \times)$; $(\{-1, 1\}, \times)$ sont des groupes abéliens d'élément neutre 1.

2) L'ensemble des translations du plan muni de la composition des applications, notée $\circ$, est un groupe abélien, l'elt neutre est $id_P = t_{\vec{0}}$.

L'ensemble des rotations de centre O muni de la composition des applications est un groupe abélien

l'elt neutre est $id_P = r(O; 0)$ rotation de centre O et d'angle nul.

3) $(\mathbb{N}, +)$; $(\mathbb{Z}^*, \times)$, $(\mathbb{Z}, \times)$, $(\mathbb{R}_-^*, \times)$ et $(\mathbb{R}, \times)$ ne sont pas des groupes.

Dans $(\mathbb{N}, +)$, 0 est l'élément neutre et le seul élément symétrisable;

Dans $(\mathbb{Z}^*, \times)$ et $(\mathbb{Z}, \times)$, 1 et -1 sont les seuls éléments symétrisables

$(\mathbb{R}_-^*, \times)$ n'est pas stable: $-1 \in \mathbb{R}_-^*$ mais $(-1) \times (-1) \notin \mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ n'a pas d'élément neutre.

Dans $(\mathbb{R}, \times)$ 1 est l'élément neutre mais 0 n'est pas symétrisable.

4) Soit G l'ensemble des matrices carrées de déterminants non nuls de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de la multiplication.

* la multiplication est interne dans G : si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in G$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \in G$ car le déterminant étant le produit de déterminants non nuls il est non nul.

* la multiplication matricielle est associative

* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ est l'élément neutre

* Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, M a pour déterminant $ad - bc \neq 0$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \left[\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{ad - bc}{ad - bc} & 0 \\ 0 & \frac{ad - bc}{ad - bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ et

$$\left[\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

donc M est symétrisable.

Conclusion : G est donc *un groupe*.

Mais G n'est pas abélien.

En effet, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont des éléments de G . Mais

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq AB$$

5) Groupe produit :

Soient $(E_1; *_1)$ et $(E_2; *_2)$ deux groupes d'éléments neutres respectifs e_1 et e_2 .

Dans $E_1 \times E_2 = \{(x_1; x_2) : x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$ définissons la loi $*$ par :

$$(x_1; x_2) * (y_1; y_2) = (x_1 *_1 y_1; x_2 *_2 y_2).$$

$E_1 \times E_2$ admet pour élément neutre $(e_1; e_2)$ et le symétrique de $(x_1; x_2)$ par la loi $*$ est : $(x_1^{-1}; x_2^{-1})$ où x_i^{-1} est le symétrique de x_i par la loi $*_i$.

$$(x_1; x_2) * (e_1; e_2) = (x_1 *_1 e_1; x_2 *_2 e_2) = (x_1; x_2) \text{ et } (e_1; e_2) * (x_1; x_2) = (e_1 *_1 x_1; e_2 *_2 x_2) = (x_1; x_2)$$

$(E_1 \times E_2; *)$ est un groupe appelé *groupe produit* (de $(E_1; *_1)$ par $(E_2; *_2)$).

Exemple

Comme $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe (abélien), $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ est le groupe produit (qui est abélien) muni de la composition définie par :

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2). \end{aligned}$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}^2$.

6) Si $(F; *)$ est un groupe alors $(F^E; *)$ est un groupe où F^E est l'ensemble des applications de E dans F avec

$$f * g : E \longrightarrow F : x \mapsto f(x) * g(x) \quad \forall f, g \in F^E.$$

Recherche de l'élément neutre g :

$$f * g = f \text{ ssi } (f * g)(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

$$\text{ssi } f(x) * g(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

il suffit que $g(x) = 1_F \quad \forall x \in E$ c-a-d $g = \varphi : E \longrightarrow F : x \mapsto 1_F$

$$\forall f \in F^E$$

$$\varphi * f : x \mapsto \varphi(x) * f(x) = 1_F * f(x) = f(x)$$

donc $\varphi * f = f$.

En exercice : Montrer que la loi $*$ est associative dans F^E et que tout élément est symétrisable dans $(F^E, *)$.

1.3 Règles de calcul dans un groupe :

$(G, *)$ un groupe	Notation $*$	Notation additive	Notation multiplicative
$\forall a, b \in G$	$a * b \in G$	$a + b \in G$	$a \cdot b \in G$
elt neutre : $\exists e \in G$	$\forall x \in G$ $x * e = e * x = x$	$\forall x \in G$ $x + 0 = 0 + x = x$	$\forall x \in G$ $x \cdot 1_G = 1_G \cdot x = x$
elt sym de x $\forall x \in G$	$\exists x' \in G :$ $x * x' = x' * x = e$	$opp(x) = -x$ $x + (-x) = -x + x = 0$	$\exists x^{-1} \in G :$ $x x^{-1} = x^{-1} x = 1_G$
$*$ est associative: $\forall x, y, z \in G,$	$(x*y)*z = x*(y*z)$	$(x+y)+z = x+(y+z)$	$(xy)z = x(yz)$
sym de $a * b$	$(a*b)' = b' * a'$	$opp(a+b) = -b + (-a)$	$(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$
$\forall a \in G :$ $\forall n \in \mathbb{Z},$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } n > 0, \\ *^n a = \underbrace{a * \dots * a}_{n \text{ termes}} \\ *^0 a = e \\ \text{si } n < 0, \\ *^{-n} a = (*^n (a')) \\ = \underbrace{a' * \dots * a'}_{n \text{ termes}} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } n > 0, \\ na = \underbrace{a + \dots + a}_{n \text{ termes}} \\ \text{si } n = 0, 0a = 0 \\ \text{si } n < 0, \\ -na = n(-a) = \underbrace{-a + \dots + (-a)}_{n \text{ termes}} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } n > 0, \\ a^n = \underbrace{a \dots a}_{n \text{ termes}} \\ a^0 = 1_G \\ \text{si } n < 0, \\ a^{-n} = (a^{-1})^n \\ = \underbrace{a^{-1} \dots a^{-1}}_{n \text{ termes}} \end{array} \right.$
si G est abélien , $\forall a, b \in G$	$*^{m+n} a = (*^m a) * (*^n a)$ $*^n (a * b) = (*^n a) * (*^n b)$ $*^{2n} a = (*^n a) * (*^n a)$	$(m+n)a = ma + na$ $n(a+b) = na + nb$ $(2n)a = na + na = n(2a)$	$a^{m+n} = a^m a^n$ $(ab)^n = a^n b^n$ $a^{2n} = (a^n)^2 = (a^2)^n$

1.4 Propriétés fondamentales d'un groupe :

1.4.1 Théorème :

Pour tout élément a d'un groupe G , les applications définies par :

$$\gamma_a : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & \gamma_a(x) = ax \end{array} \quad \text{et} \quad \delta_a : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & xa \end{array}$$

sont bijectives.

Preuve

$$\delta_a : x \mapsto xa$$

Injectivité:

$$\begin{aligned} \delta_a(x) = \delta_a(y) &\implies xa = ya \implies (xa)a^{-1} = (ya)a^{-1} \\ &\implies x(aa^{-1}) = y(aa^{-1}) \implies x1_G = y1_G \implies x = y \end{aligned}$$

donc δ_a est injective.

Surjectivité:

Soit $z \in G$, admet-il un antécédent y ?

$$\delta_a(y) = z \text{ ssi } ya = z \text{ ssi } yaa^{-1} = za^{-1} \text{ ssi}$$

$$y1_G = za^{-1} \text{ssi } y = za^{-1} \in G$$

$$\delta_a(za^{-1}) = za^{-1}a = z$$

$$z \in G \text{ admet un antécédent qui est } za^{-1} = \delta_{a^{-1}}(z)$$

δ_a est surjective.

Elle est donc bijective

* Montrons que γ_a est injective :

Soit e l'élément neutre de G , noté 1_G .

$$\gamma_a(x) = \gamma_a(y) \Rightarrow ax = ay \Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay)$$

$$\gamma_a(x) = \gamma_a(y) \Rightarrow (a^{-1}a)x = (a^{-1}a)y \Rightarrow 1_Gx = 1_Gy \Rightarrow x = y.$$

* Montrons que γ_a est surjective :

$$\forall z \in G, \text{ existe-t-il } x \in G / \gamma_a(x) = z?$$

$$\gamma_a(x) = z \Leftrightarrow ax = z \Leftrightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}z \Leftrightarrow$$

$$(a^{-1}a)x = a^{-1}z \Leftrightarrow x = 1_Gx = a^{-1}z.$$

$$a^{-1}z \text{ est (le seul) antécédent de } z \text{ par } \gamma_a.$$

Conclusion : γ_a est bijective et l'application réciproque de γ_a est $(\gamma_a)^{-1} = \gamma_{a^{-1}} : z \mapsto a^{-1}z$.

Pour les mêmes raisons δ_a est bijective et l'application réciproque de δ_a est $(\delta_a)^{-1} = \delta_{a^{-1}} : x \mapsto xa^{-1}$.

Si G n'est pas abélien les solutions aux équations : $ax = z$ et $xa = z$ sont en général distinctes.

Si G est abélien alors les équations :

$$ax = b \text{ et } xa = b \text{ admettent la même solution } x = a^{-1}b = ba^{-1} \text{ que l'on note } \frac{b}{a}.$$

$$\text{Avec la notation : } \frac{1}{a} = a^{-1}1_G = a^{-1}.$$

$$\text{On écrit : } \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si } m > n \geq 0 \\ 1_G & \text{si } m = n \text{ i.e. } a^0 = 1_G \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{si } n > m \geq 0 \end{cases}.$$

En notation additive, si G est abélien, les équations : $a + x = b$ et $x + a = b$ admettent la même solution $x = -a + b = b - a$.

Remarque: le symétrique de ab est $b^{-1}a^{-1}$.

$$\text{En effet, } (ab)(b^{-1}a^{-1}) = (a(bb^{-1}))a^{-1} = (a1_G)a^{-1} = aa^{-1} = 1_G$$

$$\text{et } (b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}a^{-1}ab = b^{-1}1_Gb = b^{-1}b = 1_G.$$

1.4.2 Corollaire :

Tout élément a d'un groupe G est régulier:

$$\forall x, y \in G : \begin{cases} ax = ay \Rightarrow x = y & \text{et} \\ xa = ya \Rightarrow x = y \end{cases}$$

Preuve :

$$\gamma_a : G \longrightarrow G : x \mapsto ax \text{ étant injective, } ax = ay \Rightarrow \gamma_a(x) = \gamma_a(y) \Rightarrow x = y.$$

La dernière partie s'obtient de la même manière avec δ_a .

II) Sous-groupes

2.1 Définitions

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et soit H un sous-ensemble non vide de G .

On dit que $(H, \cdot)$ est un sous-groupe de $(G, \cdot)$ si $(H, \cdot)$ est stable

(i.e. $\forall a, b \in H$ on a : $a \cdot b \in H$) et si $(H, \cdot)$ est aussi un groupe.

Exemples :

G et $\{1_G\}$ sont des sous-groupes de G dits *triviaux*.

Tout sous-groupe de G différent de G et de $\{1_G\}$ est appelé *sous-groupe propre* de G .

2.2 Proposition

Tout sous-groupe H de G a le même élément neutre que G : $1_H = 1_G$.

Preuve :

Soit 1_G l'élément neutre de G et H un sous-groupe de G d'élément neutre 1_H . Alors

$$1_G 1_H = 1_H = 1_H 1_H.$$

Comme tout élément de G est régulier, en particulier, 1_H étant élément de G on a :

$$1_G 1_H = 1_H 1_H \Rightarrow 1_G = 1_H.$$

2.3 Proposition

Si H est un sous-groupe de G le symétrique de $x \in H$ est le même dans H que dans G .

Preuve :

Soit $x \in H$. Soit x^{-1} le symétrique de x dans G .

Soit x' le symétrique de x dans H : $xx' = 1_H = 1_G = xx^{-1}$.

Alors $xx' = xx^{-1}$ d'où, x étant régulier, $x' = x^{-1}$.

2.4 Caractérisation d'un sous-groupe :

Théorème :

Soit G un groupe et soit H un sous-ensemble de G .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) H est un sous-groupe de G .
- b) H est stable, $1_G \in H$ et $\forall x \in H, x^{-1} \in H$.
- c) H est stable, $H \neq \emptyset$ et $\forall x \in H, x^{-1} \in H$.
- d) $H \neq \emptyset$ et $\forall (x, y) \in H^2, xy^{-1} \in H$.
- e) $H \neq \emptyset$ et $\forall (x, y) \in H^2, y^{-1}x \in H$.

Preuve : a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a).

a) $\Rightarrow$ b) H est stable par définition; d'après la proposition 2.2 $1_G = 1_H \in H$ et d'après la proposition 2.3, $\forall x \in H$, le symétrique x^{-1} de x dans G étant celui de x dans H , il appartient à H c-a-d $x^{-1} \in H$.

b) $\Rightarrow$ c) : immédiat

c) $\Rightarrow$ d) $\forall (x, y) \in H^2$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in H \\ y \in H \end{array} \right. \text{ donc d'après c), } \left\{ \begin{array}{l} x \in H \\ y^{-1} \in H \end{array} \right. \text{ et } xy^{-1} \in H.$$

d) $\Rightarrow$ b)

* d) $\Rightarrow H \neq \emptyset$ donc $\exists h \in H$; d'après d), $hh^{-1} \in H$ c-a-d $1_G \in H$.

* D'autre part, $\forall x \in H$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1_G \in H \\ x \in H \end{array} \right. \text{ d'après d), } 1_G x^{-1} \in H \text{ c-a-d } x^{-1} \in H.$$

* Enfin $\forall x, y \in H$,

$xy = x(y^{-1})^{-1}$; or, d'après ce qui précède, $x \in H$ et $y^{-1} \in H$ d'où, d'après d), $x(y^{-1})^{-1} \in H$ par consq, $xy \in H$

H est stable.

b) $\Rightarrow$ a)

* H étant stable, la loi est interne dans H .

* L'associativité: elle est vraie dans G donc

$$\forall x, y, z \in H, (xy)z = x(yz) \text{ d'où l'associativité dans } H.$$

* $1_G \in H$ alors 1_G est élément neutre dans H :

$$\forall x \in H, 1_G x = x \text{ et } x 1_G = x.$$

* $\forall x \in H$, on a $x^{-1} \in H$ donc $xx^{-1} = 1_G = x^{-1}x$ où 1_G est élément neutre de H donc x est symétrisable dans H .

Conclusion: H est un sous-groupe de G .

Remarque : on peut remplacer d) par e) et les preuves sont similaires.

Notation :

Soient H et K deux sous-ensembles de G . On note :

$$HK = \{xy; x \in H \text{ et } y \in K\} \text{ et } H^{-1} = \{x^{-1}; x \in H\}$$

Pour tout $a \in G$, on note $aH = \{ay, y \in H\}$ et $Ha = \{ya, y \in H\}$.

Remarque :

Si H est un sous-groupe de G alors

$$\left\{ \begin{array}{l} HH = H \\ H^{-1} = H \\ hH = H = Hh, \forall h \in H \end{array} \right.$$

Preuve:

* $HH = H$?

* $HH \subseteq H$?

$$HK = \{xy; x \in H \text{ et } y \in K\}$$

$$\forall a \in HH = \{xy; x \in H \text{ et } y \in H\},$$

$$\exists x \in H \text{ et } \exists y \in H \text{ tels que } a = xy$$

comme $xy \in H$ on a $a \in H$.

$$\forall a \in HH \text{ on a } a \in H$$

$$HH \subseteq H.$$

$$H \subseteq HH?$$

$$\forall h \in H, h = 1_G h \in HH$$

$$\text{donc } H \subseteq HH$$

$$HH = H.$$

* $H^{-1} = H$?

$$H^{-1} \subseteq H?$$

d'après le théorème précédent (voir c)),

$$\forall x \in H, x^{-1} \in H; \text{ donc}$$

$$H^{-1} = \{t^{-1}, t \in H\} \subseteq H.$$

$$H \subseteq H^{-1}?$$

$$\forall a \in H, a = (a^{-1})^{-1} \text{ comme } a^{-1} \in H, \text{ on a : } a = (a^{-1})^{-1} \in H^{-1}$$

$$\text{donc } H \subseteq H^{-1}.$$

* $\forall y \in H, yH = H$?

$$yH \subseteq HH = H = 1_G H = y(y^{-1}H) \subseteq yH$$

$$\text{car } y^{-1} \in H \text{ donc } y^{-1}H \subseteq H$$

$$\text{d'où } y(y^{-1}H) \subseteq yH$$

$$yH \subseteq HH = H \subseteq yH \text{ d'où l'égalité: } yH = H$$

De même, $Hy = H$ pour tout $y \in H$.

Remq: $H^{-1}H = HH = H$.

2.5 Exemples

- 1) $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$, lui même sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
- 2) $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ lui même sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$
- 3) $(\{-1; 1\}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
- 4) $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
- 5) Soit G l'ensemble des matrices carrées de déterminants non nuls de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de la multiplication.

Soit H l'ensemble des matrices s'écrivant $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 - b^2 \neq 0$.

Soit K l'ensemble des matrices s'écrivant $M_{a,0} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

G est un groupe.

a) Montrons que H est un sous-groupe de G :

* $H \subseteq G$ car $\forall M \in H, \exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 - b^2 \neq 0 \text{ donc } \det M = a^2 - b^2 \neq 0 \text{ d'où } M \in G.$$

* $H \neq \emptyset$ car $I_2 = M_{1,0} \in H$

* $\forall M \in H, \exists a, b \in \mathbb{R}, M = M_{a,b}$ avec $a^2 - b^2 \neq 0$.

L'inverse de M dans G est $M^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = M_{a_1, b_1}$ avec $a_1 = \frac{a}{a^2 - b^2}$ et $b_1 = \frac{-b}{a^2 - b^2}$ et $a_1^2 - b_1^2 = \frac{1}{a^2 - b^2} \neq 0$ donc $M^{-1} \in H$.

* $\forall M, N \in H, \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $M = M_{a,b}$ et $N = M_{c,d}$ avec $a^2 - b^2 \neq 0$ et $c^2 - d^2 \neq 0$.

$$MN = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & bc+ad \\ bc+ad & ac+bd \end{pmatrix} = M_{a_2, b_2}$$

où $a_2^2 - b_2^2 = (a^2 - b^2)(c^2 - d^2) \neq 0$ car $a^2 - b^2 \neq 0$ et $c^2 - d^2 \neq 0$ donc $MN \in H$

Conclusion : H est un sous-groupe de G .

b) Montrons que K est un sous-groupe de H et de G .

* $K \subseteq H$ car $\forall M \in K, \exists a \in \mathbb{R}^* : M = M_{a,0}$ donc $a^2 - 0^2 = a^2 \neq 0$ d'où M appartient à H .

* $K \neq \emptyset$ car $I_2 = M_{1,0} \in K$

* $\forall M, N \in K, \exists a, c \in \mathbb{R}$ tels que $M = M_{a,0}$ et $N = M_{c,0}$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

$$MN^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/c & 0 \\ 0 & a/c \end{pmatrix} = M_{a/c, 0}$$

et $a/c \neq 0$ car $a \neq 0$ et $c \neq 0$ donc $MN^{-1} \in K$

Conclusion : K est un sous-groupe de H

Comme H est un sous-groupe de G , alors K est aussi un sous-groupe de G .

2.6 Proposition

Soient H et K deux sous-groupes de G . Alors $H \cap K$ est un sous-groupe de G .

Preuve

* $H \cap K \neq \emptyset$ car $1_G = 1_H \in H$ et $1_G = 1_K \in K \Rightarrow 1_G \in H \cap K$.

* Soient M et $N \in H \cap K$.

Comme H et K sont des sous-groupes de G , $MN^{-1} \in H$ et à K donc aussi à $H \cap K$.

D'où $H \cap K$ est un sous-groupe de G .

Remarques

1) La Proposition précédente s'étend au cas d'une famille quelconque de sous-groupes de G .

2) $H \cup K$ n'est pas un sous-groupe de G en général.

Par exemple, soient $H = 2\mathbb{Z}$ et $K = 3\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ mais $H \cup K$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ car 2 et 3 appartiennent à $H \cup K$ mais $2 + 3 = 5 \notin H \cup K$ qui n'est donc pas stable.

2.7 Sous-groupe engendré

Soit G un groupe.

2.7.1 Définition

Soit A une partie de G . On appelle sous-groupe engendré par A et on note $\langle A \rangle$, le plus petit sous-groupe (au sens de l'inclusion) de G contenant A .

Si $a \in G$, $\langle \{a\} \rangle$ est noté $\langle a \rangle$.

Exemples:

$$\langle G \rangle = G$$

$$\langle 1_G \rangle = \{1_G\} = \langle \emptyset \rangle = \{1_G\}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } a \in G, \langle a \rangle &= \{a^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(a^{-1})^n : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{a^n : n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

avec la convention $a^0 = 1_G$.

III) Classes selon un sous-groupe- Groupe quotient-Sous-groupes distingués:

3.1 Classes selon un sous-groupe :

Soit $(G; \cdot)$ un groupe dont l'élément neutre est noté e et soit H un sous-groupe de $(G; \cdot)$.

3.1.1 Relation à gauche

a) Soit $\mathcal{R}_g$ la relation définie par :

$$x \mathcal{R}_g y \Leftrightarrow y^{-1}x \in H.$$

Alors $\mathcal{R}_g$ est une relation d'équivalence.

En effet,

1) $\mathcal{R}_g$ est réflexive : $\forall x \in G$ on a :

$$x \mathcal{R}_g x \text{ car } x^{-1}x = e \in H$$

2) $\mathcal{R}_g$ est symétrique : $\forall (x, y) \in G \times G$: Si $x \mathcal{R}_g y$ a-t-on $y \mathcal{R}_g x$?

$$x \mathcal{R}_g y \Rightarrow y^{-1}x \in H \Rightarrow (y^{-1}x)^{-1} \in H \text{ or, } (y^{-1}x)^{-1} = x^{-1}(y^{-1})^{-1} = x^{-1}y \in H$$

d'où $y \mathcal{R}_g x$.

3) $\mathcal{R}_g$ est transitive : $\forall (x, y, z) \in G \times G \times G$:

$$\text{Si } \begin{cases} x \mathcal{R}_g y & \text{et} \\ y \mathcal{R}_g z & \end{cases} \quad \text{a-t-on } x \mathcal{R}_g z?$$

$$\begin{cases} x \mathcal{R}_g y \\ y \mathcal{R}_g z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{-1}x \in H \\ z^{-1}y \in H \end{cases} \Rightarrow$$

$$(z^{-1}y)(y^{-1}x) \in H \Rightarrow z^{-1}x = z^{-1}(yy^{-1})x \in H$$

d'où $x \mathcal{R}_g z$.

Conclusion : $\mathcal{R}_g$ est une relation d'équivalence.

b) Classe à gauche d'un élément $x \in G$.

La classe à gauche d'un élément $x \in G$ est : $cl_g(x) = xH$.

En effet,

$$cl_g(x) = \{y \in G; y\mathcal{R}_g x\} = \{y \in G; x^{-1}y \in H\}$$

$$\text{or, } x^{-1}y \in H \iff xx^{-1}y \in xH \iff y \in xH \text{ donc } \{y \in G; x^{-1}y \in H\} = xH.$$

$$cl_g(x) = xH.$$

c) Compatibilité à gauche

$\mathcal{R}_g$ est compatible avec la composition à gauche: $\forall z \in G$,

$$x\mathcal{R}_g y \iff (zx)\mathcal{R}_g (zy)$$

En effet, $\forall z \in G$

$$x\mathcal{R}_g y \iff y^{-1}x \in H \iff y^{-1}z^{-1}zx = y^{-1}x \in H \iff (zy)^{-1}zx \in H \iff (zx)\mathcal{R}_g (zy)$$

d) Réciproquement: Relation d'équivalence compatible à gauche:

Proposition:

Si dans un groupe G , $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence compatible avec la composition à gauche c-à-d $\forall z \in G, x\mathcal{R}y \iff zx\mathcal{R}zy$ alors

$cl_{\mathcal{R}} e$ est un sous-groupe de G .

En effet,

a) Soit $K = cl_{\mathcal{R}} e = \{x \in G / x\mathcal{R}e\} \subseteq Ge \in cl_{\mathcal{R}} e$

b) $e \in K$ car $\mathcal{R}$ étant réflexive, $e\mathcal{R}e$

donc $cl_{\mathcal{R}} e \neq \emptyset$.

c) si $(x; y) \in (cl_{\mathcal{R}} e) \times (cl_{\mathcal{R}} e)$ a-t-on $xy^{-1} \in cl_{\mathcal{R}} e$?

$$\begin{cases} x \in cl_{\mathcal{R}} e \\ y \in cl_{\mathcal{R}} e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \mathcal{R} e \\ y \mathcal{R} e \end{cases} \quad \text{La compatibilité à gauche entraîne: } \begin{cases} x \mathcal{R} e \\ y^{-1}y \mathcal{R} y^{-1}e \end{cases} \quad \text{i.e., } e \mathcal{R} y^{-1}$$

$$\mathcal{R} \text{ est symétrique donc } \begin{cases} x \mathcal{R} e \\ y^{-1} \mathcal{R} e \end{cases}$$

$$\text{La compatibilité à gauche entraîne: } \begin{cases} x \mathcal{R} e \\ xy^{-1} \mathcal{R} x \end{cases}$$

$\mathcal{R}$ est transitive donc $xy^{-1} \mathcal{R} e$ i.e., $xy^{-1} \in cl_{\mathcal{R}} e$.

Conclusion : $cl_{\mathcal{R}} e$ est un sous-groupe de G .

Remarque:

comme $\mathcal{R}$ est compatible avec la composition à gauche,

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\iff y^{-1}x\mathcal{R}y^{-1}y \iff y^{-1}x\mathcal{R}e \iff y^{-1}x \in K = cl_{\mathcal{R}} e \\ &\iff x\mathcal{R}_g y \text{ selon le sous-groupe } K. \end{aligned}$$

3.1.2 Relation à droite

a) Soit $\mathcal{R}_d$ la relation définie par :

$$x \mathcal{R}_d y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H. \text{ Alors}$$

$\mathcal{R}_d$ est une relation d'équivalence.

En effet, 1) $\mathcal{R}_d$ est réflexive : $\forall x \in G$ on a : $x \mathcal{R}_d x$ car $xx^{-1} = e \in H$

2) $\mathcal{R}_d$ est symétrique : $\forall (x, y) \in G \times G$: Si $x \mathcal{R}_d y$ a-t-on $y \mathcal{R}_d x$?

$$x \mathcal{R}_d y \Rightarrow xy^{-1} \in H \Rightarrow (xy^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow yx^{-1} = (xy^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow y \mathcal{R}_d x.$$

3) $\mathcal{R}_d$ est transitive : $\forall (x, y, z) \in G \times G \times G$: Si $\begin{cases} x \mathcal{R}_d y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R}_d z \end{cases}$ a-t-on $x \mathcal{R}_d z$?

$$\begin{cases} x \mathcal{R}_d y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R}_d z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy^{-1} \in H \\ \text{et} \\ yz^{-1} \in H \end{cases} \Rightarrow (xy^{-1})(yz^{-1}) \in H \Rightarrow xy^{-1}yz^{-1} = xz^{-1} \in H \Rightarrow x \mathcal{R}_d z.$$

Conclusion : $\mathcal{R}_d$ est une relation d'équivalence.

b) Classe à droite d'un élément $x \in G$.

La classe à droite d'un élément $x \in G$ est : $cl_d x = Hx = \{hx : h \in H\}$

En effet,

$$\begin{aligned} cl_d x &= \{y \in G : x \mathcal{R}_d y\} = \{y \in G : xy^{-1} \in H\} = \{y \in G : (xy^{-1})^{-1} \in H\} \\ cl_d x &= \{y \in G : yx^{-1} \in H\} = \{y \in G : y \in Hx\} = Hx. \end{aligned}$$

En particulier, la classe à droite de e est : $cl_{\mathcal{R}} e = He = H$.

c) Compatibilité à droite

$\mathcal{R}_d$ est compatible avec la composition à droite : $\forall z \in G$,

$$x \mathcal{R}_d y \Leftrightarrow (xz) \mathcal{R}_d (yz)$$

En effet, $\forall z \in G$,

$$\begin{aligned} x \mathcal{R}_d y &\Leftrightarrow xy^{-1} \in H \Leftrightarrow xzz^{-1}y^{-1} = xy^{-1} \in H \Leftrightarrow xz(yz)^{-1} \in H \\ &\Leftrightarrow (xz) \mathcal{R}_d (yz) \end{aligned}$$

d) Réciproquement: Relation d'équivalence compatible à droite:

Proposition:

Si dans un groupe G , $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence compatible avec la composition à droite c-à-d $\forall z \in G, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow xz \mathcal{R} yz$ alors $cl_{\mathcal{R}} e$ est un sous-groupe de G .

En effet, a) $e \in cl_{\mathcal{R}}e$ donc $cl_{\mathcal{R}}e \neq \emptyset$

b) si $(x; y) \in (cl_{\mathcal{R}}e) \times (cl_{\mathcal{R}}e)$ a-t-on $xy^{-1} \in cl_{\mathcal{R}}e$?

$$\begin{cases} x \in cl_{\mathcal{R}}e \\ \text{et} \\ y \in cl_{\mathcal{R}}e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \mathcal{R} e \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} e \end{cases} \quad \text{La compatibilité à droite entraîne : } \begin{cases} xy^{-1} \mathcal{R} y^{-1} \\ \text{et} \\ yy^{-1} \mathcal{R} y^{-1} \end{cases}$$

$\mathcal{R}$ est symétrique et transitive donc $xy^{-1} \mathcal{R} yy^{-1}$ i.e., $xy^{-1} \mathcal{R} e$ et $xy^{-1} \in cl_{\mathcal{R}}e$.

Conclusion : $cl_{\mathcal{R}}e$ est un sous-groupe de G .

Remarque comme $\mathcal{R}$ est compatible avec la composition à droite,

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1}\mathcal{R}yy^{-1} \Leftrightarrow xy^{-1}\mathcal{R}e \Leftrightarrow xy^{-1} \in cl_{\mathcal{R}}e \Leftrightarrow x\mathcal{R}_dy \text{ selon le sous-groupe } cl_{\mathcal{R}}e.$$

3.1.3 Proposition

Dans un groupe G une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est compatible avec la composition à gauche et avec la composition à droite ssi

$$\forall x, y, x', y' \in G, \left\{ \begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ x'\mathcal{R}y' \end{array} \right\} \Rightarrow (xx') \mathcal{R} (yy').$$

Preuve en exercice.

3.1.4 Théorème

Il existe une bijection entre l'ensemble des classes à gauche et l'ensemble des classes à droite: $\varphi : xH \mapsto Hx^{-1}$

Preuve:

a) Montrons que φ est bien définie c-a-d que φ est bien une application:

Si $a = xH$ et $a = yH$, (c-a-d $xH = yH$) a-t-on

$$Hx^{-1} = Hy^{-1}?$$

$$aR_db \iff ab^{-1} \in H$$

$$xH = yH \Rightarrow yR_gx \Rightarrow x^{-1}y \in H \Rightarrow x^{-1}(y^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow x^{-1}R_dy^{-1} \Rightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Reprise } xH = yH &\Rightarrow x^{-1}xH = x^{-1}yH \Rightarrow H = x^{-1}yH \Rightarrow \\ H^{-1} &= H^{-1}y^{-1}x \Rightarrow H = Hy^{-1}x \Rightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1}xx^{-1} \\ &\Rightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1} \end{aligned}$$

on en déduit que φ est bien définie.

b) $\varphi : xH \mapsto Hx^{-1}$ est injective :

$$\begin{aligned} \varphi(xH) = \varphi(yH) &\Leftrightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1} \Leftrightarrow x^{-1}\mathcal{R}_dy^{-1} \\ &\Leftrightarrow x^{-1}(y^{-1})^{-1} \in H \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \\ y^{-1}x \in H &\Leftrightarrow x\mathcal{R}_gy \Leftrightarrow xH = yH \end{aligned}$$

c) φ est surjective.

$\forall z \in G$ existe-t-il $x \in G$ tel que : $\varphi(xH) = Hz$?

On a : $\varphi(z^{-1}H) = H(z^{-1})^{-1} = Hz$. Il suffit donc de prendre $x = z^{-1}$.

3.1.5 Proposition

Soit G un groupe. Si G est fini alors xH , H et Hx ont le même cardinal

En effet, $\left\{ \begin{array}{l} \gamma_x : G \longrightarrow G \\ \quad z \mapsto xz \\ \delta_x : G \longrightarrow G \\ \quad x \mapsto zx \end{array} \right.$ étant bijectives pour tout $x \in G$, alors $xH = \gamma_x(H)$ et

$Hx = \delta_x(H)$ ont le même cardinal que H .

Conclusion : Si G est fini alors toutes les classes ont le même cardinal que $H = cl_g e = cl_d e$.

Soit $p = \text{card } H$. Alors

$\text{card } G = pq$ où q est le nombre de classes appelé l'indice de H dans G , noté : $[G : H]$

$$\boxed{\text{card } G = [G : H] \times \text{card } H} \quad \text{formule de Lagrange}$$

$$\boxed{[G : H] = \frac{\text{card } G}{\text{card } H}}.$$

D'où le Théorème :

3.1.6 Théorème de Lagrange:

Lorsqu'un groupe est fini alors l'ordre de tout sous-groupe est un diviseur de l'ordre du groupe.

Remarques

a) Le Théorème de Lagrange s'interprète aussi dans sa forme *contraposée* :

Si k ne divise pas $|G|$, alors il n'existe pas de sous-groupe de G d'ordre k .

b) La réciproque est toutefois fausse en général, c'est-à-dire qu'il n'existe pas forcément de sous-groupe de G d'ordre k lorsque k divise $|G|$.

c) Si K est un sous-groupe de H , alors on a

$$\boxed{[G : K] = [G : H] \times [H : K]}$$

(transitivité des indices).

Preuve

$$\begin{aligned} [G : H] &= |G|/|H| = ([G : K] \times |K|)/([H : K] \times |K|) \\ &= [G : K]/[H : K]. \end{aligned}$$

Définition:

Dans un groupe fini G on appelle *ordre* d'un élément g le plus petit entier strictement positif n tel que $g^n = 1_G$. Dans ce cas

$\langle g \rangle = \{1_G = g^0, g, g^2, \dots, g^{n-1}\} = H$; il a n éléments. Donc l'ordre de g est $|\langle g \rangle|$, noté $|g|$.

G est fini

$$1_G = g^0, g, g^2, \dots, g^p, \dots \in G.$$

$$\exists m < q \text{ tels que } g^m = g^q$$

$$1_G = g^{-m}g^m = g^{-m}g^q = g^{q-m} = g^n.$$

3.1.7 Corollaire

Soit G un groupe d'ordre fini. Soit g un élément de G . Alors l'ordre de g divise l'ordre de G .

Preuve

Soit n l'ordre de g . Alors $\langle g \rangle = \{g^k : k = 0, 1, \dots, n-1\}$ est un sous-groupe de G .

De plus, par définition de l'ordre d'un élément dans un groupe, ce sous-groupe est de cardinal n .

Par application du Théorème de Lagrange, n est un diviseur de l'ordre de G .

3.1.8 Groupe quotient

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur le groupe G , compatible avec la composition à gauche et à droite.

Soit $G/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.

Pour tout $x \in G$, notons $\bar{x} = cl\ x$ la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

$$\bar{x} = \{t \in G : t\mathcal{R}x\}$$

Définition:

La loi de $G/\mathcal{R}$ est définie par : $clx\ cly = cl(xy)$ i.e.

$$\bar{x}\ \bar{y} = \overline{xy}.$$

Cette loi est appelée la loi quotient de G par $\mathcal{R}$.

Proposition:

$G/\mathcal{R}$ muni de la loi quotient est un groupe.

Preuve

Soit e l'élément neutre de G .

* La loi de $G/\mathcal{R}$ est bien définie:

Si x_1, x_2, y_1 et $y_2 \in G$ avec $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ et $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ alors $x_1y_1\mathcal{R}x_2y_2$ c'est à dire, $\overline{x_1y_1} = \overline{x_2y_2}$.

En effet,

$$\begin{cases} \overline{x_1} = \overline{x_2} \\ \overline{y_1} = \overline{y_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \mathcal{R} x_2 \\ y_1 \mathcal{R} y_2 \end{cases}$$

$\mathcal{R}$ étant compatible avec la composition à gauche et à droite, on a :

$$\begin{cases} x_1 y_1 \mathcal{R} x_2 y_1 \\ x_2 y_1 \mathcal{R} x_2 y_2 \end{cases} \text{ d'où } x_1 y_1 \mathcal{R} x_2 y_2.$$

De plus la loi quotient est stable dans $G/\mathcal{R}$, c'est donc une loi de composition interne dans $G/\mathcal{R}$.

* la loi quotient est associative dans $G/\mathcal{R}$:

$$\forall x, y, z \in G, (\overline{x} \overline{y}) \overline{z} = \overline{(xy)} \overline{z} = \overline{(xy)z} = \overline{x(yz)} = \overline{x} \overline{(yz)} = \overline{x} (\overline{y} \overline{z}).$$

* $\overline{e}$ est l'élément neutre de $G/\mathcal{R}$:

$$\forall x \in G, \overline{x} \overline{e} = \overline{xe} = \overline{x} \text{ et } \overline{e} \overline{x} = \overline{ex} = \overline{x}$$

* Tout élément $\overline{x}$ de $G/\mathcal{R}$ est symétrisable:

$\forall x \in G$, on a : $x^{-1} \in G$ et $\overline{x^{-1}} \in G/\mathcal{R}$ et l'on a :

$$\overline{x} \overline{x^{-1}} = \overline{xx^{-1}} = \overline{e} \text{ et } \overline{x^{-1}} \overline{x} = \overline{x^{-1}x} = \overline{e} \text{ l'élément neutre de } G/\mathcal{R}.$$

Donc $\overline{x^{-1}}$ est le symétrique de $\overline{x}$.

3.2 Sous-groupe distingué

Soit H un sous-groupe de G .

3.2.1 Définition

On dit que H est distingué dans G , ou que H est normal, ou invariant dans G , si pour tout $x \in G$, $xH = Hx$

c'est à dire que la classe de x à gauche dans G modulo H s'identifie à sa classe à droite.

Conséquence : $R_g = R_d$

Si H est distingué dans G on note $H \triangleleft G$

3.2.2 Caractérisation des sous-groupes distingués

Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) H est distingué dans G : Pour tout $x \in G$, $xH = Hx$

(ii) Pour tout $x \in G$, $xH \subseteq Hx$

(iii) Pour tout $x \in G$, $xHx^{-1} = H$

(iv) Pour tout $x \in G$, $xHx^{-1} \subseteq H$.

Preuve

(i) $\Rightarrow$ (ii) : trivial car $xH = Hx \Rightarrow xH \subseteq Hx$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) : évident car

$$xH = Hx \Leftrightarrow xHx^{-1} = Hxx^{-1} = H$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iv) : évident car

$$xH \subseteq Hx \Leftrightarrow xHx^{-1} \subseteq Hxx^{-1} = H$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Si pour tout $x \in G$, $xH \subseteq Hx$ alors pour tout $x \in G$, comme $x^{-1} \in G$, on a :

$$\begin{cases} x^{-1}H \subseteq Hx^{-1} \\ xHx^{-1} \subseteq Hxx^{-1} \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} xx^{-1}H \subseteq xHx^{-1} \\ xHx^{-1} \subseteq H \end{cases}$ donc $H \subseteq xHx^{-1} \subseteq H$. D'où l'égalité.

3.2.3 Remarques

Supposons que $H \triangleleft G$.

1) Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur le groupe G définie par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H. \text{ Alors } x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}_gy \Leftrightarrow y \in xH = Hx \Leftrightarrow yx^{-1} \in H \Leftrightarrow x\mathcal{R}_dy.$$

$$\text{Donc } \mathcal{R} = \mathcal{R}_g = \mathcal{R}_d.$$

$\mathcal{R}$ est compatible avec la composition (à gauche et à droite).

L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$, $G/\mathcal{R}$ est noté G/H .

$$G/H = \{xH : x \in G\} = \{Hx : x \in G\}.$$

Pour tout $x \in G$, $\bar{x} = cl \ x = xH = Hx$ appelée la classe de x modulo H .

$$\bar{x} = \{t \in G : \exists h \in H \text{ avec } t = xh\} = \{xh : h \in H\}$$

$$\bar{x} = \{t \in G : \exists h \in H \text{ avec } t = hx\} = \{hx : h \in H\} = Hx$$

La loi de G/H est définie par : $(xH)(yH) = (xy)H$.

C'est la loi quotient de G modulo H .

L'élément neutre de G/H est $\bar{e} = H$.

Le symétrique de xH est $x^{-1}H$ c'est à dire $(xH)^{-1} = x^{-1}H = Hx^{-1}$.

Proposition:

G/H muni de la loi quotient est un groupe.

2) Réciproquement, si $\mathcal{R}_g = \mathcal{R}_d$ alors cette valeur commune $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence compatible avec la composition et soit $H = cl(e)$.

a) H est un sous-groupe de G .

b) $\forall x, t \in G, t \in xH \Leftrightarrow x\mathcal{R}_gt \Leftrightarrow x\mathcal{R}_dt \Leftrightarrow t \in Hx$

donc $\forall x \in G, xH = Hx$ d'où $H \triangleleft G$.

3) Si G est fini alors toutes les classes ont le même cardinal que H . Alors si $H \triangleleft G$ soit $p = \text{card } H$; on a :

$\text{card } G = pq$ où q est le nombre de classes $\text{card } G/H$;

c'est l'indice de H dans G : $[G : H] = \text{card } G/H$

$$\text{card } G = \text{card } (G/H) \times \text{card } H$$

$$\text{card } (G/H) = \frac{\text{card } G}{\text{card } H}.$$

D'où le Théorème de Lagrange:

Théorème :

Lorsqu'un groupe est fini l'ordre de tout sous-groupe divise l'ordre du groupe.

3) Si K est un sous-groupe de H distingué dans G , alors on a

$$\text{card } (G/K) = \text{card } (G/H) \times \text{card } (H/K)$$

3.2.4 Exemples

1) Soit G un groupe d'élément neutre 1_G . Alors G et $\{1_G\}$ sont des sous-groupes distingués dans G .

2) Le centre d'un groupe G est un sous-groupe distingué dans G .

Preuve

a) Soit $Z(G)$ le centre de G d'élément neutre 1_G .

$$* Z(G) = \{x \in G : \forall g \in G, xg = gx\} \subseteq G$$

$$* 1_G \in Z(G) \text{ car } 1_G g = g = g 1_G \forall g \in G,$$

$$* \forall x, y \in Z(G), \forall g \in G, (xy^{-1})g = y^{-1}gx = (g^{-1}y)^{-1}x \\ = (yg^{-1})^{-1}x = gy^{-1}x = g(xy^{-1})$$

donc $xy^{-1} \in Z(G)$

Conclusion : $Z(G)$ est un sous-groupe de G .

b) $\forall g \in G, gZ(G) = Z(G)g$ car

$\forall x \in Z(G), gx = xg$

$Z(G) \triangleleft G$.

3) Soit G l'ensemble des matrices carrées inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de la multiplication.

Soit H l'ensemble des matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 - b^2 \neq 0$.

Soit K l'ensemble des matrices $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

H est un sous-groupe de G et K est un sous-groupe de G et de H . (voir 2.5 exemple 8).

Montrons que K est un sous-groupe distingué dans G et que H n'est pas un sous-groupe distingué dans G :

a) $K \triangleleft G$: $\forall M \in G$, a-t-on $MKM^{-1} \subseteq K$?

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $ad - bc \neq 0$.

$\forall N \in K, \exists \alpha \in \mathbb{R}^* : N = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_2$

$MNM^{-1} = M(\alpha I_2)M^{-1} = \alpha M(I_2)M^{-1} = \alpha MM^{-1} = \alpha I_2 = N \in K$

d'où MKM^{-1} est contenu dans K .

Conclusion: $K \triangleleft G$.

b) $\forall M \in G$, a-t-on $MHM^{-1} \subseteq H$?

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $M \in G$

Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a = 1$ et $b = 2$ et $a^2 - b^2 = -3 \neq 0$ donc $N \in H$

$$\begin{aligned} MNM^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \notin H \end{aligned}$$

MHM^{-1} n'est pas contenu dans H

donc H n'est pas distingué dans G .

3.2.5 Exercice

Montrer dans l'exemple 3 de 3.2.4 que K est le centre de G .

3.3 Cas commutatif :

Si G est un groupe abélien, notons $+$ la loi de G . Soit H un sous-groupe de G . Alors

$$x\mathcal{R}_gy \Leftrightarrow -y + x \in H \Leftrightarrow x - y \in H \Leftrightarrow x\mathcal{R}_dy$$

d'où $\mathcal{R}_g = \mathcal{R}_d$ que l'on note $\mathcal{R}$.

La classe de x à gauche est égale à sa classe à droite : $cl\ x = x + H = H + x$.

Conséquences :

Par définition :

$$\bar{x} + \bar{z} = \overline{(x + z)} \quad \text{i.e.} \quad cl\ x + cl\ z = cl\ (x + z)$$

Congruence :

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in H$. On écrit : $x \equiv y \pmod{H}$ et on lit : x congru à y modulo H .

Exemples :

* Soit $G = \mathbb{Z}$. Soit $H = n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ la relation définie par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$

$\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{n\mathbb{Z}} \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow$ le reste de la division euclidienne de x par n est le même que celui de y par n .

L'ensemble des classes est donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \dots; \overline{n-1}\}$ qui est donc d'ordre n lorsque $n > 0$.

* $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}\}$ est d'ordre 6.

$$\bar{5} = \overline{6-1} = \bar{6} - \bar{1} = \overline{-1}$$

D'après le Théorème (3.1.6), tout sous-groupe de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est d'ordre p où p est un diviseur de 6.

$H_1 = \{\bar{0}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

$H_2 = \{\bar{0}; \bar{3}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ d'ordre 2 :

$$\bar{3} + \bar{3} = \bar{0}; \bar{0} + \bar{3} = \bar{3}$$

$H_3 = \{\bar{0}; \bar{2}; \bar{4}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ d'ordre 3 :

$$\bar{2} + \bar{2} = \bar{4}$$

$$\bar{4} + \bar{2} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{4} = \bar{2}$$

Table d'addition de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Remarque La table de multiplication de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est :

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe :

il y a un élément neutre qui est $\bar{1}$ mais $\bar{2}$ n'a pas de symétrique.

On peut aussi voir que les seuls éléments réguliers (et inversibles) sont $\bar{1}$ et $\bar{5}$.

IV) Morphismes de groupes

4.1 Définition

Soient G et G' deux groupes.

Une application $f : G \rightarrow G'$ est un **homomorphisme** de groupes ou un **morphisme** de groupes si

$$\forall x, y \in G, f(xy) = f(x)f(y).$$

L'ensemble des morphismes de G dans G' est noté $\text{Hom}(G, G')$.

4.2 Exemples

1) L'application f de $(\mathbb{Z}; +)$ dans $(2\mathbb{Z}; +)$ définie par $f(n) = 2n$ est un morphisme de groupes.

2) $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes.

$$x \mapsto \bar{x}$$

4.3 Proposition

Soient G et G' deux groupes d'éléments neutres respectifs e et e' .

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. Alors

1) $f(e) = e'$

2) Pour tout élément $x \in G$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

3) Pour tout entier non nul n , $f(x^n) = (f(x))^n$ et, en définissant x^{-n} par $(x^n)^{-1}$, $f(x^{-n}) = (f(x))^{-n}$.

Preuve

1) $f(e)e' = f(e) = f(e.e) = f(e)f(e)$. D'où, $f(e)$ étant régulier dans G' on a : $f(e) = e'$.

2) $f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(e) = e' = f(x)(f(x))^{-1}$ donc $f(x)$ étant régulier dans G' on a :
 $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

3) Pour $f(x^n)$ on peut procéder par récurrence sur n .

Pour $f(x^{-n})$ on utilise la Propriété 2 et le cas n positif ou encore:

$$f(x^{-n}) f(x^n) = f(x^{-n}x^n) = f(e) = e' = [f(x^n)]^{-1} f(x^n)$$

$$\text{donc } f(x^{-n}) = [f(x^n)]^{-1}.$$

4.4 Proposition

Soient H un groupe, $f : G \rightarrow G'$ et $g : G' \rightarrow G''$ des morphismes de groupes.

Alors, $g \circ f : G \rightarrow G''$ est un morphisme de groupes.

4.5 Noyau et image d'un morphisme

Soient G et G' deux groupes d'éléments neutres respectifs e et e' et soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

4.5.1 Définitions

On appelle noyau de f , et on note $\ker f$, l'ensemble $\{x \in G : f(x) = e'\}$.

On appelle image de f , et on note $\text{Im } f$, l'ensemble $\{f(x) : x \in G\}$.

4.5.2 Proposition

(i) Pour tout sous-groupe H de G , $f(H)$ est un sous-groupe de G' .

En particulier, $f(G) = \text{Im } f$ est un sous-groupe de G' et $f(H)$ est un sous-groupe de $f(G)$.

(ii) Pour tout sous-groupe H' de G' , $f^{-1}(H')$ est un sous groupe de G .

(iii) En particulier, $\ker f$ est un sous-groupe de G .

Preuve

(i) * $e \in H$ (car H est un sous-groupe de G) et $f(e) = e'$ donc $f(H)$ est non vide.

* $\forall h_1 \in H$ et $\forall h_2 \in H$, $h_1 h_2^{-1} \in H$, $f(h_1)f(h_2)^{-1} = f(h_1)f(h_2^{-1}) = f(h_1 h_2^{-1}) \in f(H)$.

D'où $f(H)$ est un sous-groupe de G' .

(ii) * $f^{-1}(H') = \{x \in G : f(x) \in H'\} \subseteq G$

$z \in f^{-1}(H')$ ssi $z \in G$ et $f(z) \in H'$

* $e' \in H'$ et $f(e) = e' \Rightarrow e \in f^{-1}(H')$ qui est donc non vide.

* $\forall y_1, y_2 \in f^{-1}(H')$, $\exists h'_1$ et h'_2 dans H' tels que $f(y_1) = h'_1$ et $f(y_2) = h'_2$.

Donc $f(y_1 y_2^{-1}) = f(y_1)f(y_2^{-1}) = f(y_1)(f(y_2))^{-1} = h'_1 (h'_2)^{-1} \in H'$

car H' est un sous-groupe de G' .

D'où $y_1 y_2^{-1} \in f^{-1}(H')$ et par conséquent, $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G .

(iii) d'après (ii), comme $\{e'\}$ est un sous-groupe de G' , $\ker f = f^{-1}(\{e'\})$ est un sous-groupe de G .

4.5.3 Proposition

$\ker f = \{1_G\}$ si et seulement si f est injective.

Preuve

* Supposons que $\ker f = \{1_G\}$.

Soient x et y appartenant à G tels que $f(x) = f(y)$.

On a alors $f(x)(f(y))^{-1} = 1_{G'}$ c'est à dire $f(xy^{-1}) = 1_{G'}$ car f est un morphisme.

D'où xy^{-1} appartient à $\ker f = \{1_G\}$.

Par conséquent, $xy^{-1} = 1_G$ et $xy^{-1}y = 1_Gy$ et donc $x = y$; f est donc injective.

* Réciproquement : supposons que f est injective.

Soit z appartenant à $\ker f$.

On a alors $f(z) = 1_{G'} = f(1_G)$.

D'où, comme f est injective, $z = 1_G$ et $\ker f$ est par conséquent inclus dans $\{1_G\}$.

Comme 1_G appartient à $\ker f$, $\ker f = \{1_G\}$.

4.5.4 Proposition

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupe. Alors on a :

- 1) L'image par f d'un sous-groupe distingué de G est un sous groupe distingué de $f(G)$.
- 2) L'image réciproque par f d'un sous-groupe distingué de G' est un sous groupe distingué de G .
 En particulier, $\ker f$ est un sous-groupe distingué de G .

Preuve

- 1) Soit H un sous-groupe de G .

D'après la Proposition 4.5.2 (i), l'image par f de H est un sous-groupe de $f(G)$.

Si H est distingué dans G , montrons que $f(H)$ est alors distingué dans $f(G)$:

$\forall y \in f(G)$, $yf(H)y^{-1}$ est-il inclus dans $f(H)$?

$y \in f(G) \Rightarrow \exists x \in G / f(x) = y$;

$\forall z \in f(H)$, $\exists t \in H / f(t) = z$. On a alors :

$$\begin{aligned} yzy^{-1} &= f(x)f(t)[f(x)]^{-1} = f(x)f(t)f(x^{-1}) = f(xtx^{-1}) \in f(H) \\ \text{car } H \triangleleft G &\Rightarrow xtx^{-1} \in H \end{aligned}$$

donc $yf(H)y^{-1} \subseteq f(H)$ et $f(H)$ est distingué dans $f(G)$.

- 2) Soit H' un sous-groupe de G' .

D'après la Proposition 4.5.2 (ii), l'image réciproque par f de H' est un sous-groupe de G .

Si H' est distingué dans G' , montrons que $f^{-1}(H')$ est alors distingué dans G :

$\forall x \in G$, $xf^{-1}(H')x^{-1}$ est-il inclus dans $f^{-1}(H')$?

$y \in f^{-1}(H') \iff (y \in G \text{ et } f(y) \in H')$;

$\forall y \in f^{-1}(H')$, on a :

$$\begin{aligned} f(xyx^{-1}) &= f(x)f(y)f(x^{-1}) = f(x)f(y)(f(x))^{-1} \\ &\in f(x)H'(f(x))^{-1} \subseteq H' \end{aligned}$$

car $H' \triangleleft G'$. On a alors :

$$f(xyx^{-1}) \in H' \text{ d'où } xyx^{-1} \in f^{-1}(H')$$

Conclusion: $\forall x \in G$, $xf^{-1}(H')x^{-1} \subseteq f^{-1}(H')$;

donc $f^{-1}(H')$ est distingué dans G (lorsque H' est distingué dans G').

Cas particulier : $H' = \{1_{G'}\} \Rightarrow H'$ est un sous-groupe distingué dans G'

d'où $f^{-1}(H')$ est distingué dans G .

Or $f^{-1}(H') = f^{-1}(\{1_{G'}\}) = \ker f$, $\ker f$ est donc un sous-groupe distingué de G .

4.5.5 Proposition et définition

Soit $H \triangleleft G$. Soit φ l'application qui à $x \in G$ associe sa classe d'équivalence dans G/H .

Alors φ est un morphisme de groupe et φ est surjectif, appelé surjection canonique de G sur G/H .

Preuve

Soient x et y deux éléments de G alors $\varphi(xy) = xyH = (xH)(yH) = \varphi(x)\varphi(y)$

donc φ est un homomorphisme de groupe.

$\forall z \in G/H$, $\exists x \in G$ tel que $z = xH$ d'où $z = \varphi(x)$.

Donc φ est surjectif.

4.5.6 Théorème Théorème d'isomorphisme

Soit f un morphisme de groupes de G vers G' . Alors il existe un isomorphisme $\tilde{f} : G/\ker f \rightarrow \text{Im } f$ tel que $f = i \circ \tilde{f} \circ p$ où p est le morphisme surjectif de G sur $G/\ker f$ qui, à tout élément de G associe sa classe d'équivalence dans $G/\ker f$ et où i est l'injection canonique de $\text{Im } f$ dans G' : $y \mapsto y$.

C'est à dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ p \downarrow & & \uparrow i \\ G/\ker f & \xrightarrow{\tilde{f}} & \text{Im } f \end{array}$$

Décomposition canonique
d'un morphisme de groupes.

Preuve

* D'après 4.5.4, $\ker f$ est un sous-groupe distingué de G d'où $G/\ker f$ a une structure de groupe pour la loi induite de celle de G .

* D'après 4.5.2, l'image d'un groupe par un morphisme est un sous-groupe du groupe image.

Posons $N = \ker f$.

* Construction de $\tilde{f}$: On pose :

$\forall \bar{x} \in G/N, \tilde{f}(\bar{x}) = f(x)$ où x est un représentant de la classe d'équivalence $\bar{x}$.

* Montrons que $\tilde{f}$ est bien définie c'est à dire que lorsque x et y sont dans la même classe alors $f(x) = f(y)$

Si y est un autre représentant de la classe d'équivalence $\bar{x}$ associée à x , alors $xN = yN$

d'où $xy^{-1} \in N = \ker f$.

On a alors $f(xy^{-1}) = 1_{G'}$ et $f(x)f(y)^{-1} = 1_{G'} \Rightarrow f(x)f(y)^{-1} = 1_{G'}$ d'où $f(x) = f(y)$ donc $\tilde{f}$ est bien une application.

* $\tilde{f}(\bar{x}\bar{y}) = \tilde{f}(xNyN) = \tilde{f}(xyN) = f(xy) = f(x)f(y) = f(x)f(y)$

$\tilde{f}$ est donc un homomorphisme de groupe.

* Montrons que $\tilde{f}$ est injective.

Soient $\bar{x} = xN$ et $\bar{y} = yN \in G/N$ on a:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\bar{x}) = \tilde{f}(\bar{y}) &\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x)(f(y))^{-1} = f(xy^{-1}) \\ &\Leftrightarrow xy^{-1} \in N = \ker f \Leftrightarrow xN = yN \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y} \end{aligned}$$

d'où $\tilde{f}$ est injective.

* Montrons que $\tilde{f}$ est surjective.

Soient $z \in \text{Im } f$ alors $\exists x \in G$ tel que $z = f(x)$.

On a alors : $z = \tilde{f}(xN) = \tilde{f}(\bar{x})$.

Conclusion : $\tilde{f}$ est un isomorphisme de groupes et $G/\ker f \simeq \text{Im } f$.

* l'application $i : \text{Im } f \rightarrow G' : x \mapsto x$ est évidemment un morphisme injectif appelé l'injection canonique de $\text{Im } f$ sur G' .

* $\tilde{iofop}$ est l'application de G vers G' qui, à tout x de G , associe

$$\tilde{iofop}(x) = \tilde{iof}(xN) = i\left(\tilde{f}(xN)\right) = i(f(x)) = f(x).$$

Cela montre que $\tilde{iofop} = f$.

4.5.7 Endomorphismes et isomorphismes

Soient G et G' deux groupes et $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

Définitions

Si $(G, \cdot) = (G', \cdot)$, on dit que f est un endomorphisme de G .

L'ensemble des endomorphismes de G est noté $End(G)$ ou $Hom(G)$.

Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de G dans G' .

Dans ce cas, on dit que G et G' sont isomorphes (ou que G' est isomorphe à G).

Si f est un endomorphisme bijectif de G , on dit que f est un automorphisme de G .

L'ensemble des automorphismes de G est noté $Aut(G)$.

4.5.8 Proposition

Soient G et G' deux groupes isomorphes.

Alors, G est abélien ssi G' est abélien.

Preuve

Soit f un isomorphisme de G dans G' .

a) Supposons que G est abélien.

Soient x'_1 et x'_2 appartenant à G' .

f étant bijective, il existe x_1 et x_2 dans G tels que $x'_1 = f(x_1)$ et $x'_2 = f(x_2)$.

f étant un morphisme, on a $x'_1 x'_2 = f(x_1) f(x_2) = f(x_1 x_2)$.

$$x'_1 x'_2 = f(x_1 x_2) = f(x_2 x_1) = f(x_2) f(x_1) = x'_2 x'_1$$

donc G' est abélien.

b) Supposons que G' est abélien.

Soient x_1 et x_2 appartenant à G .

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2) = f(x_2) f(x_1) = f(x_2 x_1)$$

comme f est injective, on a : $x_1 x_2 = x_2 x_1$ et par conséquent G est abélien.

4.5.9 Proposition

$Aut(G)$ est un groupe pour la composition.

Preuve

* $Aut(G)$ n'est pas vide car il contient l'identité.

* La composée de deux éléments de $End(G)$, donc en particulier de deux éléments de $Aut(G)$, est un élément de $End(G)$.

En outre, si f_1 et f_2 sont des applications bijectives alors $f_1 \circ f_2$ est bijective d'inverse

$$(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_1^{-1}.$$

D'où, la composée de deux automorphismes de G est aussi un automorphisme de G .

$Aut(G)$ est donc stable pour la composition des applications.

Soit f appartenant à $Aut(G)$. Posons $h = f^{-1}$.

Montrons que h appartient à $Hom(G)$: soient x et x' deux éléments de G .

f étant un morphisme, $f(h(x)h(x')) = f(h(x))f(h(x')) = xx' = f(h(xx'))$ car $h = f^{-1} \Rightarrow f \circ h = Id_G$.

D'où, f étant injective, $h(x)h(x') = h(xx')$.

De plus, h est bijective d'inverse f donc h appartient à $Aut(G)$.

$(Aut(G), \circ)$ est un groupe.

UFR SFA

EXAMEN D'ALGÈBRE 1 DE 2^{ème} SESSION

SFA 2 MIA + TCI

2004-2005

Durée: 2 h 30 mn

Exercice 1:

On considère le système de n équations à n inconnues

$$(\sum_n) \left\{ \begin{array}{lcl} 2ax_1 + x_2 & = & 2 \\ x_1 + 2ax_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + 2ax_3 + x_4 & = & 0 \\ \dots\dots\dots & & \\ x_{n-2} + 2ax_{n-1} + x_n & = & 0 \\ x_{n-1} + 2ax_n & = & 0 \end{array} \right.$$

où a est un paramètre réel. Soit $\Delta_n(a)$ le déterminant de $(\sum_n)$.

1) Ecrire la matrice de $(\sum_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Exprimer $\Delta_n(a)$ en fonction de $\Delta_{n-1}(a)$ et de $\Delta_{n-2}(a)$.

2) Etablir que si $\Delta_n(a) \neq 0$, en convenant que $\Delta_0(a) = 1$ alors $x_k = (-1)^{k+1} \frac{\Delta_{n-k}(a)}{\Delta_n(a)} \quad \forall k \in [1; n]$

3) On suppose que $|a| < 1$ et on pose $a = \cos \theta$.

Calculer si possible $\Delta_n(a)$ et x_k pour $n = 4$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$. Résoudre alors $(\sum_4)$.

Exercice 2

Soit G l'ensemble des applications $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $f_{a,b}(x) = ax + b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que G est un groupe pour la composition des applications.

b) Soit H l'ensemble des applications $f_{1,b}$. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G et que

G/H est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3

Soit u l'application linéaire de $E = \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée par rapport à la base canonique est

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 1) Montrer que $\lambda = 2$ est une valeur propre de u .
- 2) Montrer que le noyau N_1 de $(u - 2Id_E)$ est contenu dans le noyau N_2 de $(u - 2Id_E)^2$ et que $\dim N_1 = \dim N_2$ où Id_E est l'application identique de E .

Montrer que M n'est pas semblable à une matrice diagonale.

- 3) M est-elle trigonalisable? si oui trigonaliser M .
- 4) Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5) Résoudre le système : $(\Sigma) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + x_2 + e^t \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 - t \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$

$$\Delta_{x_k} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \ddots & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \\ & & & & 2a & 0 & 0 & & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & 0 & 2a & & \\ & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 2a & & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & & 2a & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 1 & 2a & \end{vmatrix} = 2(-1)^{k+1} \begin{vmatrix} 1 & 2a & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \ddots & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ & & & 1 & 2a & 0 & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 0 & 2a & & \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 2a & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 1 & 2a \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_k} = 2(-1)^{k+1} \begin{vmatrix} 1 & 2a & 1 & & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \ddots & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & 2a & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 1 & 2a & 0 & & & & \\ & & & & 0 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 0 & 0 & 2a & & & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & 2a & 1 & & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 & 2a & \ddots & 0 & 0 & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & 2a & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & 0 & & & 1 & 2a & \end{vmatrix} = 2(-1)^{k+1} \Delta_{n-k}(a)$$

$$x_k = \frac{\Delta_{x_k}}{\Delta_n(a)} = 2(-1)^{k+1} \frac{\Delta_{n-k}(a)}{\Delta_n(a)} \quad \forall k \in [1; n]$$

3) On suppose que $|a| < 1$ et on pose $a = \cos \theta$.

$$\Delta_n(a) = \Delta_n(\cos \theta)$$

$$\Delta_1(a) = 2a = 2 \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta}$$

$$\Delta_2(a) = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2a \end{vmatrix} = 4a^2 - 1 = 4 \cos^2 \theta - 1 = \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta}$$

$$\Delta_3(a) = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 \\ 1 & 2a & 1 \\ 0 & 1 & 2a \end{vmatrix} = 8a^3 - 4a = 8 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta = \frac{\sin 4\theta}{\sin \theta}$$

$$\text{Montrons que } \Delta_n(a) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \cos n\theta + \frac{\sin n\theta \cos \theta}{\sin \theta}$$

1) C'est vrai pour $n = 0, 1, 2$

2) Supposons que $\Delta_n(a) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \quad \forall n \in [1; k]$

$$\text{Alors } \Delta_{k+1}(a) = 2a\Delta_k(a) - \Delta_{k-1}(a)$$

$$\text{D'après l'hypothèse de récurrence, } \Delta_k(a) = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin \theta} \text{ et } \Delta_{k-1}(a) = \frac{\sin k\theta}{\sin \theta}$$

$$\text{donc } \Delta_{k+1}(a) = 2 \cos \theta \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} = \frac{2 \cos \theta \sin(1+k)\theta - \sin k\theta}{\sin \theta}$$

$$2 \cos \theta \sin(1+k)\theta - \sin k\theta = ?$$

$$\sin(2+k)\theta = \sin\theta \cos(1+k)\theta + \cos\theta \sin(1+k)\theta = \sin\theta \cos\theta \cos k\theta - \sin^2\theta \sin k\theta + \cos\theta \sin(1+k)\theta$$

$$\sin\theta \cos k\theta = \sin(1+k)\theta - \cos\theta \sin k\theta$$

$$\sin(2+k)\theta = \sin(1+k)\theta \cos\theta - \cos^2\theta \sin k\theta$$

$$\sin(2+k)\theta = (\cos\theta)([\sin(1+k)\theta - \cos\theta \sin k\theta]) - \sin^2\theta \sin k\theta + \cos\theta \sin[(1+k)\theta] = 2\cos\theta \sin(1+k)\theta - \sin k\theta$$

$$\Delta_{k+1}(a) = \frac{\sin(2+k)\theta}{\sin\theta}$$

$$3) \text{ Conclusion : } \forall n \geq 1, \Delta_n(a) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

$$x_k = 2(-1)^{k+1} \frac{\Delta_{n-k}(a)}{\Delta_n(a)} = 2[(-1)^{k+1}] \frac{\frac{\sin(n-k+1)\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}} = [(-1)^{k+1}] \frac{\sin(n-k+1)\theta}{\sin(n+1)\theta}$$

$$\text{pour } n=4 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{6}, x_k = 2[(-1)^{k+1}] \frac{\sin(4-k+1)\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{5\pi}{6}} = 2[(-1)^{k+1}] \sin(4-k+1)\frac{\pi}{6}.$$

$(\sum_4)$:

$$x_1 = 2\sin\frac{4\pi}{6} = 2\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}; x_2 = -2\sin\frac{3\pi}{6} = -2\sin\frac{\pi}{2} = -2$$

$$x_3 = 2\sin\frac{2\pi}{6} = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}; x_4 = -2\sin\frac{\pi}{6} = -1$$

$$\boxed{S = \{\sqrt{3}; -2; \sqrt{3}; -1\}}$$

$$\text{Méthode directe } (\sum_4) : \begin{cases} \sqrt{3}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + \sqrt{3}x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + \sqrt{3}x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + \sqrt{3}x_4 = 0 \end{cases},$$

$$\boxed{S = \{x_1 = \sqrt{3}; x_2 = -2; x_3 = \sqrt{3}; x_4 = -1\}}$$

Exercice 2

Soit G l'ensemble des applications $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $f_{a,b}(x) = ax + b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) * $\forall a, c \in \mathbb{R}^*$ et $b, d \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_{a,b} \circ f_{c,d}(x) = a(cx + d) + b = acx + ad + b = f_{ac, ad+b}(x)$.

$f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac, ad+b} \in G$ car $ac \in \mathbb{R}^*$. La loi $\circ$ est donc stable dans G .

* La composition des applications est associative en général.

* $f_{1,0} \in G$ et $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $f_{a,b} \circ f_{1,0} = f_{a,b} = f_{1,0} \circ f_{a,b}$. donc $f_{1,0}$ est l'élément neutre de G .

* $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ $f_{a,b} \circ f_{1/a, -b/a} = f_{a/a, -b+b} = f_{1,0}$ donc $f_{1/a, -b/a}$ est l'élément symétrique de $f_{a,b}$ dans G .

Conclusion : $(G, \circ)$ est un groupe.

$f_{2,0} \circ f_{1,1} = f_{2,2}$ et $f_{1,1} \circ f_{2,0} = f_{2,1} \neq f_{2,2}$ car $f_{2,1}(0) = 1$, mais $f_{2,2}(0) = 2$

$(G, \circ)$ est un groupe non abélien.

b) Soit H l'ensemble des applications $H = \{f_{1,b} : b \in \mathbb{R}\}$

* $H \neq \emptyset$ car $f_{1,0} \in H$.

* $H \subseteq G$.

* $\forall f, h \in H$, soient b et $d \in \mathbb{R}$ / $f_{1,b} = f$ et $f_{1,d} = h$,

$$f \circ h^{-1} = f_{1,b} \circ f_{1,d}^{-1} = f_{1,b} \circ f_{1,-d} = f_{1,-d+b} \in H.$$

Conclusion : H est un sous-groupe de G

* $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, d \in \mathbb{R}$ / $f_{a,b} = g$ et $f_{1,d} = h$,

$$g^{-1} \circ h \circ g = f_{a,b}^{-1} \circ f_{1,d} \circ f_{a,b} = f_{a,b}^{-1} \circ f_{a,b+d} = f_{1/a, -b/a} \circ f_{a,b+d} = f_{1,d/a} \in H$$

donc H est un sous-groupe distingué de G .

* Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ f_{a,b} & \longmapsto & a \end{array}$

$$\varphi(f_{a,b} \circ f_{c,d}) = \varphi(f_{ac, ad+b}) = ac = \varphi(f_{a,b}) \times \varphi(f_{c,d})$$

donc φ est un morphisme de groupe; $\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{1\}) = H$.

D'après le premier théorème d'isomorphisme, $G/\ker \varphi \simeq \text{Im} \varphi = \mathbb{R}^*$

donc G/H est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3 Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$1) M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = -(X-3)(X-1)^2 = -X^3 + 5X^2 - 7X + 3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ les vecteurs propres: } 3 \leftrightarrow e_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_0}, \quad 1 \leftrightarrow e_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_0}, \quad e_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_0}.$$

$$\text{Soit } \mathcal{B} = \{e_1; e_2; e_3\}; \text{ c'est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ et la matrice de passage de } \mathcal{B}_0 \text{ à } \mathcal{B} \text{ est } P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Déterminer A^n

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^n & 3^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$c) (\Sigma) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2 + 2t \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - t \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow X' = AX + \Phi, \text{ où } \Phi = \begin{bmatrix} 2t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Posons $Y = P^{-1}X$ et $\Psi = P^{-1}\Phi$.

$$\Psi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix}$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow Y' = P^{-1}AX + \Psi = DY + \Psi \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y_1 + \frac{1}{2}t \\ y_2 - \frac{1}{2}t \\ y_3 + t \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 3y_1 + \frac{1}{2}t \\ y_2' = y_2 - \frac{1}{2}t \\ y_3' = y_3 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' - 3y_1 = \frac{1}{2}t \\ y_2' - y_2 = -\frac{1}{2}t \\ y_3' - y_3 = t \end{cases}$$

$$y_1' = 3y_1 \Leftrightarrow y_{1H} = C_1 e^{3t}; \quad y_{1p} = C_1(t) e^{3t}$$

$$y_{1p}' = C_1'(t) e^{3t} + \dots$$

$$C_1'(t) e^{3t} = \frac{1}{2}t \Rightarrow C_1'(t) = \frac{1}{2}t e^{-3t} \Rightarrow C_1(t) = \int \frac{1}{2}t e^{-3t} dt = -\frac{1}{18} e^{-3t} (3t + 1) \Rightarrow$$

$$y_{1p} = -\frac{1}{18} (3t + 1)$$

$$y_1 = C_1 e^{3t} - \frac{1}{18} (3t + 1)$$

$$y_2' - y_2 = -\frac{1}{2}t$$

$$y_2' - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2' = y_2 \Leftrightarrow y_{2H} = C_2 e^t; \quad y_{2p} = C_2(t) e^t$$

$$y_{2p}' = C_2'(t) e^t + \dots$$

$$C_2'(t) e^t = -\frac{1}{2}t \Rightarrow C_2'(t) = -\frac{1}{2}t e^{-t} \Rightarrow C_2(t) = -\int \frac{1}{2}t e^{-t} dt = \frac{1}{2}e^{-t}(t+1) \Rightarrow$$

$$y_{2p} = \frac{1}{2}(t+1)$$

$$y_2 = C_2 e^t + \frac{1}{2}(t+1)$$

$$y_3' - y_3 = t$$

$$y_3' - y_3 = 0 \Leftrightarrow y_3' = y_3 \Leftrightarrow y_{3H} = C_3 e^t; \quad y_{3p} = C_3(t) e^t$$

$$y_{3p}' = C_3'(t) e^t + \dots$$

$$C_3'(t) e^t = t \Rightarrow C_3'(t) = t e^{-t} \Rightarrow C_3(t) = \int t e^{-t} dt = (-t-1) e^{-t} \Rightarrow$$

$$y_{3p} = -(t+1)$$

$$y_3 = C_3 e^t - (t+1)$$

$$X = PY = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{3t} - \frac{1}{18}(3t+1) \\ C_2 e^t + \frac{1}{2}(t+1) \\ C_3 e^t - (t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C_1 e^{3t} + C_3 e^t - \frac{4}{3}t - \frac{10}{9} \\ -C_3 e^t + t + 1 \\ C_1 e^{3t} + C_2 e^t + \frac{1}{3}t + \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$\text{ii) } 1) P_M(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ -1 & 1-X & 0 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = -X^3 + 5X^2 - 8X + 4 = -(X-1)(X-2)^2$$

les vecteurs propres : $u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1, \quad v \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 2$

2 est une racine double de $P_M(X)$, donc 2 est une valeur propre double de M .

Mais le sous-espace propre associé à 2 est de dimension 1; donc M n'est pas diagonalisable.

2) les valeurs propres de M sont toutes dans $\mathbb{R}$ donc M est-elle trigonalisable.

Trigonalisons M : Cherchons une matrice $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ semblable à M .

$$f(w) = v + 2w \iff \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} 3x + y \\ -x + y \\ x + y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2x \\ 1 + 2y \\ 2z \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 3x + y = -1 + 2x \\ -x + y = 1 + 2y \\ x + y + z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = -1 \\ x + y = -1 \\ x + y = z \end{cases} \Rightarrow z = -1$$

Pour $x = 0$, $y = -1$ et $z = -1$ on a : $w = (0, -1, -1)$

$$T = P_1^{-1} M P_1$$

$$P_1 = M(\mathcal{B}_0; \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = P_1^{-1} M P_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3) Déterminer M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$M = P_1 T P_1^{-1} \Rightarrow M^n = P_1 T P_1^{-1} P_1 T P_1^{-1} \dots P_1 T P_1^{-1} P_1 T P_1^{-1} = P_1 T^n P_1^{-1}$$

$$T^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$T^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 32 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Montrons que $T^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n(2^{n-1}) \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \forall n \geq 0$.

a) C'est vrai pour $n = 0, 1, 2$

b) Supposons que $T^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k(2^{k-1}) \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$ pour $k \geq 0$.

$$\text{Alors } T^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k(2^{k-1}) \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \times 2^k & 2^k + 2k(2^{k-1}) \\ 0 & 0 & 2 \times 2^k \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k+1} & (k+1)2^{(k+1)-1} \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{bmatrix}$$

c) Conclusion : $\forall n \geq 0, T^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n(2^{n-1}) \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$.

$$M^n = P_1 T^n P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n(2^{n-1}) \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^n = \begin{bmatrix} 2^n + n2^{n-1} & n2^{n-1} & 0 \\ -n2^{n-1} & -n2^{n-1} + 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^n = \begin{bmatrix} (n+2)2^{n-1} & n2^{n-1} & 0 \\ -n2^{n-1} & (-n+2)2^{n-1} & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

UFR SFA

Examen de 2^{ème} session d'Algèbre 1 TCSM- SFA₂

2004-2005

Durée : 2 h 30 mn

Exercice 1

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupe.

- 1) Montrer que le noyau de f est un sous-groupe distingué de G
- 2) Montrer que l'image par f d'un sous-groupe distingué de G est un sous groupe distingué de $f(G)$.

Exercice 2

Soient $G = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ et la loi de composition définie par : $(x; y)(x', y') = (xx', xy' + y)$.

- a) Montrer que G , muni de cette loi de composition, est un groupe. Est-il abélien ?
- b) Soit H la partie de G formée des couples $(x; y)$ tels que $x = 1$. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G et déterminer G/H .

Exercice 3

I) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Déterminer les sous-espaces propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
- 2) Réduire la matrice A si possible.
- 3) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4) Résoudre le système suivant : $(\Sigma) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + t \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 - 2t \\ \frac{dx_3}{dt} = -2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases}$

II) Reprendre les questions 1) à 3) de I) pour la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ à la place de A .

Corrigé de l'examen de 2^{ème} session d'Algèbre 1 TCSM- SFA₂

2004-2005

Exercice 1

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupe.

1) Montrons que le noyau de f est un sous-groupe distingué de G

Soient e et e' les éléments neutres de G et G' respectivement.

a) Soit $H = \ker f = \{x \in G / f(x) = e'\}$.

$$* H \neq \emptyset \text{ car } f(e) = e' \Rightarrow e \in \ker f.$$

$$* H \subseteq G, \text{ trivial.}$$

$$* \forall x, y \in H, f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)[f(y)]^{-1} = e'(e')^{-1} = e'$$

$$\text{donc } xy^{-1} \in \ker f = H.$$

Conclusion: $H = \ker f$ est un sous-groupe de G .

b) $\forall x \in G, xHx^{-1}$ est-il inclus dans H ?

$$\forall h \in H, f(xhx^{-1}) = f(x)f(h)f(x^{-1}) = f(x)e'f(x)^{-1} = f(x)f(x)^{-1} = e'$$

$$\text{donc } xhx^{-1} \in H \text{ et } xHx^{-1} \subseteq H.$$

Conclusion: $H \triangleleft G$.

2) Montrons que l'image par f d'un sous-groupe distingué de G est un sous groupe distingué de $f(G)$.

a) Montrons que l'image par f d'un sous-groupe distingué E de G , c'est à dire $f(E)$, est un sous-groupe de G' :

$$* f(E) \neq \emptyset \text{ car } f(e) = e' \in f(E).$$

$$* f(E) \subseteq G', \text{ trivial.}$$

$$* \forall x, y \in f(E), \exists a, b \in G / f(a) = x \text{ et } f(b) = y$$

$$xy^{-1} = f(a)(f(b))^{-1} = f(ab^{-1}) \in f(E) \quad \text{donc } xy^{-1} \in f(E).$$

Conclusion: $f(E)$ est un sous-groupe de G' et pour les mêmes raisons $f(G)$ est aussi un sous-groupe de G' ;

comme $f(G)$ contient $f(E)$, $f(E)$ est un sous-groupe de $f(G)$.

b) $f(E) \triangleleft f(G)$:

$\forall x \in f(G)$, $xf(E)x^{-1}$ est-il inclus dans $f(E)$?

$x \in f(G) \Rightarrow \exists a \in G / f(a) = x$;

$\forall y \in f(E)$, $\exists b \in E / f(b) = y$ on a alors :

$$xyx^{-1} = f(a)f(b)[f(a)]^{-1} = f(a)f(b)f(a^{-1}) = f(aba^{-1}) \in f(E) \text{ car } E \triangleleft G \Rightarrow aba^{-1} \in E$$

donc $xf(E)x^{-1} \subseteq f(E)$ et $f(E)$ est distingué dans $f(G)$.

Exercice 2

Soient $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ et la loi de composition définie par :

$$(x, y)(x', y') = (xx', xy' + y).$$

a) Montrer que G , muni de cette loi de composition, est un groupe. Est-il abélien ?

* La loi est interne dans G (donc G est stable):

$\forall (x, y), (x', y') \in G$, on a: $x \neq 0$ et $x' \neq 0$ donc $xx' \neq 0$ et $(x, y)(x', y') = (xx', xy' + y) \in G$.

* La loi est associative dans G . En effet, $\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in G$,

$$[(x, y)(x', y')](x'', y'') = (xx', xy' + y)(x'', y'') = ((xx')x'', (xx')y'' + xy' + y)$$

$$[(x, y)(x', y')](x'', y'') = [x(x'x''), x(x'y'' + y') + y] = (x, y)[(x'x''), (x'y'' + y')] = (x, y)[(x', y')(x'', y'')].$$

* $(1, 0)$ est l'élément neutre de G : $(1, 0) \in G$ et $\forall (x, y) \in G$,

$$(x, y)(1, 0) = (x \times 1, x \times 0 + y) = (x, y) \text{ et } (1, 0)(x, y) = (1 \times x, 1 \times y + 0) = (x, y)$$

* $\forall (x, y) \in G$, (x, y) est symétrisable dans G .

En effet, $x \neq 0$ et $(1/x, -y/x) \in G$ et l'on a:

$$\begin{cases} (x, y)(1/x, -y/x) = (x \times (1/x), x \times (-y/x) + y) = (1, 0) \\ (1/x, -y/x)(x, y) = ((1/x) \times x, (1/x) \times y + (-y/x)) = (1, 0) \end{cases}$$

Conclusion : G est un groupe.

* Est-il abélien ?

$$(2, 1)(1, 1) = (2 \times 1, 2 \times 1 + 1) = (2, 3); (1, 1)(2, 1) = (1 \times 2, 1 \times 1 + 1) = (2, 2) \neq (2, 3) = (2, 1)(1, 1)$$

donc G n'est pas abélien.

b) Soit H la partie de G formée des couples $(x; y)$ tels que $x = 1$.

i) Montrons que H est un sous-groupe de G .

$$H = \{(1, a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

$$* H \neq \emptyset \text{ car } (1, 0) \in H.$$

$$* H \subseteq G, \text{ trivialement.}$$

$$* \forall (1, a), (1, b) \in H, (1, a)(1, b)^{-1} = (1, a)(1, -b) = (1 \times 1, 1 \times (-b) + a) = (1, a - b) \in H.$$

donc H est un sous-groupe de G .

ii) Montrons que H est distingué dans G :

$$\forall (x, y) \in G, (x, y)H(x, y)^{-1} \text{ est-il inclus dans } H?$$

$$\forall (1, a) \in H, \text{ on a :}$$

$$(x, y)(1, a)(x, y)^{-1} = (x, xa + y)(1/x, -y/x) = (x \times 1/x, x \times (-y/x) + xa + y) = (1, xa) \in H$$

$$\text{donc } (x, y)H(x, y)^{-1} \subseteq H.$$

Conclusion: $H \triangleleft G$.

$$\forall (x, y) \in G, \text{ on a :}$$

$$(x, y)H = \{(x, y)(1, b) : b \in \mathbb{R}\} = \{(x, xb + y) \text{ tels que } b \in \mathbb{R}\} = \{x\} \times \mathbb{R}$$

$$\boxed{G/H = \{\{x\} \times \mathbb{R} \text{ tels que } x \in \mathbb{R}^*\}}.$$

Exercice 3

$$\text{I) Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

1) Déterminer les sous-espaces propres de A

$$P_A(X) = -(X^3 - X^2 - 5X - 3) = -(X - 3)(X + 1)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } \lambda_1 = 3, (x; y; z) \in E_{\lambda_1} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 3x \\ -y = 3y \\ -2x - 2y + z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y - 2z = 0 \\ -4y = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x; y; z) = (x; 0; -x) = x(1; 0; -1) = xv_1 \end{aligned}$$

$$\text{où } v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \{v_1\} \text{ est une base de } E_{\lambda_1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } \lambda_2 = -1, (x; y; z) \in E_{\lambda_2} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = -x \\ -y = -y \\ -2x - 2y + z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ y = y \\ -2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + y \\ z = x + y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x; y; z) = (x; y; x + y) = x(1; 0; 1) + y(0; 1; 1) = xv_2 + yv_3 \end{aligned}$$

$$\text{où } v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \{v_2, v_3\} \text{ est une base de } E_{\lambda_2},$$

$h_i = \dim E_{\lambda_i} = k_i$ l'ordre de multiplicité de $\lambda_i \forall i$ donc la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2) Réduisons la matrice A : Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$

$$\text{La matrice de passage de } \mathcal{B} \text{ à } \mathcal{B}' \text{ est } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matrice de passage de } \mathcal{B}' \text{ à } \mathcal{B} \text{ est } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est A .

La matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est alors $D = P^{-1}AP$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Calculons A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n & -3^n + (-1)^n \\ 0 & 2(-1)^n & 0 \\ -3^n + (-1)^n & -3^n + (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-1)^n & -\frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}(-1)^n \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ -\frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}(-1)^n & -\frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}(-1)^n \end{pmatrix}$$

4) Résolvons le système suivant : $(\Sigma) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + t \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 - 2t \\ \frac{dx_3}{dt} = -2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases}$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow X' = AX + \Phi, \text{ où } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \Phi = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Posons $Y = P^{-1}X$ et $\Psi = P^{-1}\Phi$.

$$\Psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ \frac{3}{2}t \\ -2t \end{pmatrix}$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow Y' = P^{-1}AX + \Psi = DY + \Psi \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ \frac{3}{2}t \\ -2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y_1 - \frac{1}{2}t \\ -y_2 + \frac{3}{2}t \\ -y_3 - 2t \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 3y_1 - \frac{1}{2}t \\ y_2' = -y_2 + \frac{3}{2}t \\ y_3' = -y_3 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' - 3y_1 = -\frac{1}{2}t \\ y_2' + y_2 = \frac{3}{2}t \\ y_3' + y_3 = -2t \end{cases}$$

L'équation homogène associée à la première équation est

$$y_1' - 3y_1 = 0 \Leftrightarrow y_{1H} = C_1 e^{3t}; \quad y_{1p} = C_1(t) e^{3t}$$

$$y_{1p}' = C_1'(t) e^{3t} + \dots$$

$$C_1'(t) e^{3t} = -\frac{1}{2}t \Rightarrow C_1'(t) = -\frac{1}{2}t e^{-3t} \Rightarrow C_1(t) = -\int \frac{1}{2}t e^{-3t} dt = \frac{1}{18} e^{-3t} (3t + 1) \Rightarrow$$

$$y_{1p} = \frac{1}{18} (3t + 1)$$

$$y_1 = C_1 e^{3t} + \frac{1}{18} (3t + 1)$$

$$y_2' + y_2 = \frac{3}{2}t \text{ a pour équation homogène associée :}$$

$$y_2' + y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2' = -y_2 \Leftrightarrow y_{2H} = C_2 e^{-t}; \quad y_{2p} = C_2(t) e^{-t}$$

$$y_{2p}' = C_2'(t) e^{-t} + \dots$$

$$C_2'(t)e^{-t} = \frac{3}{2}t \Rightarrow C_2'(t) = \frac{3}{2}te^t \Rightarrow C_2(t) = \frac{3}{2} \int te^t dt = \frac{3}{2}(t-1)e^t \Rightarrow$$

$$y_{2p} = \frac{3}{2}(t-1)$$

$$y_2 = C_2e^{-t} + \frac{3}{2}(t-1)$$

$y_3' + y_3 = -2t$ a pour équation homogène associée :

$$y_3' + y_3 = 0 \Leftrightarrow y_3' = -y_3 \Leftrightarrow y_{3H} = C_3e^{-t}; y_{3p} = C_3(t)e^{-t}$$

$$y_{3p}' = C_3'(t)e^{-t} + \dots$$

$$C_3'(t)e^{-t} = -2t \Rightarrow C_3'(t) = -2te^t \Rightarrow C_3(t) = -2 \int te^t dt = -2(t-1)e^t \Rightarrow$$

$$y_{3p} = -2(t-1)$$

$$y_3 = C_3e^t - 2(t-1)$$

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C_1e^{3t} + \frac{1}{18}(3t+1) \\ C_2e^{-t} + \frac{3}{2}(t-1) \\ C_3e^t - 2(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1e^{3t} + C_2e^{-t} + \frac{5}{3}t - \frac{13}{9} \\ C_3e^t - 2t + 2 \\ -C_1e^{3t} + C_2e^{-t} + C_3e^t - \frac{2}{3}t + \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$S = \left\{ \left(C_1e^{3t} + C_2e^{-t} + \frac{5}{3}t - \frac{13}{9}; C_3e^t - 2t + 2; -C_1e^{3t} + C_2e^{-t} + C_3e^t - \frac{2}{3}t + \frac{4}{9} \right) \right\}$$

II) Reprenons les questions 1) à 3) de I) pour la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminons les sous-espaces propres de B .

Le polynôme caractéristique est $P_B(X) = -(X^3 - X - X^2 + 1) = -(X+1)(X-1)^2$;

les valeurs propres sont $\gamma_1 = -1$ et $\gamma_2 = 1$.

Pour $\gamma_1 = -1$:

$$(x; y; z) \in E_{\gamma_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = -x \\ -y + 2z = -y \\ -2x - 2y + z = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; z) = (x; -x; 0) = x(1; -1; 0) = xu_1$$

où $u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ est une base de E_{γ_1} .

Pour $\gamma_2 = -1$:

$$(x; y; z) \in E_{\gamma_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = x \\ -y + 2z = y \\ -2x - 2y + z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; z) = (-y; y; y) = y(-1; 1; 1) = yu_2$$

où $u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ est une base de E_{γ_2} ,

$h_2 = \dim E_{\gamma_2} \neq k_i$ l'ordre de multiplicité de γ_2 donc la matrice B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2) Réduisons la matrice B :

B ayant toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$, elle est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est B .

Soit $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_3 = (\alpha; \beta; \delta)$ à déterminer de telle sorte que $\mathcal{M}(g; \mathcal{B}_1) = T = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } g(u_3) = u_2 + u_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha + 2\beta - 2\delta \\ -\beta + 2\delta \\ -2\alpha - 2\beta + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \beta + 1 \\ \delta + 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta - 2\delta = -1 \\ -2\beta + 2\delta = 1 \\ -2\alpha - 2\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta - 2\delta = -1 \\ -2\beta + 2\delta = 1 \\ -2\alpha - 2\beta = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \beta = \delta - \frac{1}{2} \text{ et } \alpha = -\delta$$

Par exemple $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$ et $\delta = 0$

Prenons $u_3 = \left(0; -\frac{1}{2}; 0\right)$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$ est $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}$ est $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice de g dans $\mathcal{B}_1$ est alors $T = P_1^{-1}BP_1$

$$T = P_1^{-1}BP_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Calculons B^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$T = P_1^{-1}BP_1 \Rightarrow B = P_1TP_1^{-1} \Rightarrow B^n = (P_1TP_1^{-1})^n = P_1TP_1^{-1}P_1TP_1^{-1} \dots P_1TP_1^{-1} = P_1T^nP_1^{-1}$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = T^2T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Raisonnons par récurrence sur n pour montrer la propriété :

$$T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \geq 0$$

* c'est vrai pour $n = 0; 1$ et 2

* Supposons que la propriété est vraie pour $k : T^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\text{alors } T^{k+1} = T^k T = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la propriété est donc vraie pour $k+1$.

$$\text{On conclut que } T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \geq 0$$

$$B^n = P_1 T^n P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n + 2n & 2n & (-1)^n - 1 \\ -2n + (-1)^{n+1} + 1 & -2n + 1 & (-1)^{n+1} + 1 \\ -2n & -2n & 1 \end{pmatrix}$$

UFR SFA

Examen de 1^{ère} session d'Algèbre 1 TCSM- SFA₂

2004-2005

Durée : 2 h 30

Exercice 1 (6 points)

On considère, dans le groupe multiplicatif $GL_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 inversibles,

$$\text{l'ensemble } G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

1) Montrer que G est un sous-groupe non abélien de $GL_2(\mathbb{R})$.

2) (i) Déterminer le centre de G .

(ii) Soit $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G \text{ avec } b = 0 \right\}$, K est-il un sous-groupe de G ? Est-il distingué dans G ?

3) Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G \text{ avec } a = c = 1 \right\}$ et f l'application de G dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ définie par

$$f \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \right] = (a, c).$$

(i) Montrer que f est un homomorphisme de groupes de G dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

(ii) En déduire que H est un sous-groupe distingué de G .

(iii) Montrer que le groupe G/H est isomorphe à $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Exercice 2 (7 points)

$$\text{On considère la matrice } A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Déterminer à l'aide du Théorème de Cayley-Hamilton l'inverse de la matrice A .

2. Déterminer les sous-espaces propres de A . Que peut-on conclure?

3. Soit f l'application linéaire de $E = \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée par rapport à la base canonique est A .

Déterminer une base de $\ker(f - 2Id_E)$ et une base de $\ker(f + Id_E)$.

4. Expliciter une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 3 (7 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1) Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et diagonaliser A .

2) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Résoudre le système suivant : $(\Sigma) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_3 + t \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3 - t \\ \frac{dx_3}{dt} = 2x_1 - 2x_3 \end{array} \right.$

CORRIGÉS ET INDICATIONS

Exercice 1

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

1) Montrons que G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

$$* G \neq \emptyset \text{ car } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

$$* G \subseteq GL_2(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \text{ est inversible } \forall b \in \mathbb{R}.$$

$$* \forall M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G \text{ et } \forall N = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} \in G,$$

$$MN^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a'} & 0 \\ \frac{b}{a'} - \frac{cb'}{a'c'} & \frac{c}{c'} \end{pmatrix}$$

$$\frac{a}{a'} \in \mathbb{R}^*, \frac{b}{a'} - \frac{cb'}{a'c'} \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{c}{c'} \in \mathbb{R}^* \text{ donc } MN^{-1} \in G.$$

donc G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

$$* \text{ Soient } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq AB$$

donc G n'est pas abélien

2) (i) Déterminons le centre de G :

$$Z(G) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G : \forall N = \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & w \end{pmatrix} \in G, MN = NM \right\}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in Z(G) \Leftrightarrow \forall \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & w \end{pmatrix} \in G, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall u, w \in \mathbb{R}^* \text{ et } \forall v \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} au & 0 \\ bu + cv & cw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au & 0 \\ va + wb & cw \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall u, w \in \mathbb{R}^* \text{ et } \forall v \in \mathbb{R}, bu + cv = va + wb$$

$$\Leftrightarrow \forall u, w \in \mathbb{R}^* \text{ et } \forall v \in \mathbb{R}, b(u - w) + (c - a)v = 0$$

Cela équivaut au fait que $b = 0$ et $c - a = 0$ c'est à dire $c = a$ et $b = 0$

$$Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^* \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

$$Z(G) = \{aI_2 : a \in \mathbb{R}^*\}$$

(ii) Soit $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^* \text{ et } c \in \mathbb{R}^* \right\},$

Montrons que K est un sous-groupe de G .

* $K \neq \emptyset$ car $I_2 \in K$.

* $K \subseteq G$.

* $\forall M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K$ et $\forall N = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in K,$

$$MN^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a'} & 0 \\ 0 & \frac{c}{c'} \end{pmatrix}$$

$\frac{a}{a'} \in \mathbb{R}^*$ et $\frac{c}{c'} \in \mathbb{R}^*$ donc $MN^{-1} \in K$.

donc K est un sous-groupe de G .

* Est-il distingué dans G ?

* $\forall M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in K$ et $\forall N = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in K$, MNM^{-1} appartient-il à K ?

$$MNM^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ \frac{ba' - bc'}{a} & c' \end{pmatrix}.$$

Supposons que $b \neq 0$, e., $M \in G - K$.

Alors $MNM^{-1} = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ \frac{b(a' - c')}{a} & c' \end{pmatrix}$ appartient à K si et seulement si $a' = c'$.

Comme il existe des éléments $\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}$ de K tels que $a' \neq c'$, MNM^{-1} n'est pas toujours contenu dans K .

Par conséquent K n'est pas distingué dans G .

Par exemple si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$MNM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \notin K$$

3) Soit f l'application de G dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ définie par

$$f \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \right) = (a, c).$$

(i) $\mathbb{R}^*$ est un groupe multiplicatif et $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ est un groupe muni de la loi produit:

$$(a_1, c_1)(a_2, c_2) = (a_1 \times a_2, c_1 \times c_2)$$

Soient $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} \in G$

$$\begin{aligned} MM' &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba' + cb' & cc' \end{pmatrix} \\ f(MM') &= (aa', cc') = (a, c)(a', c') = f(M)f(M') \end{aligned}$$

donc f est un homomorphisme de groupes de G dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

(ii) On a : $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$ et l'élément neutre de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ est $(1, 1)$.

On sait que $\ker f$ est un sous-groupe distingué dans G .

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G : (a, c) = (1, 1) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = H.$$

donc H est un sous-groupe distingué de G .

(iii) On sait que $G/\ker f \simeq \operatorname{Im} f = \{(a, c) : a \in \mathbb{R}^* \text{ et } c \in \mathbb{R}^*\} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

En fait, f est surjectif. Par conséquent, $G/H \simeq \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$:

le groupe G/H est isomorphe à $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Exercice 2

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$

1. Le polynôme caractéristique de A est : $P_A(X) = -(X^3 - 3X - 2) = -(X - 2)(X + 1)^2$

D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, $P_A(A) = 0$ donc $-(A^3 - 3A - 2I_3) = 0$

$$A^3 - 3A - 2I_3 = 0 \Rightarrow A^3 - 3A = 2I_3 \Rightarrow \frac{1}{2}(A^2 - 3I_3)A = I_3$$

D'où A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3I_3) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2. $P_A(X) = -(X^3 - 3X - 2) = -(X - 2)(X + 1)^2$ donc les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$.

Les sous-espaces propres sont : $E_{\lambda_1} = \ker(f - 2Id_E) = \langle e_1 \rangle$ et $E_{\lambda_2} = \ker(f + Id_E) = \langle e_2, e_3 \rangle$

où $e_1 = (1; 0; 1)$, $e_2 = (2; 1; 0)$ et $e_3 = (2; 0; 1)$

3. $\ker(f - 2Id_E) = \langle e_1 \rangle = \{\alpha((2; 1; 0)) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{((2\alpha; \alpha; 0)) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$\ker(f + Id_E) = \langle e_2, e_3 \rangle = \{\alpha((2; 1; 0)) + \beta((2; 0; 1)) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{((2\alpha + 2\beta; \alpha; \beta)) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

$$4. \quad e_1 \in \ker(f - 2Id_E) \Rightarrow (f - 2Id_E)(e_1) = 0 \Rightarrow f(e_1) = 2e_1$$

$$e_2 \in \ker(f + Id_E) \Rightarrow (f + Id_E)(e_2) = 0 \Rightarrow f(e_2) = -e_2$$

$$e_3 \in \ker(f + Id_E) \Rightarrow (f + Id_E)(e_3) = 0 \Rightarrow f(e_3) = -e_3.$$

On a: $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit A' la matrice de f dans cette base où f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{B}_0$ est A .

La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est alors $A' = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ avec P inversible.

$$\text{Or, } \begin{cases} f(e_1) = 2e_1 = 2e_1 + 0 \times e_2 + 0 \times e_3 \\ f(e_2) = -e_2 = 0 \times e_1 + (-1)e_2 + 0 \times e_3 \\ f(e_3) = -e_3 = 0 \times e_1 + 0 \times e_2 + (-1)e_3 \end{cases} \Rightarrow f(e_1) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} ; f(e_2) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } f(e_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

donc la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ obtenu en mettant en colonnes les coordonnées des vecteurs $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{ccc} f(e_1) & & f(e_3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{donc } A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ est une matrice diagonale } D.$$

Exercice 3

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est : $P_A(X) = -(X^3 - 2X^2 - X + 2) = -(X - 1)(X - 2)(X + 1)$;

les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 1$.

Ce sont des valeurs propres simples donc A est diagonalisable.

Les sous-espaces propres sont : $E_{\lambda_1} = \ker(f - 2Id_E) = \langle e_1 \rangle$, $E_{\lambda_2} = \ker(f + Id_E) = \langle e_2 \rangle$ et $E_{\lambda_3} = \ker(f - Id_E) = \langle e_3 \rangle$

où $e_1 = (2; 1; 1)$, $e_2 = (-1; 1; -2)$ et $e_3 = (0; 1; 0)$.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}; P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Calculer $A^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}^n = PD^nP^{-1}$

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}2^n - \frac{1}{3}(-1)^n & 0 & -\frac{2}{3}2^n + \frac{2}{3}(-1)^n \\ \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n - 1 & 1 & -\frac{1}{3}2^n - \frac{2}{3}(-1)^n + 1 \\ \frac{2}{3}2^n - \frac{2}{3}(-1)^n & 0 & -\frac{1}{3}2^n + \frac{4}{3}(-1)^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - (-1)^n & 0 & -2 \times 2^n + 2(-1)^n \\ 2 \times 2^n + (-1)^n - 1 & 1 & -2^n - 2(-1)^n + 1 \\ 2 \times 2^n - 2(-1)^n & 0 & -2^n + 4(-1)^n \end{pmatrix}$$

$$3) \quad (\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_3 + t \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3 - t \\ \frac{dx_3}{dt} = 2x_1 - 2x_3 \end{array} \right. ,$$

Résultat :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = \left(-2C_2 - \frac{1}{3}C_3\right)e^{-t} + 2C_2e^{2t} + \frac{4}{3}C_3e^{2t} - t \\ x_2(t) = \left(C_2 + \frac{2}{3}C_3\right)e^{2t} + (C_1 - 3C_2 - C_3)e^t + \left(2C_2 + \frac{1}{3}C_3\right)e^{-t} + 2t + \frac{3}{2} \\ x_3(t) = \left(\frac{4}{3}C_2 - \frac{2}{3}C_3\right)e^{-t} + \left(C_2 + \frac{2}{3}C_3\right)e^{2t} + t + \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Exercices

Exercice 1

Soit a un paramètre réel. On considère les points $A = (1 + a, a)$, $B = (0, 1 + a)$ et $C = (a, 1 - a)$ du plan.

a) A quelle condition les points A , B et C sont-ils alignés ?

b) Quelle est l'aire du parallélogramme dont deux côtés sont AB et AC ?

Quelle est l'aire du triangle ABC ?

c) En tournant autour du triangle dans le sens trigonométrique, quel point rencontre-t-on après A ?

d) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$. Soient $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$.

Répondre aux questions a), b) et c) en remplaçant ABC par $A'B'C'$.

Exercice 2

Soit a un paramètre réel. On considère les points $A = (1 + a, a)$, $B = (0, 1 + a)$ et $C = (a, 1 - a)$ et $D = (1, a)$ du plan.

a) A quelle condition le quadrilatère $ABCD$ est-il convexe (i.e. tourne toujours dans le même sens) ?

b) Lorsque c'est le cas, calculer son aire de deux façons différentes en le partageant en triangles.

c) Soient t, u, v, w quatre vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tels que $t + u + v + w = 0$.

$$\text{Montrer que } \det(t, u) + \det(v, w) = \det(u, v) + \det(w, t).$$

Quel est le lien entre cette propriété et le partage d'un quadrilatère en triangles ?

Exercice 3

a) Calculer les déterminants des matrices suivantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 10 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

b) En déduire le volume du parallélépipède de $\mathbb{R}^3$ construit sur les vecteurs

$$u = (1, 1, 1) \quad v = (2, 3, 4) \quad \text{et} \quad w = (3, 6, 10).$$

Exercice 4

Calculer le déterminant

$$D(a, b, c) = \det \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$$

en le factorisant.

On montrera qu'il vaut $(a+b+c)^3$.

Exercice 5

On considère les déterminants de Vandermonde

$$D(a, b, c) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \quad D(a, b, c, d) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $D(a, b, c)$

b) Montrer que sans changer la valeur de $D(a, b, c, d)$, on peut remplacer sa dernière ligne par

$f(a), f(b), f(c), f(d)$ où f est un polynôme de la forme $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

En choisissant astucieusement f de sorte que la dernière ligne n'ait qu'un seul terme non nul, et en développant, montrer que $D(a, b, c, d) = (d-a)(d-b)(d-c)D(a, b, c)$.

c) En déduire la valeur de $D(a, b, c, d)$. Peut-on généraliser?

d) On considère la courbe γ dans l'espace paramétrée par $t \mapsto \gamma(t) = (t, t^2, t^3)$. A quelle condition trois points $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ et $\gamma(c)$ de la courbe sont ils contenus dans un même plan passant par l'origine ?

Exercice 6 Calculer

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

Soit le déterminant

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos 2\alpha & \cos 2\beta & \cos 2\gamma \end{pmatrix}.$$

- a) Calculer directement $D(\alpha, \beta, \gamma)$
- b) En utilisant la formule $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, ramener ce calcul à celui d'un déterminant de Vandermonde.

Exercice 8

- a) Ecrire l'équation du plan P_1 de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(2, 1, -3)$.
- b) Ecrire l'équation du plan P_2 de $\mathbb{R}^3$ orthogonal au vecteur $(2, 3, 4)$.
- c) Soit P_3 le plan orthogonal au vecteur $V = (\alpha, \beta, \gamma)$. A quelle condition (nécessaire et suffisante) l'intersection des trois plans $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ contient-elle une droite ?

Exercice 9

Soit a un paramètre réel. Soient $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 4)$ et $C = (3, 4, a)$ trois points de l'espace.

Quelle est l'aire du triangle ABC ? A quelle condition les points A , B et C sont-ils alignés ?

Exercice 10

Donner une équation de l'hyperplan engendré par les vecteurs $v_1 = (0, 1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_3 = (2, 3, 4, 6)$ de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11

- a) Soit $D_n(x)$ le déterminant de la matrice (n, n) dont tous les éléments sont égaux à 1 sauf ceux de la diagonale principale qui valent $1 + x$.

Calculer $D_n(x)$ en le factorisant.

Quelles sont les racines de $D_n(x) = 0$ et leur multiplicités ?

(on pourra se contenter de traiter les cas $n = 2, 3, 4$).

b) Même question pour le déterminant $\Delta(x)$ de la la matrice (n, n) dont tous les éléments sont égaux à x sauf ceux de la diagonale principale qui valent $1 + x$.

Quel est le degré de $\Delta(x)$?

c) Calculer

$$\det \begin{pmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{pmatrix}$$

On pourra effectuer un calcul direct, ou vérifier que c'est un polynôme en x dont on estimera le degré.

Exercice 12

Calculer le "déterminant circulant"

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 13

Soient $D = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $D(x) = \det \begin{pmatrix} 2+x & 3 & 4 \\ 3 & 4+x & 5 \\ 4 & 5 & 6+x \end{pmatrix}$.

Calculer D et factoriser $D(x)$.

Exercice 1

Soient les quatre fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telles que

$$f_1(x) = x; \quad f_2(x) = \frac{1}{x}; \quad f_3(x) = -x; \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Montre que $G = \{f_1; f_2; f_3; f_4\}$ est un groupe pour la loi $\circ$. Est-il abélien?

Exercice 2

Les ensembles suivants, pour les lois considérées, sont-ils des groupes?

1. $] -1; 1[$ muni de la loi définie par $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$;
2. $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ pour la multiplication usuelle;
3. $\mathbb{R}_+$ pour la multiplication usuelle;
4. $\{f_{a,b} : x \in \mathbb{C} \mapsto ax + b : a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; b \in \mathbb{C}\}$ pour la loi de composition des applications.

Exercice 3

Soient G un groupe. Pour tout couple $(x, y) \in G \times G$, l'élément $x^{-1}y^{-1}xy$ est appelé le commutateur de x et y et un commutateur de G .

1) Montrer que l'inverse d'un commutateur est un commutateur et que l'ensemble G' des produits des commutateurs de G est un sous-groupe distingué de G (on l'appelle le sous-groupe dérivé de G .)

2) Montrer que G/G' est un groupe abélien.

Exercice 4

Soient G le groupe des matrices complexes inversibles de type $(3, 3)$, G_1 l'ensemble des éléments de G qui sont des matrices scalaires, G_2 l'ensemble des éléments de G qui sont de déterminant 1.

a) Montrer que G_1 et G_2 sont des sous-groupes distingués de G . Sont-ils abéliens ?

b) Montrer que, pour tout $g \in G$, il existe exactement trois couples $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ / $g = g_1g_2 = g_2g_1$.

UNIVERSITE Nangui Abrogoua

UFR SFA

L 2

Fiche de T D N° 2 D'Algèbre 3

2015-2016

Exercice 1

Soit G un groupe contenant un élément non nilpotent u et soit n un entier strictement positif qui vérifie l'égalité : $(ab)^n = a^n b^n \forall a, b \in G$.

Soient $H_1 = \{x^n : x \in G\}$ et $H_2 = \{x \in G : x^n = 1_G\}$, où 1_G est l'élément neutre de G ,

a) Montrer que H_1 contient une infinité d'éléments et que $H_1 \neq H_2$.

b) Montrer que H_1 et H_2 sont des sous-groupes de G . Sont-ils distingués dans G ? justifier.

Exercice 2

Soient G un groupe d'ordre n et H un sous-groupe de G . Montrer que l'ensemble $N(H)$ des éléments s de G tels que $s^{-1}Hs = H$, appelé normalisateur de H , est un sous-groupe de G dans lequel H est distingué et que, si H n'est pas un sous-groupe distingué de G , alors $N(H) \neq G$ et réciproquement.

Exercice 3

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G . On note $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$.

1. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$. En déduire que si H est distingué dans G alors HK est un sous-groupe de G .
2. Calculer le noyau et l'image de f . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un morphisme de groupes.
3. On suppose désormais que $\forall h \in H, \forall k \in K : hk = kh$. Montrer que l'application $f : H \times K \rightarrow G$ définie par $\forall h \in H, \forall k \in K : f(h, k) = hk$ est un morphisme de groupes.

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

UNIVERSITÉ Nangui Abrogoua

UFR SFA

L 2

Fiche de T D N° 4 D'Algèbre 3

2015-2016

Exercice 1

1) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 10 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2) Sont-elles semblables à des matrices diagonales?

3) Calculer A^n puis B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Calculer, à l'aide du Théorème de Hamilton-Cayley, l'inverse de la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3

Réduire les matrices suivantes sur $\mathbb{C}$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ et } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

UNIVERSITÉ Nangui Abrogoua

UFR SFA

L 2

Fiche de T D N° 5 D'Algèbre 3

2015-2016

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 10 & 36 & 0 \\ -3 & -11 & 0 \\ 9 & 36 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer les sous-espaces propres de A . Que peut-on conclure?
2. Soit f l'application linéaire de $E = \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée par rapport à la base canonique est A .
 - a) Déterminer une base de $\ker(f - Id_E)$ et une base de $\ker(f + 2Id_E)$.
 - b) Expliciter une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 2

Soit $M = \begin{bmatrix} 10 & 36 & 0 \\ -3 & -11 & 0 \\ 9 & 36 & 1 \end{bmatrix}$

1) Réduire la matrice M .

2) Calculer M^n

3) Résoudre les systèmes : $(\Sigma) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 10x_1 + 36x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -3x_1 - 11x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = 9x_1 + 36x_2 + x_3 \end{cases}$ et $(\Sigma') \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 10x_1 + 36x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -3x_1 - 11x_2 + t \\ \frac{dx_3}{dt} = 9x_1 + 36x_2 + x_3 + e^t \end{cases}$