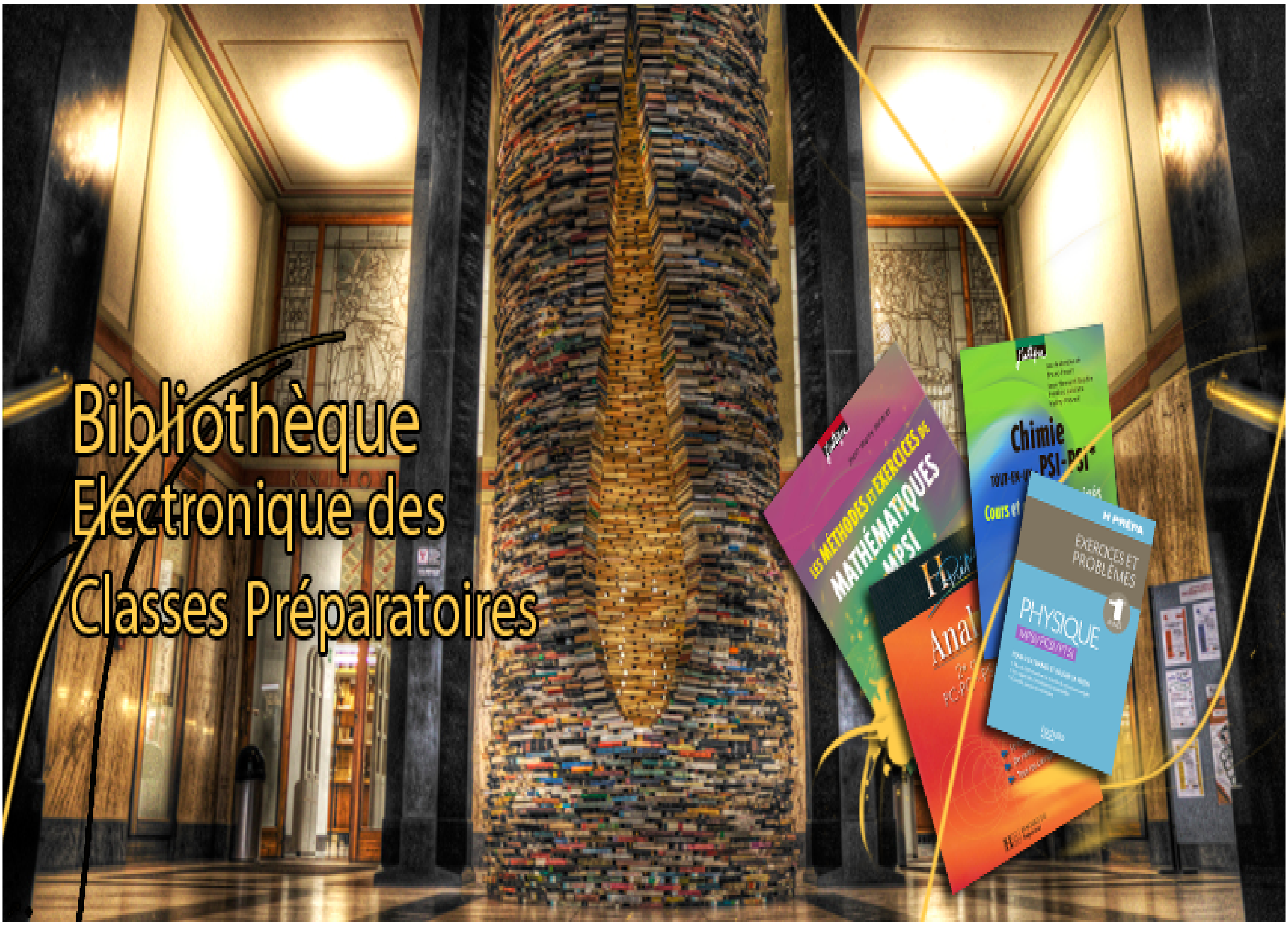

Bibliothèque
Electronique des
Classes Préparatoires

# Maths MPSI

## TESTS DE COURS

**Hervé Gianella**
Professeur de mathématiques
spéciales MP* au lycée
Blaise Pascal à Orsay

**Franck Taieb**
Professeur de mathématiques
spéciales MP* au lycée
Pasteur de Neuilly

Illustration de couverture :
© puentes – Fotolia.com


ISBN 978-2-10-056819-2

# Table des matières

## PARTIE 3

## ALGÈBRE

# Avant-Propos

*Ce livre a pour vocation d'aider les élèves dans la première année de leurs études supérieures. Il complète les excellents ouvrages de cours ou d'exercices corrigés déjà parus dans la collection « J'intègre » du même éditeur.*

La première difficulté que rencontrent les élèves de mathématiques supérieures est l'apprentissage du cours : il s'agit non seulement de connaître les définitions, les méthodes et techniques de calcul, les théorèmes et leurs démonstrations, mais aussi de savoir mobiliser ces connaissances pour répondre à des problèmes de mathématiques. C'est ce qui permet de distinguer un « cours appris » d'un « cours compris ».

Une des nombreuses clés du succès consiste à maîtriser le questionnement didactique : on retient beaucoup plus facilement une notion, un théorème, si on les perçoit comme une réponse à une question. Reste à trouver la question et apprendre à s'en poser, ce qui n'est jamais facile pour un étudiant sorti de terminale.

C'est notre expérience auprès de ces élèves, comme professeurs et comme colleurs, qui nous a conduit à élaborer ces tests de connaissances. Leur objectif est triple :

- détecter au travers de questions simples les points du cours qui ne sont pas suffisamment compris,
- manipuler les notions du cours sur des exemples concrets,
- progresser dans la logique et la rigueur.

Nous proposons un test par chapitre principal du cours de première année. Conformes au programme officiel, ces tests sont tous indépendants les uns des autres, et peuvent être abordés dans n'importe quel ordre, au fil du cours prodigué par votre professeur de mathématiques. Comptez entre quinze et vingt-cinq minutes pour répondre aux questions du test (généralement entre 15 et 20 questions), puis prenez le temps qu'il faut pour lire et comprendre le corrigé. Les questions sont en principe de difficulté croissante, la majorité des élèves auxquels nous avons proposé ces tests donnent entre 50 % et 60 % de réponses justes. Au-delà de 75 % de réponses justes, vous pouvez être très satisfaits de votre performance.

Dans les corrigés, nous ne nous contentons pas de vous donner la bonne réponse, mais nous vous expliquons aussi pourquoi les autres réponses proposées sont fausses. C'est une manière efficace de prendre du recul sur votre cours.

Nous espérons que ces tests trouveront leur place chaque semaine dans votre emploi du temps. C'est au travers d'un investissement régulier que votre travail portera ses fruits.

Les auteurs

# Partie 1

# Programme de début d'année

# 1 Nombres complexes

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les calculs algébriques avec les nombres complexes
- La conjugaison et ses propriétés
- Les propriétés multiplicatives du module
- Le calcul du module et de l'argument
- L'inégalité triangulaire et ses variantes
- L'extraction des racines carrées et l'équation du second degré
- Les relations coefficients-racines dans une équation du second degré

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 26. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Soit $z \in \mathbf{C}$. Le nombre complexe $(z-i)(z-2i)$ est égal à

❒ **a.** $z^2-2$ ❒ **b.** $z^2+2$ ❒ **c.** $z^2-3iz-2$ ❒ **d.** $z^2-3iz+2$

**2** Si $z$ est un nombre complexe, quelle est la partie imaginaire de $z-i\overline{z}$ ?

❒ **a.** $2\,\mathrm{Im}(z)$ ❒ **b.** $\mathrm{Im}(z)+i\,\mathrm{Re}(\overline{z})$

❒ **c.** $\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Re}(z)$ ❒ **d.** $\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Re}(z)$

**3** Si $z$ est un nombre complexe, quelle est la partie réelle de $z+i\overline{z}$ ?

❒ **a.** $\mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Re}(\overline{z})$ ❒ **b.** $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)$

❒ **c.** $\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)$ ❒ **d.** $2\,\mathrm{Re}(z)$

**4** Si $x$ est un nombre réel, la partie réelle de $z=\dfrac{1+ix}{1-ix}$ est

❒ **a.** $\dfrac{1}{1+x^2}$ ❒ **b.** $\dfrac{1}{1-x^2}$ ❒ **c.** $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ ❒ **d.** $\dfrac{2x}{1-x^2}$

**5** Un argument de $1 - i$ est

❒ **a.** $\frac{\pi}{4}$ ❒ **b.** $\frac{3\pi}{4}$ ❒ **c.** $\frac{5\pi}{4}$ ❒ **d.** $\frac{7\pi}{4}$

**6** Quel est l'inverse de $3 - 4i$ ?

❒ **a.** $\frac{1}{3} - \frac{i}{4}$ ❒ **b.** $\frac{1}{3} + \frac{i}{4}$ ❒ **c.** $\frac{3}{5} + \frac{4i}{5}$ ❒ **d.** $\frac{3}{25} + \frac{4i}{25}$

**7** Le module de $z = \dfrac{1+i}{1 - i\sqrt{3}}$ est

❒ **a.** $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}$ ❒ **b.** $\sqrt{2}$ ❒ **c.** $\frac{1}{2}$ ❒ **d.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**8** Un argument de $z = \dfrac{1+i}{1 - i\sqrt{3}}$ est

❒ **a.** $-\frac{\pi}{12}$ ❒ **b.** $\frac{\pi}{12}$ ❒ **c.** $\frac{5\pi}{12}$ ❒ **d.** $\frac{7\pi}{12}$

**9** L'inverse d'un nombre complexe non nul $z$ est égal à son conjugué $\bar{z}$ si et seulement si

❒ **a.** $z = 1$ ❒ **b.** $|z| = 1$

❒ **c.** $z$ est réel ❒ **d.** $z$ est imaginaire pur

**10** Soit $z \in \mathbf{C}$. Que dire de $z$ si $z^2$ est réel ?

❒ **a.** $z$ est forcément réel ❒ **b.** $z$ est réel ou de module 1

❒ **c.** $z$ est réel ou imaginaire pur ❒ **d.** $z$ est réel ou égal à $i$ ou $-i$

**11** Soit $(z, u) \in \mathbf{C}^2$ avec $u^2 = z$. Quand peut-on dire que $|u| < |z|$ ?

❒ **a.** c'est toujours le cas ❒ **b.** lorsque $z$ n'est pas nul

❒ **c.** lorsque $0 < |z| < 1$ ❒ **d.** lorsque $|z| > 1$

**12** Que dire d'un nombre complexe $z$ dont les deux racines carrées sont conjuguées ?

❒ **a.** c'est toujours le cas ❒ **b.** cela n'est pas possible

❒ **c.** $z$ est un imaginaire pur ❒ **d.** $z$ est un nombre réel négatif

**13** Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$. Si $|z| = 1$ et $|z'| = 2$, alors $|z' - z|$ est

❒ **a.** égal à 1 ❒ **b.** compris entre 1 et $\sqrt{5}$

❒ **c.** compris entre 1 et 3 ❒ **d.** inférieur à $-1$

**14** Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes, et soit $z_1$ la racine de l'équation du second degré $z^2 - 2az + b = 0$ qui a le plus grand module. Alors

❒ **a.** $|z_1| \leqslant |a|$ ❒ **b.** $|z_1| \leqslant |b|$

❒ **c.** $|z_1| \geqslant |a|$ ❒ **d.** $|z_1| \geqslant |b|$

**15** Combien y a-t-il de nombres complexes $z$ tels que $|z - i| \leqslant 1$ et $|z - 2| \leqslant 1$ ?

❒ **a.** aucun ❒ **b.** un seul

❒ **c.** deux complexes conjugués ❒ **d.** une infinité

**16** Soit $z$ un nombre complexe non nul tel que $z + \dfrac{1}{z}$ soit réel. Alors

❒ **a.** $z$ est réel ❒ **b.** $z$ est réel ou de module 1

❒ **c.** $z$ est réel ou imaginaire pur ❒ **d.** $z$ est réel ou égal à $i$ ou $-i$

**17** Laquelle des parties suivantes de $\mathbf{C}$ n'est pas stable par l'application $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ ?

❒ **a.** le cercle $U = \{z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}$

❒ **b.** la droite des imaginaires purs privée de 0

❒ **c.** le demi-plan des complexes de partie imaginaire strictement positive

❒ **d.** l'ensemble des racines 100-ièmes de 1

**18** Notons $C_r$ le cercle du plan complexe de centre 0 et de rayon $r > 0$. L'ensemble $C_r$ est stable pour le produit

❒ **a.** pour tout $r$ ❒ **b.** seulement pour $r \leqslant 1$

❒ **c.** seulement pour $r = 1$ ❒ **d.** jamais

**19** Laquelle des équations suivantes admet deux solutions complexes conjuguées ?

❒ **a.** $z^2 + 3iz + 4 = 0$ ❒ **b.** $z^2 + 3iz - 4 = 0$

❒ **c.** $z^2 + 3z + 4 = 0$ ❒ **d.** $z^2 + 3z - 4 = 0$

# Nombres complexes et trigonométrie

2

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Le module et de l'argument d'un nombre complexe
- L'exponentielle complexe
- Les formules usuelles de trigonométrie
- Les formules d'Euler
- La linéarisation de polynômes trigonométriques
- La formule de Moivre
- Les racines $n$–ièmes de l'unité
- Les valeurs usuelles des fonctions trigonométriques

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 30. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** La formule de Moivre affirme que pour tout réel $x$ :

❒ **a.** $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$

❒ **b.** $(\cos x + \sin x)^n = \cos(nx) + \sin(nx)$

❒ **c.** $2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$

❒ **d.** $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

**2** Le nombre complexe $z = 2e^{i\pi/3}$ est une racine 6-ième de

❒ **a.** 2 ❒ **b.** 12 ❒ **c.** 64 ❒ **d.** $\frac{1}{3}e^{i\,\pi/18}$

**3** Si $x$ est un réel non nul modulo $\pi$, le quotient $\dfrac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}$ vaut

❒ **a.** $i \tan x$ ❒ **b.** $\operatorname{cotan} x$ ❒ **c.** $i \operatorname{cotan} x$ ❒ **d.** $-i \operatorname{cotan} x$

**4** La linéarisation de $\cos^2 x$ est

❒ **a.** $\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ ❒ **b.** $\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

❒ **c.** $2\cos(2x)-1$ ❒ **d.** $1-\sin^2 x$

**5** Si $\sin x = \dfrac{1}{2}$ alors

❒ **a.** $x \equiv \dfrac{\pi}{6} \pmod{\pi}$ ❒ **b.** $x \equiv \dfrac{\pi}{3}$ ou $x \equiv \dfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$

❒ **c.** $x \equiv \dfrac{\pi}{6}$ ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$ ❒ **d.** $x \equiv \dfrac{\pi}{6}$ ou $x \equiv \dfrac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$

**6** Si $a$ et $b$ sont deux réels, on a $e^{ia} + e^{ib} = 0$ pour

❒ **a.** $a \equiv -b \pmod{2\pi}$ ❒ **b.** $a \equiv -b \pmod{\pi}$

❒ **c.** $a \equiv b+\pi \pmod{2\pi}$ ❒ **d.** aucune valeur de $a$ et $b$

**7** Quelle est la valeur de $\cos^2 \dfrac{\pi}{8}$ ?

❒ **a.** $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ ❒ **b.** $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ ❒ **c.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ❒ **d.** $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

**8** Si $x$ est un nombre réel, $(e^{ix} - e^{-ix})^6$ vaut

❒ **a.** $-64\sin^6 x$ ❒ **b.** $64\sin^6 x$

❒ **c.** $64\cos^6 x$ ❒ **d.** $64\sin(6x)$

**9** La valeur de $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ est

❒ **a.** $-\sqrt{3}$ ❒ **b.** $-1$ ❒ **c.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ❒ **d.** $1$

**10** Soit $z = re^{it}$ un nombre complexe, avec $r$ positif. Le module de $e^z$ est

❒ **a.** $e^r$ ❒ **b.** $e^{r\cos t}$ ❒ **c.** $e^{r\sin t}$ ❒ **d.** $re^{|t|}$

**11** Soit $z = re^{it}$ un nombre complexe, avec $r$ positif. Un argument de $e^z$ est

❒ **a.** $\sin t$ ❒ **b.** $r\sin t$ ❒ **c.** $rt$ ❒ **d.** $r\cos t$

**12** Si $x$ est un réel dans $]0, 2\pi[$, le nombre complexe $\dfrac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}$ est égal à

❒ **a.** $e^{i\frac{n-1}{2}x}\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ ❒ **b.** $e^{i\frac{n-1}{2}x}\dfrac{\cos\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

❒ **c.** $e^{i\frac{n+1}{2}x}\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ ❒ **d.** $i\,e^{i\frac{nx}{2}}\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

**13** La fonction $f : t \mapsto (e^{it})^2$ est périodique de période

❒ **a.** 1 ❒ **b.** $\dfrac{\pi}{2}$ ❒ **c.** $\pi$ ❒ **d.** elle n'est pas périodique

**14** Soit $x$ un réel tel que $\tan\dfrac{x}{2} = \sqrt{2}$. Alors $\cos x$ vaut

❒ **a.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ❒ **b.** $-\dfrac{1}{3}$ ❒ **c.** $\dfrac{1}{3}$ ❒ **d.** on ne peut pas savoir

**15** Sachant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, le réel $\sin\dfrac{\pi}{12}$ vaut

❒ **a.** $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ❒ **b.** $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

❒ **c.** $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ ❒ **d.** $\dfrac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$

**16** Si $a, b$ sont deux réels, l'argument de $e^{ia} + e^{ib}$ (lorsque ce nombre est non nul) est égal à

❒ **a.** $\dfrac{a+b}{2}$ modulo $\pi$ ❒ **b.** $\dfrac{a+b}{2}$ modulo $2\pi$

❒ **c.** $\pm\dfrac{a+b}{2}$ modulo $2\pi$ ❒ **d.** $a+b$ modulo $2\pi$

**17** Les solutions de l'équation $z^6 = \bar{z}^2$ sont

❒ **a.** les racines quatrièmes de l'unité

❒ **b.** les racines quatrièmes de l'unité et 0

❒ **c.** les racines huitièmes de l'unité

❒ **d.** les racines huitièmes de l'unité et 0

**18** Soit $n \geqslant 2$. Que dire du nombre complexe $z$ si l'ensemble des racines $n$-ièmes de $z$ est stable par conjugaison ?

❒ **a.** $z = 1$ ❒ **b.** $z$ est un réel positif

❒ **c.** $z$ est un réel quelconque ❒ **d.** $z$ est un imaginaire pur

# 3 Fonctions usuelles

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les fonctions circulaires et leurs graphes
- Les fonctions hyperboliques et leurs graphes
- Les fonctions circulaires et hyperboliques réciproques
- Les fonctions exponentielles et les logarithmes
- Les fonctions puissances
- Les limites usuelles

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 35. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Laquelle des fonctions suivantes n'est pas définie sur $\mathbf{R}$ ?

❒ **a.** $x \mapsto \sin(\arcsin x)$ ❒ **b.** $x \mapsto \arcsin(\sin x)$

❒ **c.** $x \mapsto \tan(\arctan x)$ ❒ **d.** $x \mapsto \arcsin(\cos x)$

**2** La valeur de $\tan \frac{\pi}{6}$ est

❒ **a.** $\sqrt{3}$ ❒ **b.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ❒ **c.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ❒ **d.** $\frac{1}{3}$

**3** La limite de la fonction th (tangente hyperbolique) en $+\infty$ est

❒ **a.** $-1$ ❒ **b.** $0$ ❒ **c.** $1$ ❒ **d.** $+\infty$

**4** La dérivée de la fonction th est

❒ **a.** $1 - \mathrm{th}^2$ ❒ **b.** $1 + \mathrm{th}^2$ ❒ **c.** $\mathrm{th}^2$ ❒ **d.** $\mathrm{th}^2 - 1$

**5** Quelle droite est asymptote au graphe de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ ?

❒ **a.** $y = x$ ❒ **b.** $y = -x$ ❒ **c.** $y = \frac{\pi}{2}$ ❒ **d.** $y = \tan(x)$

**6** Laquelle des fonctions suivantes n'est pas croissante sur son intervalle de définition ?

❒ **a.** arcsin ❒ **b.** arccos ❒ **c.** arctan ❒ **d.** sh

**7** Si $a, b, c$ sont trois réels $> 0$, alors $a^{(b^c)}$

❒ **a.** vaut $a^{bc}$ ❒ **b.** vaut $c^{ab}$

❒ **c.** vaut $a^{(c^b)}$ ❒ **d.** ne se simplifie pas

**8** En $-\infty$ la fonction $x \mapsto \operatorname{argsh}(x)$ tend vers

❒ **a.** $+\infty$ ❒ **b.** $-1$ ❒ **c.** $-\dfrac{\pi}{2}$ ❒ **d.** $-\infty$

**9** Quel est le domaine de définition de $f : x \mapsto \ln(1 - \sqrt{x})$ ?

❒ **a.** $[0, +\infty[$ ❒ **b.** $]-\infty, 1]$ ❒ **c.** $[0, 1[$ ❒ **d.** $]0, 1]$

**10** Lorsque $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\cos x)$ vaut

❒ **a.** $\sqrt{1 - x^2}$ ❒ **b.** $x - \dfrac{\pi}{2}$ ❒ **c.** $\dfrac{\pi}{2} - x$ ❒ **d.** $\dfrac{\pi}{2} + x$

**11** La fonction puissance $x \mapsto x^a$ est croissante sur $]0, +\infty[$ si et seulement si

❒ **a.** $a \geqslant 0$ ❒ **b.** $a > 0$ ❒ **c.** $a \geqslant 1$ ❒ **d.** $a > 1$

**12** L'équation $\operatorname{ch} x = a$ admet exactement deux solutions pour

❒ **a.** tout $a \in \mathbf{R}$ ❒ **b.** $a > 0$ ❒ **c.** $a \geqslant 1$ ❒ **d.** $a > 1$

**13** La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^a}$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$ pour

❒ **a.** $a > 0$ ❒ **b.** $a \geqslant 0$ ❒ **c.** $a > 1$ ❒ **d.** tout réel $a$

**14** La valeur de $\operatorname{cotan}\left(\dfrac{-7\pi}{6}\right)$ est

❒ **a.** $\sqrt{3}$ ❒ **b.** $-\sqrt{3}$ ❒ **c.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ❒ **d.** $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

**15** Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(\ln|x|)$ est

❒ **a.** $\mathbf{R}^*$ ❒ **b.** $]0, +\infty[$

❒ **c.** $]1, +\infty[$ ❒ **d.** $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$

**16** Quels sont les réels $x$ pour lesquels $\arccos(\cos x) = x$ ?

❐ **a.** tous les réels ❐ **b.** les réels de $[-1, 1]$

❐ **c.** les réels de $[0, \pi]$ ❐ **d.** les réels de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

**17** Pour tout $x$ dans l'intervalle $]0, \pi/2[$, on a :

❐ **a.** $\sin(x) < \tan(x) < x$ ❐ **b.** $\sin(x) < x < \tan(x)$

❐ **c.** $x < \sin(x) < \tan(x)$ ❐ **d.** $\tan(x) < \sin(x) < x$

**18** La valeur de $\cos\left(\pi \sin \frac{\pi}{6}\right)$ est

❐ **a.** 0 ❐ **b.** 1/2 ❐ **c.** 1 ❐ **d.** irrationnelle

**19** Si $a$ est strictement positif, $f : x \mapsto \dfrac{\ln x^a}{\ln x}$ tend, lorsque $x \to +\infty$, vers

❐ **a.** $a$ ❐ **b.** $+\infty$ ❐ **c.** $x^{a-1}$ ❐ **d.** $\ln a$

**20** Soit $a$ dans $]0, 1[$. L'équation $a^x = b$ admet

❐ **a.** 0 ou 1 solution selon $b$ ❐ **b.** 1 solution pour tout $b$

❐ **c.** 1 ou 2 solutions selon $b$ ❐ **d.** 0, 1 ou 2 solutions selon $b$

**21** La fonction $x \mapsto \operatorname{argch}(\ln x)$ est définie sur

❐ **a.** $]0, +\infty[$ ❐ **b.** $]1, +\infty[$ ❐ **c.** $[1, +\infty[$ ❐ **d.** $[e, +\infty[$

**22** Pour tout réel $x$, $\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$ se simplifie en

❐ **a.** $\operatorname{sh} x$ ❐ **b.** $\operatorname{ch} x - 1$ ❐ **c.** $|\operatorname{sh} x|$ ❐ **d.** $|\operatorname{ch} x - 1|$

**23** Laquelle des fonctions suivantes n'est pas croissante sur $]0, +\infty[$ ?

❐ **a.** $x \mapsto (\sqrt{2})^x$ ❐ **b.** $x \mapsto -2^{1/x}$

❐ **c.** $x \mapsto \ln(\operatorname{sh}(x))$ ❐ **d.** $x \mapsto \left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^x$

**24** Pour $x > 1$ l'expression $x^{\ln(\ln x)/\ln x}$ se simplifie en

❐ **a.** $\ln x$ ❐ **b.** $\ln(\ln x)$ ❐ **c.** $x^{\ln x}$ ❐ **d.** $x$

**25** Laquelle des fonctions suivantes ne tend pas vers 0 en $+\infty$ ?

❐ **a.** $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{x}$ ❐ **b.** $x \mapsto \dfrac{x^2}{\operatorname{sh} x}$

❐ **c.** $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh} x}{e^x}$ ❐ **d.** $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

# Équations différentielles linéaires

4

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les primitives des fonctions usuelles
- L'équation différentielle linéaire du premier ordre
- L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants
- La notion de problème de Cauchy
- La recherche d'une solution particulière
- La méthode de variation de la constante

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 40. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Les fonctions $x \mapsto Ce^{2x}$, pour $C$ réel, sont les solutions de l'équation différentielle

❒ **a.** $y' = +2y$ ❒ **b.** $y' = 2Cy$

❒ **c.** $y'' - 3y' + 2y = 0$ ❒ **d.** $y' = -2y$

**2** Une primitive sur $\mathbf{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est

❒ **a.** $x \mapsto \sin(2x)$ ❒ **b.** $x \mapsto -2\sin(2x)$

❒ **c.** $x \mapsto \sin(2x)/2$ ❒ **d.** $x \mapsto -\sin(2x)/2$

**3** Quelle est la solution générale de l'équation différentielle $y' + \sin(2x)y = 0$ ?

❒ **a.** $x \mapsto C\cos(2x)$ ❒ **b.** $x \mapsto C\exp(-\cos(2x)/2)$

❒ **c.** $x \mapsto C\exp(-x\sin(2x))$ ❒ **d.** $x \mapsto C\exp(\cos(2x)/2)$

**4** Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$ ?

❒ **a.** $x \mapsto Ce^{2x}$ ❒ **b.** $x \mapsto Ce^{-2x}$

❒ **c.** $x \mapsto (Ax + B)e^{-2x}$ ❒ **d.** $x \mapsto Ae^{-2x} + Be^{2x}$

**5** Quelle fonction n'est pas solution de l'équation $y'' - y = 0$ ?

❒ **a.** $x \mapsto \text{ch}(x)$ ❒ **b.** $x \mapsto \text{sh}(x)$

❒ **c.** $x \mapsto e^x$ ❒ **d.** $x \mapsto \sin(x)$

**6** Pour trouver une solution particulière de l'équation $y' + 2y = 5\sin(x)$,

❒ **a.** vous la cherchez sous la forme $A\sin(x)$

❒ **b.** vous la cherchez sous la forme $A\cos(x)$

❒ **c.** vous la cherchez sous la forme $A\sin(x) + B\cos(x)$

❒ **d.** vous utilisez la méthode de variation de la constante

**7** En appliquant la méthode de variation de la constante, sur $]0, +\infty[$, pour l'équation $xy' + y = x\sin x$, on cherche $y$ sous la forme

❒ **a.** $c(x)e^{-x^2/2}$ ❒ **b.** $c(x)x$ ❒ **c.** $\dfrac{c(x)}{x}$ ❒ **d.** $c(x)\sin x$

**8** Quelle est la solution de l'équation $y' + 2y = 0$ qui s'annule en 1 ?

❒ **a.** $x \mapsto e^{-2x}$ ❒ **b.** $x \mapsto e^{-2(x-1)}$

❒ **c.** $x \mapsto (x-1)e^{-2x}$ ❒ **d.** $x \mapsto 0$

**9** En appliquant à l'équation $y' = y + g(x)$ la méthode de variation de la constante, on cherche y sous la forme

❒ **a.** $e^{c(x)}$ ❒ **b.** $c(x)e^x$

❒ **c.** $c(x)g(x)$ ❒ **d.** $c(x)\exp(G(x))$ où $G$ est une primitive de $g$.

**10** Soit $x \mapsto a(x)$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Une solution non nulle de l'équation $y' = a(x)y$ ne peut pas

❒ **a.** être paire ❒ **b.** tendre vers 0 en $+\infty$

❒ **c.** s'annuler ❒ **d.** être bornée

**11** Quelle équation différentielle n'admet pas de solution $y$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y(2\pi) = 1$ ?

❒ **a.** $y'' - y = 0$ ❒ **b.** $y'' + y = 0$ ❒ **c.** $y'' - 2\pi y = 0$

❒ **d.** aucune, car toutes les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants admettent une solution vérifiant ces conditions initiales.

**12** Pour trouver une solution particulière de l'équation $y' + 2xy = x$ par la méthode de variation de la constante, on est ramené à déterminer une primitive de

❒ **a.** $1/2$ ❒ **b.** $2x^2$ ❒ **c.** $xe^{-x^2}$ ❒ **d.** $xe^{+x^2}$

**13** Pour quelles valeurs de $q \in \mathbf{R}$ les solutions de l'équation $y' + qy = 0$ tendent-elles toutes vers 0 en $-\infty$ ?

❒ **a.** pour $q < 0$ ❒ **b.** pour $q \leqslant 0$

❒ **c.** pour $q > 0$ ❒ **d.** pour aucune valeur de $q$

**14** Les solutions de l'équation $y'' + ay = 0$ sont toutes bornées si et seulement si

❒ **a.** $a > 0$ ❒ **b.** $a \geqslant 0$ ❒ **c.** $a \leqslant 0$ ❒ **d.** $a < 0$

**15** Laquelle des équations suivantes admet une solution particulière polynomiale ?

❒ **a.** $y'' + x^2 y = x$ ❒ **b.** $y'' + y' + y = e^x$

❒ **c.** $y'' + y = x^2$ ❒ **d.** $y'' + 2y' + y = x\sin(x)$

**16** Combien y a t-il de solutions de l'équation $y' + 2\,\mathrm{ch}(x)y = e^x$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** 2 ❒ **d.** une infinité

**17** Combien y a t-il de solutions de l'équation $y'' + 2y' + y = \mathrm{ch}(x)$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** 2 ❒ **d.** une infinité

**18** Les fonctions $x \mapsto \dfrac{c}{1 + x^2}$, pour $c$ réel, sont les solutions de l'équation différentielle

❒ **a.** $(1 + x^2)y' + 2xy = 0$ ❒ **b.** $(1 + x^2)y' - 2xy = 0$

❒ **c.** $y' + \arctan(x)y = 0$ ❒ **d.** $y' + 2xy = 0$

**19** De quelle équation différentielle la fonction $x \mapsto e^{2x} + e^{3x}$ est-elle solution ?

❒ **a.** $y'' - 2y' - 3y = 0$ ❒ **b.** $y'' - 5y' + 6y = 0$

❒ **c.** $y'' + 2y' + 3y = 0$ ❒ **d.** $y'' + 2y' - y = 0$

**20** Laquelle des conditions suivantes est suffisante pour affirmer que la solution $f$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est identiquement nulle ?

❒ **a.** $f$ admet une infinité de zéros ❒ **b.** $f$ et $f'$ ont un zéro commun

❒ **c.** $f.f' = 0$ ❒ **d.** $f'$ admet une infinité de zéros

# 5 Géométrie plane

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires
- Le produit scalaire
- Le déterminant de deux vecteurs du plan dans une base
- Les équations cartésiennes de droites, orthogonalité et parallélisme
- La distance d'un point à une droite
- L'équation polaire d'une droite ou d'un cercle
- Les lignes de niveau usuelles
- Les équations cartésiennes des cercles

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 46. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**Notations.** Le produit scalaire de deux vecteurs $u$ et $v$ sera noté $u \cdot v$. Rappelons que $(r, \theta)$ est un couple de coordonnées polaires du point M si $\overrightarrow{OM} = r\mathbf{u}_\theta$, où $\mathbf{u}_\theta$ est le vecteur $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. En particulier, $r$ peut être négatif.

**1** Quel vecteur dirige la droite de $\mathbf{R}^2$ d'équation $x + 2y + 3 = 0$ ?

❒ **a.** $(1, 2)$ ❒ **b.** $(1, 2, 3)$ ❒ **c.** $(1, -2)$ ❒ **d.** $(2, -1)$

**2** Soit $A, B$ deux points distincts de plan. L'ensemble des points $M$ tels que l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ soit égal à $\frac{\pi}{2}$ modulo $2\pi$ est

❒ **a.** un cercle ❒ **b.** un demi-cercle

❒ **c.** une droite ❒ **d.** une demi-droite

**3** Quelle est l'équation de la droite passant par les points $A = (2, 1)$ et $B = (0, 3)$ ?

❒ **a.** $2x + y = 3$ ❒ **b.** $-x + y = 3$

❒ **c.** $x - y = 1$ ❒ **d.** $x + y = 3$

**4** Pour quelles valeurs de $a \in \mathbf{R}$ les deux vecteurs $(1, a)$ et $(-a, 1)$ sont-ils orthogonaux ?

❒ **a.** pour tout $a$ ❒ **b.** pour $a = 0$

❒ **c.** pour $a = 1$ et $a = -1$ ❒ **d.** pour aucune valeur de $a$

**5** Quel est le déterminant des deux vecteurs $(2, -1)$ et $(-1, 2)$ ?

❒ **a.** 3 ❒ **b.** 5 ❒ **c.** $-4$ ❒ **d.** 0

**6** Quelles sont les coordonnées cartésiennes du point de $\mathbf{R}^2$ dont les coordonnées polaires sont $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ?

❒ **a.** $(1, 1)$ ❒ **b.** $(2, 2)$ ❒ **c.** $(\sqrt{3}, 1)$ ❒ **d.** $(0, \sqrt{2})$

**7** Quelle est l'équation polaire du cercle de centre $O$ et de rayon 2 ?

❒ **a.** $r = 2\cos(\theta)$ ❒ **b.** $r = 2/\cos(\theta)$

❒ **c.** $r = \cos(\theta)/2$ ❒ **d.** $r = 2$

**8** Si deux vecteurs non nuls $u$ et $v$ vérifient $\det(u, v) = ||u||.||v||$, alors

❒ **a.** $(u, v)$ est une base orthonormée directe ❒ **b.** $u$ et $v$ sont colinéaires

❒ **c.** $u \cdot v = 0$ ❒ **d.** $u = v$

**9** Soit $M$ un point du plan de coordonnées polaires $(r, \theta)$. Lequel des points suivants correspond au symétrique de $M$ par rapport à l'origine ?

❒ **a.** $(-r, -\theta)$ ❒ **b.** $(-r, \theta)$ ❒ **c.** $(r, -\theta)$ ❒ **d.** $(-r, \theta + \pi)$

**10** Soit $D$ la droite du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ d'équation $y - 2x = 0$. La distance du point $(2, 1)$ à la droite $D$ est égale à

❒ **a.** 0 ❒ **b.** $\sqrt{3}$ ❒ **c.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ❒ **d.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$

**11** La courbe d'équation polaire $r = \frac{1}{\sin\theta}$ est

❒ **a.** le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - y = 0$

❒ **b.** le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - x = 0$

❒ **c.** la droite d'équation $x = 1$

❒ **d.** la droite d'équation $y = 1$

**12** Soit $C$ le cercle de centre $O$ et de rayon $R$. La droite $D$ d'équation $x + 2y = d$ rencontre $C$ lorsque

❒ **a.** $|d| \leqslant R$ ❒ **b.** $|d| \leqslant R^2$ ❒ **c.** $|d| \leqslant 3R$ ❒ **d.** $|d| \leqslant \sqrt{5}R$

**13** Soit $A, B$ deux points distincts du plan. L'ensemble des points $M$ qui vérifient la relation $MA = 2MB$ est

❒ **a.** une droite ❒ **b.** un cercle

❒ **c.** un point ❒ **d.** vide

**14** Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et $A$ un point du plan. L'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 1$ et $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = 0$ est

❒ **a.** vide ❒ **b.** un seul point

❒ **c.** une droite ❒ **d.** un cercle

**15** Soit $D$ la droite du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ d'équation $3x + 4y = 1$. L'ensemble des points qui sont à la distance 1 de $D$ est

❒ **a.** la droite d'équation $3x + 4y = 0$

❒ **b.** la réunion des droites d'équation $3x + 4y = 0$ et $3x + 4y = 2$

❒ **c.** la réunion des droites d'équation $3x + 4y = 6$ et $3x + 4y = -4$

❒ **d.** la réunion des droites d'équation $3x + 4y = 5$ et $3x + 4y = -5$

**16** Soit $u, v$ deux vecteurs du plan. On suppose que $\det(u, v) = 1$ et que $||u|| = 1$. Que peut-on dire de $||v||$ ?

❒ **a.** elle peut être quelconque ❒ **b.** elle vaut 1

❒ **c.** elle est supérieure ou égale à 1 ❒ **d.** elle est comprise entre 0 et 1

**17** Soit $M$ le point de coordonnées $(0, 1)$. On se place dans le nouveau repère orthonormé direct $R' = (O', -\mathbf{i}, -\mathbf{j})$ centré en $O' = (1, 0)$. Les nouvelles coordonnées de $M$ sont alors

❒ **a.** $(0,-1)$ ❒ **b.** $(-1,1)$ ❒ **c.** $(1,-1)$ ❒ **d.** $(-1,-1)$

**18** On considère les deux courbes données en coordonnées polaires par les formules $(C_1) : r = \cos\theta$ et $(C_2) : r = \sin\theta$. Le nombre de points d'intersection de $(C_1)$ et $(C_2)$ est

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** 2 ❒ **d.** 4

**19** Soit $(C_1)$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2x = 0$ et $(C_2)$ le cercle d'équation $(x - a)^2 + y^2 = 4$. Ces deux cercles sont tangents lorsque $a$ est dans

❒ **a.** $\{-4, -2, 0, 2\}$ ❒ **b.** $\{-5, 4\}$

❒ **c.** $\{-4, 2\}$ ❒ **d.** $\{0, 2, 4\}$

**20** Pour quelles valeurs de $t \in \mathbf{R}$, les points $A(1, 0)$, $B(t, t)$ et $C(t^2, t + 4)$ sont-ils alignés ?

❒ **a.** $t = -2, 1$ ou $2$ ❒ **b.** $t = -1, 0$ ou $1$

❒ **c.** $t = 1$ ❒ **d.** aucune

**21** Quelle est l'aire la plus petite que peut avoir un triangle (non aplati) dont les trois sommets ont des coordonnées dans $\mathbf{Z}$ ?

❒ **a.** 1/4 ❒ **b.** 1/2 ❒ **c.** 1

❒ **d.** il existe de tels triangles d'aire aussi petite que l'on veut

**22** Soit $u$ et $v$ deux vecteurs du plan. On suppose à la fois que $u \cdot v = 0$ et que $\det(u, v) = 0$. Alors

❒ **a.** $u$ et $v$ sont nuls ❒ **b.** $u$ ou $v$ est nul

❒ **c.** $u = v$ ❒ **d.** cela n'est pas possible

# 6 Géométrie de l'espace

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les différentes coordonnées : cartésiennes, cylindriques et sphériques
- Les propriétés et le calcul du produit scalaire
- Le produit vectoriel
- Le déterminant et le calcul de volumes.
- Les équations de plan, parallélisme, vecteur normal
- Les droites dans l'espace
- La distance d'un point à un plan ou à une droite
- Les équations des sphères

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 52. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**Notations.** Précisons tout d'abord les notations que nous allons utiliser : les lettres grasses (comme $\mathbf{u}$) désigneront généralement un vecteur de l'espace. Lorsque ce vecteur relie deux points, on utilisera la notation fléchée $\overrightarrow{AB}$. Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$, leur produit scalaire est noté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ et leur produit vectoriel $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.
Pour donner les coordonnées d'un point de l'espace, nous emploierons la notation en ligne $(a, b, c)$ ; notation que nous prendrons aussi pour les coordonnées d'un vecteur de l'espace.
Les coordonnées sphériques d'un point $M$ de l'espace seront notées $(r, \theta, \varphi)$ où $\theta$ est la colatitude et $\varphi$ la longitude.

**1** Quel plan de $\mathbf{R}^3$ est parallèle au plan $(P)$ d'équation $x + y + z + 1 = 0$ ?

❒ **a.** $2x + y + z + 1 = 0$ ❒ **b.** $x + 2y + z + 1 = 0$
❒ **c.** $x + y + 2z + 1 = 0$ ❒ **d.** $2x + 2y + 2z + 1 = 0$

**2** Le produit vectoriel de $(1, 2, 3)$ avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ vaut

❒ **a.** $(b - 2a\ ,\ 2c - 3b\ ,\ 3a - c)$ ❒ **b.** $(2c - 3b\ ,\ 3a - c\ ,\ b - 2a)$

❒ **c.** $(2c - 3b\ ,\ c - 3a\ ,\ b - 2a)$ ❒ **d.** $(3b - 2c\ ,\ c - 3a\ ,\ 2a - b)$

**3** Soit $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ une base orthonormée directe de l'espace $\mathbf{R}^3$. Quel est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j}$ et $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** 4 ❒ **d.** 6

**4** Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ tels que $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = 0$, $\|\mathbf{u}\| = 2$ et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$. En évaluant $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$, que vaut $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ ?

❒ **a.** $-5$ ❒ **b.** $-3$ ❒ **c.** 3 ❒ **d.** 5

**5** Quelles sont les coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ du point $M(1, 1, 1)$ ?

❒ **a.** $\left(2, \dfrac{\pi}{4}, 1\right)$ ❒ **b.** $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

❒ **c.** $\left(\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{4}, 1\right)$ ❒ **d.** $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

**6** Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ tels que $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$, alors

❒ **a.** $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ❒ **b.** $\mathbf{y}$ et $\mathbf{x}$ sont colinéaires

❒ **c.** $\mathbf{y}$ et $\mathbf{x}$ sont orthogonaux ❒ **d.** $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{y} = -2\mathbf{x}$

**7** Soit $D$ une droite de $\mathbf{R}^3$ passant par un point $A$ et dirigée par un vecteur $\mathbf{u}$. La formule qui donne la distance d'un point $M$ à cette droite $D$ est

❒ **a.** $\|\overrightarrow{AM} \wedge \mathbf{u}\|$ ❒ **b.** $|\overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{u}|$

❒ **c.** $\dfrac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$ ❒ **d.** $\dfrac{|\overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{u}|}{\|\mathbf{u}\|}$

**8** La distance d'un point $(a, b, c)$ de $\mathbf{R}^3$ au plan $P$ d'équation $x + y + z = 1$ vaut

❒ **a.** $\dfrac{|a + b + c|}{\sqrt{3}}$ ❒ **b.** $\dfrac{|a + b + c + 1|}{\sqrt{3}}$

❒ **c.** $\dfrac{|a + b + c - 1|}{\sqrt{3}}$ ❒ **d.** $\dfrac{|a + b + c - 1|}{3}$

**9** Quel est le rayon de la sphère de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$ ?

❒ **a.** 3 ❒ **b.** $\sqrt{3}$ ❒ **c.** $\dfrac{3}{4}$ ❒ **d.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**10** Soit $M$ un point de $\mathbf{R}^3$ de coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$. Quelles sont les coordonnées cylindriques du symétrique de $M$ par rapport au plan $(Oxz)$ ?

❒ **a.** $(-r, \theta, z)$ ❒ **b.** $(r, -\theta, z)$

❒ **c.** $(r, \theta, -z)$ ❒ **d.** $(r, -\theta, -z)$

**11** Soit $D$ la droite de $\mathbf{R}^3$ d'équation $\{x+y+2z = 1\ ;\ x-y = 3\}$. Un vecteur directeur de $D$ est

❒ **a.** $(1, -1, 1)$ ❒ **b.** $(1, 1, -1)$

❒ **c.** $(3, 1, -2)$ ❒ **d.** $(-1, 1, 1)$

**12** On considère la droite $D$ de $\mathbf{R}^3$ de représentation paramétrique

$$D = \{\ (1+t\ ,\ 2+3t\ ,\ 3+5t),\quad t \in \mathbf{R}\}.$$

Laquelle des équations suivantes est celle d'un plan affine parallèle à $D$ ?

❒ **a.** $2x + y - z = 3$ ❒ **b.** $x + y - z = 4$

❒ **c.** $x + y - z = -5$ ❒ **d.** $x + 3y + 5z = 0$

**13** Soit $S$ la sphère de centre $O$ et de rayon $R$. Le plan $P$ d'équation $x + y + z = d$ rencontre la sphère $S$ lorsque

❒ **a.** $|d| \leqslant R$ ❒ **b.** $|d| \leqslant \sqrt{3}R$ ❒ **c.** $|d| \leqslant 2R$ ❒ **d.** $|d| \leqslant 3R$

**14** Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Lequel des triplets suivants n'a pas le même déterminant que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ ?

❒ **a.** $(\mathbf{v}, \mathbf{u}, -\mathbf{w})$ ❒ **b.** $(\mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{w})$

❒ **c.** $(-\mathbf{u}, -\mathbf{v}, -\mathbf{w})$ ❒ **d.** $(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{w})$

**15** Soit $M$ un point de $\mathbf{R}^3$ différent de l'origine, de coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$. Laquelle des conditions suivantes revient à dire que $M$ est dans le plan $(Oyz)$ ?

❒ **a.** $\theta \equiv 0\ [\pi]$ ou $\varphi \equiv 0\ [\pi]$ ❒ **b.** $\theta \equiv 0\ [\pi]$ ou $\varphi \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

❒ **c.** $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou $\varphi \equiv 0\ [\pi]$ ❒ **d.** $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou $\varphi \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

**16** Soit $D$ la droite passant par $A = (1, 1, 2)$ et dirigée par le vecteur $\mathbf{u} = (-1, 1, 2)$. Quel est le point d'intersection de $D$ et du plan $P$ d'équation $x + y + z = 0$ ?

❒ **a.** $(1, 1, -1)$ ❒ **b.** $(0, 2, -2)$

❒ **c.** $(3, -1, -2)$ ❒ **d.** $(-3, 1, 2)$

**17** Pour quelles valeurs de $a$ l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + a$ est-il une véritable sphère de l'espace ?

❒ **a.** $a > -3$ ❒ **b.** $a > -2$ ❒ **c.** $a > 0$ ❒ **d.** $a > 2$

**18** Que dire si deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ vérifient à la fois $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ et $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{0}$ ?

❒ **a.** $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont nuls
❒ **b.** $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{y}$ est nul
❒ **c.** $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont colinéaires
❒ **d.** deux tels vecteurs n'existent pas

**19** Dans $\mathbf{R}^3$ les deux plans affines d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont parallèles si et seulement si

❒ **a.** $aa' + bb' + cc' = 0$
❒ **b.** $(a, b, c) = (a', b', c')$
❒ **c.** $(a, b, c, d)$ et $(a', b', c', d')$ sont colinéaires
❒ **d.** $(a, b, c)$ et $(a', b', c')$ sont colinéaires

**20** Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$. L'équation $\mathbf{a} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ne peut pas admettre de solution lorsque

❒ **a.** $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$
❒ **b.** $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont orthogonaux
❒ **c.** $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ ne sont pas orthogonaux
❒ **d.** $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont colinéaires.

**21** Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbf{R}^3$. Lequel des ensembles suivants n'est pas un plan ?

❒ **a.** $\{M \in \mathbf{R}^3,\ \ \mathbf{u} \wedge \overrightarrow{OM} = \mathbf{0}\}$
❒ **b.** $\{M \in \mathbf{R}^3,\ \ \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{OM} = 0\}$
❒ **c.** $\{M \in \mathbf{R}^3,\ \ \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{OM}) = 0\}$
❒ **d.** $\{M \in \mathbf{R}^3,\ \ \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{OM} = 1\}$

# 7 Arcs paramétrés

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les symétries des courbes en coordonnées cartésiennes
- Les symétries des courbes en coordonnées polaires
- La recherche des asymptotes
- L'équation de la tangente en un point

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 58. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Pour quelle valeur de $t$ la courbe $x(t) = t^2 - 2t$, $y(t) = t^2 + 4t$ présente-t-elle une tangente horizontale ?

❒ **a.** $-2$ ❒ **b.** $1$ ❒ **c.** $0$ et $2$ ❒ **d.** $-4$ et $0$

**2** Les asymptotes à la courbe $x(t) = \dfrac{1}{t-1}$ et $y(t) = \dfrac{1}{t-2}$ sont

❒ **a.** $x = 1$ et $y = -1$ ❒ **b.** $x = 1$ et $y = 1$

❒ **c.** $x + y = 1$ et $x - y = -1$ ❒ **d.** $x = \dfrac{1}{t}$ et $y = \dfrac{2}{t}$

**3** On considère la courbe paramétrée $f(t) = (2t + 3t^2, e^t - 1)$. Quelle est l'équation de la tangente au point $f(0) = (0, 0)$ ?

❒ **a.** $y = x$ ❒ **b.** $y = 2x$ ❒ **c.** $x = 2y$ ❒ **d.** $x = 3y$

**4** Soit $(C)$ la courbe paramétrée $x(t) = \dfrac{t-1}{t+1}$ et $y(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$. Le changement $t \mapsto 1/t$ montre que $(C)$ présente une symétrie

❒ **a.** par rapport à l'axe des abscisses

❒ **b.** par rapport à l'axe des ordonnées

❒ **c.** par rapport à l'origine

❒ **d.** par rapport à la droite d'équation $y = x$

**5** Lorsque $t$ tend vers $+\infty$, l'arc paramétré défini par $x(t) = t^2 + 2t + 3 + e^{-t}$ et $y(t) = 2t^2 + 4t + 5$ admet pour asymptote la droite d'équation

❒ **a.** $y = 2x$ ❒ **b.** $y = 2x - e^{-t}$

❒ **c.** $y = 2x - 1$ ❒ **d.** $y = 2t^2$

**6** On considère une courbe en coordonnées polaires $\theta \mapsto \rho(\theta)$. Laquelle des propriétés suivantes se traduit par une symétrie par rapport à l'origine $O$ ?

❒ **a.** $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$ ❒ **b.** $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$

❒ **c.** $\rho(\theta + \pi) = \rho(-\theta)$ ❒ **d.** $\rho(\theta + \pi) = \rho(\pi - \theta)$

**7** L'intervalle d'étude suffisant pour la courbe $x(t) = \sin(2t), y(t) = \cos(t)$ est

❒ **a.** **R** ❒ **b.** $[-\pi, \pi]$ ❒ **c.** $[0, \pi]$ ❒ **d.** $[0, \pi/2]$

**8** Soit $(C)$ la courbe paramétrée définie par $x(t) = t + t^2$ et $y(t) = t - t^2$. En comparant les points de paramètre $t$ et $-t$, laquelle des droites suivantes est un axe de symétrie de $(C)$ ?

❒ **a.** $D_1 : x = 0$ ❒ **b.** $D_2 : y = 0$

❒ **c.** $D_3 : y = x$ ❒ **d.** $D_4 : y = -x$

**9** Laquelle des courbes suivantes données en coordonnées polaires n'est pas un cercle ?

❒ **a.** $\rho(\theta) = 1$ ❒ **b.** $\rho(\theta) = \cos\theta$

❒ **c.** $\rho(\theta) = \sin\theta$ ❒ **d.** $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$

**10** Soit $(C)$ une courbe régulière donnée par une équation polaire. La tangente à $(C)$ en un point $M$ distinct de l'origine ne peut pas être

❒ **a.** orthogonale à la droite $(OM)$ ❒ **b.** la droite $(OM)$

❒ **c.** verticale ❒ **d.** horizontale

# 8 Coniques

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La définition focale d'une conique (par foyer/directrice)
- La définition bifocale d'un conique
- L'équation réduite d'une conique

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 61. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Combien une hyperbole admet-elle d'axes de symétrie ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** 4 ❒ **d.** une infinité

**2** Lequel des points suivants est sur l'hyperbole d'équation $x^2 - x - y^2 + y = 2$ ?

❒ **a.** $(1, -1)$ ❒ **b.** $(0, 0)$ ❒ **c.** $(2, 0)$ ❒ **d.** $(0, 2)$

**3** Les foyers de l'hyperbole d'équation $xy = 2$ sont sur la droite d'équation

❒ **a.** $x = 0$ ❒ **b.** $y + x = 2$ ❒ **c.** $y = x$ ❒ **d.** $y = -x$

**4** Le centre de la conique d'équation $2x^2 - x + y^2 + y = 3$ est le point

❒ **a.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ❒ **b.** $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

❒ **c.** $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ ❒ **d.** $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

**5** Le demi-grand axe de l'ellipse $(E)$ d'équation $9x^2 + 4y^2 = 25$ vaut

❒ **a.** $\frac{3}{5}$ ❒ **b.** $\frac{5}{3}$ ❒ **c.** $\frac{2}{5}$ ❒ **d.** $\frac{5}{2}$

**6** Quelles sont les asymptotes de l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$ ?

❒ **a.** $y = \sqrt{2}\,x$ et $y = -\sqrt{2}\,x$ ❒ **b.** $y = 1 + \sqrt{2}\,x$ et $y = 1 - \sqrt{2}\,x$

❒ **c.** $y = 2x$ et $y = -2x$ ❒ **d.** $y = 1 + 2x$ et $y = 1 - 2x$

**7** Soit $A, B$ deux points du plan. L'ensemble des points $M$ qui vérifient la relation $MA = MB + 1$ est

❒ **a.** une ellipse ❒ **b.** une branche d'hyperbole

❒ **c.** une droite ❒ **d.** une parabole

**8** Quels sont les sommets de l'hyperbole d'équation $xy = 1$ ?

❒ **a.** $\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ ❒ **b.** $(1, 1)$ et $(-1, -1)$

❒ **c.** $(1, -1)$ et $(-1, 1)$ ❒ **d.** $\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$

**9** Quelle est l'équation de la parabole de foyer $(0, 1)$ et de directrice $y = -1$ ?

❒ **a.** $y = x^2$ ❒ **b.** $y = -x^2$ ❒ **c.** $y = 1 + x^2$ ❒ **d.** $y = \dfrac{x^2}{4}$

**10** La conique d'équation $ax^2 + y^2 - 2axy = 1$ est une ellipse pour

❒ **a.** $a > 0$ ❒ **b.** $a$ dans $]0, 1[$

❒ **c.** $a$ en dehors de $[0, 1]$ ❒ **d.** $a = 1$

**11** Soit $(H)$ la conique d'équation $x^2 - 3y^2 = 1$. Quelle est l'équation de la tangente à $(H)$ au point $(2, 1)$ ?

❒ **a.** $2x - 3y = 1$ ❒ **b.** $x - y = 1$

❒ **c.** $2x - 6y = 1$ ❒ **d.** $2x - 3y = 0$

**12** On considère les points $A = (1, 0)$ et $B = (-1, 0)$ du plan $\mathbf{R}^2$. L'ensemble des points $M$ tels que $MA + MB = 1$ est

❒ **a.** une ellipse ❒ **b.** une hyperbole

❒ **c.** un point ❒ **d.** vide

# Corrigés

## 1 Nombres complexes

**1** Soit $z \in \mathbf{C}$. Le nombre complexe $(z-i)(z-2i)$ est égal à

❐ **a.** $z^2 - 2$ ❐ **b.** $z^2 + 2$ ☒ **c.** $z^2 - 3iz - 2$ ❐ **d.** $z^2 - 3iz + 2$

Il suffit de développer. On peut aussi utiliser le fait que pour un polynôme du second degré $z^2 - sz + p$, le terme $s$ représente la somme des deux racines, et $p$ leur produit. On a ici $s = i + 2i = 3i$ et $p = -2$.

**2** Si $z$ est un nombre complexe, quelle est la partie imaginaire de $z - i\overline{z}$ ?

❐ **a.** $2\,\mathrm{Im}(z)$ ❐ **b.** $\mathrm{Im}(z) + i\,\mathrm{Re}(\overline{z})$

❐ **c.** $\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z)$ ☒ **d.** $\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z)$

En effet, si $z = a + ib$, alors $z - i\overline{z} = a + ib - ia + b = a + b + i(b - a)$ a pour partie imaginaire $b - a = \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z)$.

Parmi les réponses proposées, on remarquera que $\mathrm{Im}(z) + i\,\mathrm{Re}(\overline{z})$ n'est pas un nombre réel (du moins si $\mathrm{Re}(\overline{z})$ est non nul).

**3** Si $z$ est un nombre complexe, quelle est la partie réelle de $z + i\overline{z}$ ?

❐ **a.** $\mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Re}(\overline{z})$ ☒ **b.** $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$

❐ **c.** $\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)$ ❐ **d.** $2\,\mathrm{Re}(z)$

Écrivons $z = a + ib$ avec $a$ et $b$ réels, alors

$$z + i\overline{z} = a + ib + ia + b = a + b + i(a + b).$$

On notera que $\mathrm{Re}(az) = a\,\mathrm{Re}(z)$ uniquement lorsque $a$ est un nombre réel.

**4** Si $x$ est un nombre réel, la partie réelle de $z = \dfrac{1 + ix}{1 - ix}$ est

❐ **a.** $\dfrac{1}{1 + x^2}$ ❐ **b.** $\dfrac{1}{1 - x^2}$ ☒ **c.** $\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ ❐ **d.** $\dfrac{2x}{1 - x^2}$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de $z$ par la quantité conjuguée $1 + ix$. Il vient $z = \dfrac{(1 + ix)^2}{1 + x^2} = \dfrac{1 - x^2 + 2ix}{1 + x^2}$. La partie réelle est donc $\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

**5** Un argument de $1 - i$ est

❐ **a.** $\dfrac{\pi}{4}$ ❐ **b.** $\dfrac{3\pi}{4}$ ❐ **c.** $\dfrac{5\pi}{4}$ ☒ **d.** $\dfrac{7\pi}{4}$

En factorisant par le module, on a $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\,\pi/4}$. Donc $\frac{7\pi}{4}$, qui est congru à $-\frac{\pi}{4}$ modulo $2\pi$, est un argument de $1 - i$.

**6** Quel est l'inverse de $3 - 4i$ ?

❒ **a.** $\frac{1}{3} - \frac{i}{4}$ ❒ **b.** $\frac{1}{3} + \frac{i}{4}$ ❒ **c.** $\frac{3}{5} + \frac{4i}{5}$ ☒ **d.** $\frac{3}{25} + \frac{4i}{25}$

En effet, en multipliant par le conjugué,

$$\frac{1}{3-4i} = \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3}{25} + \frac{4i}{25}.$$

Si vous avez répondu **a.** ou **b.**, l'inverse d'une somme n'est pas la somme des inverses.

**7** Le module de $z = \frac{1+i}{1 - i\sqrt{3}}$ est

❒ **a.** $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$ ❒ **b.** $\sqrt{2}$ ❒ **c.** $\frac{1}{2}$ ☒ **d.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Le module de $1 + i$ est $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et celui de $1 - i\sqrt{3}$ est $\sqrt{1+3} = 2$. Le module du quotient est le quotient des modules, à savoir $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si vous avez répondu **c.**, vous avez vraisemblablement oublié la racine carrée dans le calcul du module.

**8** Un argument de $z = \frac{1+i}{1 - i\sqrt{3}}$ est

❒ **a.** $-\frac{\pi}{12}$ ❒ **b.** $\frac{\pi}{12}$ ❒ **c.** $\frac{5\pi}{12}$ ☒ **d.** $\frac{7\pi}{12}$

Factorisons par le module. On a

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}e^{i\,\pi/4} \text{ et } 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\,\pi/3}.$$

Il en résulte que $z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\,7\pi/12}$.

**9** L'inverse d'un nombre complexe non nul $z$ est égal à son conjugué $\bar{z}$ si et seulement si

❒ **a.** $z = 1$ ☒ **b.** $|z| = 1$

❒ **c.** $z$ est réel ❒ **d.** $z$ est imaginaire pur

En effet, on a $z\overline{z} = |z|^2$. Dire que $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ revient donc à dire que $|z|^2 = 1$, soit que $|z| = 1$.

**10** Soit $z \in \mathbf{C}$. Que dire de $z$ si $z^2$ est réel ?

❒ **a.** $z$ est forcément réel ❒ **b.** $z$ est réel ou de module 1

☒ **c.** $z$ est réel ou imaginaire pur ❒ **d.** $z$ est réel ou égal à $i$ ou $-i$

Posons $x = z^2$. Si $x$ est un nombre réel positif, ses racines carrés sont $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$ ; et si $x < 0$ ses racines sont $i\sqrt{-x}$ et $-i\sqrt{-x}$. Donc $z$, qui est l'une des racines carrées de $x$, est réel ou imaginaire pur.

**11** Soit $(z, u) \in \mathbf{C}^2$ avec $u^2 = z$. Quand peut-on dire que $|u| < |z|$ ?

❒ **a.** c'est toujours le cas ❒ **b.** lorsque $z$ n'est pas nul

❒ **c.** lorsque $0 < |z| < 1$ ☒ **d.** lorsque $|z| > 1$

On a $|u|^2 = |z|$. On a donc $|u| < |z|$ si et seulement si $|u| < |u|^2$. Cela se produit si et seulement si $|u| > 1$, ce qui revient à $|z| = |u|^2 > 1$.

**12** Que dire d'un nombre complexe $z$ dont les deux racines carrées sont conjuguées ?

❒ **a.** c'est toujours le cas ❒ **b.** cela n'est pas possible

❒ **c.** $z$ est un imaginaire pur ☒ **d.** $z$ est un nombre réel négatif

Les racines carrées de $z$ sont toujours opposées. Notons les $u$ et $-u$. Si elles sont de plus conjuguées, c'est que $\overline{u} = -u$ et donc que $u$ est un imaginaire pur. Par suite, $z = u^2$ est un nombre réel négatif. Réciproquement les racines d'un réel négatif $x$ sont $\pm i\sqrt{-x}$ et elles sont conjuguées.

Notez que la dénomination « complexe » n'exclut pas le fait que $z$ soit un réel.

**13** Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$. Si $|z| = 1$ et $|z'| = 2$, alors $|z' - z|$ est

❒ **a.** égal à 1 ❒ **b.** compris entre 1 et $\sqrt{5}$

☒ **c.** compris entre 1 et 3 ❒ **d.** inférieur à $-1$

En effet, l'inégalité triangulaire permet de majorer $|z - z'|$ par $|z| + |z'| = 3$ et de le minorer par $|z'| - |z| = 1$.

On peut noter que $|z - z'|$ ne vaut 1 que si les complexes $z$ et $z'$ ont le même argument, ce qui s'obtient par l'étude du cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. Rappelons par ailleurs qu'un module est toujours positif ce qui permet d'exclure directement la réponse **d.**.

**14** Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes, et soit $z_1$ la racine de l'équation du second degré $z^2 - 2az + b = 0$ qui a le plus grand module. Alors

❒ **a.** $|z_1| \leqslant |a|$ ❒ **b.** $|z_1| \leqslant |b|$

☒ **c.** $|z_1| \geqslant |a|$ ❒ **d.** $|z_1| \geqslant |b|$

Notons $z_2$ la seconde racine du trinôme. On sait que $z_1 + z_2 = 2a$. Donc par l'inégalité triangulaire, $2|a| \leqslant |z_1| + |z_2| \leqslant 2|z_1|$.

Par ailleurs, comme $z_1 z_2 = b$, on a aussi $|z_1| \geqslant \sqrt{|b|}$.

**15** Combien y a-t-il de nombres complexes $z$ tels que $|z - i| \leqslant 1$ et $|z - 2| \leqslant 1$ ?

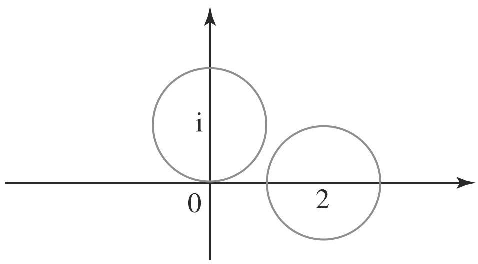
☒ **a.** aucun ❒ **b.** un seul

❒ **c.** deux complexes conjugués ❒ **d.** une infinité

En effet, si un tel $z$ existait on aurait par inégalité triangulaire

$$|2 - i| \leqslant |2 - z| + |z - i| \leqslant 2$$

alors que $|2 - i| = \sqrt{5} > 2$. Géométriquement, les deux disques de centre 2 et $i$ et de rayon 1 sont disjoints.




**16** Soit $z$ un nombre complexe non nul tel que $z + \dfrac{1}{z}$ soit réel. Alors

❒ **a.** $z$ est réel ☒ **b.** $z$ est réel ou de module 1

❒ **c.** $z$ est réel ou imaginaire pur ❒ **d.** $z$ est réel ou égal à $i$ ou $-i$

Un nombre complexe est réel si et seulement si il est égal à son conjugué. Ici,

$$z + \frac{1}{z} = \overline{z + \frac{1}{z}} \iff z - \overline{z} = \frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{z} = \frac{z - \overline{z}}{\overline{z}z}$$

que l'on peut factoriser par $z = \overline{z}$ ou $z\overline{z} = 1$, c'est-à-dire que $z$ est réel ou $|z| = 1$.

**17** Laquelle des parties suivantes de $\mathbf{C}$ n'est pas stable par l'application $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ ?

❒ **a.** le cercle $U = \{z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}$

❒ **b.** la droite des imaginaires purs privée de 0

☒ **c.** le demi-plan des complexes de partie imaginaire strictement positive

❒ **d.** l'ensemble des racines 100-ièmes de 1

Supposons que $z$ s'écrive $z = a + ib$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}_+^*$. Alors

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{ib}{a^2 + b^2}$$

est de partie imaginaire strictement négative. Cela veut dire que le demi-plan des complexes de partie imaginaire strictement positive n'est pas stable par inversion.

En revanche, si $|z| = 1$, alors on a aussi $|1/z| = 1$ ; si $z \in i\mathbf{R}$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} \in i\mathbf{R}$ ; et enfin si $z^{100} = 1$, alors $(1/z)^{100} = 1$. Les trois autres ensembles proposés sont donc stables par inversion.

**18** Notons $C_r$ le cercle du plan complexe de centre 0 et de rayon $r > 0$. L'ensemble $C_r$ est stable pour le produit

❒ **a.** pour tout $r$ ❒ **b.** seulement pour $r \leqslant 1$

☒ **c.** seulement pour $r = 1$ ❒ **d.** jamais

Dire que $C_r$ est stable par le produit équivaut à dire que le produit de deux complexes de module $r$ reste de module $r$. Ici, si $u$ et $v$ sont dans $C_r$, on a $|uv| = |u||v| = r^2$ et $r^2 = r$ si et seulement si $r = 1$ (on a supposé $r > 0$).

**19** Laquelle des équations suivantes admet deux solutions complexes conjuguées ?

❒ **a.** $z^2 + 3iz + 4 = 0$ ❒ **b.** $z^2 + 3iz - 4 = 0$

☒ **c.** $z^2 + 3z + 4 = 0$ ❒ **d.** $z^2 + 3z - 4 = 0$

Si les deux racines du trinôme sont complexes et conjuguées (notons-les $z_1$ et $z_2 = \overline{z_1}$), leur somme $S = 2\operatorname{Re} z_1$ est réelle et leur produit $P = |z_1|^2$ est réel positif. Or on sait que la somme et le produit des racines se lisent sur les coefficients : le trinôme est égal à $z^2 - Sz + P$. Il ne peut donc s'agir que de la réponse **c.**. Celle-ci convient bien car le trinôme est à coefficients réels et son discriminant vaut $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$.

À ce sujet signalons que lorsque les coefficients sont complexes, le fait que discriminant soit un réel négatif n'est pas suffisant pour affirmer que les racines sont conjuguées : il suffit de prendre l'exemple **a.** où $\Delta = -25$ et où les racines sont donc $\dfrac{-3i - 5i}{2} = -4i$ et $\dfrac{-3i + 5i}{2} = i$.

## 2 Nombres complexes et trigonométrie

**1** La formule de Moivre affirme que pour tout réel $x$ :

☒ **a.** $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$

❒ **b.** $(\cos x + \sin x)^n = \cos(nx) + \sin(nx)$

❐ **c.** $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$

❐ **d.** $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

La propriété fondamentale de l'exponentielle est $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ pour tout couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Formulée plus théoriquement, elle signifie que l'application $x \mapsto e^{ix}$ est un morphisme de groupe de $(\mathbf{R}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbf{C}^*, \times)$. On en déduit aisément par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(e^{ix})^n = e^{inx}$ : c'est par définition la formule de Moivre lorsque l'on écrit cela à l'aide des fonctions cosinus et sinus.

La relation $2\cos(x) = e^{ix} + e^{-ix}$ de **c.** est l'une des deux formules d'Euler. La relation **b.** est fausse, et la relation **d.** est vraie (mais ce n'est pas la formule de Moivre).

**2** Le nombre complexe $z = 2e^{i\pi/3}$ est une racine 6-ième de

❐ **a.** 2 ❐ **b.** 12 ☒ **c.** 64 ❐ **d.** $\frac{1}{3}e^{i\,\pi/18}$

En effet, $e^{i\pi/3}$ est une racine 6-ième de $z^6$. Or on a $z^6 = 2^6 e^{2i\pi} = 64$.

**3** Si $x$ est un réel non nul modulo $\pi$, le quotient $\dfrac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}$ vaut

❐ **a.** $i\tan x$ ❐ **b.** $\cot\text{an}\, x$ ❐ **c.** $i\,\text{cotan}\, x$ ☒ **d.** $-i\,\text{cotan}\, x$

On factorise $e^{ix}$ au numérateur et au dénominateur pour obtenir à l'aide des formules d'Euler,

$$\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1} = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} = \frac{2\cos x}{2i\sin x} = -i\,\text{cotan}\, x$$

N'oubliez pas le $i$ dans la formule du sinus.

**4** La linéarisation de $\cos^2 x$ est

☒ **a.** $\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ ❐ **b.** $\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

❐ **c.** $2\cos(2x) - 1$ ❐ **d.** $1 - \sin^2 x$

Rappelons que linéariser un polynôme trigonométrique consiste à l'écrire comme combinaison des fonctions $x \mapsto \cos nx$ et $x \mapsto \sin mx$. On connait la formule d'addition $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et en particulier si on prend $a = b = x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

C'est un thème classique de montrer que $\cos nx$ s'écrit pour tout entier $n$ comme un polynôme en $\cos x$ de degré $n$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Les polynômes obtenus sont appelés polynômes de Tchebychev de première espèce.

**5** Si $\sin x = \dfrac{1}{2}$ alors

❒ **a.** $x \equiv \dfrac{\pi}{6} \pmod{\pi}$ ❒ **b.** $x \equiv \dfrac{\pi}{3}$ ou $x \equiv \dfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$

❒ **c.** $x \equiv \dfrac{\pi}{6}$ ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$ ☒ **d.** $x \equiv \dfrac{\pi}{6}$ ou $x \equiv \dfrac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$

Rappelons que si $\sin x = \sin a$ alors $x \equiv a$ ou $x \equiv \pi - a \pmod{2\pi}$. Nous vous invitons fortement à faire un dessin du cercle trigonométrique en plaçant tous les angles. Le résultat découle alors du fait que $\sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

**6** Si $a$ et $b$ sont deux réels, on a $e^{ia} + e^{ib} = 0$ pour

❒ **a.** $a \equiv -b \pmod{2\pi}$ ❒ **b.** $a \equiv -b \pmod{\pi}$

☒ **c.** $a \equiv b + \pi \pmod{2\pi}$ ❒ **d.** aucune valeur de $a$ et $b$

On a $e^{ia} + e^{ib} = e^{ia}(1 + e^{i(b-a)})$ qui est nul si et seulement si $e^{i(b-a)}$ vaut $-1$, ce qui revient à $b - a$ congru à $\pi$ modulo $2\pi$, ou encore $a \equiv b + \pi$ modulo $2\pi$.

**7** Quelle est la valeur de $\cos^2 \dfrac{\pi}{8}$ ?

❒ **a.** $\dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$ ☒ **b.** $\dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$ ❒ **c.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ❒ **d.** $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}$

En effet, on sait que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et donc $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ pour tout réel $x$. En prenant $x = \dfrac{\pi}{8}$ on obtient

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

**8** Si $x$ est un nombre réel, $(e^{ix} - e^{-ix})^6$ vaut

☒ **a.** $-64 \sin^6 x$ ❒ **b.** $64 \sin^6 x$

❒ **c.** $64 \cos^6 x$ ❒ **d.** $64 \sin(6x)$

Par la formule d'Euler, $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$ et on a $2^6 = 64$ et $i^6 = (-1)^3 = -1$. Rappelons que $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$.

**9** La valeur de $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ est

❒ **a.** $-\sqrt{3}$ ☒ **b.** $-1$ ❒ **c.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ❒ **d.** $1$

La fonction tangente est impaire et comme $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ on obtient $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$.

**10** Soit $z = re^{it}$ un nombre complexe, avec $r$ positif. Le module de $e^z$ est

❒ **a.** $e^r$ ☒ **b.** $e^{r\cos t}$ ❒ **c.** $e^{r\sin t}$ ❒ **d.** $re^{|t|}$

On a $e^z = e^{r\cos t + ir\sin t}$ et le module recherché est donc $e^{r\cos t}$ (car $e^{ir\sin t}$ est un nombre complexe de module 1). On constate qu'en général le module de $e^z$ n'est pas égal à $e^{|z|}$. En revanche on a toujours $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.

**11** Soit $z = re^{it}$ un nombre complexe, avec $r$ positif. Un argument de $e^z$ est

❒ **a.** $\sin t$ ☒ **b.** $r\sin t$ ❒ **c.** $rt$ ❒ **d.** $r\cos t$

On a $e^z = e^{r\cos t}e^{ir\sin t}$. Le premier facteur est un réel positif, et le second un complexe de module 1 qui donne donc un argument de $e^z$, à savoir $r\sin t$.

**12** Si $x$ est un réel dans $]0, 2\pi[$, le nombre complexe $\dfrac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}$ est égal à

☒ **a.** $e^{i\frac{n-1}{2}x}\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ ❒ **b.** $e^{i\frac{n-1}{2}x}\dfrac{\cos\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

❒ **c.** $e^{i\frac{n+1}{2}x}\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ ❒ **d.** $i\,e^{i\frac{nx}{2}}\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

On obtient ce résultat en factorisant le numérateur et le dénominateur par l'exponentielle de l'angle moitié (technique importante) :

$$\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\cdot\frac{e^{\frac{inx}{2}}-e^{-\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}} = e^{i\frac{n-1}{2}x}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

La dernière égalité utilise la relation d'Euler $e^{it} - e^{-it} = 2i\sin t$.

**13** La fonction $f : t \mapsto (e^{it})^2$ est périodique de période

❒ **a.** 1 ❒ **b.** $\dfrac{\pi}{2}$ ☒ **c.** $\pi$ ❒ **d.** elle n'est pas périodique

On a $f(t) = e^{2it}$ et $f(t+\pi) = e^{2it+2i\pi} = e^{2it}$ car $e^{2i\pi} = 1$.

En revanche, $f(1) = e^{2i} = \cos 2 + i\sin 2$ tandis que $f(0) = 1$ donc $f$ n'est pas 1-périodique. De même $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{i\pi} = -1$ est différent de $f(0)$ donc $f$ n'est pas non plus $\dfrac{\pi}{2}$-périodique.

**14** Soit $x$ un réel tel que $\tan\frac{x}{2} = \sqrt{2}$. Alors $\cos x$ vaut

❒ **a.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ☒ **b.** $-\frac{1}{3}$ ❒ **c.** $\frac{1}{3}$ ❒ **d.** on ne peut pas savoir

En effet, en posant $t = \tan\frac{x}{2}$ on a la formule

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}.$$

Si vous avez répondu **a.**, vous avez confondu cette formule avec celle qui donne le sinus de $x$ : $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. Un bon moyen de vérifier que l'on utilise la bonne formule est de la tester avec $x = t = 0$.

**15** Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, le réel $\sin\frac{\pi}{12}$ vaut

❒ **a.** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ❒ **b.** $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

☒ **c.** $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ ❒ **d.** $\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$

On a $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$. Ici $b = \frac{\pi}{4}$ et on a $\cos b = \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On obtient donc,

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

La réponse **d.** pouvait être éliminée car le résultat doit être positif.

**16** Si $a, b$ sont deux réels, l'argument de $e^{ia} + e^{ib}$ (lorsque ce nombre est non nul) est égal à

☒ **a.** $\frac{a+b}{2}$ modulo $\pi$ ❒ **b.** $\frac{a+b}{2}$ modulo $2\pi$

❒ **c.** $\pm\frac{a+b}{2}$ modulo $2\pi$ ❒ **d.** $a+b$ modulo $2\pi$

En effet, $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{b-a}{2}} + e^{-i\frac{b-a}{2}}\right) = e^{i\frac{a+b}{2}}2\cos\frac{b-a}{2}$. L'argument est donc $\frac{a+b}{2}$ modulo $2\pi$ lorsque $\cos\frac{b-a}{2}$ est positif, et $\frac{a+b}{2}+\pi$ si $\cos\frac{b-a}{2}$ est négatif. Dans les deux cas il est égal à $\frac{a+b}{2}$ modulo $\pi$.

**17** Les solutions de l'équation $z^6 = \bar{z}^2$ sont

❒ **a.** les racines quatrièmes de l'unité

❒ **b.** les racines quatrièmes de l'unité et 0

❐ **c.** les racines huitièmes de l'unité

☒ **d.** les racines huitièmes de l'unité et 0

On voit tout de suite que 0 est solution de l'équation proposée. Si $z$ est une solution non nulle, on a $|z|^6 = |\overline{z}|^2 = |z|^2$ et donc $|z|^4 = 1$ soit $|z| = 1$. Mais on a alors $\overline{z} = 1/z$ et l'équation devient $z^8 = 1$.

Inversement toute racine huitième de l'unité est solution, puisque si $z^8 = 1$, alors $|z| = 1$, donc $\overline{z} = 1/z$ et $z^6 = z^{-2} = \overline{z}^2$.

**18** Soit $n \geqslant 2$. Que dire du nombre complexe $z$ si l'ensemble des racines $n$-ièmes de $z$ est stable par conjugaison ?

❐ **a.** $z = 1$

❐ **b.** $z$ est un réel positif

☒ **c.** $z$ est un réel quelconque

❐ **d.** $z$ est un imaginaire pur

Si $u$ et $\overline{u}$ sont deux racines $n$-ièmes de $z$, on a $z = u^n = \overline{u}^n = \overline{u^n} = \overline{z}$ donc $z = \overline{z}$ et $z$ est réel. La réciproque est vraie : c'est le même calcul.

Prenons deux exemples : pour $z = -1$ et $n = 2$ les racines sont $i$ et $-i$ et elles sont bien conjugées. Si on prend $z = 1$ et $n = 2$, les racines sont $+1$ et $-1$, et l'ensemble $\{-1, +1\}$ est stable par conjugaison.

## 3 Fonctions usuelles

**1** Laquelle des fonctions suivantes n'est pas définie sur **R** ?

☒ **a.** $x \mapsto \sin(\arcsin x)$

❐ **b.** $x \mapsto \arcsin(\sin x)$

❐ **c.** $x \mapsto \tan(\arctan x)$

❐ **d.** $x \mapsto \arcsin(\cos x)$

La fonction $x \mapsto \arcsin x$ n'est définie que sur l'intervalle $[-1, 1]$, il en est donc de même pour $x \mapsto \sin(\arcsin x)$.

En revanche, la fonction sinus est à valeurs dans $[-1, 1]$ qui est l'intervalle de définition de arcsin, donc $\arcsin(\sin x)$ est définie pour tout $x \in \mathbf{R}$. Attention, cette fonction n'est égale à $x$ que sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Le même argument convient pour $\arcsin(\cos x)$.

De même, la fonction arctan est à valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$, intervalle sur lequel la fonction tangente est bien définie, et l'égalité $\tan(\arctan x) = x$ a lieu pour tout $x \in \mathbf{R}$.

**2** La valeur de $\tan \dfrac{\pi}{6}$ est

❐ **a.** $\sqrt{3}$

❐ **b.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

☒ **c.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

❐ **d.** $\dfrac{1}{3}$

C'est une valeur usuelle de la fonction tangente. On la retrouve à partir de $\sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ et $\cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, de sorte que $\tan \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**3** La limite de la fonction th (tangente hyperbolique) en $+\infty$ est

❒ **a.** $-1$ ❒ **b.** $0$ ☒ **c.** $1$ ❒ **d.** $+\infty$

En effet, $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \longrightarrow 1$ lorsque $x \to +\infty$. Rappelons que la tangente hyperbolique est strictement croissante et impaire, et qu'elle est bijective de $\mathbf{R}$ sur $]-1, 1[$.

**4** La dérivée de la fonction th est

☒ **a.** $1 - \operatorname{th}^2$ ❒ **b.** $1 + \operatorname{th}^2$ ❒ **c.** $\operatorname{th}^2$ ❒ **d.** $\operatorname{th}^2 - 1$

On a $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ et sa dérivée est donc $\dfrac{\operatorname{sh}' \operatorname{ch} - \operatorname{ch}' \operatorname{sh}}{\operatorname{ch}^2} = \dfrac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$ d'après la formule de dérivation d'un quotient.

Notons que la fonction th est croissante : sa dérivée doit être positive, ce qui contredit la réponse **d.**. Quant à la réponse **b.**, elle traduit une confusion avec la fonction $x \mapsto \tan x$, dont la dérivée est $x \mapsto 1 + \tan^2 x$.

**5** Quelle droite est asymptote au graphe de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ ?

❒ **a.** $y = x$ ❒ **b.** $y = -x$ ☒ **c.** $y = \dfrac{\pi}{2}$ ❒ **d.** $y = \tan(x)$

Cela traduit graphiquement le fait que $\arctan(x)$ tend vers $\pi/2$ en $+\infty$. La droite $y = x$ est tangente à la courbe en $x = 0$.

La réponse **d.** n'a pas de signification car $y = \tan(x)$ n'est pas une équation de droite.

**6** Laquelle des fonctions suivantes n'est pas croissante sur son intervalle de définition ?

❒ **a.** arcsin ☒ **b.** arccos ❒ **c.** arctan ❒ **d.** sh

En effet, $x \mapsto \arccos x$ établit une bijection strictement décroissante de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$. Les trois autres fonctions proposées sont strictement croissantes.

**7** Si $a, b, c$ sont trois réels $> 0$, alors $a^{(b^c)}$

❒ **a.** vaut $a^{bc}$ ❒ **b.** vaut $c^{ab}$

❒ **c.** vaut $a^{(c^b)}$ ☒ **d.** ne se simplifie pas

En effet, la seule simplification possible sur des puissances itérées concerne $(a^b)^c$ qui vaut $a^{bc}$.

**8** En $-\infty$ la fonction $x \mapsto \operatorname{argsh}(x)$ tend vers

❒ **a.** $+\infty$ ❒ **b.** $-1$ ❒ **c.** $-\dfrac{\pi}{2}$ ☒ **d.** $-\infty$

La fonction $x \mapsto \operatorname{sh} x$ établit une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. Il en est donc de même de sa fonction réciproque argsh. Par suite, $\operatorname{argsh}(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$.

**9** Quel est le domaine de définition de $f : x \mapsto \ln(1 - \sqrt{x})$ ?

❒ **a.** $[0, +\infty[$ ❒ **b.** $]-\infty, 1]$ ☒ **c.** $[0, 1[$ ❒ **d.** $]0, 1]$

Le réel $f(x)$ est défini dès que $\sqrt{x}$ est défini (donc si $x \geqslant 0$) et que $1 - \sqrt{x} > 0$, ce qui revient à $x < 1$.

**10** Lorsque $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\cos x)$ vaut

❒ **a.** $\sqrt{1 - x^2}$ ❒ **b.** $x - \dfrac{\pi}{2}$ ☒ **c.** $\dfrac{\pi}{2} - x$ ❒ **d.** $\dfrac{\pi}{2} + x$

Pour trouver le résultat, on essaie d'exprimer $\cos x$ comme le sinus d'un réel, pour se ramener à une expression du type arcsin sin... On utilise la relation $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ et comme $\dfrac{\pi}{2} - x$ est dans l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a alors $\arcsin \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\pi}{2} - x$.

> L'égalité $\arcsin \sin t = t$ n'est vraie que lorsque $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

**11** La fonction puissance $x \mapsto x^a$ est croissante sur $]0, +\infty[$ si et seulement si

☒ **a.** $a \geqslant 0$ ❒ **b.** $a > 0$ ❒ **c.** $a \geqslant 1$ ❒ **d.** $a > 1$

La raison en est que $x^a = e^{a \ln x}$ est une composée de deux fonctions croissantes lorsque $a$ est positif ou nul ; et elle est strictement décroissante lorsque $a$ est strictement négatif. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^{1/2} = \sqrt{x}$ est croissante tandis que $x \mapsto x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}$ est décroissante.

**12** L'équation $\operatorname{ch} x = a$ admet exactement deux solutions pour

❒ **a.** tout $a \in \mathbf{R}$ ❒ **b.** $a > 0$ ❒ **c.** $a \geqslant 1$ ☒ **d.** $a > 1$

La fonction $x \mapsto \operatorname{ch} x$ établit une bijection strictement décroissante entre les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$ et une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$. Ainsi, pour $a > 1$, l'équation $\operatorname{ch} x = a$ admet deux solutions, l'une strictement positive (c'est par définition $\operatorname{argch} x$), l'autre strictement négative (qui vaut d'ailleurs $-\operatorname{argch} x$).

Pour $a = 1$ il n'y a qu'une seule solution, à savoir $x = 0$ et pour $a < 1$ il n'y a aucune solution.

**13** La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^a}$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$ pour

☒ **a.** $a > 0$ ❒ **b.** $a \geqslant 0$ ❒ **c.** $a > 1$ ❒ **d.** tout réel $a$

Le théorème de comparaison des fonctions usuelles assure que $f$ tend vers 0 pour $a > 0$. Notons que lorsque $a < 0$ ou lorsque $a = 0$, alors $f$ tend vers $+\infty$.

**14** La valeur de $\operatorname{cotan}\left(\frac{-7\pi}{6}\right)$ est

❐ **a.** $\sqrt{3}$ ☒ **b.** $-\sqrt{3}$ ❐ **c.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ❐ **d.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Comme $x \mapsto \operatorname{cotan}(x)$ est $\pi$-périodique et impaire,

$$\operatorname{cotan}\frac{-7\pi}{6} = \operatorname{cotan}\frac{-\pi}{6} = -\operatorname{cotan}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

car $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

**15** Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(\ln|x|)$ est

❐ **a.** $\mathbf{R}^*$ ❐ **b.** $]0, +\infty[$

❐ **c.** $]1, +\infty[$ ☒ **d.** $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

En effet, pour que $\ln(\ln|x|)$ soit défini, il faut et il suffit que $\ln|x| > 0$, ce qui revient à $|x| > 1$.

**16** Quels sont les réels $x$ pour lesquels $\arccos(\cos x) = x$ ?

❐ **a.** tous les réels ❐ **b.** les réels de $[-1, 1]$

☒ **c.** les réels de $[0, \pi]$ ❐ **d.** les réels de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

En effet, $x \mapsto \cos x$ est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ dont $x \mapsto \arccos x$ est la bijection réciproque. Donc la relation est vraie pour tout $x$ dans $[0, \pi]$. Inversement, si $x = \arccos(\cos x)$ il est nécessairement dans $[0, \pi]$.

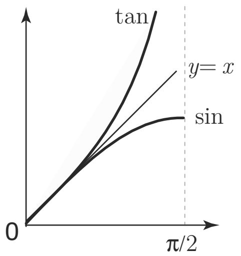
Rappelons que lorsque $t \in [-1, 1]$, $\arccos t$ est par définition l'unique réel $x$ de $[0, \pi]$ tel que $\cos x = t$.

**17** Pour tout $x$ dans l'intervalle $]0, \pi/2[$, on a :

❐ **a.** $\sin(x) < \tan(x) < x$ ☒ **b.** $\sin(x) < x < \tan(x)$

❐ **c.** $x < \sin(x) < \tan(x)$ ❐ **d.** $\tan(x) < \sin(x) < x$

Les deux inégalités $\sin(x) < x$ et $x < \tan(x)$ sont classiques sur l'intervalle $]0, \pi/2[$. Elles se démontrent en étudiant les fonctions $\sin(x) - x$ et $\tan(x) - x$. La dérivée de la première est strictement négative sur $]0, \pi/2[$ ; la dérivée de la deuxième est strictement positive sur $]0, \pi/2[$. Un tableau de variations permet alors de conclure.




**18** La valeur de $\cos\left(\pi \sin \dfrac{\pi}{6}\right)$ est

☒ **a.** 0 ❒ **b.** 1/2 ❒ **c.** 1 ❒ **d.** irrationnelle

En effet, on a $\sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ puis $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$.

**19** Si $a$ est strictement positif, $f : x \mapsto \dfrac{\ln x^a}{\ln x}$ tend, lorsque $x \to +\infty$, vers

☒ **a.** $a$ ❒ **b.** $+\infty$ ❒ **c.** $x^{a-1}$ ❒ **d.** $\ln a$

Par propriété du logarithme, $\ln x^a = a \ln x$ de sorte que la fonction $f$ est constante égale à $a$. Rappelons que la limite d'une fonction ne peut plus dépendre de la variable.

**20** Soit $a$ dans $]0, 1[$. L'équation $a^x = b$ admet

☒ **a.** 0 ou 1 solution selon $b$ ❒ **b.** 1 solution pour tout $b$
❒ **c.** 1 ou 2 solutions selon $b$ ❒ **d.** 0, 1 ou 2 solutions selon $b$

Comme $a < 1$, la fonction $a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$ et elle est à valeurs dans $]0, +\infty[$. L'équation $a^x = b$ admet donc une solution unique si $b > 0$ (qui est par définition le logarithme en base $a$ de $b$) et aucune solution si $b \leqslant 0$.

**21** La fonction $x \mapsto \operatorname{argch}(\ln x)$ est définie sur

❒ **a.** $]0, +\infty[$ ❒ **b.** $]1, +\infty[$ ❒ **c.** $[1, +\infty[$ ☒ **d.** $[e, +\infty[$

Pour que $\operatorname{argch}(\ln x)$ soit défini il faut que $x$ soit strictement positif, et que $\ln x$ soit supérieur ou égal à 1. Cela a lieu uniquement lorsque $x$ est supérieur ou égal à $e$.

**22** Pour tout réel $x$, $\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$ se simplifie en

❒ **a.** $\operatorname{sh} x$ ❒ **b.** $\operatorname{ch} x - 1$ ☒ **c.** $|\operatorname{sh} x|$ ❒ **d.** $|\operatorname{ch} x - 1|$

On a la formule $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, de sorte que $\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x} = |\operatorname{sh} x|$. La valeur absolue est nécessaire car $\operatorname{sh} x$ peut être négatif.

**23** Laquelle des fonctions suivantes n'est pas croissante sur $]0, +\infty[$ ?

❒ **a.** $x \mapsto (\sqrt{2})^x$ ❒ **b.** $x \mapsto -2^{1/x}$

❒ **c.** $x \mapsto \ln(\operatorname{sh}(x))$ ☒ **d.** $x \mapsto \left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^x$

En effet, $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est strictement inférieur à 1. Or, les fonctions $x \mapsto a^x$ sont strictement décroissantes sur $\mathbf{R}$ lorsque $a < 1$.

Les autres fonctions proposées sont croissantes : $\sqrt{2} > 1$ donc $x \mapsto (\sqrt{2})^x$ est croissante ; $x \mapsto \ln(\operatorname{sh}(x))$ est la composée de deux fonctions croissantes ; enfin la fonction $x \mapsto -2^{1/x}$ est la composée de deux fonctions décroissantes ($t \mapsto -t$ et $t \mapsto 1/t$) et d'une fonction croissante ($t \mapsto 2^t$).

**24** Pour $x > 1$ l'expression $x^{\ln(\ln x)/\ln x}$ se simplifie en

☒ **a.** $\ln x$ ❒ **b.** $\ln(\ln x)$ ❒ **c.** $x^{\ln x}$ ❒ **d.** $x$

En effet, $x^{\ln(\ln x)/\ln x} = \exp\left(\ln x \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right) = \exp(\ln(\ln x)) = \ln x$.

**25** Laquelle des fonctions suivantes ne tend pas vers 0 en $+\infty$ ?

❒ **a.** $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{x}$ ❒ **b.** $x \mapsto \dfrac{x^2}{\operatorname{sh} x}$

☒ **c.** $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh} x}{e^x}$ ❒ **d.** $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Factorisons par la partie prépondérante : $\dfrac{\operatorname{sh} x}{e^x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2e^x} = \dfrac{1 + e^{-2x}}{2}$ qui tend vers $\dfrac{1}{2}$ en $+\infty$.

Les trois autres réponses ne conviennent pas : comme $\arctan x$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ en $+\infty$, le rapport $\dfrac{\arctan x}{x}$ tend bien vers 0. De plus, les relations de comparaison des fonctions usuelles affirment que $\dfrac{x^2}{\operatorname{sh} x}$ et $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ tendent bien vers 0 en $+\infty$.

## 4 Équations différentielles linéaires

**1** Les fonctions $x \mapsto Ce^{2x}$, pour $C$ réel, sont les solutions de l'équation différentielle

☒ **a.** $y' = +2y$ ❒ **b.** $y' = 2Cy$

❒ **c.** $y'' - 3y' + 2y = 0$ ❒ **d.** $y' = -2y$

Posons $f(x) = e^{2x}$ ; on a alors $f' = 2f$, donc les fonctions $Cf$ sont des solutions de l'équation **a.** Comme cette équation est linéaire homogène d'ordre 1, ce sont bien les seules.

Ces fonctions sont aussi solutions de **c.** mais ce ne sont pas les seules : les solutions de **c.** sont les fonctions de la forme $x \mapsto C_1 e^{2x} + C_2 e^x$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbf{R}^2$. Du point de vue sémantique, ceci illustre la différence entre « les » solutions et « des » solutions.

**2** Une primitive sur **R** de la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est

❒ **a.** $x \mapsto \sin(2x)$ ❒ **b.** $x \mapsto -2\sin(2x)$

☒ **c.** $x \mapsto \sin(2x)/2$ ❒ **d.** $x \mapsto -\sin(2x)/2$

Plus généralement, si $F$ est une primitive d'une fonction continue $f$ sur un intervalle $I$ et si $a$ est un réel non nul, alors une primitive sur $I$ de la fonction $x \mapsto f(ax)$ est $x \mapsto F(ax)/a$. En cas de doute, n'hésitez pas à dériver la primitive que vous obtenez pour vérifier le résultat.

Si vous avez répondu **d.**, la dérivée de cos est − sin, mais une primitive de cos est sin.

**3** Quelle est la solution générale de l'équation différentielle $y' + \sin(2x)y = 0$ ?

❒ **a.** $x \mapsto C\cos(2x)$ ❒ **b.** $x \mapsto C\exp(-\cos(2x)/2)$

❒ **c.** $x \mapsto C\exp(-x\sin(2x))$ ☒ **d.** $x \mapsto C\exp(\cos(2x)/2)$

Attention au signe : un premier signe moins apparait lorsqu'on met l'équation sous la forme $y' = -\sin(2x)y$, et un deuxième lorsqu'on calcule une primitive de $x \mapsto \sin(2x)$ (qui est $x \mapsto -\cos(2x)/2$). La constante $C$ se détermine alors en fonction d'une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$.

**4** Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$ ?

❒ **a.** $x \mapsto Ce^{2x}$ ❒ **b.** $x \mapsto Ce^{-2x}$

☒ **c.** $x \mapsto (Ax + B)e^{-2x}$ ❒ **d.** $x \mapsto Ae^{-2x} + Be^{2x}$

Le polynôme caractéristique de cette équation est $X^2 + 4X + 4$, qui admet -2 comme racine double. De façon générale, l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène d'ordre 2 est déterminé par 2 constantes indépendantes (dans votre futur cours d'algèbre linéaire on dira que l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 2).

**5** Quelle fonction n'est pas solution de l'équation $y'' - y = 0$ ?

❒ **a.** $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ ❒ **b.** $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$

❒ **c.** $x \mapsto e^x$ ☒ **d.** $x \mapsto \sin(x)$

On peut exprimer les solutions de cette équation classique, soit sous la forme $x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$, soit sous la forme $x \mapsto A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x$ avec $(A, B) \in \mathbf{R}^2$.

> Rappelons que $x \mapsto \sin(x)$ est solution de l'équation $y'' + y = 0$.

**6** Pour trouver une solution particulière de l'équation $y' + 2y = 5\sin(x)$,

❒ **a.** vous la cherchez sous la forme $A\sin(x)$

❒ **b.** vous la cherchez sous la forme $A\cos(x)$

☒ **c.** vous la cherchez sous la forme $A\sin(x) + B\cos(x)$

❒ **d.** vous utilisez la méthode de variation de la constante

Si l'on considère la fonction $y(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$, on a

$$y' + 2y = (2A - B)\sin(x) + (A + 2B)\cos(x).$$

Ainsi, il suffit que $2A - B = 5$ et $A + 2B = 0$ pour que $y$ soit solution de l'équation. Ce système se résout en $A = 2$ et $B = -1$. On trouve alors la solution particulière $x \mapsto 2\sin(x) - \cos(x)$. Remarquez bien que nous venons de raisonner par conditions suffisantes : l'objectif n'est pas de déterminer toutes les fonctions de la forme $A\sin(x) + B\cos(x)$ qui sont solutions de l'équation, mais d'en trouver au moins une.

L'utilisation de la méthode de variation de la constante conduit à rechercher une primitive de $x \mapsto e^{2x}\sin(x)$, ce qui nécessite deux intégrations par parties successives. Les risques d'erreur sont bien supérieurs.

**7** En appliquant la méthode de variation de la constante, sur $]0, +\infty[$, pour l'équation $xy' + y = x\sin x$, on cherche $y$ sous la forme

❒ **a.** $c(x)e^{-x^2/2}$ ❒ **b.** $c(x)x$ ☒ **c.** $\dfrac{c(x)}{x}$ ❒ **d.** $c(x)\sin x$

L'équation homogène associée est $y' = \dfrac{-1}{x}y$ ; elle admet pour solutions les fonctions $C\exp(-\ln x) = \dfrac{C}{x}$ pour $C \in \mathbf{R}$. La méthode de variation de la constante consiste à chercher $y$ sous la forme $\dfrac{c(x)}{x}$.

**8** Quelle est la solution de l'équation $y' + 2y = 0$ qui s'annule en 1 ?

❒ **a.** $x \mapsto e^{-2x}$ ❒ **b.** $x \mapsto e^{-2(x-1)}$

❒ **c.** $x \mapsto (x-1)e^{-2x}$ ☒ **d.** $x \mapsto 0$

Une solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre ne s'annule jamais, sauf si c'est la fonction nulle.

Les réponses **a.** et **b.** sont bien solutions de l'équation, mais elle prennent respectivement les valeurs $e^{-2}$ et 1 lorsque $x = 1$. À l'inverse, la fonction $x \mapsto (x-1)e^{-2x}$ s'annule en 1, mais n'est pas solution de l'équation proposée.

**9** En appliquant à l'équation $y' = y + g(x)$ la méthode de variation de la constante, on cherche y sous la forme

❒ **a.** $e^{c(x)}$ ☒ **b.** $c(x)e^x$

❒ **c.** $c(x)g(x)$ ❒ **d.** $c(x)\exp(G(x))$ où $G$ est une primitive de $g$.

Les solutions de l'équation homogène $y' = y$ sont les fonctions $Ce^x$. On cherche donc y sous la forme $c(x)e^x$.

**10** Soit $x \mapsto a(x)$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Une solution non nulle de l'équation $y' = a(x)y$ ne peut pas

❒ **a.** être paire ❒ **b.** tendre vers 0 en $+\infty$

☒ **c.** s'annuler ❒ **d.** être bornée

En effet, si $A$ est une primitive de $a$ sur $\mathbf{R}$, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $y(x) = Ce^{A(x)}$ où $C \in \mathbf{R}$. Si $C$ n'est pas nul, une telle fonction ne s'annule jamais.

Construisons un contre-exemple instructif commun aux trois autres réponses. On cherche donc deux fonctions $a(x)$ et $y(x)$ telles que $y$ soit solution de l'équation différentielle $y' = a(x)y$, et que $y$ soit paire, tende vers 0 en $+\infty$, et soit bornée sur $\mathbf{R}$. L'idée consiste, non pas à chercher d'abord la fonction $a$, mais plutôt la solution $y$ : on pose donc

$$y(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}.$$

Cette fonction est construite pour être paire, tendre vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$, ne jamais s'annuler (car une solution non nulle d'une équation linéaire ne s'annule jamais). Ces informations suffiraient à prouver via des arguments de continuité que $y$ est bornée sur $\mathbf{R}$, mais on peut le justifier autrement : en effet le polynôme $X^2 - X + 1$ n'admet pas de racines, donc est positif sur $\mathbf{R}$, et donc en particulier, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1 + x^4$ pour tout $x$ de $\mathbf{R}$ ; ainsi $0 \leqslant y(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{1+x^4} \leqslant 2$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Posons maintenant $a(x) = \dfrac{y'(x)}{y(x)}$. Comme $y$ ne s'annule pas, $a(x)$ est parfaitement définie (nous n'avons aucun besoin de la calculer), et $y$ est bien solution de $y' = a(x)y$.

**11** Quelle équation différentielle n'admet pas de solution $y$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y(2\pi) = 1$ ?

❒ **a.** $y'' - y = 0$ ☒ **b.** $y'' + y = 0$ ❒ **c.** $y'' - 2\pi y = 0$

❒ **d.** aucune, car toutes les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants admettent une solution vérifiant ces conditions initiales.

Les solutions de l'équation **b.** sont les fonctions $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ avec $A$ et $B$ réels. Elles sont toutes $2\pi$-périodiques et ne peuvent donc pas prendre une valeur différente en 0 et en $2\pi$.

Cette question illustre le fait que la donnée de $y(0)$ et $y(2\pi)$ ne constitue pas une « condition initiale » (on parle éventuellement de conditions aux bords). On sait qu'il y a existence et unicité d'une solution avec la donnée de $y$ et de $y'$ en un même point $c \in \mathbf{R}$ ; en revanche, il n'existe aucun théorème gérant les conditions aux bords. Ici, il se trouve que les équations **a.** et **c.** admettent bien une unique solution avec ces conditions.

**12** Pour trouver une solution particulière de l'équation $y' + 2xy = x$ par la méthode de variation de la constante, on est ramené à déterminer une primitive de

❒ **a.** $1/2$ ❒ **b.** $2x^2$ ❒ **c.** $xe^{-x^2}$ ☒ **d.** $xe^{+x^2}$

La solution de l'équation homogène est $Ce^{-x^2}$. Posons $y(x) = C(x)e^{-x^2}$. Avec la nouvelle inconnue $C$, l'équation devient $e^{-x^2}C'(x) = x$, soit $C'(x) = xe^{x^2}$. Notons que dans le cas considéré, il vaut mieux chercher une solution particulière sous forme polynomiale : la solution $x \mapsto 1/2$ saute au yeux !

**13** Pour quelles valeurs de $q \in \mathbf{R}$ les solutions de l'équation $y' + qy = 0$ tendent-elles toutes vers 0 en $-\infty$ ?

☒ **a.** pour $q < 0$ ❒ **b.** pour $q \leqslant 0$
❒ **c.** pour $q > 0$ ❒ **d.** pour aucune valeur de $q$

On sait que les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-qx}$, où $C$ est une constante réelle. Elles tendent vers 0 lorsque $x$ tend vers $-\infty$ si et seulement si $q < 0$. On peut remarquer que pour $q = 0$ les solutions sont les fonctions constantes, qui ne conviennent donc pas.

**14** Les solutions de l'équation $y'' + ay = 0$ sont toutes bornées si et seulement si

☒ **a.** $a > 0$ ❒ **b.** $a \geqslant 0$ ❒ **c.** $a \leqslant 0$ ❒ **d.** $a < 0$

En effet, pour $a > 0$ les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $x \mapsto A\cos(\sqrt{a}x) + B\sin(\sqrt{a}x)$ et elles sont bornées. Pour $a = 0$ il s'agit des fonctions polynômes $x \mapsto Ax + B$ qui ne sont pas bornées pour $A$ non nul, et pour $a < 0$ il s'agit des fonctions $x \mapsto A\,\mathrm{ch}(\sqrt{-a}x) + B\,\mathrm{sh}(\sqrt{-a}x)$ qui ne sont pas toutes bornées (en fait dès que $A$ ou $B$ n'est pas nul).

**15** Laquelle des équations suivantes admet une solution particulière polynomiale ?

❒ **a.** $y'' + x^2y = x$ ❒ **b.** $y'' + y' + y = e^x$
☒ **c.** $y'' + y = x^2$ ❒ **d.** $y'' + 2y' + y = x\sin(x)$

Si on cherche une solution $y$ de $y'' + y = x^2$ sous la forme d'un polynôme de degré deux $ax^2 + bx + c$, on obtient par identification $a = 1$, $b = 0$ et $c = -2$.

En revanche, les équations **b.** et **d.** ne pourraient admettre de solution $y$ polynomiale, sinon le second membre serait aussi polynomial, ce qui n'est le cas ni de $x \mapsto e^x$, ni de $x \mapsto x\sin(x)$.

Le cas de l'équation $y'' + x^2y = x$ est plus compliqué : elle n'a pas de solution polynomiale car si $y$ est un polynôme non nul de degré $n \geqslant 0$, alors $y'' + x^2y$ est de degré $n+2 > 1$ et ne peut donc pas valoir $x$.

**16** Combien y a t-il de solutions de l'équation $y' + 2\,\mathrm{ch}(x)y = e^x$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ?

☒ **a.** 0 ❐ **b.** 1 ❐ **c.** 2 ❐ **d.** une infinité

Si on évalue l'équation en $x = 0$, on obtient forcément $y'(0) = 1 - 2y(0)$. Les deux conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ sont donc incompatibles.

Précisons que l'énoncé de cette question contient (volontairement !) une imprécision sémantique : pour une équation d'ordre 1, une condition initiale est la donnée de la valeur de $y$ en un point $c$, pas de sa dérivée. C'est pour une équation d'ordre deux, qu'une condition initiale est constituée par la donnée conjointe de $y(c)$ et de $y'(c)$.

**17** Combien y a t-il de solutions de l'équation $y'' + 2y' + y = \mathrm{ch}(x)$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$ ?

❐ **a.** 0 ❐ **b.** 1 ❐ **c.** 2 ☒ **d.** une infinité

Comme l'équation est du second ordre, on peut trouver une unique solution pour toute condition initiale de la forme $\{y(0) = a, y'(0) = b\}$. Si on se contente de $y(0) = 1$, on peut trouver une solution différente pour chaque valeur de $y'(0)$.

Pour une équation d'ordre deux, une condition initiale est constituée par la donnée conjointe de la valeur de $y$ et de $y'$ en un point $c$ quelconque. La condition « $y(0) = 1$ » ne saurait être considérée comme une condition initiale que pour une équation d'ordre 1.

**18** Les fonctions $x \mapsto \dfrac{c}{1+x^2}$, pour $c$ réel, sont les solutions de l'équation différentielle

☒ **a.** $(1+x^2)y' + 2xy = 0$ ❐ **b.** $(1+x^2)y' - 2xy = 0$

❐ **c.** $y' + \arctan(x)y = 0$ ❐ **d.** $y' + 2xy = 0$

Il n'est pas nécessaire de résoudre les quatre équations : soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. La dérivée de $f$ est $f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-2x}{1+x^2}f(x)$. Les fonctions proportionnelles à $f$ sont donc solutions de l'équation différentielle linéaire **a.**.

De façon générale, pour trouver une équation différentielle vérifiée par une fonction $f$, il faut trouver une relation (si possible simple) entre $f$ et $f'$ (voire les dérivées supérieures).

**19** De quelle équation différentielle la fonction $x \mapsto e^{2x} + e^{3x}$ est-elle solution ?

❒ **a.** $y'' - 2y' - 3y = 0$ ☒ **b.** $y'' - 5y' + 6y = 0$

❒ **c.** $y'' + 2y' + 3y = 0$ ❒ **d.** $y'' + 2y' - y = 0$

Les solutions d'une équation différentielle de la forme $y''+ay'+by = 0$ sont exactement les fonctions $Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$, lorsque $r_1$ et $r_2$ sont les racines supposées distinctes du polynôme $X^2 + aX + b$ (dans le cas où il y a une racine double $r_0$ les solutions sont les fonctions $x \mapsto (Ax + B)e^{r_0x}$). Ainsi, pour que la fonction $x \mapsto e^{2x} + e^{3x}$ soit solution d'une telle équation, il faut (et il suffit) que 2 et 3 soient les racines du trinôme $X^2 + aX + b$, ce qui conduit aux valeurs $a = -(2 + 3) = -5$ et $b = 2 \times 3 = 6$.

**20** Laquelle des conditions suivantes est suffisante pour affirmer que la solution $f$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est identiquement nulle ?

❒ **a.** $f$ admet une infinité de zéros ☒ **b.** $f$ et $f'$ ont un zéro commun

❒ **c.** $f.f' = 0$ ❒ **d.** $f'$ admet une infinité de zéros

Pour tout réel $x_0$, il y a une unique solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ et la fonction nulle convient.

Voici des contre-exemples pour les trois autres réponses proposées : la fonction sin est solution de $y'' + y$ et admet une infinité de zéros (et il en est de même de sa dérivée cos) ; la fonction constante 1 est solution de $y'' + y' = 0$ et vérifie $f.f' = 0$.

## 5 Géométrie plane

**1** Quel vecteur dirige la droite de $\mathbf{R}^2$ d'équation $x + 2y + 3 = 0$ ?

❒ **a.** $(1, 2)$ ❒ **b.** $(1, 2, 3)$ ❒ **c.** $(1, -2)$ ☒ **d.** $(2, -1)$

De façon générale, un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est $(-b, a)$. Il est bien orthogonal au vecteur normal $(a, b)$.

On peut remarquer que la réponse **b.** est inhomogène : une droite du plan est dirigée par un vecteur du plan, qui n'a donc que deux coordonnées.

**2** Soit $A, B$ deux points distincts de plan. L'ensemble des points $M$ tels que l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ soit égal à $\frac{\pi}{2}$ modulo $2\pi$ est

❒ **a.** un cercle ☒ **b.** un demi-cercle

❒ **c.** une droite ❒ **d.** une demi-droite

L'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ soient orthogonaux est le cercle de diamètre $[AB]$. Ce diamètre coupe le cercle en deux demi-cercles : sur l'un d'entre eux l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ et sur l'autre il vaut $-\frac{\pi}{2}$.

**3** Quelle est l'équation de la droite passant par les points $A = (2, 1)$ et $B = (0, 3)$ ?

❒ **a.** $2x + y = 3$ ❒ **b.** $-x + y = 3$
❒ **c.** $x - y = 1$ ☒ **d.** $x + y = 3$

On l'obtient facilement à l'aide d'un déterminant : $M(x, y)$ est dans la droite $(AB)$ si et seulement $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont alignés, ce que l'on obtient par le calcul suivant :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff 2(x-2) + 2(y-1) = 0.$$

Cette dernière équation se simplifie en $x + y = 3$. Bien entendu, il suffisait ici de regarder laquelle des droites proposées contient les deux points $A$ et $B$.

**4** Pour quelles valeurs de $a \in \mathbf{R}$ les deux vecteurs $(1, a)$ et $(-a, 1)$ sont-ils orthogonaux ?

☒ **a.** pour tout $a$ ❒ **b.** pour $a = 0$
❒ **c.** pour $a = 1$ et $a = -1$ ❒ **d.** pour aucune valeur de $a$

Leur produit scalaire vaut 0, et donc ces deux vecteurs sont toujours orthogonaux.

**5** Quel est le déterminant des deux vecteurs $(2, -1)$ et $(-1, 2)$ ?

☒ **a.** 3 ❒ **b.** 5 ❒ **c.** $-4$ ❒ **d.** 0

Il suffit de calculer $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$, en faisant attention aux signes ! Si vous avez répondu **c.**, vous avez confondu déterminant et produit scalaire.

**6** Quelles sont les coordonnées cartésiennes du point de $\mathbf{R}^2$ dont les coordonnées polaires sont $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ?

☒ **a.** $(1, 1)$ ❒ **b.** $(2, 2)$ ❒ **c.** $(\sqrt{3}, 1)$ ❒ **d.** $(0, \sqrt{2})$

Pour retrouver ces coordonnées, on a $x = r\cos\theta = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ et de même $y = r\sin\theta = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

**7** Quelle est l'équation polaire du cercle de centre $O$ et de rayon 2 ?

❒ **a.** $r = 2\cos(\theta)$ ❒ **b.** $r = 2/\cos(\theta)$
❒ **c.** $r = \cos(\theta)/2$ ☒ **d.** $r = 2$

Les points de cette courbe sont tous à distance 2 de l'origine $O$ : c'est bien l'équation du cercle cherché. Notons que les réponses **a.** et **c.** correspondent à deux cercles, mais passant par $O$ (et non de centre $O$). Quant à la réponse **b.**, il s'agit de la droite d'équation $x = r\cos\theta = 2$.

**8** Si deux vecteurs non nuls $u$ et $v$ vérifient $\det(u, v) = ||u||.||v||$, alors

❒ **a.** $(u, v)$ est une base orthonormée directe ❒ **b.** $u$ et $v$ sont colinéaires

☒ **c.** $u \cdot v = 0$ ❒ **d.** $u = v$

En effet, comme $\det(u, v) = ||u||||v|| \sin(u, v)$, l'hypothèse de l'énoncé implique que $\sin(u, v) = 1$. Par suite $u$ et $v$ sont orthogonaux et leur produit scalaire est donc nul. Cependant rien n'indique que $u$ et $v$ soient de norme 1.

Les réponses **c.** et **d.** ne conviennent pas : si $u$ et $v$ étaient colinéaires, ou si $u = v$, leur déterminant serait nul.

**9** Soit $M$ un point du plan de coordonnées polaires $(r, \theta)$. Lequel des points suivants correspond au symétrique de $M$ par rapport à l'origine ?

❒ **a.** $(-r, -\theta)$ ☒ **b.** $(-r, \theta)$ ❒ **c.** $(r, -\theta)$ ❒ **d.** $(-r, \theta + \pi)$

On a $\overrightarrow{OM} = r\ \mathbf{u}_\theta$. Donc si $M'$ est le symétrique de $M$ par rapport à l'origine, $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM} = -r\ \mathbf{u}_\theta$. Donc $M'$ admet le couple $(-r, \theta)$ comme coordonnées polaires.

Remarquons que $M'$ admettrait aussi comme coordonnées le couple $(r, \theta+\pi)$. En revanche, le point de coordonnées $(-r, -\theta)$ est le symétrique de $M$ par rapport à l'axe des ordonnées, le point de coordonnées $(r, -\theta)$ est le symétrique de $M$ par rapport à l'axe des abscisses. Enfin, $(-r, \theta + \pi)$ est un autre couple de coordonnées du point $M$.

**10** Soit $D$ la droite du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ d'équation $y - 2x = 0$. La distance du point $(2, 1)$ à la droite $D$ est égale à

❒ **a.** $0$ ❒ **b.** $\sqrt{3}$ ❒ **c.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ☒ **d.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

Rappelons que la distance d'un point $(u, v)$ à une droite du plan d'équation $ax + by + c = 0$ est $\dfrac{|au + bv + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. La distance à la droite ne peut être nulle que si le point considéré est sur la droite ce qui n'est pas le cas ici.

**11** La courbe d'équation polaire $r = \dfrac{1}{\sin\theta}$ est

❒ **a.** le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - y = 0$

❒ **b.** le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - x = 0$

❒ **c.** la droite d'équation $x = 1$

☒ **d.** la droite d'équation $y = 1$

En effet, on a $r \sin\theta = y$ et l'équation revient donc à $y = 1$.

**12** Soit $C$ le cercle de centre $O$ et de rayon $R$. La droite $D$ d'équation $x + 2y = d$ rencontre $C$ lorsque

❒ **a.** $|d| \leqslant R$ ❒ **b.** $|d| \leqslant R^2$ ❒ **c.** $|d| \leqslant 3R$ ☒ **d.** $|d| \leqslant \sqrt{5}R$

La droite $D$ coupe $C$ si et seulement si la distance du centre de $C$ à la droite $D$ est inférieure ou égale à $R$. Or la distance de $O$ à $D$ vaut $\frac{|d|}{\sqrt{5}}$.

Notez que la réponse **b.** est inhomogène, puisque l'on compare deux quantités qui ne s'expriment pas dans les mêmes unités.

**13** Soit $A, B$ deux points distincts du plan. L'ensemble des points $M$ qui vérifient la relation $MA = 2MB$ est

❒ **a.** une droite ☒ **b.** un cercle

❒ **c.** un point ❒ **d.** vide

Une façon géométrique de le voir consiste à introduire le barycentre $G$ du système $(A, 1), (B, -4)$ dans la relation $MA^2 - 4MB^2 = 0$. On écrit alors $MA^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2$ et $MB^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$. En développant, les doubles produits scalaires s'éliminent par le fait que $\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$. Il reste alors $-3MG^2 = -GA^2 + 3GB^2$. On peut exprimer les distances $GA$ et $GB$ à partir de $AB$ : on a $GA = \frac{4}{3}AB$ et $GB = \frac{1}{3}AB$. Il vient alors $MG^2 = \frac{13}{27}AB^2$, ce qui correspond bien à un cercle de centre $G$.

On peut aussi expliciter cette relation à l'aide des coordonnées cartésiennes et reconnaitre l'équation d'un cercle.

**14** Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et $A$ un point du plan. L'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 1$ et $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = 0$ est

❒ **a.** vide ☒ **b.** un seul point

❒ **c.** une droite ❒ **d.** un cercle

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 1$ est une droite orthogonale à $\overrightarrow{u}$ ; l'ensemble des points M tels que $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = 0$ est la droite dirigée par $\overrightarrow{u}$ passant par A. L'intersection de ces deux droites orthogonales est donc réduite à un seul point.

**15** Soit $D$ la droite du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ d'équation $3x + 4y = 1$. L'ensemble des points qui sont à la distance 1 de $D$ est

❒ **a.** la droite d'équation $3x + 4y = 0$

❒ **b.** la réunion des droites d'équation $3x + 4y = 0$ et $3x + 4y = 2$

☒ **c.** la réunion des droites d'équation $3x + 4y = 6$ et $3x + 4y = -4$

❒ **d.** la réunion des droites d'équation $3x + 4y = 5$ et $3x + 4y = -5$

La distance d'un point $M(x, y)$ à $D$ vaut $\frac{|3x + 4y - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x + 4y - 1|}{5}$. Elle est donc égale à 1 si et seulement si $|3x + 4y - 1| = 5$, ce qui équivaut aux deux équations $3x + 4y - 1 = 5$

ou $3x + 4y - 1 = -5$. En déplaçant les constantes du côté droit de l'égalité, on retrouve la réponse **c.**

On voit géométriquement que l'ensemble cherché est la réunion de deux droites parallèles à D qui sont symétriques par rapport à D.

Si vous avez répondu **b.**, vous avez oublié le dénominateur dans la formule qui donne la distance à une droite.

**16** Soit $u, v$ deux vecteurs du plan. On suppose que $\det(u, v) = 1$ et que $\|u\| = 1$. Que peut-on dire de $\|v\|$ ?

❐ **a.** elle peut être quelconque ❐ **b.** elle vaut 1

☒ **c.** elle est supérieure ou égale à 1 ❐ **d.** elle est comprise entre 0 et 1

On a $\det(u, v) = \|u\|.\|v\|.\sin(u, v)$. Avec les hypothèses, $\|v\| = 1/\sin(u, v)$ est donc supérieur ou égal à 1 (la norme est positive).

**17** Soit $M$ le point de coordonnées $(0, 1)$. On se place dans le nouveau repère orthonormé direct $R' = (O', -\mathbf{i}, -\mathbf{j})$ centré en $O' = (1, 0)$. Les nouvelles coordonnées de $M$ sont alors

❐ **a.** (0,–1) ❐ **b.** (–1,1) ☒ **c.** (1,–1) ❐ **d.** (–1,–1)

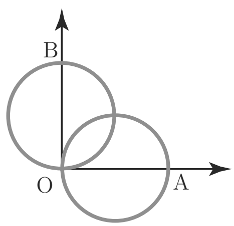
Plutôt que de rechercher les formules générales de changement de repère, il suffit de revenir à la définition des coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire de décomposer le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ sur la base de vecteurs $(-\mathbf{i}, -\mathbf{j})$.

On a $\overrightarrow{O'M} = (-1, 1) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} = (-\mathbf{i}) - (-\mathbf{j})$. Les nouvelles coordonnées de $M$ sont donc $(1, -1)$.

**18** On considère les deux courbes données en coordonnées polaires par les formules $(C_1)$ : $r = \cos\theta$ et $(C_2)$ : $r = \sin\theta$. Le nombre de points d'intersection de $(C_1)$ et $(C_2)$ est

❐ **a.** 0 ❐ **b.** 1 ☒ **c.** 2 ❐ **d.** 4

La courbe $(C_1)$ est le cercle de diamètre $[OA]$ avec $A(1, 0)$ et la courbe $(C_2)$ est le cercle de diamètre $[OB]$ avec $B(0, 1)$. Ces deux cercles sont sécants en deux points.



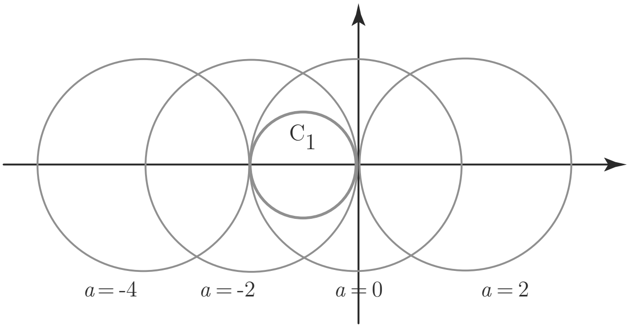

Si l'on ne raisonne pas géométriquement, c'est plus compliqué. En effet, il est vrai que l'équation $\sin\theta = \cos\theta$ admet 2 solutions sur $[0, 2\pi[$, à savoir $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$. Mais les points correspondants dans $(C_1)$ et $(C_2)$ sont identiques ! Rappelons que les points de coordonnées polaires $(r, \theta)$ et $(r', \theta')$ sont égaux si et seulement si :

- $r = r'$ et $\theta = \theta' \quad [2\pi]$
- ou $r = -r'$ et $\theta = \theta' + \pi \quad [2\pi]$
- ou encore $r = r' = 0$ !

**19** Soit $(C_1)$ le cercle d'équation $x^2+y^2+2x = 0$ et $(C_2)$ le cercle d'équation $(x-a)^2+y^2 = 4$. Ces deux cercles sont tangents lorsque $a$ est dans

☒ **a.** $\{-4, -2, 0, 2\}$ ❐ **b.** $\{-5, 4\}$
❐ **c.** $\{-4, 2\}$ ❐ **d.** $\{0, 2, 4\}$

Le cercle $(C_1)$ est centré en $(-1, 0)$ et est de rayon $R_1 = 1$, et $(C_2)$ est centré en $(a, 0)$ et est de rayon $R_2 = 2$. Les deux cercles sont tangents extérieurement lorsque l'écart entre les centres $|a + 1|$ est égal à $R_1 + R_2 = 3$, donc pour $a = 2$ ou $a = -4$. Ils sont tangents intérieurement lorsque $|a + 1|$ est égal à $R_2 - R_1 = 1$, donc pour $a = 0$ ou $a = -2$.




**20** Pour quelles valeurs de $t \in \mathbf{R}$, les points $A(1, 0)$, $B(t, t)$ et $C(t^2, t + 4)$ sont-ils alignés ?

☒ **a.** $t = -2, 1$ ou $2$ ❐ **b.** $t = -1, 0$ ou $1$
❐ **c.** $t = 1$ ❐ **d.** aucune

Les points $A, B, C$ sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$. Or, ce déterminant vaut

$$\begin{vmatrix} t-1 & t^2-1 \\ t & t+4 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} 1 & t+1 \\ t & t+4 \end{vmatrix} = (t-1)(4-t^2) = (t-1)(2-t)(2+t).$$

**21** Quelle est l'aire la plus petite que peut avoir un triangle (non aplati) dont les trois sommets ont des coordonnées dans $\mathbf{Z}$ ?

❐ **a.** 1/4 ☒ **b.** 1/2 ❐ **c.** 1
❐ **d.** il existe de tels triangles d'aire aussi petite que l'on veut

Si on note $A, B$ et $C$ les sommets d'un tel triangle, son aire est égale à $\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$. Comme les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont dans $\mathbf{Z}$, le déterminant est un entier (non nul car le triangle n'est pas aplati) et l'aire est donc supérieure ou égale à 1/2. Par exemple, le triangle reliant l'origine, le point $(1, 0)$ et le point $(0, 1)$ est d'aire minimale (mais ce n'est pas le seul).

**22** Soit $u$ et $v$ deux vecteurs du plan. On suppose à la fois que $u \cdot v = 0$ et que $\det(u, v) = 0$. Alors

❒ **a.** $u$ et $v$ sont nuls ☒ **b.** $u$ ou $v$ est nul

❒ **c.** $u = v$ ❒ **d.** cela n'est pas possible

Si $u$ et $v$ étaient non nuls, on aurait à la fois $\cos(u, v) = \dfrac{u \cdot v}{||u||||v||} = 0$ et $\sin(u, v) = \dfrac{\det(u, v)}{||u||||v||} = 0$ ce qui est impossible. Donc l'un des deux vecteurs au moins est nul.

Inversement, si par exemple $u = 0$, on a bien $u \cdot v = 0$ et $\det(u, v) = 0$ pour n'importe quel vecteur $v$. En particulier $u$ et $v$ ne sont pas nécessairement nuls tous les deux ! Notons aussi que si $u = v$ on a $u \cdot v = ||u||^2$ et une norme ne vaut 0 que si le vecteur est nul.

## 6 Géométrie de l'espace

**1** Quel plan de $\mathbf{R}^3$ est parallèle au plan $(P)$ d'équation $x + y + z + 1 = 0$ ?

❒ **a.** $2x + y + z + 1 = 0$ ❒ **b.** $x + 2y + z + 1 = 0$

❒ **c.** $x + y + 2z + 1 = 0$ ☒ **d.** $2x + 2y + 2z + 1 = 0$

En effet, ce plan a aussi pour équation $x + y + z + \frac{1}{2} = 0$, et admet le même vecteur normal $(1, 1, 1)$ que $(P)$. On peut aussi remarquer que les vecteurs normaux $(1, 1, 1)$ et $(2, 2, 2)$ sont clairement colinéaires.

**2** Le produit vectoriel de $(1, 2, 3)$ avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ vaut

❒ **a.** $(b - 2a\ ,\ 2c - 3b\ ,\ 3a - c)$ ☒ **b.** $(2c - 3b\ ,\ 3a - c\ ,\ b - 2a)$

❒ **c.** $(2c - 3b\ ,\ c - 3a\ ,\ b - 2a)$ ❒ **d.** $(3b - 2c\ ,\ c - 3a\ ,\ 2a - b)$

Plus généralement, les coordonnées du produit vectoriel $(x, y, z) \wedge (x', y', z')$ sont formées de 3 déterminants $2 \times 2$ :

$$\left( \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} ,\quad \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} ,\quad \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right).$$

**3** Soit $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ une base orthonormée directe de l'espace $\mathbf{R}^3$. Quel est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j}$ et $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** 4 ☒ **d.** 6

C'est par définition la valeur absolue du déterminant des trois vecteurs. Or

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

**4** Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ tels que $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = 0$, $||\mathbf{u}|| = 2$ et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$. En évaluant $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$, que vaut $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ ?

☒ **a.** $-5$ ❒ **b.** $-3$ ❒ **c.** $3$ ❒ **d.** $5$

On a

$$0 = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) = ||\mathbf{u}||^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}.$$

Avec les hypothèses de l'énoncé, cela conduit à $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = -5$.

> La réponse **b.** témoigne d'une erreur classique : n'oubliez pas que le carré scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ est égal au **carré** de la norme.

**5** Quelles sont les coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ du point $M(1, 1, 1)$ ?

❒ **a.** $\left(2, \frac{\pi}{4}, 1\right)$ ☒ **b.** $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1\right)$

❒ **c.** $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, 1\right)$ ❒ **d.** $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, 1\right)$

L'altitude du point $M$ est 1. Son projeté dans le plan $(Oxy)$ est le point $(1, 1)$ dont des coordonnées polaires sont $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. Dans la réponse **c.**, la quantité $\sqrt{3}$ est la longueur $OM$ : elle intervient dans les coordonnées sphériques mais pas dans les coordonnées cylindriques.

La réponse **a.** témoigne d'un oubli de la racine carrée dans le calcul de la norme du vecteur $(1, 1)$. Quant au point $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, 1\right)$, il a pour coordonnées cartésiennes $(0, \sqrt{2}, 1)$.

**6** Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ tels que $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} = ||\mathbf{x}||^2$, alors

❒ **a.** $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ❒ **b.** $\mathbf{y}$ et $\mathbf{x}$ sont colinéaires

☒ **c.** $\mathbf{y}$ et $\mathbf{x}$ sont orthogonaux ❒ **d.** $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{y} = -2\mathbf{x}$

Par bilinéarité on a $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = ||\mathbf{x}||^2 + \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$. L'hypothèse implique donc que $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = 0$ ce qui veut dire que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont orthogonaux.

Au passage, vous pouvez remarquer l'importance de la différence de typographie utilisée entre les deux « 0 » de $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = 0$. Le premier est un vecteur (donc il est en caractère gras) tandis que le second est un réel (en police normale). Il est souvent très utile dans un exercice ou un problème de se demander à quoi correspond la notation « 0 », et de faire ainsi la différence entre un réel nul, un vecteur nul, une fonction nulle, etc... Cela évite de nombreuses erreurs d'homogénéité, mais aussi cela permet de mieux comprendre la question posée.

**7** Soit $D$ une droite de $\mathbf{R}^3$ passant par un point $A$ et dirigée par un vecteur $\mathbf{u}$. La formule qui donne la distance d'un point $M$ à cette droite $D$ est

❒ **a.** $||\overrightarrow{AM} \wedge \mathbf{u}||$ ❒ **b.** $|\overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{u}|$

☒ **c.** $\dfrac{||\overrightarrow{AM} \wedge \mathbf{u}||}{||\mathbf{u}||}$ ❒ **d.** $\dfrac{|\overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{u}|}{||\mathbf{u}||}$

C'est un résultat du cours. On peut vérifier sa cohérence en remarquant que la distance de $M$ à $D$ doit être nulle lorsque $M$ est sur $D$, donc lorsque $\overrightarrow{AM}$ et $\mathbf{u}$ sont colinéaires.

La réponse **a.** ne convient que dans le cas où $\mathbf{u}$ est supposé unitaire, ce qui n'est pas le cas ici. Il faut donc renormaliser en divisant par $||\mathbf{u}||$.

**8** La distance d'un point $(a, b, c)$ de $\mathbf{R}^3$ au plan $P$ d'équation $x + y + z = 1$ vaut

❒ **a.** $\dfrac{|a+b+c|}{\sqrt{3}}$ ❒ **b.** $\dfrac{|a+b+c+1|}{\sqrt{3}}$

☒ **c.** $\dfrac{|a+b+c-1|}{\sqrt{3}}$ ❒ **d.** $\dfrac{|a+b+c-1|}{3}$

C'est une application directe de la formule générale que nous rappelons : la distance du point $(a, b, c)$ au plan d'équation $ux + vy + wz + d = 0$ est donnée par

$$\frac{|ua + vb + wc + d|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

On peut vérifier que celle-ci est nulle uniquement lorsque le point est dans le plan, ce qui correspond à l'annulation du numérateur.

**9** Quel est le rayon de la sphère de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$ ?

❒ **a.** $3$ ❒ **b.** $\sqrt{3}$ ❒ **c.** $\dfrac{3}{4}$ ☒ **d.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

On met l'équation de la sphère sous forme canonique :

$$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z \Longleftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

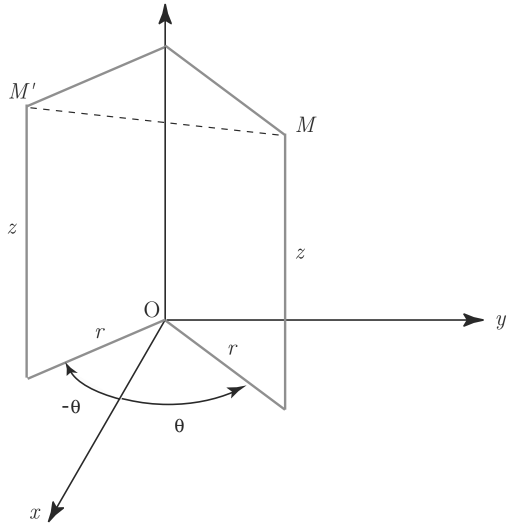
On en déduit que $R^2 = \dfrac{3}{4}$.

**10** Soit $M$ un point de $\mathbf{R}^3$ de coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$. Quelles sont les coordonnées cylindriques du symétrique de $M$ par rapport au plan $(Oxz)$ ?

❒ **a.** $(-r, \theta, z)$ ☒ **b.** $(r, -\theta, z)$

❒ **c.** $(r, \theta, -z)$ ❒ **d.** $(r, -\theta, -z)$

L'altitude du symétrique $M'$ de $M$ par rapport au plan $(Oxz)$ est toujours $z$. Par ailleurs le projeté de $M'$ dans le plan $(Oxy)$ est le symétrique du projeté de $M$ par rapport à la droite $(Ox)$. Ses coordonnées polaires sont donc $(r, -\theta)$.




Pour les autres réponses proposées, le point de coordonnées $(-r, \theta, z)$ est le symétrique de $M$ par rapport à l'axe $(Oz)$ ; le point de coordonnées $(r, \theta, -z)$ est le symétrique de $M$ par rapport au plan $(Oxy)$ ; enfin le point de coordonnées $(r, -\theta, -z)$ est le symétrique de $M$ par rapport à l'axe $(Ox)$.

**11** Soit $D$ la droite de $\mathbf{R}^3$ d'équation $\{x + y + 2z = 1 \ ; \ x - y = 3\}$. Un vecteur directeur de $D$ est

❒ **a.** $(1, -1, 1)$ ☒ **b.** $(1, 1, -1)$

❒ **c.** $(3, 1, -2)$ ❒ **d.** $(-1, 1, 1)$

La droite $D$ est l'intersection du plan $P$ d'équation $x + y + 2z = 1$ et du plan $P'$ d'équation $x - y = 3$. Pour obtenir un vecteur directeur de $D$ il suffit d'effectuer le produit vectoriel d'un vecteur normal à $P$, par exemple $(1, 1, 2)$, avec un vecteur normal à $P'$, par exemple $(1, -1, 0)$. On obtient le vecteur $(2, 2, -2)$ qui est colinéaire au vecteur $(1, 1, -1)$.

**12** On considère la droite $D$ de $\mathbf{R}^3$ de représentation paramétrique

$$D = \{ (1 + t \ , \ 2 + 3t \ , \ 3 + 5t), \quad t \in \mathbf{R}\}.$$

Laquelle des équations suivantes est celle d'un plan affine parallèle à $D$ ?

☒ **a.** $2x + y - z = 3$ ❒ **b.** $x + y - z = 4$

❒ **c.** $x + y - z = -5$ ❒ **d.** $x + 3y + 5z = 0$

Il suffit qu'un vecteur normal du plan choisi soit orthogonal au vecteur directeur de la droite. Un vecteur directeur de $D$ est $\mathbf{u} = (1, 3, 5)$ et il est orthogonal au vecteur $(2, 1, -1)$ qui est normal au plan **a.**

**13** Soit $S$ la sphère de centre $O$ et de rayon $R$. Le plan $P$ d'équation $x + y + z = d$ rencontre la sphère $S$ lorsque

❒ **a.** $|d| \leqslant R$ ☒ **b.** $|d| \leqslant \sqrt{3}R$ ❒ **c.** $|d| \leqslant 2R$ ❒ **d.** $|d| \leqslant 3R$

Le plan $P$ coupe $S$ si et seulement si la distance de $O$ à $P$ est inférieure au rayon $R$ de la sphère. Or, par application de la formule générale donnant la distance d'un point à un plan, cette distance vaut $\dfrac{|d|}{\sqrt{3}}$.

**14** Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Lequel des triplets suivants n'a pas le même déterminant que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ ?

❒ **a.** $(\mathbf{v}, \mathbf{u}, -\mathbf{w})$ ❒ **b.** $(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w})$

☒ **c.** $(-\mathbf{u}, -\mathbf{v}, -\mathbf{w})$ ❒ **d.** $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w})$

En effet, $\det(-\mathbf{u}, -\mathbf{v}, -\mathbf{w}) = (-1)^3 \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. En revanche, on a bien

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}, -\mathbf{w}) &= (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \cdot (-\mathbf{w}) = (-\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot (-\mathbf{w}) \\ &= (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).\end{aligned}$$

Puis, en développant par trilinéarité on a aussi

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w}) &= \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \det(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) + \det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \det(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) \\ &= \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})\end{aligned}$$

car les trois autres déterminants sont nuls.

On obtient le même résultat pour $\det(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w})$.

On a utilisé ici le « développement par trilinéarité », que l'on peut voir comme le développement d'un produit.

**15** Soit $M$ un point de $\mathbf{R}^3$ différent de l'origine, de coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$. Laquelle des conditions suivantes revient à dire que $M$ est dans le plan $(Oyz)$ ?

❒ **a.** $\theta \equiv 0\ [\pi]$ ou $\varphi \equiv 0\ [\pi]$ ☒ **b.** $\theta \equiv 0\ [\pi]$ ou $\varphi \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

❒ **c.** $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou $\varphi \equiv 0\ [\pi]$ ❒ **d.** $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou $\varphi \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

Le point $M$ est dans le plan $(Oyz)$ si et seulement si sa coordonnée cartésienne $x$ est nulle. Or celle-ci vaut $r \sin\theta \cos\varphi$. Comme $M$ est distinct de $O$, on sait que $r \neq 0$. La quantité $\sin\theta$ s'annule si $\theta \equiv 0\ [\pi]$, et la quantité $\cos\varphi$ s'annule si $\varphi \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

**16** Soit $D$ la droite passant par $A = (1, 1, 2)$ et dirigée par le vecteur $\mathbf{u} = (-1, 1, 2)$. Quel est le point d'intersection de $D$ et du plan $P$ d'équation $x + y + z = 0$ ?

❒ **a.** $(1, 1, -1)$ ❒ **b.** $(0, 2, -2)$

☒ **c.** $(3, -1, -2)$ ❒ **d.** $(-3, 1, 2)$

On utilise une représentation paramétrique de la droite $D$. Les points de $D$ sont ceux de la forme $A+t\mathbf{u} = (1-t\,,\ 1+t\,,\ 2+2t)$ lorsque $t$ parcourt $\mathbf{R}$. Il ne reste plus qu'à trouver la valeur de $t$ pour laquelle ce point est dans le plan $P$. Cela a lieu lorsque $(1-t)+(1+t)+(2+2t) = 0$ c'est-à-dire $t = -2$. On obtient alors le point $(3, -1, -2)$.

Parmi les autres points proposés, le point $(1, 1, -1)$ n'est pas dans le plan $P$ (il n'en vérifie pas l'équation), les deux autres sont dans $P$ mais pas dans $D$.

**17** Pour quelles valeurs de $a$ l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + a$ est-il une véritable sphère de l'espace ?

❒ **a.** $a > -3$ ☒ **b.** $a > -2$ ❒ **c.** $a > 0$ ❒ **d.** $a > 2$

L'équation se met sous la forme canonique

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + a \Longleftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = a + 2.$$

Il s'agit d'une véritable sphère lorsque le réel $a + 2$ est strictement positif.

**18** Que dire si deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ vérifient à la fois $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ et $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{0}$ ?

❒ **a.** $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont nuls ☒ **b.** $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{y}$ est nul
❒ **c.** $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont colinéaires ❒ **d.** deux tels vecteurs n'existent pas

Les deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont à la fois orthogonaux (nullité du produit scalaire) et colinéaires (nullité du produit vectoriel). Cela n'a lieu que si l'un des deux au moins est nul.

**19** Dans $\mathbf{R}^3$ les deux plans affines d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont parallèles si et seulement si

❒ **a.** $aa' + bb' + cc' = 0$

❒ **b.** $(a, b, c) = (a', b', c')$

❒ **c.** $(a, b, c, d)$ et $(a', b', c', d')$ sont colinéaires

☒ **d.** $(a, b, c)$ et $(a', b', c')$ sont colinéaires

Les deux plans sont parallèles si et seulement si ils ont la même direction, ce qui veut dire que les plans vectoriels dont les équations sont $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$ sont les mêmes. Cela équivaut au fait que les vecteurs normaux $(a, b, c)$ et $(a', b', c')$ sont colinéaires.

Notons que dans le cas où $(a, b, c, d)$ et $(a', b', c', d')$ sont colinéaires les deux plans sont égaux.

**20** Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$. L'équation $\mathbf{a} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ne peut pas admettre de solution lorsque

❒ **a.** $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ❒ **b.** $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont orthogonaux
☒ **c.** $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ ne sont pas orthogonaux ❒ **d.** $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont colinéaires.

Si l'équation admet une solution $\mathbf{x}$, alors nécessairement $\mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{x}$ est orthogonal à $\mathbf{a}$. Il n'y a donc pas de solution si le produit scalaire $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ est non nul.

Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, alors par exemple, $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ est solution. Tout vecteur $\mathbf{x}$ convient lorsque $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

**21** Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbf{R}^3$. Lequel des ensembles suivants n'est pas un plan ?

☒ **a.** $\{M \in \mathbf{R}^3,\ \mathbf{u} \wedge \overrightarrow{OM} = \mathbf{0}\}$ ❒ **b.** $\{M \in \mathbf{R}^3,\ \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{OM} = 0\}$

❒ **c.** $\{M \in \mathbf{R}^3,\ \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{OM}) = 0\}$ ❒ **d.** $\{M \in \mathbf{R}^3,\ \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{OM} = 1\}$

L'ensemble **a.** est la droite passant par $O$ et dirigée par $\mathbf{u}$. En effet, $M$ est dans cet ensemble si et seulement si les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.

En revanche, **b.** correspond au plan passant par $O$ et de vecteur normal $\mathbf{u}$, **c.** est le plan passant par $O$ et dont la direction est dirigée par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, **d.** est un plan de vecteur normal $\mathbf{u}$, parallèle à **b.** mais ne passant pas par $O$.

## 7 Arcs paramétrés

**1** Pour quelle valeur de $t$ la courbe $x(t) = t^2 - 2t$, $y(t) = t^2 + 4t$ présente-t-elle une tangente horizontale ?

☒ **a.** $-2$ ❒ **b.** $1$ ❒ **c.** $0$ et $2$ ❒ **d.** $-4$ et $0$

On a $x'(t) = 2(t-1)$ et $y'(t) = 2(t+2)$. La tangente est horizontale lorsque $y'(t) = 0$, donc pour $t = -2$. Au point de paramètre 1 il y a une tangente verticale. Les réponses **c.** et **d.** correspondent aux paramètres où la courbe rencontre les axes de coordonnées.

**2** Les asymptotes à la courbe $x(t) = \dfrac{1}{t-1}$ et $y(t) = \dfrac{1}{t-2}$ sont

☒ **a.** $x = 1$ et $y = -1$ ❒ **b.** $x = 1$ et $y = 1$

❒ **c.** $x + y = 1$ et $x - y = -1$ ❒ **d.** $x = \dfrac{1}{t}$ et $y = \dfrac{2}{t}$

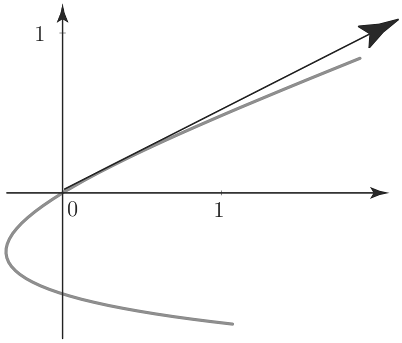
La courbe admet des branches infinies aux points de paramètres 1 et 2. En $t = 1$, $y(t)$ tend vers $-1$ tandis que $x(t)$ tend vers $\pm\infty$, de sorte qu'il y a une asymptote horizontale d'équation $y = -1$.

De même il y a pour $t = 2$ une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

**3** On considère la courbe paramétrée $f(t) = (2t + 3t^2, e^t - 1)$. Quelle est l'équation de la tangente au point $f(0) = (0, 0)$ ?

❒ **a.** $y = x$ ❒ **b.** $y = 2x$ ☒ **c.** $x = 2y$ ❒ **d.** $x = 3y$

La fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on a $f'(t) = (2 + 6t, e^t)$ pour tout $t$. En particulier $f'(0) = (2, 1)$. Le point $f(0)$ est donc régulier et la tangente en ce point est dirigée par le vecteur $(2, 1)$. Son équation est donc $x = 2y$.




**4** Soit $(C)$ la courbe paramétrée $x(t) = \dfrac{t-1}{t+1}$ et $y(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$. Le changement $t \mapsto 1/t$ montre que $(C)$ présente une symétrie

❒ **a.** par rapport à l'axe des abscisses

❒ **b.** par rapport à l'axe des ordonnées

☒ **c.** par rapport à l'origine

❒ **d.** par rapport à la droite d'équation $y = x$

On a $x(1/t) = -x(t)$ et $y(1/t) = -y(t)$. Il y a donc une symétrie par rapport à l'origine et on peut limiter l'étude en prenant $t$ dans $[-1, 0[\cup]0, 1]$.

**5** Lorsque $t$ tend vers $+\infty$, l'arc paramétré défini par $x(t) = t^2+2t+3+e^{-t}$ et $y(t) = 2t^2+4t+5$ admet pour asymptote la droite d'équation

❒ **a.** $y = 2x$ ❒ **b.** $y = 2x - e^{-t}$

☒ **c.** $y = 2x - 1$ ❒ **d.** $y = 2t^2$

Les fonctions $x$ et $y$ tendent vers $+\infty$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$. De plus, on a $y(t) - 2x(t) = -1 - e^{-t}$ qui tend vers $-1$. La droite d'équation $y = 2x - 1$ est donc asymptote à la courbe.

Notons qu'on pouvait éliminer les réponses **b.** et **d.** car l'équation de l'asymptote ne doit pas faire intervenir le paramètre $t$.

**6** On considère une courbe en coordonnées polaires $\theta \mapsto \rho(\theta)$. Laquelle des propriétés suivantes se traduit par une symétrie par rapport à l'origine $O$ ?

❒ **a.** $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$ ☒ **b.** $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$

❒ **c.** $\rho(\theta + \pi) = \rho(-\theta)$ ❒ **d.** $\rho(\theta + \pi) = \rho(\pi - \theta)$

Si on note $M(\theta)$ le point de la courbe de paramètre $\theta$, la propriété $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$ signifie que $M(\theta + \pi)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport au pôle.

La propriété **a.** se traduit par $M(\theta + \pi) = M(\theta)$, la propriété **c.** par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et enfin **d.** par une symétrie par rapport à l'axe $(Ox)$.

**7** L'intervalle d'étude suffisant pour la courbe $x(t) = \sin(2t)$, $y(t) = \cos(t)$ est

❒ **a.** $\mathbf{R}$ ❒ **b.** $[-\pi, \pi]$ ❒ **c.** $[0, \pi]$ ☒ **d.** $[0, \pi/2]$

Les fonctions $x$ et $y$ étant $2\pi$-périodiques, on peut limiter l'étude à l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Comme $x$ est impaire et $y$ paire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et on peut se restreindre à $[0, \pi]$.

On note enfin que $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$ : la courbe est aussi symétrique par rapport à l'origine et on peut donc se contenter de l'étudier sur $[0, \pi/2]$.

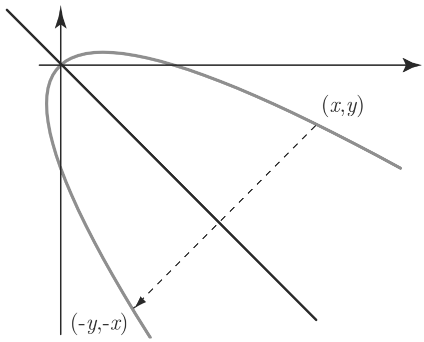
**8** Soit $(C)$ la courbe paramétrée définie par $x(t) = t + t^2$ et $y(t) = t - t^2$. En comparant les points de paramètre $t$ et $-t$, laquelle des droites suivantes est un axe de symétrie de $(C)$ ?

❒ **a.** $D_1 : x = 0$ ❒ **b.** $D_2 : y = 0$

❒ **c.** $D_3 : y = x$ ☒ **d.** $D_4 : y = -x$

On a $x(-t) = -y(t)$ et $y(-t) = -x(t)$. Autrement dit, le point de paramètre $-t$ est le symétrique du point de paramètre $t$ par rapport à la droite $y = -x$.

On peut noter que la courbe est en fait une parabole. En effet, si on se place dans le repère formé par l'origine et les vecteurs $(1, 1)$ et $(-1, 1)$ on obtient pour nouveau paramétrage $X(t) = \dfrac{x(t) + y(t)}{2} = t$ et $Y(t) = \dfrac{y(t) - x(t)}{2} = -t^2$. On voit alors qu'il s'agit de la parabole d'équation cartésienne $Y = -X^2$.

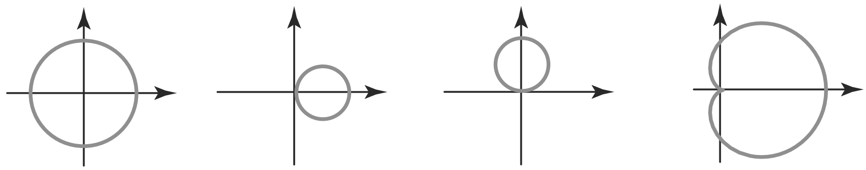



**9** Laquelle des courbes suivantes données en coordonnées polaires n'est pas un cercle ?

❒ **a.** $\rho(\theta) = 1$ ❒ **b.** $\rho(\theta) = \cos\theta$

❒ **c.** $\rho(\theta) = \sin\theta$ ☒ **d.** $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$

L'équation **a.** donne clairement le cercle centré au pôle et de rayon 1. L'équation **b.** donne le cercle de diamètre $[OA]$ où $A$ est le point $(1, 0)$ et **c.** le cercle de diamètre $[OB]$ où $B$ est le point $(0, 1)$. En revanche **d.** est l'équation d'une courbe appelée cardioïde.



$\rho(\theta) = 1$ $\quad$ $\rho(\theta) = \cos(\theta)$ $\quad$ $\rho(\theta) = \sin(\theta)$ $\quad$ $\rho(\theta) = 1+\cos(\theta)$

**10** Soit $(C)$ une courbe régulière donnée par une équation polaire. La tangente à $(C)$ en un point $M$ distinct de l'origine ne peut pas être

❒ **a.** orthogonale à la droite $(OM)$ ☒ **b.** la droite $(OM)$

❒ **c.** verticale ❒ **d.** horizontale

Le point de paramètre $M(\theta)$ est défini par $\overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\mathbf{u}_\theta$. Si on dérive cette relation, il vient $\overrightarrow{M}'(\theta) = \rho'(\theta)\mathbf{u}_\theta + \rho(\theta)\mathbf{u}_{\theta+\pi/2}$. Lorsque $\rho(\theta)$ n'est pas nul, $\overrightarrow{M}'(\theta)$ n'est pas colinéaire à $\mathbf{u}_\theta$ et la tangente ne peut donc pas être la droite $(OM)$.

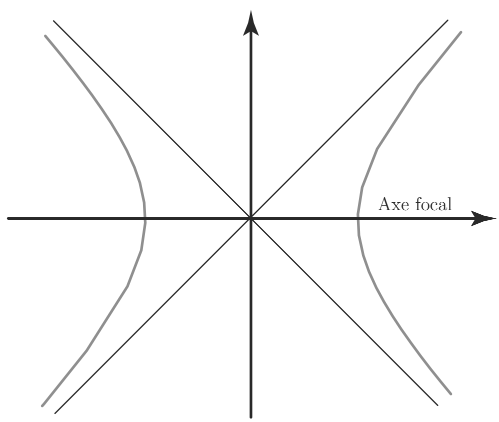
En revanche, l'exemple d'un cercle de rayon $R$ (d'équation $\rho(\theta) = R$) montre que la tangente peut être orthogonale à la droite $(OM)$, et elle est verticale ou horizontale pour certains points.

## 8 Coniques

**1** Combien une hyperbole admet-elle d'axes de symétrie ?

❒ **a.** 1 ☒ **b.** 2 ❒ **c.** 4 ❒ **d.** une infinité

Les seuls axes de symétrie de l'hyperbole sont l'axe focal et la droite orthogonale à cet axe passant par le centre de symétrie. Attention, les asymptotes ne sont pas des axes de symétrie.



**2** Lequel des points suivants est sur l'hyperbole d'équation $x^2 - x - y^2 + y = 2$ ?

❒ **a.** $(1, -1)$ ❒ **b.** $(0, 0)$ ☒ **c.** $(2, 0)$ ❒ **d.** $(0, 2)$

Il suffit de remplacer $x$ et $y$ par les valeurs proposées pour voir si le couple vérifie l'équation de l'hyperbole. Pour le point donné en **a.** (resp. en **b.**, en **d.**) la quantité $x^2 - x - y^2 + y$ vaut $-2$ (resp. 0, $-2$).

**3** Les foyers de l'hyperbole d'équation $xy = 2$ sont sur la droite d'équation

❒ **a.** $x = 0$ ❒ **b.** $y + x = 2$ ☒ **c.** $y = x$ ❒ **d.** $y = -x$

L'hyperbole considérée est équilatère et les axes de coordonnées sont les deux asymptotes. L'axe focal est la bissectrice des deux asymptotes qui contient des points de l'hyperbole : il s'agit donc de la droite d'équation $y = x$.

**4** Le centre de la conique d'équation $2x^2 - x + y^2 + y = 3$ est le point

❒ **a.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ❒ **b.** $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

❒ **c.** $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ ☒ **d.** $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

On écrit l'équation sous la forme

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 3 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{21}{8}$$

pour voir que le centre de symétrie est le point $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$. Il s'agit ici d'une ellipse.

**5** Le demi-grand axe de l'ellipse $(E)$ d'équation $9x^2 + 4y^2 = 25$ vaut

❒ **a.** $\frac{3}{5}$ ❒ **b.** $\frac{5}{3}$ ❒ **c.** $\frac{2}{5}$ ☒ **d.** $\frac{5}{2}$

L'équation s'écrit aussi $\dfrac{x^2}{(5/3)^2} + \dfrac{y^2}{(5/2)^2} = 1$ et le demi-grand axe est donc $\frac{5}{2}$. L'axe principal de l'ellipse est ici vertical.

**6** Quelles sont les asymptotes de l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$ ?

❒ **a.** $y = \sqrt{2}\,x$ et $y = -\sqrt{2}\,x$ ☒ **b.** $y = 1 + \sqrt{2}\,x$ et $y = 1 - \sqrt{2}\,x$

❒ **c.** $y = 2x$ et $y = -2x$ ❒ **d.** $y = 1 + 2x$ et $y = 1 - 2x$

On obtient les asymptotes en annulant le terme constant. L'équation devient $(y-1)^2 = 2x^2$, soit $y - 1 = \sqrt{2}\,x$ ou $y - 1 = -\sqrt{2}\,x$.

**7** Soit $A, B$ deux points du plan. L'ensemble des points $M$ qui vérifient la relation $MA = MB + 1$ est

❒ **a.** une ellipse ☒ **b.** une branche d'hyperbole

❒ **c.** une droite ❒ **d.** une parabole

L'équation s'écrit aussi $MA - MB = 1$. Or, l'ensemble des points $M$ qui vérifient la relation $|MA - MB| = 1$ est une hyperbole de foyers $A$ et $B$. Ici on obtient seulement la branche de cette hyperbole qui est du côté du foyer $B$.

**8** Quels sont les sommets de l'hyperbole d'équation $xy = 1$ ?

❒ **a.** $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ ☒ **b.** $(1, 1)$ et $(-1, -1)$

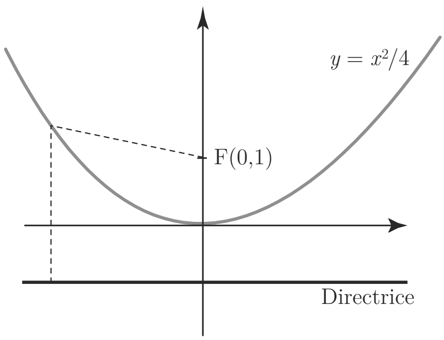
❒ **c.** $(1, -1)$ et $(-1, 1)$ ❒ **d.** $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$

L'axe focal de celle hyperbole (qui est un axe de symétrie) est la droite $y = x$. Les sommets se trouvent forcément sur cet axe.

**9** Quelle est l'équation de la parabole de foyer $(0, 1)$ et de directrice $y = -1$ ?

❒ **a.** $y = x^2$ ❒ **b.** $y = -x^2$ ❒ **c.** $y = 1 + x^2$ ☒ **d.** $y = \frac{x^2}{4}$

Soit $F$ le point de coordonnées $(0, 1)$. Le point $M(x, y)$ est sur la parabole lorsque $FM^2 = d^2$ où $d = |y+1|$ est la distance de $M$ à la directrice. L'équation devient $x^2+(y-1)^2 = (y+1)^2$, ce qui se simplifie en $4y = x^2$. On peut exclure immédiatement la réponse **c.** car une parabole ne passe pas par son foyer.




**10** La conique d'équation $ax^2 + y^2 - 2axy = 1$ est une ellipse pour

❒ **a.** $a > 0$ ☒ **b.** $a$ dans $]0, 1[$

❒ **c.** $a$ en dehors de $[0, 1]$ ❒ **d.** $a = 1$

La conique n'est pas vide puisqu'elle contient toujours le point $(0, 1)$. Elle est de type ellipse (c'est-à-dire une véritable ellipse éventuellement réduite à un point) lorsque le discriminant de la forme quadratique $ax^2 + y^2 - 2axy$ est strictement positif. Ici, il vaut $\begin{vmatrix} a & -a \\ -a & 1 \end{vmatrix} = a(1 - a)$, qui n'est strictement positif que lorsque $a \in ]0, 1[$.

Lorsque $a$ est dehors de $[0, 1]$ on a une hyperbole et pour $a = 1$ l'équation devient $(x - y)^2 = 1$ : la conique est la réunion des deux droites $x - y = 1$ et $x - y = -1$ (on parle de parabole dégénérée).

**11** Soit $(H)$ la conique d'équation $x^2 - 3y^2 = 1$. Quelle est l'équation de la tangente à $(H)$ au point $(2, 1)$ ?

☒ **a.** $2x - 3y = 1$ ❒ **b.** $x - y = 1$

❒ **c.** $2x - 6y = 1$ ❒ **d.** $2x - 3y = 0$

La conique $(H)$ est une hyperbole, l'équation étant déjà mise sous forme réduite. De manière générale, l'équation de la tangente en un point $(x_0, y_0)$ à une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Cette règle de calcul est appelée règle du dédoublement, elle s'applique aussi pour les ellipses. Ici on pouvait exclure les réponses **c.** et **d.** car les droites correspondantes ne contiennent pas le point $(2, 1)$.

**12** On considère les points $A = (1, 0)$ et $B = (-1, 0)$ du plan $\mathbf{R}^2$. L'ensemble des points $M$ tels que $MA + MB = 1$ est

❒ **a.** une ellipse ❒ **b.** une hyperbole

❒ **c.** un point ☒ **d.** vide

En effet, $MA + MB$ est toujours supérieur ou égal à $AB$ qui vaut ici 2. L'ensemble des points $M$ tel que $MA + MB = c$ n'est une ellipse que lorsque $c$ est strictement supérieur à la distance $AB$. C'est l'équation bifocale d'une ellipse.

# Partie 2
# Analyse

# 9 Nombres réels

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La manipulation des inégalités dans **R**
- Les propriétés de la valeur absolue
- La notion de densité
- L'exponentielle et le logarithme
- Les fonctions puissances
- La notion de borne supérieure
- L'axiome de la borne supérieure
- La partie entière et ses propriétés

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 113. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**Notations.** Nous noterons $E(x)$ la partie entière du réel $x$.

**1** Si $x$ est un nombre réel, l'inégalité $x^2 < 1$ est équivalente à

❒ **a.** $x < 1$ ❒ **b.** $x \in ]-1, 1[$ ❒ **c.** $x \in ]0, 1[$ ❒ **d.** $x \in [0, 1[$

**2** La partie entière de $-\pi$ vaut

❒ **a.** $-0,1415...$ ❒ **b.** $0,8584...$ ❒ **c.** $-3$ ❒ **d.** $-4$

**3** Quelle est la borne supérieure de l'intervalle $[0, 1[$ ?

❒ **a.** $1^-$ ❒ **b.** $1$ ❒ **c.** $[1, +\infty[$

❒ **d.** le plus grand réel strictement inférieur à 1

**4** Quelle est la borne supérieure de $\{x \in [-2, 2],\ x^2 < 2\}$ ?

❒ **a.** $4$ ❒ **b.** $\sqrt{2}$ ❒ **c.** $-\sqrt{2}$ ❒ **d.** $0$

**5** Soit $a, b, c, d$ des réels strictement positifs avec $a < b$ et $c < d$. Alors

❒ **a.** $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ❒ **b.** $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$ ❒ **c.** $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ ❒ **d.** $\frac{b}{c} < \frac{a}{d}$

**6** Si $x$ est un nombre réel, $\sqrt[3]{x^2}$ est égal à

❒ **a.** $x^{3/2}$ ❒ **b.** $|x|^{3/2}$ ❒ **c.** $x^{2/3}$ ❒ **d.** $|x|^{2/3}$

**7** Parmi les ensembles suivants, lequel admet une borne supérieure ?

❒ **a.** $\{x \in \mathbf{R},\ x < x + 1\}$ ❒ **b.** $\{x \in \mathbf{R}_+,\ x < -1\}$

❒ **c.** $\{x \in [-2\pi, 2\pi],\ \sin x = 1/3\}$ ❒ **d.** $\mathbf{Z}$

**8** Pour $x$ réel, $E(E(x) + x)$ est toujours égal à

❒ **a.** $E(2x)$ ❒ **b.** $2E(x)$ ❒ **c.** $E(x^2)$ ❒ **d.** $x + E(x)$

**9** Parmi les parties suivantes, laquelle est dense dans $\mathbf{R}$ ?

❒ **a.** $\mathbf{Z}$ ❒ **b.** $\{p/q,\ 0 < p < q\}$

❒ **c.** $\{2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ ❒ **d.** $\{2k\pi,\ k \in \mathbf{Q}\}$

**10** Soit $x$ un nombre réel tel que $x < a$ pour tout réel $a > 0$. Alors

❒ **a.** $x < 0$ ❒ **b.** $x = 0$ ❒ **c.** $x > 0$ ❒ **d.** $x \leqslant 0$

**11** Si $x$ est un réel de partie entière $n$, on a

❒ **a.** $x - 1 < n < x$ ❒ **b.** $x - 1 \leqslant n < x$

❒ **c.** $x - 1 < n \leqslant x$ ❒ **d.** $x - 1 \leqslant n \leqslant x$

**12** Si $a$ et $b$ sont des réels strictement positifs, $a^{\ln b}$ est égal à

❒ **a.** $e^{\ln ab}$ ❒ **b.** $b^{\ln a}$ ❒ **c.** $\ln a^b$ ❒ **d.** $(\ln a)^b$

**13** Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction décroissante, la quantité $\sup_{x \in [-1,1]} f(x^2)$ vaut

❒ **a.** $f(0)$ ❒ **b.** $f(1)$

❒ **c.** $f(-1)$ ❒ **d.** $\max(f(1), f(-1))$

**14** Quelle fonction vérifie $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tous $x$ et $y$ dans son domaine de définition ?

❒ **a.** $f(x) = \ln(2x)$ ❒ **b.** $f(x) = \frac{1}{2} \ln x$

❒ **c.** $f(x) = e^{2x}$ ❒ **d.** $f(x) = \frac{1}{2} e^x$

**15** Soit $n$ un entier positif. Combien y a-t-il d'entiers $k$ positifs ou nuls tels que $\sqrt{k} \leqslant n$ ?

❒ **a.** $\sqrt{n}$ ❒ **b.** $2n^2 + 1$ ❒ **c.** $E(\sqrt{n}) + 1$ ❒ **d.** $n^2 + 1$

**16** Si $x$ est un réel tel que $|2 - x| \leqslant 1$, alors

❒ **a.** $|x| \leqslant 1$ ❒ **b.** $|x| \leqslant 3$ ❒ **c.** $|x| \geqslant -1$ ❒ **d.** $|x| \geqslant 3$

**17** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbf{R}$. Laquelle des propositions suivantes signifie que le réel $a$ est la borne supérieure de $A$.

❒ **a.** $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$

❒ **b.** $a \in A$ et $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$

❒ **c.** $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$ et pour tout $b < a$ on peut trouver un élément de $A$ dans l'intervalle $]b, a]$

❒ **d.** $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$ et on peut trouver $b < a$ tel que l'intervalle $]b, a[$ soit inclus dans $A$.

**18** Quelle condition est suffisante pour pouvoir trouver un entier strictement compris entre les deux réels $x$ et $y$ ?

❒ **a.** $\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$ ❒ **b.** $y - x \geqslant 1$

❒ **c.** $\dfrac{y}{x} \in \mathbf{N}$ ❒ **d.** $y - x \in \mathbf{Q}$

**19** Si $x, y$ sont deux réels tels que $|x - 5| \leqslant 1$ et $|y - 1| \leqslant 1$, alors on a

❒ **a.** $2 \leqslant |x - y| \leqslant 6$ ❒ **b.** $0 \leqslant |x - y| \leqslant 2$

❒ **c.** $4 \leqslant |x - y| \leqslant 6$ ❒ **d.** $4 \leqslant |x - y| \leqslant 8$

# Suites réelles : Convergence

10

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La définition quantifiée de la convergence
- Le théorème des limites monotones et ses conséquences
- Le théorème d'encadrement, appelé aussi théorème des gendarmes
- Le passage à la limite dans une inégalité
- Les opérations sur les limites
- Le théorème des suites adjacentes
- La notion de suite extraite et le théorème de Bolzano-Weierstrass

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 117. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite strictement positive et décroissante. Alors

❒ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et sa limite est positive ou nulle

❒ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0

❒ **c.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et sa limite est strictement positive

❒ **d.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et est constante à partir d'un certain rang

**2** Soit $a > 0$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = \dfrac{n!}{a^n}$ est croissante à partir d'un certain rang

❒ **a.** pour tout $a > 0$

❒ **b.** seulement pour $a$ dans $]0, 1]$

❒ **c.** seulement pour $a \geqslant 1$

❒ **d.** pour aucune valeur de $a$

**3** Le théorème de Bolzano-Weierstrass dit

❒ **a.** qu'une suite réelle bornée converge

❒ **b.** qu'une suite réelle bornée admet une sous-suite qui converge

❒ **c.** que toute sous-suite d'une suite réelle bornée converge

❒ **d.** qu'une suite qui converge est bornée

**4** Laquelle des suites suivantes est extraite de la suite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ ?

❒ **a.** $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ ❒ **b.** $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$

❒ **c.** $(u_{2n+2})_{n\geqslant 0}$ ❒ **d.** $(u_{n^2})_{n\geqslant 0}$

**5** Soit $I$ un intervalle et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $I$ qui converge. Pour quel intervalle $I$ est-on certain que la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ reste dans $I$ ?

❒ **a.** $]0, 1[$ ❒ **b.** $[0, 1]$ ❒ **c.** $[0, 1[$ ❒ **d.** $]0, +\infty[$

**6** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite strictement positive. Laquelle des conditions suivantes suffit pour dire que les suites $(-u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes ?

❒ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante

❒ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0

❒ **c.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et converge vers 0

❒ **d.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et converge vers 0

**7** La suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = 2n + (-1)^n$ est

❒ **a.** croissante ❒ **b.** décroissante

❒ **c.** non monotone ❒ **d.** croissante et décroissante selon la parité de $n$

**8** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang ?

❒ **a.** $u_n$ tend vers 0 ❒ **b.** $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0

❒ **c.** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 ❒ **d.** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$

**9** Laquelle des conditions suivantes est incompatible avec le fait que la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit périodique ?

❒ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée

❒ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente

❒ **c.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante

❒ **d.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement positive

**10** Parmi les conditions suivantes, laquelle est *suffisante* pour que la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tende vers 1 ?

❒ **a.** $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1

❒ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par 1 ou décroissante et minorée par 1

❒ **c.** $|u_n - 1| < \dfrac{1}{n}$ à partir d'un certain rang

❒ **d.** la partie entière de $u_n$ tend vers 1

**11** Parmi les conditions suivantes, laquelle est *nécessaire* pour que la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tende vers 1 ?

❒ **a.** $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1

❒ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par 1 ou décroissante et minorée par 1

❒ **c.** $|u_n - 1| < \dfrac{1}{n}$ à partir d'un certain rang

❒ **d.** la partie entière de $u_n$ tend vers 1

**12** Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite réelle telle que $1 - \dfrac{1}{n} < u_n < 2 + \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, alors

❒ **a.** $\lim u_n \in [1, 2]$ ❒ **b.** $\lim u_n \in ]1, 2[$

❒ **c.** $\lim u_n = 3/2$ ❒ **d.** $u_n$ ne converge pas forcément

**13** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle croissante. On pose $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$. Les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes

❒ **a.** lorsque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge

❒ **b.** lorsque $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n$

❒ **c.** lorsque $u_{n+1} - u_n \geqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n$

❒ **d.** lorsque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée

**14** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. Combien y a-t-il de sous-suites de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui convergent ?

❒ **a.** il n'y en a pas forcément ❒ **b.** il y en a au moins une

❒ **c.** il y en a toujours une infinité ❒ **d.** il n'y en a qu'un nombre fini

**15** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle croissante. Laquelle des conditions suivantes n'est pas suffisante pour affirmer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge ?

❒ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée

❒ **b.** la suite extraite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ converge

❒ **c.** la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0

❒ **d.** la suite extraite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ est bornée

**16** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n} + \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. Alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 car

❒ **a.** $0 \leqslant \lim u_n \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et donc $\lim u_n = 0$

❒ **b.** $\dfrac{1}{n} + \varepsilon$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ et $\varepsilon$ tend vers 0

❒ **c.** $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 donc si $\varepsilon > 0$ est fixé, $0 \leqslant u_n \leqslant 2\varepsilon$ pour $n$ assez grand

❒ **d.** en prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$ pour $n$ assez grand

**17** Soit $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Si $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite adjacente avec $(u_n)_{n\geqslant 0}$, alors

❒ **a.** pour tout $n$, on a $v_n > 1$

❒ **b.** pour tout $n$, on a $v_n - u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$

❒ **c.** $\lim v_n > 1$

❒ **d.** $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante

# 11

# Suites réelles : questions asymptotiques

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La relation de négligeabilité
- La recherche d'un équivalent simple
- Les relations de comparaison usuelles
- Les règles de calcul sur les équivalents

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 123. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Un équivalent simple de la suite $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$ est

❒ **a.** $\frac{1}{2n}$ ❒ **b.** $0$ ❒ **c.** $1$ ❒ **d.** $\sqrt{n}$

**2** Laquelle des suites suivantes n'est pas négligeable devant la suite $2n + \sqrt{n}$ ?

❒ **a.** $\sqrt{n}$ ❒ **b.** $\ln n$ ❒ **c.** $n$ ❒ **d.** $\frac{1}{n}$

**3** Si $x_n = 2^n$ et $y_n = n^3$ alors on peut dire que

❒ **a.** $x_n = o(y_n)$ ❒ **b.** $y_n = o(x_n)$

❒ **c.** $x_n$ et $y_n$ sont équivalentes ❒ **d.** $\frac{x_n}{y_n}$ est bornée

**4** Soit $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites strictement positives négligeables devant une suite strictement positive $(u_n)$. Laquelle des suites suivantes n'est pas forcément négligeable devant la suite $(u_n)$ ?

❒ **a.** $x_n + y_n$ ❒ **b.** $x_n y_n$ ❒ **c.** $x_n - y_n$ ❒ **d.** $\sqrt{x_n y_n}$

**5** Si $(x_n)$ et $(y_n)$ sont deux suites réelles telles que $x_n \sim n+1$ et $y_n \sim n$, alors

❒ **a.** $(x_n - y_n) \sim 0$ ❒ **b.** $(x_n - y_n) \sim 1$ ❒ **c.** $(x_n - y_n) \to +\infty$

❒ **d.** on ne peut pas donner un équivalent de $(x_n - y_n)$

**6** Soit $u_n = \dfrac{e^{n+1}}{n+1}$. Un équivalent simple de $u_n$ est

❒ **a.** $e^n$ ❒ **b.** $\dfrac{e^n}{n}$ ❒ **c.** $\dfrac{e^n}{n+1}$ ❒ **d.** $\dfrac{e^{n+1}}{n}$

**7** Soit $(u_n)$ une suite qui tend vers $+\infty$. Laquelle des suites suivantes est négligeable devant $(u_n)$ ?

❒ **a.** $\dfrac{u_n}{2}$ ❒ **b.** $\sqrt{u_n}$ ❒ **c.** $\sqrt{n}$ ❒ **d.** $u_{n-1}$

**8** Laquelle des propriétés suivantes permet de dire que la suite $(u_n)$ converge ?

❒ **a.** $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 ❒ **b.** $u_{n+1}$ est équivalente à $u_n$

❒ **c.** $u_n$ est équivalente à 1 ❒ **d.** $u_n = o(n)$

**9** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 1. Alors la suite $v_n = (u_n)^n$

❒ **a.** tend aussi vers 1 ❒ **b.** converge vers 0

❒ **c.** diverge vers $+\infty$ ❒ **d.** est une forme indéterminée

**10** Quelle est la limite de $u_n = \dfrac{4^n - 3^n}{2^n - 1}$ ?

❒ **a.** $+\infty$ ❒ **b.** 2 ❒ **c.** 1 ❒ **d.** $2^n$

**11** Lequel des développements asymptotiques suivants permet de dire que $e^{u_n}$ est équivalent à $e^n$ ?

❒ **a.** $u_n = n + o(e^n)$ ❒ **b.** $u_n = n + o(n)$

❒ **c.** $u_n = n + o(1)$ ❒ **d.** $u_n = n + \ln n + o(\ln n)$

**12** Soit $u_n = \dfrac{\ln 2n}{n}$. Alors $u_n$ est équivalente à

❒ **a.** 0 ❒ **b.** $\dfrac{1}{n}$ ❒ **c.** $\dfrac{\ln n}{n}$ ❒ **d.** $\ln 2n$

**13** Laquelle des suites suivantes vérifie $u_{n+1} \sim u_n$ ?

❒ **a.** $n!$ ❒ **b.** $2^n$ ❒ **c.** $n^n$ ❒ **d.** $n^2$

**14** Soit $(u_n)$ une suite réelle positive telle que $u_{n+2} \sim u_n$. Quelle condition est *suffisante* pour affirmer que $u_{n+1} \sim u_n$ ?

❒ **a.** $u_n$ est minorée ❒ **b.** $u_n$ est décroissante

❒ **c.** $u_n$ est périodique ❒ **d.** $n$ est pair

**15** Quelle est la limite de la suite $n^{1/n}$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** $e$ ❒ **d.** $+\infty$

**16** Soit $(u_n)$ une suite qui tend vers $+\infty$. Laquelle des suites suivantes est équivalente à $(u_n)$ ?

❒ **a.** $u_{n+1}$ ❒ **b.** $1 + u_n$ ❒ **c.** $2u_n$ ❒ **d.** $\sqrt{u_n}$

**17** Comment se classent les suites $a_n = 2^{n^2}$, $b_n = n^{2^n}$ et $c_n = 2^{n^n}$ pour la relation de négligeabilité ?

❒ **a.** $a_n \ll b_n \ll c_n$ ❒ **b.** $b_n \ll a_n \ll c_n$

❒ **c.** $a_n \ll c_n \ll b_n$ ❒ **d.** $c_n \ll a_n \ll b_n$

# 12 Suites récurrentes

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les suites arithmétiques et géométriques
- Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2
- Le raisonnement par récurrence
- Les suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 126. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Parmi les suites suivantes, laquelle est une suite géométrique ?

❒ **a.** $a_n = e^{3n}$ ❒ **b.** $b_n = (n+1)^n$

❒ **c.** $c_n = 2^{n^2}$ ❒ **d.** $d_n = 3n$

**2** Combien vaut $a + a^2 + \cdots + a^n$ lorsque $a$ est un réel différent de 1 ?

❒ **a.** $\dfrac{1-a^n}{1-a}$ ❒ **b.** $\dfrac{a-a^n}{1-a}$ ❒ **c.** $\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}$ ❒ **d.** $\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

**3** Lorsque $t$ est un nombre réel, la suite $u_n = e^{int}$ converge pour

❒ **a.** $t \equiv 0$ modulo $2\pi$ ❒ **b.** $t \equiv 0$ modulo $\pi$

❒ **c.** aucune valeur de $t$ ❒ **d.** tout réel $t$

**4** Soit $u_n = 2n + 3$. Combien vaut $u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$ ?

❒ **a.** $3(n+1)^2$ ❒ **b.** $3n(n+1)$

❒ **c.** $\dfrac{(n+1)(6n+9)}{2}$ ❒ **d.** $\dfrac{n(6n+9)}{2}$

**5** Quel est le comportement de la suite définie par $u_0 = 1/2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^3$ ?

❒ **a.** elle tend vers 1 en croissant ❒ **b.** elle tend vers 1 en décroissant
❒ **c.** elle tend vers 0 en décroissant ❒ **d.** elle diverge vers $+\infty$ en croissant

**6** Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle qui vérifie $\dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{u_n}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$. Alors

❒ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante ❒ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge
❒ **c.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$ ❒ **d.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmétique

**7** Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par son premier terme $u_1 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Alors on peut montrer par récurrence sur $n$ que

❒ **a.** $u_n$ est rationnel ❒ **b.** $u_n > 0$
❒ **c.** $u_n \leqslant u_{n+1}$ ❒ **d.** $u_n \leqslant nu_1$

**8** Quelle relation de récurrence est vérifiée par la suite $u_n = 2^n + 3^n$ ?

❒ **a.** $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$ ❒ **b.** $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
❒ **c.** $u_{n+2} = 5u_{n+1} + 6u_n$ ❒ **d.** $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$

**9** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle vérifiant la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3$ pour tout $n$. Alors la suite $t_n = u_n - a$ est une suite géométrique lorsque

❒ **a.** $a = 3$ ❒ **b.** $a = -3$ ❒ **c.** $a = 2$ ❒ **d.** $a = 0$

**10** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Alors

❒ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge car elle est croissante

❒ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante donc elle tend vers $+\infty$

❒ **c.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et positive donc converge et sa limite $\ell$ vérifie $\ell = \ell + \ell^2$ donc est nulle.

❒ **d.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et non majorée

**11** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell$ (avec $u_n \neq \ell$ pour tout $n$). Alors le quotient $\dfrac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}$ tend vers

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** $f'(\ell)$ ❒ **d.** $f'(c)$ où $c$ est compris entre $\ell$ et $u_n$

# 13 Fonctions de la variable réelle : généralités, limites, continuité

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Le vocabulaire usuel sur les fonctions : majorées, minorées, bornées,...
- La parité ou l'imparité d'une fonction, les symétries du graphe
- Les fonctions périodiques
- Les fonctions monotones, le théorème des limites monotones
- Les définitions quantifiées des limites et de la continuité
- Les opérations sur les limites
- Le passage à la limite dans une inégalité et le théorème d'encadrement
- La caractérisation séquentielle de la continuité

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 129. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** La plus petite période positive de la fonction $f : x \mapsto \cos(\sin x)$ est

❒ **a.** $2\pi$ ❒ **b.** $\pi$

❒ **c.** $\cos(2\pi)$ ❒ **d.** $f$ n'est pas périodique

**2** Au sujet des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, laquelle des propositions suivantes est fausse ?

❒ **a.** la somme de deux fonctions bornées est bornée

❒ **b.** la somme de deux fonctions continues est continue

❒ **c.** la somme de deux fonctions monotones est monotone

❒ **d.** la somme de deux fonctions paires est paire

**3** La fonction $f : x \mapsto \sin(x^2)$ est

❒ **a.** paire ❒ **b.** impaire

❒ **c.** paire et impaire ❒ **d.** ni paire ni impaire

**4** Si $f$ et $g$ sont définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = -x$, la fonction $\max(f, g)$

❒ **a.** est égale à $f$ ❒ **b.** est égale à $g$

❒ **c.** est la fonction $|x|$ ❒ **d.** n'est pas définie sur $\mathbf{R}$.

**5** Une fonction croissante de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$

❒ **a.** est toujours majorée ❒ **b.** est toujours minorée

❒ **c.** tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ❒ **d.** est continue sur $\mathbf{R}^+$

**6** Quelles sont les limites respectives en $-\infty$ et $+\infty$ de $f : x \mapsto \exp(-e^x)$.

❒ **a.** 1 et 0 ❒ **b.** 0 et 1 ❒ **c.** $+\infty$ et 0 ❒ **d.** 0 et $+\infty$

**7** Une fonction $f$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ tend vers 3 à droite en 0 si

❒ **a.** $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, 0 < x \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - 3| \leqslant \varepsilon$

❒ **b.** $\forall \varepsilon \geqslant 0, \exists \alpha \geqslant 0, 0 < x \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - 3| \leqslant \varepsilon$

❒ **c.** $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, 0 < x \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - 3| \leqslant \varepsilon$

❒ **d.** $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, 0 < x \leqslant \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - 3| \leqslant \alpha$

**8** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ étant une fonction quelconque, laquelle des fonctions suivantes n'est pas nécessairement paire ?

❒ **a.** $x \mapsto f(x^2)$ ❒ **b.** $x \mapsto f(x)^2$

❒ **c.** $x \mapsto f(x)f(-x)$ ❒ **d.** $x \mapsto f(\cos x)$

**9** Soit $f$ strictement décroissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Quelle fonction n'est pas forcément croissante ?

❒ **a.** $x \mapsto f(f(x))$ ❒ **b.** $x \mapsto -f(x)$

❒ **c.** $x \mapsto f(-x)$ ❒ **d.** $x \mapsto f(x^2)$

**10** Laquelle des conditions suivantes est *suffisante* pour que $f$ soit continue en 0 ?

❒ **a.** $|f(x)| \leqslant |x|$ pour tout $x$ dans $[-1, 1]$

❒ **b.** $f(x) \leqslant x$ pour tout $x$ dans $[-1, 1]$

❒ **c.** la suite $f(1/n)$ converge vers $f(0)$

❒ **d.** $f$ est croissante sur $[-1, 1]$

**11** Quelle condition est suffisante pour dire qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est majorée sur $\mathbf{R}$ ?

❒ **a.** $f$ est majorée sur l'intervalle $[n, n+1]$ pour tout $n$ dans $\mathbf{Z}$

❒ **b.** $f$ est périodique

❒ **c.** $f$ est croissante et tend vers 0 en $+\infty$

❒ **d.** $f$ est impaire et majorée sur $\mathbf{R}_+$

**12** Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, la fonction $x \mapsto x^{1/x}$ tend vers

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** $e$ ❒ **d.** $+\infty$

**13** Soit $f, g$ deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^*$ telles que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tende vers 1 quand $x$ tend vers 0. Alors on peut dire que sur un voisinage de 0

❒ **a.** $f(x) = g(x)$ ❒ **b.** $f$ et $g$ ont le même signe

❒ **c.** $f$ et $g$ ont le même sens de variation ❒ **d.** $f$ et $g$ sont continues

**14** Laquelle des propositions suivantes n'implique pas que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue en 0 ?

❒ **a.** $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta, \eta], |f(x) - f(0)| \leqslant 2\varepsilon$

❒ **b.** $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta, \eta], |f(x) - f(0)| \leqslant |x| + \varepsilon$

❒ **c.** $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta, \eta], |f(x) - f(0)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$

❒ **d.** $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta, \eta], |f(x) - f(0)| \leqslant f(\varepsilon)$

**15** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction périodique de plus petite période $T > 0$. Alors $T^2$ est une période de $f$,

❒ **a.** si et seulement si $T = 1$ ❒ **b.** si et seulement si $T$ est entier

❒ **c.** pour tout $T$ ❒ **d.** pour aucune valeur de $T$

**16** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On suppose que $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 1 quand $x$ tend vers $+\infty$. Alors sur un voisinage de $+\infty$

❒ **a.** $f(x) = x$ ❒ **b.** $f(x) \geqslant x$

❒ **c.** $f(x) \geqslant \dfrac{x}{2}$ ❒ **d.** $f(x) \geqslant 2x$

**17** Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ la fonction $f : x \mapsto x^\alpha E(1/x)$ admet-elle une limite finie à droite en 0 ? On rappelle que $E$ désigne la fonction partie entière.

❒ **a.** $\alpha > 1$ ❒ **b.** $\alpha \geqslant 1$

❒ **c.** $\alpha > 0$ ❒ **d.** tout réel $\alpha$

**18** Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ la fonction $f : x \mapsto \dfrac{E(x)}{x^\alpha}$ tend-elle vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ?

❒ **a.** $\alpha > 0$ ❒ **b.** $\alpha \geqslant 1$ ❒ **c.** $\alpha > 1$ ❒ **d.** $\alpha \geqslant 2$

**19** Soit $f$ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, $A$ l'assertion « $f(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$ » et $B$ l'assertion « la suite $f(n)$ converge vers 0 ». Alors

❒ **a.** $A$ implique $B$

❒ **b.** $B$ implique $A$

❒ **c.** $A$ et $B$ sont équivalentes

❒ **d.** il n'y a pas d'implication entre $A$ et $B$

**20** Soit $f$ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ avec $f(0) = 0$. On suppose que la suite $f(1/n)$ converge vers 0. Laquelle des conditions suivantes permet de déduire que $f$ est continue à droite en 0 ?

❒ **a.** $f$ est bornée ❒ **b.** $f$ est croissante

❒ **c.** $f$ est paire ❒ **d.** c'est toujours le cas

# 14 Continuité sur un intervalle

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Le théorème des valeurs intermédiaires
- L'image d'un segment par une fonction continue
- Le théorème des limites monotones
- Les bijections continues
- La continuité uniforme

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 135. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Soit $f$ une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$, telle que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \neq 0$. Alors on peut dire que $f$ est soit strictement positive sur tout l'intervalle $[0, 1]$, soit strictement négative sur tout l'intervalle $[0, 1]$. Quel est l'argument invoqué ?

❒ **a.** le théorème des valeurs intermédiaires

❒ **b.** $f$ est bornée sur le segment $[0, 1]$

❒ **c.** $f$ est une bijection continue

❒ **d.** aucun, cela serait vrai même si $f$ n'était pas continue

**2** Soit $f$ croissante sur $\mathbf{R}^+$ et $\ell$ la limite à droite en 0 de $f$. Alors

❒ **a.** $\ell$ existe et vaut $f(0)$ ❒ **b.** $\ell$ existe et $\ell \geqslant f(0)$

❒ **c.** $\ell$ existe et $\ell \leqslant f(0)$ ❒ **d.** $\ell$ n'existe pas forcément

**3** L'image de l'intervalle $\left]0, \dfrac{2\pi}{3}\right[$ par la fonction sinus est

❒ **a.** $\left]0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right[$ ❒ **b.** $\left]0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

❒ **c.** $\left]-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right[ \cup \left]0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right[$ ❒ **d.** $\left]0, 1\right]$

**4** Laquelle des fonctions suivantes ne se prolonge pas par continuité en 0 ?

❒ **a.** $x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$ ❒ **b.** $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ ❒ **c.** $x \mapsto \sqrt{x^2}$

❒ **d.** $f(x) = x$ si $x > 0$ et $f(x) = 2x$ si $x < 0$

**5** L'image de l'intervalle $\mathbf{R}^+$ par une fonction continue ne peut pas être

❒ **a.** $\mathbf{R}^-$ ❒ **b.** $\mathbf{R}$ ❒ **c.** $\mathbf{R}^*$ ❒ **d.** un singleton

**6** Quelle condition est *nécessaire* pour que la fonction $f$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ admette une limite finie en $+\infty$ ?

❒ **a.** $f$ est monotone et bornée au voisinage de $+\infty$

❒ **b.** $f$ est constante au voisinage de $+\infty$

❒ **c.** $f(x+1) - f(x)$ tend vers 0 en $+\infty$

❒ **d.** $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ tend vers 1 en $+\infty$

**7** Laquelle des assertions suivantes permet de dire que $f$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$ ?

❒ **a.** $\forall \varepsilon > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \exists \eta > 0, |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$

❒ **b.** $\exists \varepsilon > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$

❒ **c.** $\forall \varepsilon > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + |x - y|$

❒ **d.** $\exists \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$

**8** Soit $f$ une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$. Laquelle des conditions suivantes assure l'existence d'un point fixe de $f$ (i.e. d'un réel $x$ tel que $f(x) = x$) ?

❒ **a.** $f(0)$ et $f(1)$ sont de signes contraires

❒ **b.** $f$ est strictement croissante

❒ **c.** $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$

❒ **d.** $f(0)$ et $f(1)$ sont de même signe

**9** Soit $f$ continue sur un segment $[a, b]$ avec $f(a) < f(b)$. Alors $f([a, b])$

❒ **a.** est inclus dans $[f(a), f(b)]$ ❒ **b.** est égal à $[f(a), f(b)]$

❒ **c.** contient $[f(a), f(b)]$ ❒ **d.** est égal à $\{f(a), f(b)\}$

**10** Soit $I$ un intervalle, $f : I \to \mathbf{R}$ continue et strictement positive. Quelle condition sur $I$ assure l'existence d'un réel $a > 0$ tel que $f(x) \geqslant a$ pour tout $x$ de $I$ ?

❒ **a.** c'est vrai pour tout intervalle $I$

❒ **b.** c'est vrai lorsque $I$ est un intervalle borné

❒ **c.** c'est vrai lorsque $I$ est un segment

❒ **d.** $I = \mathbf{R}$

**11** Laquelle des fonctions suivantes n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}$ ?

❒ **a.** $x \mapsto \sin x$ ❒ **b.** $x \mapsto x + 1$

❒ **c.** $x \mapsto x^2$ ❒ **d.** $x \mapsto \arctan x$

**12** Soit $f$ continue et strictement monotone sur $[0, 1[$. L'image de $[0, 1[$ ne peut pas être

❒ **a.** $[0, +\infty[$ ❒ **b.** $[1, +\infty[$ ❒ **c.** $]0, 1]$ ❒ **d.** $]0, 1[$

**13** Soit $f$ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Laquelle des propriétés suivantes est vraie ?

❒ **a.** si $f$ est continue en 0, elle est continue sur un voisinage de 0

❒ **b.** si $f(0) > 0$, alors $f > 0$ sur un voisinage de 0

❒ **c.** si $f(0) > 0$ et si $f$ est continue en 0, alors $f > 0$ sur un voisinage de 0

❒ **d.** si $f(0) > 0$ et si $f$ est continue en 0, alors $f$ est continue et strictement positive sur un voisinage de 0

**14** Soit $f$ une fonction bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour $h > 0$ on pose

$$w(h) = \sup\{|f(x) - f(y)|,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ |x - y| \leqslant h\}$$

Dire que $f$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$, c'est dire que

❒ **a.** $w$ est bornée ❒ **b.** $w$ est fini pour tout $h > 0$

❒ **c.** $w$ est continue ❒ **d.** $w(h)$ tend vers 0 lorsque $h$ tend vers $0^+$

**15** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$. L'ensemble $E$ des réels $x$ tels que $f(x) > 0$ est forcément différent de

❒ **a.** $\mathbf{R}$ ❒ **b.** $]0, 1]$ ❒ **c.** $]0, 1[$ ❒ **d.** $]0, 1[\cup]1, 2[$

**16** Soit $f$ une fonction de **R** dans **R**, A l'assertion « $f$ est strictement croissante », B l'assertion « $f$ est continue » et C l'assertion « $f$ est surjective ». Alors

❒ **a.** (A et B) implique C

❒ **b.** (A et C) implique B

❒ **c.** (B et C) implique A

❒ **d.** aucune des 3 propositions ne résulte des deux autres

**17** Si $f$ est continue sur **R** et vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}$, que peut-on dire ?

❒ **a.** $f = \mathrm{Id}$

❒ **b.** $f$ est strictement croissante

❒ **c.** $f$ est strictement monotone

❒ **d.** le graphe de $f$ est symétrique par rapport à la droite $y = -x$

15

# Dérivabilité des fonctions réelles

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La définition de la dérivée comme limite du taux d'accroissement
- Les calculs de dérivée
- La formule de Leibniz sur la dérivée $n$-ième de $f \times g$
- La dérivabilité des fonctions réciproques
- Les dérivées des fonctions usuelles

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 141. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction dérivable paire, alors $f'$ est

❒ **a.** paire ❒ **b.** impaire

❒ **c.** ni paire, ni impaire ❒ **d.** nulle

**2** Si $f$ et $g$ sont deux fonctions réelles dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ avec $f(1) = g(1)$ alors

❒ **a.** $f'(1) = g'(1)$ ❒ **b.** $f'(1) \neq g'(1)$

❒ **c.** $f'(1) < g'(1)$ ❒ **d.** on ne peut rien dire

**3** Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dérivable, la dérivée de $x \mapsto f(x^3)$ est

❒ **a.** $x \mapsto 3x^2 f'(3x^2)$ ❒ **b.** $x \mapsto 3f'(x^3)^2$

❒ **c.** $x \mapsto 3x^2 f'(x^3)$ ❒ **d.** $x \mapsto f'(x^3)$

**4** Si $f, g, h$ sont trois fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, la dérivée du produit $fgh$ vaut

❒ **a.** $f'g'h'$ ❒ **b.** $f'gh + fgh'$

❒ **c.** $f'gh + fg'h + fgh'$ ❒ **d.** $f'g'h + fgh'$

**5** La dérivée en $x \in \mathbf{R}$ de la fonction sinus est

❒ **a.** $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ ❒ **b.** $\sin(x+\pi)$

❒ **c.** $\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$ ❒ **d.** $\sin(x+2\pi)$

**6** L'équation de la tangente en $\frac{\pi}{4}$ au graphe de la fonction $x \mapsto \tan x$ est

❒ **a.** $y-\frac{\pi}{4}=x-\frac{\pi}{4}$ ❒ **b.** $y=1+2x$

❒ **c.** $y=2x-1$ ❒ **d.** $y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

**7** En 0 la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sin x}$ tend vers

❒ **a.** $0$ ❒ **b.** $1$ ❒ **c.** $\frac{1}{\cos x}$ ❒ **d.** $+\infty$

**8** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable avec $f'(0)=2$. Alors $x \mapsto \frac{f(2x)-f(x)}{2x}$ a pour limite en 0

❒ **a.** $0$ ❒ **b.** $1$ ❒ **c.** $2$ ❒ **d.** $3$

**9** La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sin^2 x}$ est dérivable sur

❒ **a.** $\mathbf{R}$ ❒ **b.** $\mathbf{R}^*$

❒ **c.** $\mathbf{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ ❒ **d.** $\mathbf{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$

**10** La dérivée de $f : x \mapsto \ln|x|$ sur $\mathbf{R}^*$ est

❒ **a.** $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ ❒ **b.** $x \mapsto \left|\frac{1}{x}\right|$ ❒ **c.** $x \mapsto \frac{1}{\ln|x|}$ ❒ **d.** $x \mapsto \frac{1}{x}$

**11** La fonction $f : x \mapsto x+\sin x$ est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. Sa bijection réciproque est dérivable sur

❒ **a.** $\mathbf{R}$ ❒ **b.** $\mathbf{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$

❒ **c.** $\mathbf{R} \setminus \{(2k-1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ ❒ **d.** $\mathbf{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$

**12** Soit $f, g$ deux fonctions deux fois dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Quelle est la dérivée seconde de $f \circ g$ ?

❒ **a.** $g'' \times (f' \circ g) + (g')^2 \times (f'' \circ g)$ ❒ **b.** $g'' \times g' \times (f \circ g) + g' \times (f' \circ g)$

❒ **c.** $g' \circ f' \circ g \circ g'' \circ f \circ g$ ❒ **d.** $f'' \circ g''$

**13** La dérivée de la fonction $x \mapsto x^x$ sur $\mathbf{R}_+^*$ est

❒ **a.** $x \mapsto x^{x-1}$ ❒ **b.** $x \mapsto xx^{x-1} = x^x$

❒ **c.** $x \mapsto (1 + \ln x)x^x$ ❒ **d.** $x \mapsto (1 + \ln x)x^{x-1}$

**14** La fonction $f$ définie par $f(x) = x^2$ pour $x \leqslant 0$ et $f(x) = \sin x$ pour $x \geqslant 0$ est

❒ **a.** seulement continue sur $\mathbf{R}$ ❒ **b.** de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$

❒ **c.** de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ ❒ **d.** de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$

**15** Pour $k \leqslant n$ la dérivée $k$-ième de $x \mapsto x^n$ est

❒ **a.** $x \mapsto \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k}$ ❒ **b.** $x \mapsto \dbinom{n}{k}\, x^{n-k}$

❒ **c.** $x \mapsto k!\, x^{n-k}$ ❒ **d.** $x \mapsto (n-k)!\, x^{n-k}$

**16** Laquelle des fonctions suivantes vérifie : $\forall x \in \mathbf{R}_+,\ f(x)f'(x) = 1$ ?

❒ **a.** $x \mapsto e^{-x}$ ❒ **b.** $x \mapsto \ln(\ln x)$

❒ **c.** $x \mapsto \sqrt{2x}$ ❒ **d.** $x \mapsto \tan x$

**17** Soit $f : x \mapsto (1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)$. La valeur de $f'(0)$ est

❒ **a.** $1$ ❒ **b.** $n+1$ ❒ **c.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ❒ **d.** $n!$

**18** La fonction $f : x \mapsto 2 + x^5$ est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. Sa bijection réciproque

❒ **a.** n'est pas dérivable en 0 ❒ **b.** n'est pas dérivable en 2

❒ **c.** n'est pas dérivable en $\sqrt[5]{-2}$ ❒ **d.** est dérivable en tout point

**19** Quelle est la dérivée en 0 de la fonction $f : x \mapsto \tan(1 + \sin(\tan x^2))$ ?

❒ **a.** $0$ ❒ **b.** $\tan 1$ ❒ **c.** $\dfrac{\pi}{4}$ ❒ **d.** $1 + \tan^2 1$

**20** Soit $n \geqslant 2$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Si on dérive $n$ fois l'égalité $(1+x^2)f(x) = 1$ on obtient la relation

❒ **a.** $(1+x^2)f^{(n)}(x) = 0$

❒ **b.** $(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2xf^{(n-1)}(x) + 2f^{(n-2)}(x) = 0$

❒ **c.** $(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + \dfrac{n(n-1)}{2}f^{(n-2)}(x) = 0$

❒ **d.** $(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$

**21** Soit $f$ dérivable sur $\mathbf{R}$ et tendant vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$. On définit $g$ sur $[-1, 1]$ par $g(-1) = g(1) = 0$ et $g(x) = f\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$ pour $x \in ]-1, 1[$. Alors

❒ **a.** $g$ est continue sur $]-1, 1[$ et dérivable sur $]-1, 1[$

❒ **b.** $g$ est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$

❒ **c.** $g$ est continue sur $]-1, 1[$ et dérivable sur $[-1, 1]$

❒ **d.** $g$ est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $[-1, 1]$

**22** Soit $f, g$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ qui admettent la même tangente en 0. Alors on peut affirmer que $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$ pour

❒ **a.** $k = 0$ ❒ **b.** $k$ dans $\{0, 1\}$

❒ **c.** $k$ dans $\{0, 1, 2\}$ ❒ **d.** tout entier $k$

**23** La fonction $f : x \mapsto x + \ln x$ est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$. On note $g$ sa bijection réciproque qui est dérivable sur $\mathbf{R}$. Alors on a pour tout $x \in \mathbf{R}$,

❒ **a.** $g'(x) = \dfrac{g(x)}{g(x)+1}$ ❒ **b.** $g'(x) = \dfrac{g(x)+1}{g(x)}$

❒ **c.** $g'(x) = \ln g(x)$ ❒ **d.** $g'(x) = 1 + e^x$

# 16 Variations des fonctions, accroissements finis

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les dérivées usuelles
- Les opérations sur les dérivées
- La dérivée d'une fonction en un extremum local
- Le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis
- L'inégalité des accroissements finis
- La caractérisation des fonctions monotones

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 147. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Si $f$ est une fonction réelle dérivable avec $f'(0) = 0$ alors

❒ **a.** $f$ admet un minimum local en 0

❒ **b.** $f$ admet un maximum local en 0

❒ **c.** $f$ est paire

❒ **d.** on ne peut rien dire

**2** Pour tous $x, y$ réels on peut majorer $|\sin x - \sin y|$ par

❒ **a.** $|x - y|$ ❒ **b.** $\frac{1}{2}|x - y|$ ❒ **c.** $x|x - y|$ ❒ **d.** $1$

**3** Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ et vérifiant $f'(x) = g'(2x)$ pour tout $x$, quelle fonction est constante ?

❒ **a.** $x \mapsto f(x) - g(2x)$ ❒ **b.** $x \mapsto 2f(x) - g(2x)$

❒ **c.** $x \mapsto f(x) - 2g(2x)$ ❒ **d.** $x \mapsto f(x) - 2g(x)$

**4** Quel est le plus grand intervalle sur lequel la fonction $f(x) = x + \sin x$ est croissante ?

❒ **a.** $\mathbf{R}$ ❒ **b.** $[-\pi, \pi]$ ❒ **c.** $]-\pi, \pi[$ ❒ **d.** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

**5** Quel est le plus grand intervalle sur lequel la fonction $f(x) = x + \sin x$ est strictement croissante ?

❒ **a.** $\mathbf{R}$ ❒ **b.** $[-\pi, \pi]$ ❒ **c.** $]-\pi, \pi[$ ❒ **d.** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

**6** La dérivée sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto x^{1/x}$ est

❒ **a.** $x \mapsto x^{-2+1/x}$ ❒ **b.** $x \mapsto \dfrac{1 + \ln x}{x^2}\, x^{1/x}$

❒ **c.** $x \mapsto \dfrac{1 - \ln x}{x^2}\, x^{1/x}$ ❒ **d.** $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}\, x^{1/x}$

**7** Si $f$ est dérivable, la dérivée de arctan $f$ est

❒ **a.** $\arctan f'$ ❒ **b.** $\dfrac{1}{1 + f^2}$

❒ **c.** $\dfrac{f'}{1 + f^2}$ ❒ **d.** $f'(1 + \arctan f^2)$

**8** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable sur $\mathbf{R}$. On suppose que $f'$ ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$. Alors

❒ **a.** $f$ ne s'annule pas non plus ❒ **b.** $f$ s'annule exactement une fois

❒ **c.** $f$ s'annule au moins une fois ❒ **d.** $f$ s'annule au plus une fois

**9** Si $f$ est une fonction dérivable et si $f'$ est paire alors $f$ est

❒ **a.** paire ❒ **b.** impaire

❒ **c.** sans parité ❒ **d.** impaire ou sans parité

**10** Si $f$ est une fonction dérivable et si $f'$ est impaire alors $f$ est

❒ **a.** paire ❒ **b.** impaire

❒ **c.** sans parité ❒ **d.** impaire ou sans parité

**11** Soit $a < b$ deux réels strictement positifs. Le taux d'accroissement $\dfrac{b^{3/2} - a^{3/2}}{b - a}$ est compris entre

❒ **a.** $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ ❒ **b.** 0 et $\sqrt{a}$

❒ **c.** 0 et $\sqrt{b}$ ❒ **d.** $\dfrac{3}{2}\sqrt{a}$ et $\dfrac{3}{2}\sqrt{b}$

**12** Que vaut $\sup\limits_{x\in[0,2]} (1 - x^2)^2$ ?

❐ **a.** 0 ❐ **b.** 1 ❐ **c.** 2 ❐ **d.** 9

**13** Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. On suppose que $f$ s'annule $n$ fois dans l'intervalle $I$ et que $f'$ s'annule $p$ fois. Alors on a forcément

❐ **a.** $p \geqslant n - 1$ ❐ **b.** $p \geqslant n$ ❐ **c.** $p = n$ ❐ **d.** $p \leqslant n - 1$

**14** Soit $f$ dérivable sur $\mathbf{R}$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $f'$ ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$ ?

❐ **a.** $f$ est strictement monotone ❐ **b.** $f$ n'a pas d'extremum local

❐ **c.** $f$ est injective ❐ **d.** $x \mapsto f(x) - x$ est croissante

**15** Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ dérivable sur $\mathbf{R}_+$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $f(x + 1) - f(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ?

❐ **a.** $f'(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$

❐ **b.** $f'$ est strictement positive

❐ **c.** $f'(x + 1) - f'(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$

❐ **d.** $f'$ est 1-périodique

**16** Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $K$-lipschitzienne sur $[0, 1]$, alors $A = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)|$ vérifie

❐ **a.** $A = K$ ❐ **b.** $A \leqslant K$ ❐ **c.** $A \geqslant K$ ❐ **d.** $A = \dfrac{1}{K}$

**17** Que vaut $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}} \dfrac{2x}{1 + x^2}$ ?

❐ **a.** 0 ❐ **b.** 1 ❐ **c.** 2 ❐ **d.** $+\infty$

**18** Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $f$ admet un maximum local en 0 ?

❐ **a.** $f'(0) = 0$ ❐ **b.** $f'(x) = x + o(x)$

❐ **c.** $f'(x) = -x + o(x)$ ❐ **d.** $f'(x) = -x^2 + o(x^2)$

# Développements limités

17

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Le calcul du polynôme de Taylor d'une fonction en un point
- La notion de développement limité
- La relation d'équivalence et la relation de négligeabilité
- Les développements limités usuels
- Les opérations sur les développements limités

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 152. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Si $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, alors $f^2(x)$ admet comme développement limité :

❒ **a.** $1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$ ❒ **b.** $1 + 2x + 3x^2 + o(x^2)$

❒ **c.** $1 + 2x + 4x^2 + o(x^2)$ ❒ **d.** $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 + o(x^4)$

**2** Si $f$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ telle que $f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + o(x^3)$ alors la valeur de $f^{(3)}(0)$ est

❒ **a.** 1/2 ❒ **b.** 3 ❒ **c.** 9 ❒ **d.** 18

**3** En 0 la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{1+x} - 1$ est équivalente à

❒ **a.** $\dfrac{x}{3}$ ❒ **b.** $\sqrt[3]{x}$ ❒ **c.** $x$ ❒ **d.** $3x$

**4** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Le polynôme de Taylor de $f$ d'ordre 2 en 1 est

❒ **a.** $f(1) + xf'(1) + \dfrac{x^2}{2}f''(1)$

❒ **b.** $(x-1)\left(f(1) + xf'(1) + \dfrac{x^2}{2}f''(1)\right)$

❒ **c.** $f(1) + (x-1)f'(1) + \dfrac{(x-1)^2}{2}f''(1)$

❒ **d.** $f(x) + (x-1)f'(x) + \dfrac{(x-1)^2}{2}f''(x)$

**5** Si en 0 on a $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 2x + o(x)$ alors $f + g$ admet pour développement limité

❒ **a.** $1 + 3x + o(x^2)$ ❒ **b.** $1 + 3x + o(x)$

❒ **c.** $1 + 3x + o(x) + o(x^2)$ ❒ **d.** $1 + 3x + o(x^{3/2})$

**6** Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1 + x)^{3/2}$ est

❒ **a.** $1 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{15}{8}x^2 + o(x^2)$ ❒ **b.** $1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + o(x^2)$

❒ **c.** $1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{4}x^2 + o(x^2)$ ❒ **d.** $1 + \dfrac{3}{2}x + o(x^2)$

**7** Laquelle des fonctions suivantes n'admet pas de développement limité d'ordre $n \geqslant 1$ en 1 ?

❒ **a.** $x \mapsto \sqrt{x}$ ❒ **b.** $x \mapsto \ln x$

❒ **c.** $x \mapsto \sin x$ ❒ **d.** $x \mapsto \arcsin x$

**8** Lequel des développements limités suivants montre que la fonction $f$ est, au voisinage de 0, au-dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = 1 - x$ ?

❒ **a.** $f(x) = 1 - x + x^3 + o(x^3)$ ❒ **b.** $f(x) = 1 - x + x^2 + o(x^2)$

❒ **c.** $f(x) = 1 - x + o(x)$ ❒ **d.** $f(x) = 1 - x - x^4 + o(x^4)$

**9** Parmi les $2n+1$ coefficients du développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de $\sqrt{1+x}$, combien sont positifs ?

❒ **a.** un seul ❒ **b.** $n$ ❒ **c.** $n+1$ ❒ **d.** tous

**10** Laquelle des fonctions suivantes n'est pas majorée par $x^2$ au voisinage de 0 ?

❒ **a.** $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ ❒ **b.** $x \mapsto \sqrt{1 + x^2} - 1$

❒ **c.** $x \mapsto 1 - \cos 2x$ ❒ **d.** $x \mapsto (\sin x)^2$

**11** La limite en 0 de $\dfrac{\tan x - x}{\sin x - x}$ vaut

❒ **a.** $-2$ ❒ **b.** $0$ ❒ **c.** $1$ ❒ **d.** $+\infty$

**12** Au voisinage de 0, la fonction $f(x) = \cos(x) - 1 + ax^2$ est

❒ **a.** positive pour $a \geqslant \frac{1}{2}$, négative pour $a < \frac{1}{2}$

❒ **b.** positive pour $a > \frac{1}{2}$, nulle pour $a = \frac{1}{2}$, négative pour $a < \frac{1}{2}$

❒ **c.** positive pour $a > \frac{1}{2}$, négative pour $a \leqslant \frac{1}{2}$

❒ **d.** positive pour $a \geqslant -\frac{1}{2}$, négative pour $a < -\frac{1}{2}$

**13** Considérons la fonction polynomiale $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Au voisinage de zéro, on a $P(x) = o(x^2)$ si et seulement si

❒ **a.** $a = b = 0$ ❒ **b.** $a = b = c = 0$

❒ **c.** $a = b = c = d = 0$ ❒ **d.** $c = d = 0$

**14** Lequel des développements limités suivants montre que la fonction $f$ admet en 0 un point d'inflexion ?

❒ **a.** $f(x) = x + x^2 + o(x^2)$ ❒ **b.** $f(x) = x + o(x)$

❒ **c.** $f(x) = x - x^3 + o(x^3)$ ❒ **d.** $f(x) = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$

**15** Pour obtenir un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{x^2 \cos x}{\sin x}$ on a besoin

❒ **a.** du DL de cosinus à l'ordre 4 et du DL de sinus à l'ordre 5

❒ **b.** du DL de cosinus à l'ordre 5 et du DL de sinus à l'ordre 5

❒ **c.** du DL de cosinus à l'ordre 3 et du DL de sinus à l'ordre 4

❒ **d.** du DL de cosinus à l'ordre 3 et du DL de sinus à l'ordre 5

# 18 Fonctions convexes

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les inégalités de convexité
- La caractérisation des fonctions convexes $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$
- Le théorème des pentes croissantes

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 157. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Sur lequel des intervalles suivants la fonction sinus est-elle convexe ?

❒ **a.** $[0, \frac{\pi}{2}]$ ❒ **b.** $[\pi, 2\pi]$ ❒ **c.** $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ ❒ **d.** $]0, \pi[$

**2** Si $f$ est convexe et dérivable sur $\mathbf{R}$, alors pour tout réel $x$ on a :

❒ **a.** $f(x) \geqslant f(1) + (x-1)f'(1)$ ❒ **b.** $f(x) \leqslant f(1) + (x-1)f'(1)$

❒ **c.** $f(x) \geqslant f(1) + (x-1)f'(x)$ ❒ **d.** $f(x) = f(1) + (x-1)f'(1)$

**3** Pour quelles valeurs du réel $a$ la fonction $x \mapsto x^a$ est-elle convexe sur $\mathbf{R}_+^*$ ?

❒ **a.** pour $a$ dans $]0, 1[$ ❒ **b.** pour $a$ en dehors de $]0, 1[$

❒ **c.** pour $a$ positif ou nul ❒ **d.** pour $a$ rationnel

**4** Si $f$ est convexe sur $\mathbf{R}$, laquelle des fonctions suivantes est forcément croissante sur $]0, +\infty[$ ?

❒ **a.** $x \mapsto f(x)$ ❒ **b.** $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$

❒ **c.** $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ ❒ **d.** $x \mapsto f''(x)$

**5** Pour $a, b$ positifs, on a par concavité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ :

❒ **a.** $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ ❒ **b.** $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqslant \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$

❒ **c.** $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$ ❒ **d.** $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqslant \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$

**6** La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbf{R}$. On peut donc écrire pour tout $t$ dans $[0, 1]$,

❒ **a.** $\exp t \leqslant t + (1-t)e$ ❒ **b.** $\exp t \geqslant t + (1-t)e$

❒ **c.** $\exp t \leqslant (1-t) + te$ ❒ **d.** $\exp t \geqslant (1-t) + te$

**7** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. L'ensemble $E$ des points où $f$ admet un minimum absolu ne peut pas être

❒ **a.** vide ❒ **b.** un singleton

❒ **c.** un ensemble à deux éléments ❒ **d.** infini

**8** L'ensemble des points où une fonction convexe de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est négative ne peut pas être

❒ **a.** vide ❒ **b.** un singleton

❒ **c.** un ensemble à deux éléments ❒ **d.** $\mathbf{R}$

# 19 Intégrales

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La positivité de l'intégrale.
- L'inégalité triangulaire
- La relation de Chasles
- Les sommes de Riemann
- L'inégalité de Cauchy-Schwarz
- Les primitives et le théorème fondamental du calcul intégral
- L'intégration par parties
- Les changements de variable
- La formule de Taylor avec reste intégral

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 159. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Soit $F(x) = \int_0^x f(\sin^2 t)\, dt$ où $f$ est une fonction continue. Alors $F'(x)$ est égal à

❐ **a.** $f(\sin^2 x)$ ❐ **b.** $2\cos x\ \sin x\ f(\sin^2 x)$

❐ **c.** $2\cos x\ \sin x\ f'(\sin^2 x)$ ❐ **d.** $\int_0^x 2\cos t\ \sin t\ f'(\sin^2 t)\, dt$

**2** La suite $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\ \, dx$ est

❐ **a.** croissante ❐ **b.** strictement croissante

❐ **c.** décroissante ❐ **d.** strictement décroissante

**3** En supposant les intégrales bien définies, que vaut $\sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\, dt$ ?

❐ **a.** $\int_0^k f(t)\, dt$ ❐ **b.** $\int_0^n f(t)\, dt$

❐ **c.** $\int_0^{n+1} f(t)\, dt$ ❐ **d.** $\int_{-1}^n f(t)\, dt$

**4** Si on fait le changement de variable $u = at$ $(a > 0)$ dans l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ on obtient

❒ **a.** $\int_0^1 f\left(\frac{u}{a}\right)\mathrm{d}u$ ❒ **b.** $\int_0^a f\left(\frac{u}{a}\right)\mathrm{d}u$

❒ **c.** $a\int_0^1 f\left(\frac{u}{a}\right)\mathrm{d}u$ ❒ **d.** $\frac{1}{a}\int_0^a f\left(\frac{u}{a}\right)\mathrm{d}u$

**5** En intégrant $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$ par parties on trouve

❒ **a.** $0$ ❒ **b.** $1$ ❒ **c.** $e$ ❒ **d.** $2e-1$

**6** Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,2],\mathbf{R})$. Que vaut $\int_0^1 f - \int_0^2 f$ ?

❒ **a.** $-\int_1^2 f$ ❒ **b.** $-\int_2^1 f$ ❒ **c.** $-\int_0^1 f$ ❒ **d.** $\int_1^2 f$

**7** La suite $u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \cos\frac{k\pi}{n}$ converge vers

❒ **a.** $\int_0^1 x^2\cos x\ \mathrm{d}x$ ❒ **b.** $\int_0^1 x^2\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x$

❒ **c.** $\int_0^\pi x^2\cos x\ \mathrm{d}x$ ❒ **d.** $\int_0^1 x^3\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x$

**8** Le changement de variable $u = \sin t$ dans l'intégrale $I = \int_0^{\pi/6} f(\sin t)\,\mathrm{d}t$ donne

❒ **a.** $\int_0^{1/2}\frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$ ❒ **b.** $\int_0^{\pi/6} f(u)\mathrm{d}u$

❒ **c.** $\int_0^{1/2} f(u)\mathrm{d}u$ ❒ **d.** $\int_0^{\pi/6}\frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$

**9** Soit $a > 0$ ; si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction réelle continue telle que $|f| \leqslant M$, alors l'intégrale $I = \int_0^a f(t)\cos t\,\mathrm{d}t$ est comprise entre

❒ **a.** $-M$ et $M$ ❒ **b.** $-aM$ et $aM$

❒ **c.** $-M\sin a$ et $M\sin a$ ❒ **d.** $M\cos 0$ et $M\cos a$

**10** Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ est majorée par

❒ **a.** $\ln 2 \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ ❒ **b.** $\sqrt{\ln 2 \displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx}$

❒ **c.** $\sqrt{\displaystyle\int_0^1 \frac{f^2(x)}{2}\,dx}$ ❒ **d.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx}$

**11** Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit $f(1) = f(0) + f'(0) + R$ où $R$ vaut

❒ **a.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{f''(t)t^2}{2!}\,dt$ ❒ **b.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{f''(t)(1-t)^2}{2!}\,dt$

❒ **c.** $\displaystyle\int_0^1 f''(t)(1-t)\,dt$ ❒ **d.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{f''(t)(1-t)}{2!}\,dt$

**12** Soit $f, g$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, $f$ vérifiant de plus les conditions aux bords $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$. En intégrant deux fois par parties, $\displaystyle\int_0^1 fg''$ est égal à

❒ **a.** $\displaystyle\int_0^1 f'g$ ❒ **b.** $\displaystyle\int_0^1 f''g$ ❒ **c.** $-\displaystyle\int_0^1 f''g$ ❒ **d.** $-\displaystyle\int_0^1 f'g$

**13** Si dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$ on effectue le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - u$ on obtient

❒ **a.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n u\,du$ ❒ **b.** $-\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n u\,du$

❒ **c.** $(-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n u\,du$ ❒ **d.** $(-1)^n\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n u\,du$

**14** Si $E$ est la fonction partie entière et $n$ un entier naturel alors $I = \displaystyle\int_0^n E(x)\,dx$ vaut

❒ **a.** $n$ ❒ **b.** $E(n^2/2)$ ❒ **c.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ❒ **d.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$

**15** Soit $a \leqslant b$ deux réels tels que $\displaystyle\int_a^b \sin t\,dt = b - a$. Alors forcément

❒ **a.** $\sin t = 1$ ❒ **b.** $b = a + 2k\pi$

❒ **c.** $b = a$ ❒ **d.** $\cos(b) = \cos(a)$

**16** Laquelle des intégrales suivantes est égale à $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-t} t^2 \, \mathrm{d}t$ ?

❒ **a.** $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln u}{u^2} \mathrm{d}u$ ❒ **b.** $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln u)^2}{u^2} \mathrm{d}u$

❒ **c.** $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln u)^2}{u} \mathrm{d}u$ ❒ **d.** $\displaystyle\int_1^e (\ln u)^2 \mathrm{d}u$

**17** Lorsque $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue, laquelle des intégrales suivantes est strictement positive ?

❒ **a.** $\displaystyle\int_0^1 |f|$ ❒ **b.** $\displaystyle\int_0^1 f^2 - f + 1$

❒ **c.** $\displaystyle\int_0^1 f + |f|$ ❒ **d.** $\displaystyle\int_0^1 \sin(f)$

**18** Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f = 0$. Alors $f$

❒ **a.** est nulle

❒ **b.** s'annule exactement une fois sur $]0,1[$

❒ **c.** s'annule au moins une fois sur $]0,1[$

❒ **d.** ne s'annule pas forcément

**19** La suite $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n+k}}$ tend vers

❒ **a.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} \, \mathrm{d}x$ ❒ **b.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} \, \mathrm{d}x$

❒ **c.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} \, \mathrm{d}x$ ❒ **d.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+1/x}} \, \mathrm{d}x$

**20** Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sin x} f(t^2) \, \mathrm{d}t$ où $f$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F'(x)$ est égal à

❒ **a.** $\cos(x) \, f(\sin^2 x)$ ❒ **b.** $\displaystyle\int_0^{\cos x} f(t^2) \, \mathrm{d}t$

❒ **c.** $\displaystyle\int_0^{\sin x} 2t f'(t^2) \, \mathrm{d}t$ ❒ **d.** $\cos(x) f'(\sin^2 x)$

**21** Si $\int_0^4 f = 1$ alors $\int_0^4 f^2$ est

❒ **a.** supérieur à $\frac{1}{4}$ ❒ **b.** inférieur à $\frac{1}{4}$

❒ **c.** supérieur à $\frac{1}{2}$ ❒ **d.** inférieur à $\frac{1}{2}$

**22** Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Alors $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est équivalent en 0 à

❒ **a.** 0 ❒ **b.** $\frac{x}{2}$ ❒ **c.** $\frac{x^2}{2}$ ❒ **d.** $x^2$

**23** La fonction $F(\lambda) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\lambda + \sin x}$, qui est définie sur $\mathbf{R}_+^*$,

❒ **a.** est croissante et tend vers 0 en $+\infty$

❒ **b.** est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$

❒ **c.** est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$

❒ **d.** est décroissante et tend vers $-\infty$ en $+\infty$

# Calcul des intégrales

# 20

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- L'intégration par parties
- Le tableau des primitives usuelles
- La pratique du changement de variable
- L'intégrale fonction de sa borne supérieure
- L'interprétation géométrique de l'intégrale en termes d'aire.
- La valeur moyenne d'une fonction
- La primitivation des fractions rationnelles

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 167. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** L'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin t \, \mathrm{d}t$ vaut

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** 2 ❒ **d.** $\pi$

**2** Pour trouver une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{2 + \cos^2 x}$ il est intéressant d'effectuer le changement de variable

❒ **a.** $u = \sin x$ ❒ **b.** $u = \cos x$

❒ **c.** $u = \tan \dfrac{x}{2}$ ❒ **d.** $u = \cos^2 x$

**3** La valeur moyenne de la fonction sh sur $[-1, 1]$ est

❒ **a.** 0 ❒ **b.** ch 1 ❒ **c.** 1 ❒ **d.** $\dfrac{\operatorname{ch} 1 + \operatorname{ch}(-1)}{2}$

**4** Si $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue impaire, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f$ vaut

❒ **a.** 0 ❒ **b.** $2\displaystyle\int_0^1 f$ ❒ **c.** $f(1) - f(-1)$ ❒ **d.** $-2\displaystyle\int_0^1 f$

**5** Si $a > 0$ l'intégrale $\int_0^1 x^a \, dx$ vaut

❒ **a.** $\frac{1}{a}$ ❒ **b.** $\frac{1}{a-1}$ ❒ **c.** $\frac{1}{a+1}$ ❒ **d.** $a + 1$

**6** Que donne le changement de variable $t = \sqrt{x}$ dans le calcul de $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ ?

❒ **a.** $\int \frac{dt}{1+t}$ ❒ **b.** $\int \frac{2t \, dt}{1+t}$

❒ **c.** $\int \frac{dt}{2t(1+t)}$ ❒ **d.** $\int \frac{dt}{2\sqrt{t}(1+t)}$

**7** Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+4}$ est

❒ **a.** $x \mapsto \arctan \frac{x}{2}$ ❒ **b.** $x \mapsto 2 \arctan \frac{x}{2}$

❒ **c.** $x \mapsto \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}$ ❒ **d.** $x \mapsto \arctan(2x)$

**8** Que donne le changement de variable $u = \tan x$ dans $I = \int_0^{\pi/3} \tan^2 x \, dx$ ?

❒ **a.** $I = \int_0^{\sqrt{3}} u^2 \, du$ ❒ **b.** $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{1+u^2} \, du$

❒ **c.** $I = \int_0^{\pi/3} \frac{u^2}{1+u^2} \, du$ ❒ **d.** $I = \int_0^{\pi/3} u^2 \, du$

**9** Pour calculer $\int \frac{x \, dx}{1+x^4}$, vous

❒ **a.** décomposez la fraction en éléments simples

❒ **b.** intégrez par parties

❒ **c.** faites le changement de variables $u = x^4$

❒ **d.** faites le changement de variables $u = x^2$

**10** Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2 - 1}$ sur un intervalle ne contenant ni $-1$ ni $1$ est

❒ **a.** $t \mapsto \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right|$ ❒ **b.** $t \mapsto \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right|$

❒ **c.** $t \mapsto \frac{1}{2} \left| \ln \frac{t-1}{t+1} \right|$ ❒ **d.** $t \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{|t|+1}{|t|-1}$

**11** Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et $a, b$ deux réels non nuls. Une primitive de $x \mapsto bf'(ax)$ est

❒ **a.** $x \mapsto \dfrac{b}{a} f(ax)$ ❒ **b.** $x \mapsto abf(ax)$

❒ **c.** $x \mapsto abf(x)$ ❒ **d.** $x \mapsto \dfrac{a}{b} f(ax)$

**12** Soit $F$ une fraction rationnelle. Les primitives de $F$ ne peuvent pas être des fractions rationnelles lorsque

❒ **a.** 0 est un pôle de $F$ ❒ **b.** 0 est une racine de $F$

❒ **c.** 0 est un pôle simple de $F$ ❒ **d.** 0 est une racine simple de $F$

**13** La valeur moyenne de la fonction tangente sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ vaut :

❒ **a.** $\dfrac{\ln 2}{2}$ ❒ **b.** $-\dfrac{2\ln 2}{\pi}$ ❒ **c.** $\dfrac{2\ln 2}{\pi}$ ❒ **d.** $\dfrac{4}{\pi}$

**14** Une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$ est

❒ **a.** $x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ ❒ **b.** $x \mapsto x \ln x$

❒ **c.** $x \mapsto x \ln x - x$ ❒ **d.** $x \mapsto x \ln x + x$

**15** La valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$ est

❒ **a.** $(\ln 2)(\ln 3 - \ln 2)$ ❒ **b.** $\ln 3 - \ln 4$

❒ **c.** $\dfrac{1}{6}$ ❒ **d.** $\ln 4 - \ln 3$

**16** Soit $f$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, 1]$ avec $f'(0) = f'(1) = 0$. En intégrant par parties $I = \displaystyle\int_0^1 (ff')f''$ on obtient

❒ **a.** $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f'^3$ ❒ **b.** $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f'^3$ ❒ **c.** $2\displaystyle\int_0^1 f'^3$ ❒ **d.** $0$

**17** Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est décroissante, pour $n \geqslant 2$, on peut majorer $\dfrac{1}{n^3}$ par

❒ **a.** $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

❒ **b.** $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

❒ **c.** $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

❒ **d.** $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}$

**18** Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ avec $f' > 0$. La dérivée de la fonction $g$ : $x \mapsto \displaystyle\int_{f(0)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt$ est

❒ **a.** $x \mapsto xf'(x)$ ❒ **b.** $x \mapsto x$

❒ **c.** $x \mapsto f^{-1}(x)$ ❒ **d.** $x \mapsto f'(x)f^{-1}(x)$

**19** Soit $f$ une fonction continue sur $[0, 1]$. La suite $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x^n)\,dx$ converge vers

❒ **a.** $0$ ❒ **b.** $f(0)$ ❒ **c.** $f(1)$ ❒ **d.** $\displaystyle\int_0^1 f(u)du$

# Étude métrique des courbes planes

21

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La notion d'abscisse curviligne
- La longueur d'un arc
- Le théorème du relèvement
- Le repère et les formules de Frenet
- La courbure et le rayon de courbure

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 173. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**Notations.** On notera toujours $s$ une abscisse curviligne d'un arc, $T$ la tangente unitaire, $(T, N)$ le repère de Frenet, $c$ la courbure.

**1** On considère l'arc paramétré $M(t) = (t, \operatorname{ch} t)$. Laquelle des fonctions suivantes est-elle une abscisse curviligne pour cet arc ?

❐ **a.** $t \mapsto \operatorname{ch} t$ ❐ **b.** $t \mapsto \operatorname{sh} t$

❐ **c.** $t \mapsto \sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 t}$ ❐ **d.** $t \mapsto \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}$

**2** Soit $s \mapsto M(s)$ un arc birégulier paramétré par une abscisse curviligne. Comment reconnaît-on qu'il s'agit d'une portion de droite ?

❐ **a.** lorsque $M'(s) = 0$

❐ **b.** lorsque la courbure $c$ est nulle

❐ **c.** lorsque $c$ est une fonction affine de $s$

❐ **d.** lorsque le rayon de courbure est nul

**3** Soit $t \mapsto M(t)$ un arc de classe $\mathscr{C}^1$ dont la trajectoire est le cercle unité du plan $\mathbf{R}^2$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Alors

❒ **a.** l'arc est nécessairement birégulier

❒ **b.** l'arc est nécessairement régulier

❒ **c.** l'arc n'est régulier que si $t$ est une abscisse curviligne

❒ **d.** l'arc n'est pas forcément régulier

**4** Soit $s \mapsto M(s)$ un arc birégulier paramétré par une abscisse curviligne. On note $(T, N)$ la base de Frenet et $c$ la courbure. Alors $\dfrac{\mathrm{d}(T+N)}{\mathrm{d}s}$ vaut

❒ **a.** $c(T - N)$ ❒ **b.** $c(N - T)$

❒ **c.** $c(T + N)$ ❒ **d.** $-c(T + N)$

**5** En quels points de l'ellipse $(x(t) = a\cos t, y(t) = b\sin t)$ a-t-on $c' = 0$ où $c$ est la courbure ?

❒ **a.** aux foyers ❒ **b.** aux quatre sommets

❒ **c.** au centre ❒ **d.** aux deux sommets situés sur l'axe focal

**6** Laquelle des intégrales suivantes donne la longueur de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ?

❒ **a.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ ❒ **b.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

❒ **c.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 t + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ ❒ **d.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2 t + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

**7** Soit $t \mapsto M(t)$ un arc de classe $\mathscr{C}^2$ birégulier. On suppose que la tangente unitaire $T$ est donnée par $T = (\cos 2t, \sin 2t)$ et que $\|M'(t)\| = e^t$ pour tout $t$. Alors la courbure au point de paramètre $t$ vaut

❒ **a.** $2$ ❒ **b.** $e^{-t}$ ❒ **c.** $2e^{-t}$ ❒ **d.** $\dfrac{1}{2}e^{-t}$

**8** Si $t \mapsto M(t)$ est un arc régulier de classe $\mathscr{C}^k$ et si $\varphi$ est un relèvement de la tangente unitaire $T$ alors $\varphi$ est de classe

❒ **a.** $\mathscr{C}^k$ ❒ **b.** $\mathscr{C}^{k-1}$ ❒ **c.** $\mathscr{C}^{k-2}$ ❒ **d.** $\mathscr{C}^{k-3}$

**9** Parmi les arcs $t \mapsto (t, f_i(t))$ pour $i = 1, ..., 4$ définis par les fonctions suivantes, lequel a la plus grande courbure au point $(0, 0)$ de paramètre 0 ?

❒ **a.** $f_1(t) = 0$ ❒ **b.** $f_2(t) = t^2$

❒ **c.** $f_3(t) = t^4$ ❒ **d.** $f_4(t) = t^6$

**10** Soit $t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t)$ un arc birégulier de classe $\mathscr{C}^2$ sur **R**. Laquelle des notions suivantes n'est pas forcément conservée lors d'un reparamétrage de l'arc par un $\mathscr{C}^2$-difféomorphisme srictement croissant de **R** sur **R** ?

❒ **a.** le caractère birégulier

❒ **b.** le vecteur vitesse

❒ **c.** la courbure

❒ **d.** le vecteur normal $N$ du repère de Frenet

# 22 Fonctions de deux variables

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La notion de partie ouverte de $\mathbf{R}^2$
- Limites et continuité des fonctions de deux variables
- Les dérivées partielles
- Les dérivées d'ordre supérieur et le théorème de Schwarz
- La dérivation des fonctions composées
- La recherche des extrema locaux
- Les intégrales doubles

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 176. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Soit $f : (x, y) \mapsto x^2y^2 + x^2 + y$. Que vaut $\dfrac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y}(x, y)$ ?

❒ **a.** $4$ ❒ **b.** $4y$ ❒ **c.** $2y + 3$ ❒ **d.** $2y$

**2** Soit $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x + y$. La dérivée partielle de $f$ en $(0, 0)$ selon le vecteur $h = (1, 1)$ vaut

❒ **a.** $0$ ❒ **b.** $1$ ❒ **c.** $2$ ❒ **d.** $4$

**3** Laquelle des parties suivantes de $\mathbf{R}^2$ est ouverte ?

❒ **a.** $\mathbf{R}^2$ ❒ **b.** $\{(x, 0),\ 0 < x < 1\}$

❒ **c.** $\{(x, y),\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ ❒ **d.** $\{(x, x),\ x \in \mathbf{R}\}$

**4** Soit $f : (x, y) \mapsto xy^2 + \sin(xy)$. Que vaut $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ?

❒ **a.** $0$ ❒ **b.** $b^2 + \cos(ab)$

❒ **c.** $b^2 + b\cos(ab)$ ❒ **d.** $2ab + a\cos(ab)$

**5** Soit $C = [0,1]^2$. L'intégrale $\iint_C (xy)^n \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ vaut

❒ **a.** $\dfrac{1}{(n+1)^2}$ ❒ **b.** $\dfrac{2}{(n+1)^2}$ ❒ **c.** $\dfrac{1}{n+1}$ ❒ **d.** $\dfrac{2}{n+1}$

**6** Pour que la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{|x|^a}{x^2+y^2}$ tende vers 0 lorsque $(x,y)$ tend vers $(0,0)$ on doit avoir

❒ **a.** $a > 0$ ❒ **b.** $a > 1$ ❒ **c.** $a \geqslant 2$ ❒ **d.** $a > 2$

**7** Soit $A$ et $B$ deux ouverts de $\mathbf{R}^2$. Laquelle des parties suivantes n'est pas forcément ouverte ?

❒ **a.** la réunion de $A$ et $B$

❒ **b.** l'intersection de $A$ et $B$

❒ **c.** le complémentaire de $A$

❒ **d.** l'ensemble des points de $A$ d'abscisse strictement positive

**8** Que vaut $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** $y$ ❒ **d.** elle n'existe pas

**9** Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 e^y + yx$. Que vaut $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x)$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** $x^2 e^y + x$

❒ **c.** $(2x + x^2)e^x + 2x$ ❒ **d.** $x^2 e^x + x$

**10** D'après le théorème de Schwarz, dans lequel des cas suivants ne peut-on pas trouver de fonction $f$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ soit en tout point le vecteur $(u(x,y), v(x,y))$ ?

❒ **a.** $u(x,y) = x$ et $v(x,y) = y$ ❒ **b.** $u(x,y) = 1$ et $v(x,y) = 1$

❒ **c.** $u(x,y) = x$ et $v(x,y) = x$ ❒ **d.** $u(x,y) = y$ et $v(x,y) = x$

**11** Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. On pose $g(x) = f(x^2, x^3)$ pour tout $x$. Que vaut $g'(x)$ ?

❒ **a.** $(2x + 3x^2)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2, x^3)$ ❒ **b.** $2x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2, x^3)$

❒ **c.** $6x^3\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2, x^3)$ ❒ **d.** $2x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2, x^3) + 3x^2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^2, x^3)$

**12** Quel est le seul point où la fonction $f : (x,y) \mapsto ax - yx + x^2$ peut admettre un extremum local ?

❒ **a.** (0,0) ❒ **b.** (0,a) ❒ **c.** (a,0) ❒ **d.** (a,a)

**13** Que vaut $I = \iint_{[0,1]^2} x^y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** $\ln 2$ ❒ **c.** 3/4 ❒ **d.** 1

**14** Soit $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ et soit $f$ une fonction continue sur D. En passant en coordonnées polaires, l'intégrale $I = \iint_D f(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ vaut :

❒ **a.** $2\pi \int_0^1 f(r^2)\mathrm{d}r$ ❒ **b.** $\pi \int_0^1 f(r^2)\mathrm{d}r$

❒ **c.** $2\pi \int_0^1 rf(r^2)\mathrm{d}r$ ❒ **d.** $\pi \int_0^1 rf(r^2)\mathrm{d}r$

**15** Laquelle des fonctions suivantes admet un maximum local en (0, 0) ?

❒ **a.** $(x,y) \mapsto 1 - \exp(x^2 + y^2)$ ❒ **b.** $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$

❒ **c.** $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ ❒ **d.** $(x,y) \mapsto xy$

**16** Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ qui vérifie $f(x,y) = f(y,x)$ pour tout couple $(x,y)$. Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est toujours égal à

❒ **a.** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$ ❒ **b.** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)$ ❒ **c.** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$ ❒ **d.** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

**17** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction qui tend vers 0 lorsque $(x,y)$ tend vers (0, 0). L'une des limites ci-après n'existe pas forcément. Laquelle ?

❒ **a.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$ ❒ **b.** $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$

❒ **c.** $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ ❒ **d.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(y,x)$

## 9 Nombres réels

**1** Si $x$ est un nombre réel, l'inégalité $x^2 < 1$ est équivalente à

❒ **a.** $x < 1$ ☒ **b.** $x \in ]-1, 1[$ ❒ **c.** $x \in ]0, 1[$ ❒ **d.** $x \in [0, 1[$

L'inégalité proposée équivaut à $|x| < 1$, c'est-à-dire à $x \in ]-1, 1[$. Rappelons au passage que $\sqrt{x^2} = |x|$.

**2** La partie entière de $-\pi$ vaut

❒ **a.** $-0{,}1415...$ ❒ **b.** $0{,}8584...$ ❒ **c.** $-3$ ☒ **d.** $-4$

La partie entière d'un réel est $x$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $x$. Celle de $-\pi$ est donc $-4$. La quantité $4 - \pi = 0,8584...$ est la *partie fractionnaire* de $-\pi$.

**3** Quelle est la borne supérieure de l'intervalle $[0, 1[$ ?

❒ **a.** $1^-$ ☒ **b.** $1$ ❒ **c.** $[1, +\infty[$

❒ **d.** le plus grand réel strictement inférieur à 1

L'ensemble des majorants de $[0, 1[$ est l'intervalle $[1, +\infty[$ dont le plus petit élément est 1 : c'est par définition la borne supérieure de l'intervalle $[0, 1[$.

En réalité, c'est la seule proposition qui a un sens : $1^-$ n'est qu'une notation utilisée pour les limites et **n'est pas un nombre réel**, et $[1, +\infty[$ est un ensemble, ce n'est pas un réel. Par ailleurs, il n'existe pas de plus grand réel strictement inférieur à 1 : si $x$ était un tel réel, $\dfrac{1 + x}{2}$ serait strictement plus grand que $x$ et toujours strictement inférieur à 1.

De façon générale, on retiendra que la borne supérieure d'un ensemble $A$, si elle existe, est parfois dans $A$, et parfois non. C'est souvent une question importante à se poser.

**4** Quelle est la borne supérieure de $\{x \in [-2, 2],\ x^2 < 2\}$ ?

❒ **a.** $4$ ☒ **b.** $\sqrt{2}$ ❒ **c.** $-\sqrt{2}$ ❒ **d.** $0$

L'ensemble proposé est l'intervalle ouvert $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ dont la borne supérieure est $\sqrt{2}$. Comme il est inclus dans $[-2, 2]$, sa borne supérieure est forcément $\leqslant 2$ et on pouvait donc exclure la réponse **a.** tout de suite.

**5** Soit $a, b, c, d$ des réels strictement positifs avec $a < b$ et $c < d$. Alors

❒ **a.** $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ ☒ **b.** $\dfrac{a}{d} < \dfrac{b}{c}$ ❒ **c.** $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{d}$ ❒ **d.** $\dfrac{b}{c} < \dfrac{a}{d}$

On a $0 < \dfrac{1}{d} < \dfrac{1}{c}$ et en effectuant le produit avec la première inégalité, il vient $\dfrac{a}{d} < \dfrac{b}{c}$. Les inégalités proposées ne permettent pas de comparer les autres rapports.

Rappelons les règles essentielles dans la manipulation des inégalités : on peut toujours additionner deux inégalités mais pas les soustraire (on commence par multiplier la seconde inégalité par $-1$, ce qui a pour effet de changer le sens de l'inégalité, et permet de se ramener à une addition). En ce qui concerne les produits on fera très attention aux signes et pour les quotients on se ramène à un produit comme ci-dessus.

**6** Si $x$ est un nombre réel, $\sqrt[3]{x^2}$ est égal à

❒ **a.** $x^{3/2}$ ❒ **b.** $|x|^{3/2}$ ❒ **c.** $x^{2/3}$ ☒ **d.** $|x|^{2/3}$

Les puissances fractionnaires ne sont définies **que pour les réels positifs**.

On a $\sqrt[3]{x^2} = (x^2)^{1/3} = (|x|^2)^{1/3} = |x|^{2/3}$.

**7** Parmi les ensembles suivants, lequel admet une borne supérieure ?

❒ **a.** $\{x \in \mathbf{R},\ x < x + 1\}$ ❒ **b.** $\{x \in \mathbf{R}_+,\ x < -1\}$

☒ **c.** $\{x \in [-2\pi, 2\pi],\ \sin x = 1/3\}$ ❒ **d.** $\mathbf{Z}$

L'ensemble **c.** est non vide et majoré donc admet une borne supérieure (par l'axiome de la borne supérieure). En revanche, le premier ensemble vaut $\mathbf{R}$ et n'est pas majoré ; le deuxième ensemble est vide ; enfin $\mathbf{Z}$ n'est pas majoré.

À ne pas dire qu'un réel est majoré ! Seul un ensemble peut être majoré.

**8** Pour $x$ réel, $E(E(x) + x)$ est toujours égal à

❒ **a.** $E(2x)$ ☒ **b.** $2E(x)$ ❒ **c.** $E(x^2)$ ❒ **d.** $x + E(x)$

Comme $E(x)$ est entier, on peut le « sortir » de la partie entière et on obtient $E(E(x) + x) = E(x) + E(x) = 2E(x)$. Notons au passage que $E(2x)$ n'est pas en général égal à $2E(x)$, comme le prouve le cas de $x = 1/2$ : on a alors $E(2x) = 1$ tandis que $2E(x) = 0$.

Par ailleurs, un réel est égal à sa partie entière si et seulement si il est entier, ce qui exclut la réponse **d.**.

**9** Parmi les parties suivantes, laquelle est dense dans $\mathbf{R}$ ?

❒ **a.** $\mathbf{Z}$ ❒ **b.** $\{p/q,\ 0 < p < q\}$

❒ **c.** $\{2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ ☒ **d.** $\{2k\pi,\ k \in \mathbf{Q}\}$

On sait d'après le cours que $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$. Il en résulte que l'ensemble **d.** est aussi dense. En effet, si $a < b$, pour trouver un élément de la forme $2k\pi$ avec $k$ rationnel entre $a$ et $b$, il suffit de prendre un rationnel $k$ entre $\dfrac{a}{2\pi}$ et $\dfrac{b}{2\pi}$. Celui-ci existe grâce à la densité de $\mathbf{Q}$.

En revanche, $\mathbf{Z}$ n'est pas dense : il n'y a aucun entier dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$. De même, l'ensemble **b.** est inclus dans $]0, 1[$ et n'est donc pas dense : il n'y a aucun élément entre 2 et 3 par exemple. Enfin, l'ensemble **c.** n'est pas dense car il ne coupe pas l'intervalle $]0, 2\pi[$.

**10** Soit $x$ un nombre réel tel que $x < a$ pour tout réel $a > 0$. Alors

❒ **a.** $x < 0$ ❒ **b.** $x = 0$ ❒ **c.** $x > 0$ ☒ **d.** $x \leqslant 0$

L'hypothèse signifie que $x$ est un minorant de l'intervalle $]0, +\infty[$. Il est donc inférieur ou égal à la borne inférieure de cet intervalle qui est 0. On aurait pu dire que $x = 0$ si on savait par ailleurs que $x \geqslant 0$.

C'est un type de raisonnement classique en analyse : pour montrer qu'une quantité positive est nulle, on montre qu'elle est inférieure à tout réel strictement positif.

**11** Si $x$ est un réel de partie entière $n$, on a

❒ **a.** $x - 1 < n < x$ ❒ **b.** $x - 1 \leqslant n < x$

☒ **c.** $x - 1 < n \leqslant x$ ❒ **d.** $x - 1 \leqslant n \leqslant x$

Par définition, la partie entière de $x$ est l'unique entier $n$ tel que $n \leqslant x < n + 1$. On a donc $x - 1 < n \leqslant x$. Ces doubles inégalités sont souvent bien utiles pour toute question faisant intervenir la fonction partie entière.

**12** Si $a$ et $b$ sont des réels strictement positifs, $a^{\ln b}$ est égal à

❒ **a.** $e^{\ln ab}$ ☒ **b.** $b^{\ln a}$ ❒ **c.** $\ln a^b$ ❒ **d.** $(\ln a)^b$

On a par définition $a^{\ln b} = e^{\ln a \ln b} = b^{\ln a}$. En revanche, le réel $e^{\ln ab}$ est égal à $ab$, et le réel $(\ln a)^b$ n'est pas forcément défini ($\ln a$ peut être négatif).

**13** Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction décroissante, la quantité $\sup\limits_{x \in [-1,1]} f(x^2)$ vaut

☒ **a.** $f(0)$ ❒ **b.** $f(1)$

❒ **c.** $f(-1)$ ❒ **d.** $\max(f(1), f(-1))$

Quand $x$ parcourt l'intervalle $[-1, 1]$, $x^2$ parcourt $[0, 1]$. Comme $f$ est décroissante sur cet intervalle, la borne supérieure recherchée est $f(0)$. Notons que cette borne est atteinte (ce n'est pas toujours le cas) et que $f(1)$ est la borne inférieure.

**14** Quelle fonction vérifie $f(x + y) = f(x)f(y)$ pour tous $x$ et $y$ dans son domaine de définition ?

❒ **a.** $f(x) = \ln(2x)$ ❒ **b.** $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln x$

☒ **c.** $f(x) = e^{2x}$ ❒ **d.** $f(x) = \dfrac{1}{2} e^x$

La relation est vérifiée par toutes les fonctions dites « exponentielles », c'est-à-dire de la forme $x \mapsto a^x$. C'est le cas pour $x \mapsto e^{2x} = (e^2)^x$.

**15** Soit $n$ un entier positif. Combien y a-t-il d'entiers $k$ positifs ou nuls tels que $\sqrt{k} \leqslant n$ ?

❒ **a.** $\sqrt{n}$ ❒ **b.** $2n^2 + 1$ ❒ **c.** $E(\sqrt{n}) + 1$ ☒ **d.** $n^2 + 1$

La condition est équivalente à $k \leqslant n^2$, et donc à $k \in \{0, 1, \ldots, n^2\}$, qui est un ensemble de cardinal $n^2 + 1$. Notons que le résultat doit être un entier ce qui permet d'exclure la réponse **a.**.

**16** Si $x$ est un réel tel que $|2 - x| \leqslant 1$, alors

❐ **a.** $|x| \leqslant 1$ ☒ **b.** $|x| \leqslant 3$ ❐ **c.** $|x| \geqslant -1$ ❐ **d.** $|x| \geqslant 3$

Par l'inégalité triangulaire on a $|2 - x| \geqslant |x| - |2| = |x| - 2$. On en déduit que $|x| \leqslant 3$. Géométriquement, si $x$ est éloigné du réel 2 de moins de 1, il est compris entre 1 et 3.

Remarque : l'inégalité $|x| \geqslant -1$ est exacte puisque une valeur absolue est toujours positive mais inintéressante, car elle ne pose plus aucune condition sur $x$. En mathématiques, le tout n'est pas d'écrire des phrases justes, encore faut-il qu'elles soient significatives...

**17** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbf{R}$. Laquelle des propositions suivantes signifie que le réel $a$ est la borne supérieure de $A$.

❐ **a.** $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$

❐ **b.** $a \in A$ et $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$

☒ **c.** $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$ et pour tout $b < a$ on peut trouver un élément de $A$ dans l'intervalle $]b, a]$

❐ **d.** $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$ et on peut trouver $b < a$ tel que l'intervalle $]b, a[$ soit inclus dans $A$.

En effet, la borne supérieure de $A$ est par définition le plus petit majorant de $A$ : c'est donc un majorant de $A$, tel que tout réel $b < a$ ne majore pas $A$.

Étudions les autres propriétés : la propriété **a.** signifie simplement que $a$ est un majorant de $A$. Par ailleurs, **d.** est fausse car si $a$ est la borne supérieure de $A$ il n'existe pas nécessairement $b < a$ tel que $]b, a[$ soit inclus dans $A$ (considérer par exemple $A = \{0, 1, 2\}$).

Quant à **b.**, elle signifie que $a$ est le *plus grand élément* de $A$. Si $A$ admet un plus grand élément, celui-ci est la borne supérieure de $A$, mais $A$ peut très bien avoir une borne supérieure $a$ qui n'est pas dans $A$ (et donc ne pas avoir de plus grand élément). C'est par exemple le cas de $A = [0, 1[$ puisque $\sup A = 1$.

**18** Quelle condition est suffisante pour pouvoir trouver un entier strictement compris entre les deux réels $x$ et $y$ ?

❐ **a.** $\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$ ☒ **b.** $y - x \geqslant 1$

❐ **c.** $\dfrac{y}{x} \in \mathbf{N}$ ❐ **d.** $y - x \in \mathbf{Q}$

En effet, dans ce cas la partie entière de $y$ convient, car on a

$$x \leqslant y - 1 < E(y) \leqslant y.$$

En revanche, les conditions $\dfrac{y}{x} \in \mathbf{N}$ ou $y - x \in \mathbf{Q}$ ne sont pas suffisantes, comme dans le cas $x = y = 1/2$. Quant à la première condition, elle est à la fois fausse, car on ne peut pas trouver d'entiers entre 1/3 et 1/2 (par exemple), et hors sujet, puisque la condition que l'on cherche doit porter sur $x$ et $y$.

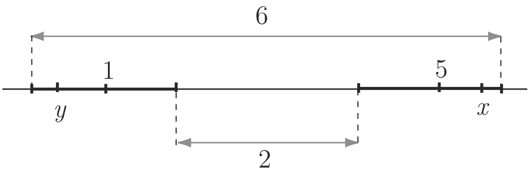
**19** Si $x, y$ sont deux réels tels que $|x - 5| \leqslant 1$ et $|y - 1| \leqslant 1$, alors on a

☒ **a.** $2 \leqslant |x - y| \leqslant 6$ ❒ **b.** $0 \leqslant |x - y| \leqslant 2$
❒ **c.** $4 \leqslant |x - y| \leqslant 6$ ❒ **d.** $4 \leqslant |x - y| \leqslant 8$

Par l'inégalité triangulaire, on a $|x - y| \leqslant |x - 5| + |5 - 1| + |1 - y| \leqslant 6$. De même,

$$4 = |5 - 1| \leqslant |5 - x| + |x - y| + |y - 1| \leqslant 2 + |x - y|$$

ce qui donne $|x - y| \geqslant 2$. Ces inégalités sont claires si on raisonne en terme de distance sur la droite réelle. En effet, si $x$ est éloigné du réel 5 d'au plus 1 et si $y$ est éloigné du réel 1 d'au plus 1, alors $x$ et $y$ sont éloignés d'au moins 2 et d'au plus 6.




## 10 Suites réelles : Convergence

**1** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite strictement positive et décroissante. Alors

☒ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et sa limite est positive ou nulle

❒ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0

❒ **c.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et sa limite est strictement positive

❒ **d.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et est constante à partir d'un certain rang

Le théorème des limites monotones assure la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Par passage des inégalités à la limite on a $\lim u_n \geqslant 0$.

On ne peut rien dire d'autre sur la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ : on peut aussi bien avoir $u_n \to 0$ pour $u_n = 1/n$ que, par exemple, $u_n \to 1$ (pour $u_n = 1 + 1/n$).

Si vous avez répondu **d.**, une suite qui converge n'est pas nécessairement constante à partir d'un certain rang. Il est plus courant que la limite ne soit jamais atteinte, comme c'est le cas avec $u_n = \dfrac{1}{n}$ qui converge vers 0.

**2** Soit $a > 0$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = \dfrac{n!}{a^n}$ est croissante à partir d'un certain rang

☒ **a.** pour tout $a > 0$ ❒ **b.** seulement pour $a$ dans $]0, 1]$
❒ **c.** seulement pour $a \geqslant 1$ ❒ **d.** pour aucune valeur de $a$

Comme il s'agit d'une suite positive, on regarde le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{a}$. Pour toute valeur de $a$, ce quotient devient strictement supérieur à 1 à partir d'un certain rang. Lorsque $a \leqslant 1$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est même croissante à partir du rang $n = 0$.

**3** Le théorème de Bolzano-Weierstrass dit

❒ **a.** qu'une suite réelle bornée converge

☒ **b.** qu'une suite réelle bornée admet une sous-suite qui converge

❒ **c.** que toute sous-suite d'une suite réelle bornée converge

❒ **d.** qu'une suite qui converge est bornée

C'est une question de cours, mais c'est une notion délicate à maîtriser. La suite $(-1)^n$ est un contre-exemple « universel » pour les réponses **a.** et **c.** : c'est une suite bornée qui ne converge pas, et elle est elle-même l'une de ses sous-suites !

Quant à la réponse **d.**, la propriété est vraie (et utile) mais il ne s'agit pas du théorème de Bolzano-Weierstrass.

**4** Laquelle des suites suivantes est extraite de la suite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ ?

❒ **a.** $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ ❒ **b.** $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$

☒ **c.** $(u_{2n+2})_{n\geqslant 0}$ ❒ **d.** $(u_{n^2})_{n\geqslant 0}$

Pour obtenir une suite extraite, on remplace $n$ par $\varphi(n)$. Donc une suite extraite de $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ est de la forme $(u_{2\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ où $\varphi$ est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$. Ici, on en déduit en particulier que les indices sont tous pairs. Seule la suite $(u_{2n+2})_{n\geqslant 0}$ est de cette forme avec $\varphi(n) = n + 1$.

**5** Soit $I$ un intervalle et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $I$ qui converge. Pour quel intervalle $I$ est-on certain que la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ reste dans $I$ ?

❒ **a.** $]0, 1[$ ☒ **b.** $[0, 1]$ ❒ **c.** $[0, 1[$ ❒ **d.** $]0, +\infty[$

En effet, si $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n$, on peut passer à la limite cette inégalité, ce qui montre que $0 \leqslant \lim u_n \leqslant 1$.

En revanche l'inégalité stricte $0 < u_n$ ne passe pas à la limite *a priori* : le résultat est faux avec $I = ]0, 1[$ ou $I = ]0, +\infty[$ (prendre par exemple la suite $u_n = 1/n$). De même, l'inégalité stricte $u_n < 1$ ne passe pas à la limite : le résultat est faux avec $I = [0, 1[$ (prendre par exemple la suite $u_n = 1 - 1/n$).

**6** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite strictement positive. Laquelle des conditions suivantes suffit pour dire que les suites $(-u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes ?

❒ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante

❒ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0

☒ **c.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et converge vers 0

❒ **d.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et converge vers 0

En effet, pour que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(-u_n)_{n\geqslant 0}$ soient adjacentes, il faut que $u_n \geqslant -u_n$, que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit décroissante, que $(-u_n)_{n\geqslant 0}$ soit croissante, et que l'écart $u_n - (-u_n) = 2u_n$ tende vers 0. Cela revient à imposer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit décroissante et converge vers 0.

**7** La suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = 2n + (-1)^n$ est

☒ **a.** croissante ❒ **b.** décroissante

❒ **c.** non monotone ❒ **d.** croissante et décroissante selon la parité de $n$

On a $u_{n+1} - u_n = 2 + (-1)^{n+1} - (-1)^n = 2 - 2(-1)^n$ qui vaut alternativement 0 et 2. L'écart est toujours positif ou nul, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc croissante.

Il est important de comprendre que la réponse **d.** n'a pas de sens. C'est une question de quantificateurs : la propriété $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ dépend de $n$, mais $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante lorsque cette propriété est vraie *pour tout n*. Ainsi, dire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante (ou monotone) est ce que l'on appelle une propriété globale qui ne dépend pas de $n$.

Pour mieux appréhender ces notions, considérez qu'une propriété qui dépend de $n$ doit avoir un sens pour, disons, $n = 2$. La propriété « $u_3 - u_2 \geqslant 0$ » a une signification, tandis que « $u_2$ est croissante » n'en a pas.

**8** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang ?

❒ **a.** $u_n$ tend vers 0 ❒ **b.** $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0

❒ **c.** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 ☒ **d.** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$

En effet, si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ il existe un rang $N$, au delà duquel $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{3}{4}$. À partir de ce rang, on a alors $u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4}u_n < u_n$ car $u_n > 0$. On peut même en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge géométriquement vers 0.

La réponse **a.** est une idée fausse assez classique. Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ peut tendre vers 0 sans être décroissante à partir d'un certain rang : on peut prendre par exemple la suite $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{4}, \dots\right)$.

Quant aux deux autres propriétés proposées, elles seraient vraies pour la suite $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, qui est pourtant strictement croissante.

**9** Laquelle des conditions suivantes est incompatible avec le fait que la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit périodique ?

❒ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée

❒ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente

☒ **c.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante

❒ **d.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement positive

Une suite périodique ne prend qu'un nombre fini de valeurs et est donc nécessairement bornée. Une suite périodique peut être convergente dans le cas particulier (et c'est le seul) où elle est constante (sa période vaut 1). Bien entendu une suite périodique peut être strictement positive.

La bonne réponse est donc **c.** : une suite périodique ne peut pas être strictement croissante car elle ne pourrait jamais prendre deux fois la même valeur.

**10** Parmi les conditions suivantes, laquelle est *suffisante* pour que la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tende vers 1 ?

❒ **a.** $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1

❒ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par 1 ou décroissante et minorée par 1

☒ **c.** $|u_n - 1| < \dfrac{1}{n}$ à partir d'un certain rang

❒ **d.** la partie entière de $u_n$ tend vers 1

Comme la suite $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0, la majoration $|u_n - 1| < \dfrac{1}{n}$ suffit pour dire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1.

Le fait que $|u_n|$ tend vers 1 n'est pas suffisant : considérer par exemple la suite $u_n = (-1)^n$. Par ailleurs, les conditions de monotonie permettent de dire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge, mais pas que sa limite est 1. Enfin, le fait que la partie entière de $u_n$ tend vers 1 n'est pas suffisant comme le montre l'exemple de la suite constante $u_n = 3/2$.

**11** Parmi les conditions suivantes, laquelle est *nécessaire* pour que la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tende vers 1 ?

☒ **a.** $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1

❒ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par 1 ou décroissante et minorée par 1

❒ **c.** $|u_n - 1| < \dfrac{1}{n}$ à partir d'un certain rang

❒ **d.** la partie entière de $u_n$ tend vers 1

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell$ alors la suite $|u_n|$ converge vers $|\ell|$. Cette propriété traduit la continuité de la valeur absolue. Ici il est donc nécessaire que $|u_n|$ tende vers 1.

Les autres propriétés ne sont pas nécessaires : $(u_n)_{n\geqslant 0}$ peut converger vers 1 sans être monotone, comme le montre l'exemple de $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ qui oscille autour de 1 en tendant vers 1. De même, il n'est pas forcément possible de majorer l'écart $|u_n - 1|$ par $\dfrac{1}{n}$ à partir d'un certain rang : prendre par exemple $u_n = 1 + \dfrac{2}{n}$. Enfin, si $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ la partie entière de $u_n$ est toujours nulle et converge vers 0. Cela illustre d'ailleurs le fait que la fonction partie entière n'est pas continue en 1.

**12** Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite réelle telle que $1 - \frac{1}{n} < u_n < 2 + \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, alors

❒ **a.** $\lim u_n \in [1, 2]$ ❒ **b.** $\lim u_n \in ]1, 2[$

❒ **c.** $\lim u_n = 3/2$ ☒ **d.** $u_n$ ne converge pas forcément

En effet, on ne peut rien dire de la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Le théorème d'encadrement ne s'applique pas car les suites majorantes et minorantes n'ont pas la même limite. Par exemple la suite divergente $(1, 2, 1, 2, 1, 2, ...)$ vérifie les hypothèses demandées.

Si on savait déjà par ailleurs que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ était convergente, alors là on aurait pu passer l'inégalité à la limite et écrire que $\lim u_n \in [1, 2]$.

**13** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle croissante. On pose $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes

❒ **a.** lorsque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge

☒ **b.** lorsque $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n$

❒ **c.** lorsque $u_{n+1} - u_n \geqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n$

❒ **d.** lorsque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée

En effet, on a clairement $v_n \geqslant u_n$ pour tout $n$ et la suite $(v_n - u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. La seule condition qui manque pour que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ soient adjacentes est la décroissance de $(v_n)_{n\geqslant 0}$. Et la condition $v_{n+1} \leqslant v_n$ revient à $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$.

**14** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. Combien y a-t-il de sous-suites de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui convergent ?

☒ **a.** il n'y en a pas forcément ❒ **b.** il y en a au moins une

❒ **c.** il y en a toujours une infinité ❒ **d.** il n'y en a qu'un nombre fini

En effet, si par exemple $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$, il en est de même de toutes ses sous-suites. On ne peut affirmer qu'il y a au moins une sous-suite qui converge que lorsque $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée : c'est le théorème de Bolzano-Weierstrass.

On peut aussi remarquer que si une sous-suite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge, alors toutes les sous-suites de celle-ci (et il y en a une infinité) convergent aussi.

**15** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle croissante. Laquelle des conditions suivantes n'est pas suffisante pour affirmer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge ?

❒ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée

❒ **b.** la suite extraite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ converge

☒ **c.** la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0

❒ **d.** la suite extraite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ est bornée

Voici un contre-exemple : la suite $u_n = \sqrt{n}$ vérifie la condition $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 et pourtant elle diverge vers $+\infty$.

Les autres réponses proposées permettent d'affirmer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente. En effet, on sait qu'une suite croissante n'a que deux comportements possibles : soit elle converge et elle est majorée (ou bornée), soit elle diverge vers $+\infty$ et elle n'est pas majorée. Toutes les sous-suites de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ont alors le même comportement que $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

L'hypothèse de monotonie sur $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est un des rares cas où l'on peut « remonter » le comportement de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à partir du comportement de l'une des sous-suites.

**16** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n} + \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. Alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 car

❒ **a.** $0 \leqslant \lim u_n \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et donc $\lim u_n = 0$

❒ **b.** $\frac{1}{n} + \varepsilon$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ et $\varepsilon$ tend vers 0

☒ **c.** $\frac{1}{n}$ tend vers 0 donc si $\varepsilon > 0$ est fixé, $0 \leqslant u_n \leqslant 2\varepsilon$ pour $n$ assez grand

❒ **d.** en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n}$ pour $n$ assez grand

Rédigeons une preuve à l'aide de l'argument **c.**. Pour cela, on fixe d'abord un réel $\varepsilon > 0$. Il existe par hypothèse un rang $N$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n} + \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. Comme $\frac{1}{n}$ tend vers 0 on peut trouver un rang $N'$ tel que $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N'$. On a alors $0 \leqslant u_n \leqslant 2\varepsilon$ pour $n \geqslant \max(N, N')$ et $(u_n)$ tend vers 0.

La réponse **a.** ne convient pas : il n'est pas possible de passer tout de suite à la limite et d'écrire $0 \leqslant \lim u_n \leqslant \varepsilon$ car on ne sait pas *a priori* que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge. L'argument aurait été valable si on savait à l'avance que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite.

Les réponses **b.** et **d.** n'ont pas de signification mathématique. Il n'est pas possible de prendre pour $\varepsilon$ une valeur dépendant de $n$, ce n'est pas une suite.

**17** Soit $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Si $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite adjacente avec $(u_n)_{n\geqslant 0}$, alors

❒ **a.** pour tout $n$, on a $v_n > 1$

☒ **b.** pour tout $n$, on a $v_n - u_n \geqslant \frac{1}{n}$

❒ **c.** $\lim v_n > 1$

❒ **d.** $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante

En effet, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante donc $(v_n)_{n\geqslant 0}$ doit être décroissante et de plus converger vers $1 = \lim u_n$. On a donc $v_n \geqslant 1 = u_n + \frac{1}{n}$.

On n'a pas forcément $v_n > 1$. Par exemple la suite constante $v_n = 1$ est bien adjacente avec $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

## 11 Suites réelles : questions asymptotiques

**1** Un équivalent simple de la suite $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$ est

☒ **a.** $\dfrac{1}{2n}$ ❒ **b.** $0$ ❒ **c.** $1$ ❒ **d.** $\sqrt{n}$

En utilisant la quantité conjuguée, ce qui est plus économique que de passer par le développement limité de $\sqrt{1+u}$, on a

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+1/n^2}} \sim \frac{1}{2n}.$$

**2** Laquelle des suites suivantes n'est pas négligeable devant la suite $2n + \sqrt{n}$ ?

❒ **a.** $\sqrt{n}$ ❒ **b.** $\ln n$ ☒ **c.** $n$ ❒ **d.** $\dfrac{1}{n}$

En effet, le rapport $\dfrac{n}{2n+\sqrt{n}}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ et pas vers 0.

**3** Si $x_n = 2^n$ et $y_n = n^3$ alors on peut dire que

❒ **a.** $x_n = o(y_n)$ ☒ **b.** $y_n = o(x_n)$

❒ **c.** $x_n$ et $y_n$ sont équivalentes ❒ **d.** $\dfrac{x_n}{y_n}$ est bornée

D'après les théorèmes de comparaison du cours, $(y_n)$ est négligeable devant $(x_n)$.

**4** Soit $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites strictement positives négligeables devant une suite strictement positive $(u_n)$. Laquelle des suites suivantes n'est pas forcément négligeable devant la suite $(u_n)$ ?

❒ **a.** $x_n + y_n$ ☒ **b.** $x_n y_n$ ❒ **c.** $x_n - y_n$ ❒ **d.** $\sqrt{x_n y_n}$

En effet, le rapport $\dfrac{x_n y_n}{u_n}$ ne tend pas forcément vers 0. Comme contre-exemple on peut prendre $x_n = y_n = \sqrt{n}$ et $u_n = n$. Les réponses **a.**, **c.** et **d.** correspondent à des suites négligeables devant $(u_n)$ car les rapports

$$\frac{x_n+y_n}{u_n} = \frac{x_n}{u_n} + \frac{y_n}{u_n}, \quad \frac{x_n-y_n}{u_n} = \frac{x_n}{u_n} - \frac{y_n}{u_n}, \quad \frac{\sqrt{x_n y_n}}{u_n} = \sqrt{\frac{x_n}{u_n}}\sqrt{\frac{y_n}{u_n}}$$

tendent tous vers 0 en vertu des théorèmes d'opération sur les limites.

**5** Si $(x_n)$ et $(y_n)$ sont deux suites réelles telles que $x_n \sim n+1$ et $y_n \sim n$, alors

❒ **a.** $(x_n - y_n) \sim 0$ ❒ **b.** $(x_n - y_n) \sim 1$ ❒ **c.** $(x_n - y_n) \to +\infty$

☒ **d.** on ne peut pas donner un équivalent de $(x_n - y_n)$

Dire qu'une suite est équivalente à 0 n'a guère de sens en pratique (avec la définition la plus large des équivalents cela voudrait dire que la suite est nulle à partir d'un certain rang). En fait, la seule chose qu'on peut dire ici c'est que $x_n - y_n$ est négligeable devant $n$, mais on ne peut pas en donner d'équivalent. Si par exemple $x_n = n + a$ ($a$ réel quelconque) et $y_n = n$ les hypothèses sont vérifiées et $x_n - y_n$ tend vers $a$. Cela montre bien qu'on ne peut pas faire de différences (ou de sommes) d'équivalents.

**6** Soit $u_n = \dfrac{e^{n+1}}{n+1}$. Un équivalent simple de $u_n$ est

❒ **a.** $e^n$ ❒ **b.** $\dfrac{e^n}{n}$ ❒ **c.** $\dfrac{e^n}{n+1}$ ☒ **d.** $\dfrac{e^{n+1}}{n}$

Il n'y a pas d'équivalent plus simple du numérateur, et dénominateur est équivalent à $n$. Au passage, $e^n$ n'est pas équivalent à $e^{n+1}$ (le quotient des deux est $e$, qui ne tend pas vers 1).

**7** Soit $(u_n)$ une suite qui tend vers $+\infty$. Laquelle des suites suivantes est négligeable devant $(u_n)$ ?

❒ **a.** $\dfrac{u_n}{2}$ ☒ **b.** $\sqrt{u_n}$ ❒ **c.** $\sqrt{n}$ ❒ **d.** $u_{n-1}$

En effet, $\dfrac{\sqrt{u_n}}{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$ tend vers 0. La réponse **a.** n'est pas correcte car le rapport $\dfrac{u_n/2}{u_n}$ est constamment égal à $\dfrac{1}{2}$ donc ne tend pas vers 0. Et $u_{n-1}$ n'est pas forcément négligeable devant $u_n$, comme le montre l'exemple $u_n = n$.

**8** Laquelle des propriétés suivantes permet de dire que la suite $(u_n)$ converge ?

❒ **a.** $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 ❒ **b.** $u_{n+1}$ est équivalente à $u_n$

☒ **c.** $u_n$ est équivalente à 1 ❒ **d.** $u_n = o(n)$

En effet, dire que $u_n$ est équivalente à 1 revient à dire que $u_n$ converge vers 1. La suite $u_n = \sqrt{n}$ fournit un contre-exemple valable pour les trois autres conditions.

**9** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 1. Alors la suite $v_n = (u_n)^n$

❒ **a.** tend aussi vers 1 ❒ **b.** converge vers 0

❒ **c.** diverge vers $+\infty$ ☒ **d.** est une forme indéterminée

En effet, en passant à l'exponentielle, on a $v_n = \exp(n \ln u_n)$ et le produit $n \ln u_n$ est indéterminé (du type 0 fois l'infini). Par exemple dans le cas où on prend $u_n = 1 + \dfrac{a}{n}$, $v_n$ tend vers $e^a$ (c'est une limite usuelle à connaître).

Nous vous invitons à prendre garde aux formes indéterminées du type $1^\infty$ et à toujours passer à l'exponentielle pour les étudier.

**10** Quelle est la limite de $u_n = \dfrac{4^n - 3^n}{2^n - 1}$ ?

☒ **a.** $+\infty$ ❒ **b.** 2 ❒ **c.** 1 ❒ **d.** $2^n$

Le terme $3^n$ est négligeable devant $4^n$. Donc $u_n$ est équivalente à $\frac{4^n}{2^n} = 2^n$ et tend donc vers $+\infty$. Attention à ne pas dire que $u_n$ tend vers $2^n$ : la limite d'une suite ne peut en aucun cas dépendre de $n$.

**11** Lequel des développements asymptotiques suivants permet de dire que $e^{u_n}$ est équivalent à $e^n$ ?

❒ **a.** $u_n = n + o(e^n)$ ❒ **b.** $u_n = n + o(n)$

☒ **c.** $u_n = n + o(1)$ ❒ **d.** $u_n = n + \ln n + o(\ln n)$

En effet, on a alors $e^{u_n} = e^n e^{o(1)}$ et $e^{o(1)}$ est une suite qui converge vers 1. De manière générale, pour obtenir un équivalent de $e^{u_n}$ on cherchera un développement asymptotique à la précision $o(1)$.

L'hypothèse **b.** est insuffisante car $e^{u_n} = e^n e^{o(n)}$ et on ne peut pas connaître le comportement du terme $e^{o(n)}$. On notera aussi que dans **a.** le terme $n$ est inutile car étant négligeable devant $e^n$ on peut simplement écrire $u_n = o(e^n)$.

**12** Soit $u_n = \frac{\ln 2n}{n}$. Alors $u_n$ est équivalente à

❒ **a.** 0 ❒ **b.** $\frac{1}{n}$ ☒ **c.** $\frac{\ln n}{n}$ ❒ **d.** $\ln 2n$

Le numérateur est égal à $\ln n + \ln 2$ ce qui est équivalent à $\ln n$. Le dénominateur est déjà un équivalent simple. On peut exclure **a.** car une suite équivalente à 0 est une suite stationnaire à 0. Cela ne se rencontre jamais dans la pratique ! Notons que $u_n$ est négligeable devant $\ln(2n)$ et ne peut donc pas lui être équivalente.

**13** Laquelle des suites suivantes vérifie $u_{n+1} \sim u_n$ ?

❒ **a.** $n!$ ❒ **b.** $2^n$ ❒ **c.** $n^n$ ☒ **d.** $n^2$

En effet, $\frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ce n'est pas le cas pour les autres suites proposées : $\frac{(n+1)!}{n!} = n + 1$ tend vers $+\infty$ de même que pour la suite **c.** puisque $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \geqslant \frac{n^{n+1}}{n^n} = n$. Enfin pour la suite géométrique **b.** le quotient tend vers 2.

**14** Soit $(u_n)$ une suite réelle positive telle que $u_{n+2} \sim u_n$. Quelle condition est *suffisante* pour affirmer que $u_{n+1} \sim u_n$ ?

❒ **a.** $u_n$ est minorée ☒ **b.** $u_n$ est décroissante

❒ **c.** $u_n$ est périodique ❒ **d.** $n$ est pair

Si $(u_n)$ est décroissante, l'encadrement $\dfrac{u_{n+2}}{u_n} \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ permet de conclure que $u_{n+1} \sim u_n$ puisque le quotient de gauche tend vers 1.

La suite $2+(-1)^n$, minorée et périodique, est un contre-exemple aux conditions **a.** et **c.**. En effet, dans cet exemple $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ne tend pas vers 1. Précisons aussi que la propriété asymptotique $u_{n+1} \sim u_n$ ne fait pas intervenir la valeur de $n$ comme dans la réponse **d.** : elle dépend de la suite dans sa globalité.

**15** Quelle est la limite de la suite $n^{1/n}$ ?

❒ **a.** 0 ☒ **b.** 1 ❒ **c.** $e$ ❒ **d.** $+\infty$

On a $n^{1/n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$. Comme $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$, on a $n^{1/n} \to 1$. Plus généralement, le passage à l'exponentielle s'impose pour l'étude de toutes les suites du type $(a_n)^{b_n}$.

**16** Soit $(u_n)$ une suite qui tend vers $+\infty$. Laquelle des suites suivantes est équivalente à $(u_n)$ ?

❒ **a.** $u_{n+1}$ ☒ **b.** $1 + u_n$ ❒ **c.** $2u_n$ ❒ **d.** $\sqrt{u_n}$

En effet, le rapport $\dfrac{u_n + 1}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ tend vers 1. Il est important de noter que $u_{n+1}$ n'est pas forcément équivalente à $u_n$, comme le montre l'exemple de la suite $u_n = 2^n$ (où le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 2). Cela n'est le cas que pour les suites qui tendent lentement vers l'infini (comme les suites polynomiales par exemple). La suite $\sqrt{u_n}$ proposée en **d.** est négligeable devant $u_n$ et ne peut donc lui être équivalente.

**17** Comment se classent les suites $a_n = 2^{n^2}$, $b_n = n^{2^n}$ et $c_n = 2^{n^n}$ pour la relation de négligeabilité ?

☒ **a.** $a_n \ll b_n \ll c_n$ ❒ **b.** $b_n \ll a_n \ll c_n$

❒ **c.** $a_n \ll c_n \ll b_n$ ❒ **d.** $c_n \ll a_n \ll b_n$

On a $a_n = \exp(n^2 \ln 2)$, $b_n = \exp(2^n \ln n)$ et $c_n = \exp(n^n \ln 2)$. Les comparaisons usuelles montrent que $n^2 \ln 2 \ll 2^n \ln n \ll n^n \ln 2$. Comme les suites tendent vers $+\infty$, on peut passer à l'exponentielle. En effet, si $x_n \ll y_n$, avec $y_n$ qui tend vers $+\infty$, $x_n - y_n$ est équivalente à $-y_n$ donc tend vers $-\infty$ et par suite $\dfrac{e^{x_n}}{e^{y_n}} = e^{x_n - y_n}$ tend vers 0, ce qui montre que $e^{x_n} \ll e^{y_n}$.

## 12 Suites récurrentes

**1** Parmi les suites suivantes, laquelle est une suite géométrique ?

☒ **a.** $a_n = e^{3n}$ ❒ **b.** $b_n = (n + 1)^n$

❒ **c.** $c_n = 2^{n^2}$ ❒ **d.** $d_n = 3n$

La suite $(a_n)$ est géométrique de raison $e^3$ car $a_{n+1} = e^3 a_n$ pour tout $n$. La suite $(d_n)$ est arithmétique et les deux autres n'ont rien de particulier.

**2** Combien vaut $a + a^2 + \cdots + a^n$ lorsque $a$ est un réel différent de 1 ?

❒ **a.** $\dfrac{1-a^n}{1-a}$ ❒ **b.** $\dfrac{a-a^n}{1-a}$ ☒ **c.** $\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}$ ❒ **d.** $\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Lorsque l'on doit calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique il est bon de toujours mettre en facteur le premier terme pour se ramener au cas où la somme commence par 1. Ici il vient donc

$$a + a^2 + \cdots + a^n = a(1 + a + \cdots + a^{n-1}) = a\frac{1-a^n}{1-a}\cdot$$

**3** Lorsque $t$ est un nombre réel, la suite $u_n = e^{int}$ converge pour

☒ **a.** $t \equiv 0$ modulo $2\pi$ ❒ **b.** $t \equiv 0$ modulo $\pi$

❒ **c.** aucune valeur de $t$ ❒ **d.** tout réel $t$

La suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $e^{it}$. Elle ne converge donc que si $e^{it} = 1$ c'est-à-dire si $t \equiv 0$ modulo $2\pi$. En effet, si $u_n$ converge vers $\ell$, en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = e^{it}u_n$ on obtient $\ell = e^{it}\ell$. Or $|\ell| = \lim |e^{int}| = 1$ et donc $\ell$ n'est pas nul ; on a donc nécessairement $e^{it} = 1$. Réciproquement il est clair que dans ce cas la suite converge.

**4** Soit $u_n = 2n + 3$. Combien vaut $u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$ ?

☒ **a.** $3(n+1)^2$ ❒ **b.** $3n(n+1)$

❒ **c.** $\dfrac{(n+1)(6n+9)}{2}$ ❒ **d.** $\dfrac{n(6n+9)}{2}$

La somme proposée vaut

$$\frac{u_n + u_{2n}}{2}(2n - n + 1) = \frac{(2n + 3 + 4n + 3)(n+1)}{2} = 3(n+1)^2.$$

Rappelons que dans le cas d'une suite arithmétique (c'est le cas ici), la somme de termes consécutifs est égale au nombre de termes multiplié par la valeur moyenne des termes extrêmes.

**5** Quel est le comportement de la suite définie par $u_0 = 1/2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^3$ ?

❒ **a.** elle tend vers 1 en croissant ❒ **b.** elle tend vers 1 en décroissant

☒ **c.** elle tend vers 0 en décroissant ❒ **d.** elle diverge vers $+\infty$ en croissant

Les points fixes de la fonction $f : x \mapsto x^3$ sont $0$, $-1$ et $1$. L'intervalle $[0, 1]$ est stable par $f$ donc $u_n$ est dans cet intervalle pour tout $n$. Sur $[0, 1]$ on a $f(x) \leqslant x$. Il en résulte que $(u_n)$ est décroissante. Comme elle est minorée par $0$, elle converge et sa limite qui est un point fixe de $f$ est nécessairement $0$.

**6** Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle qui vérifie $\dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{u_n}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$. Alors

❒ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante ❒ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge

❒ **c.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$ ☒ **d.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmétique

En effet, la relation montre que la suite $\dfrac{u_n}{n}$ est constante et vaut $u_1$. On a donc pour tout $n$, $u_n = nu_1$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmétique de raison $u_1$. La réponse **a.** est inexacte car la suite est strictement décroissante lorsque $u_1 < 0$. Dans ce cas elle tend même vers $-\infty$ donc **c.** et **b.** sont aussi fausses.

**7** Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par son premier terme $u_1 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Alors on peut montrer par récurrence sur $n$ que

❒ **a.** $u_n$ est rationnel ☒ **b.** $u_n > 0$

❒ **c.** $u_n \leqslant u_{n+1}$ ❒ **d.** $u_n \leqslant nu_1$

En effet, cette propriété est vraie pour $n = 1$, et si $u_n$ est strictement positif, il en est de même de $u_{n+1}$. La réponse **a.** serait correcte si $u_1$ était choisi dans $\mathbf{Q}$ mais cela n'est pas supposé. De la positivité de $u_n$ on déduit que la suite $(u_n)$ est croissante et la propriété $u_n \leqslant u_{n+1}$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$. Mais celle-ci ne se montre pas par récurrence car on ne peut pas déduire l'inégalité $u_n \leqslant u_{n+1}$ de l'inégalité $u_{n-1} \leqslant u_n$ (essentiellement parce que la fonction $x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ n'est pas croissante sur $]0, +\infty[$).

**8** Quelle relation de récurrence est vérifiée par la suite $u_n = 2^n + 3^n$ ?

❒ **a.** $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$ ❒ **b.** $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

❒ **c.** $u_{n+2} = 5u_{n+1} + 6u_n$ ☒ **d.** $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$

Lorsque l'équation $x^2 + ax + b = 0$ admet deux racines distinctes $r_1$ et $r_2$, les suites vérifiant la récurrence $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ sont exactement les suites de la forme $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$ avec $(A, B) \in \mathbf{R}^2$. Dans le cas présent, $2$ et $3$ sont les racines de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$, et donc $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$ pour tout $n$.

**9** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle vérifiant la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3$ pour tout $n$. Alors la suite $t_n = u_n - a$ est une suite géométrique lorsque

❒ **a.** $a = 3$ ☒ **b.** $a = -3$ ❒ **c.** $a = 2$ ❒ **d.** $a = 0$

On remplace $u_n$ par $t_n + a$ dans la relation de récurrence. Il vient pour tout entier $n$, $t_{n+1} = 2t_n + (a+3)$. Il en résulte que $t_n$ est une suite géométrique (de raison 2) lorsque $a = -3$.

Géométriquement une fonction $f : z \mapsto \alpha z + \beta$ définit une similitude du plan complexe (lorsque $\alpha$ n'est pas nul) et pour étudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ on fait simplement un changement d'origine consistant à prendre le centre de la similitude $f$ c'est-à-dire son unique point fixe (lorsque $\alpha \neq 1$ ; si $\alpha = 1$ on a simplement une suite arithmétique).

**10** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Alors

❒ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge car elle est croissante

❒ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante donc elle tend vers $+\infty$

❒ **c.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et positive donc converge et sa limite $\ell$ vérifie $\ell = \ell + \ell^2$ donc est nulle.

☒ **d.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et non majorée

En effet, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante (et même strictement en fait). Si elle était majorée, elle convergerait et sa limite $\ell$ vérifierait $\ell = \ell + \ell^2$ et donc $\ell = 0$. Cela est impossible puisque $\ell \geqslant u_0 > 0$. Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$.

Les réponses **a.** et **b.** sont fausses : une suite croissante ne converge pas forcément (par exemple pour $a_n = n$), et une suite strictement croissante peut très bien converger (c'est le cas de $a_n = 1 - 1/n$).

**11** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell$ (avec $u_n \neq \ell$ pour tout $n$). Alors le quotient $\dfrac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}$ tend vers

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ☒ **c.** $f'(\ell)$ ❒ **d.** $f'(c)$ où $c$ est compris entre $\ell$ et $u_n$

Comme $f$ est continue on sait que $\ell$ est un point fixe de $f$. On a alors $\dfrac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} = \dfrac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell}$ qui tend vers $f'(\ell)$ car $u_n$ tend vers $\ell$.

Notons que la réponse **d.** n'a pas de sens, car si $c$ est compris entre $\ell$ et $u_n$, alors $c$ devrait se noter $c_n$, car ce réel dépend de $n$. Et on comprend bien qu'une suite ne peut tendre vers une suite...

## 13 Fonctions de la variable réelle : généralités, limites, continuité

**1** La plus petite période positive de la fonction $f : x \mapsto \cos(\sin x)$ est

❒ **a.** $2\pi$ ☒ **b.** $\pi$

❒ **c.** $\cos(2\pi)$ ❒ **d.** $f$ n'est pas périodique

En effet, $f(x+\pi) = \cos(\sin(x+\pi)) = \cos(-\sin x) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ car la fonction cos est paire. C'est la plus petite période car $f(0) = f(\pi) = 1$ et $f$ ne prend pas la valeur 1 dans l'intervalle $]0, \pi[$.

La fonction $f$ est aussi $2\pi$-périodique, mais ce n'est pas sa plus petite période.

**2** Au sujet des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, laquelle des propositions suivantes est fausse ?

❒ **a.** la somme de deux fonctions bornées est bornée

❒ **b.** la somme de deux fonctions continues est continue

☒ **c.** la somme de deux fonctions monotones est monotone

❒ **d.** la somme de deux fonctions paires est paire

La somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante n'est pas nécessairement monotone : comme contre-exemple, considérons $f : x \mapsto x + \sin(x)$ et $g : x \mapsto -x$. Alors $f$ est croissante (sa dérivée est positive) et $g$ est décroissante, mais leur somme $x \mapsto \sin(x)$ n'est ni croissante ni décroissante.

En revanche, les trois autres propositions sont vraies, et on peut rajouter aussi que la somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).

**3** La fonction $f : x \mapsto \sin(x^2)$ est

☒ **a.** paire ❒ **b.** impaire

❒ **c.** paire et impaire ❒ **d.** ni paire ni impaire

En effet, $f(-x) = \sin(-x)^2 = \sin x^2 = f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. De façon plus générale, si $g$ est une fonction quelconque, et $h$ est une fonction paire, il est facile de vérifier que $g \circ h$ est toujours une fonction paire.

Notons que la seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle.

**4** Si $f$ et $g$ sont définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = -x$, la fonction $\max(f, g)$

❒ **a.** est égale à $f$ ❒ **b.** est égale à $g$

☒ **c.** est la fonction $|x|$ ❒ **d.** n'est pas définie sur $\mathbf{R}$.

Lorsque $x$ est positif, $\max(f(x), g(x)) = x$ et lorsque $x$ est négatif $\max(f(x), g(x)) = -x$. Il s'agit donc de la fonction valeur absolue. Il est important de comprendre qu'une égalité de fonctions $h_1 = h_2$ n'a lieu que si $h_1(x) = h_2(x)$ **pour tout** $x$. C'est pour cela que la fonction $\max(f, g)$ n'est ni égale à la fonction $f$, ni égale à la fonction $g$.

**5** Une fonction croissante de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$

❒ **a.** est toujours majorée ☒ **b.** est toujours minorée

❒ **c.** tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ❒ **d.** est continue sur $\mathbf{R}^+$

Effectivement, une fonction croissante sur $\mathbf{R}^+$ est minorée par $f(0)$.

Voici trois contre-exemples aux autres réponses proposées : la fonction $x \mapsto x$ n'est pas majorée, la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ ne tend pas vers l'infini, et enfin $x \mapsto E(x)$ n'est pas continue. Pourtant, ces trois fonctions sont bien croissantes.

**6** Quelles sont les limites respectives en $-\infty$ et $+\infty$ de $f : x \mapsto \exp(-e^x)$.

☒ **a.** 1 et 0 ❒ **b.** 0 et 1 ❒ **c.** $+\infty$ et 0 ❒ **d.** 0 et $+\infty$

Lorsque $x$ tend vers $-\infty$, $e^x$ tend vers 0, et par le théorème de composition des limites, $f(x)$ tend vers 1. Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, $-e^x$ tend vers $-\infty$, et ainsi $f(x)$ tend vers 0.

On peut remarquer que cette fonction $f$ donne un exemple de bijection décroissante de $\mathbf{R}$ sur l'intervalle $]0, 1[$.

**7** Une fonction $f$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ tend vers 3 à droite en 0 si

☒ **a.** $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, 0 < x \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - 3| \leqslant \varepsilon$

❒ **b.** $\forall \varepsilon \geqslant 0, \exists \alpha \geqslant 0, 0 < x \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - 3| \leqslant \varepsilon$

❒ **c.** $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, 0 < x \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - 3| \leqslant \varepsilon$

❒ **d.** $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, 0 < x \leqslant \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - 3| \leqslant \alpha$

En effet, c'est exactement la définition.

Notons que l'assertion **b.** est toujours vérifiée (il suffit de prendre $\alpha = 0$ pour tout $\varepsilon$) ; l'assertion **c.** revient à dire que $f$ est bornée sur $\mathbf{R}_+^*$ ; et **d.** revient à dire que $f$ est bornée sur tout intervalle $]0, \varepsilon]$.

**8** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ étant une fonction quelconque, laquelle des fonctions suivantes n'est pas nécessairement paire ?

❒ **a.** $x \mapsto f(x^2)$ ☒ **b.** $x \mapsto f(x)^2$

❒ **c.** $x \mapsto f(x)f(-x)$ ❒ **d.** $x \mapsto f(\cos x)$

Si on prend par exemple $f : x \mapsto e^x$, alors $f(x)^2 = e^{2x}$ pour tout $x$ et $x \mapsto f(x)^2$ n'est ni paire, ni impaire.

De façon générale, si $f$ est quelconque et $g$ est paire, alors $f \circ g$ est paire (car $f(g(-x)) = f(g(x))$) mais $g \circ f$ n'a aucune raison de l'être. C'est ainsi que les fonctions $x \mapsto f(x^2)$ et $x \mapsto f(\cos x)$ (réponses **a.** et **d.**) sont paires. Quant à la fonction $x \mapsto f(x)f(-x)$, sa parité est immédiate.

**9** Soit $f$ strictement décroissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Quelle fonction n'est pas forcément croissante ?

❒ **a.** $x \mapsto f(f(x))$ ❒ **b.** $x \mapsto -f(x)$

❒ **c.** $x \mapsto f(-x)$ ☒ **d.** $x \mapsto f(x^2)$

En effet, $x \mapsto f(x^2)$ n'est pas forcément monotone comme le montre l'exemple de $f(x) = -x$ : on a alors $f(x^2) = -x^2$ qui est non croissante sur $\mathbf{R}_+$.

En revanche, les autres choix proposés concernent des fonctions qui sont toutes croissantes. De façon générale, ne vous précipitez jamais sur un calcul de dérivée pour étudier la variation d'une fonction (ici aucune hypothèse n'est faite sur la dérivabilité de $f$). Par exemple, la fonction $x \mapsto \exp(x + \ln(1 + e^x))$ est clairement croissante, tout simplement parce que la somme ou la composée de deux fonctions croissantes reste croissante.

**10** Laquelle des conditions suivantes est *suffisante* pour que $f$ soit continue en 0 ?

☒ **a.** $|f(x)| \leqslant |x|$ pour tout $x$ dans $[-1, 1]$

❒ **b.** $f(x) \leqslant x$ pour tout $x$ dans $[-1, 1]$

❒ **c.** la suite $f(1/n)$ converge vers $f(0)$

❒ **d.** $f$ est croissante sur $[-1, 1]$

La condition **a.** permet de dire que $f(0) = 0$ et que $f(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 0. C'est le théorème d'encadrement.

Justifions que les autres conditions ne sont pas suffisantes. Pour **b.** on peut prendre par exemple $f(x) = 0$ pour $x \geqslant 0$ et $f(x) = -1$ pour $x < 0$. Alors $f$ n'est pas continue en 0 bien que **b.** soit vérifiée. La même fonction vérifie d'ailleurs aussi les conditions **c.** et **d.**.

**11** Quelle condition est suffisante pour dire qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est majorée sur $\mathbf{R}$ ?

❒ **a.** $f$ est majorée sur l'intervalle $[n, n + 1]$ pour tout $n$ dans $\mathbf{Z}$

❒ **b.** $f$ est périodique

☒ **c.** $f$ est croissante et tend vers 0 en $+\infty$

❒ **d.** $f$ est impaire et majorée sur $\mathbf{R}_+$

En effet, si $f$ est croissante et tend vers $\ell$ en $+\infty$ on a $f(x) \leqslant \ell$ pour tout réel $x$.

Les autres arguments proposés ne conviennent pas : la fonction $x \mapsto x$ (comme toute fonction continue) est bornée sur chaque segment $[n, n + 1]$ mais n'est pas bornée sur $\mathbf{R}$ ; le problème vient du fait qu'il y a une infinité de segments. De même, la fonction $x \mapsto -x$ est impaire, majorée par 0 sur $\mathbf{R}_+$, mais non majorée sur $\mathbf{R}_-$.

Il est plus difficile de trouver une fonction périodique non majorée. On peut prendre comme exemple la fonction tangente, prolongée par 0 en les points où elle n'est pas définie. La difficulté pour trouver cette fonction tient au fait qu'une fonction périodique et continue sur $\mathbf{R}$ est nécessairement bornée sur $\mathbf{R}$, ce qui force à chercher une fonction définie partout, mais non continue.

**12** Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, la fonction $x \mapsto x^{1/x}$ tend vers

❒ **a.** 0 ☒ **b.** 1 ❒ **c.** $e$ ❒ **d.** $+\infty$

On a $x^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ pour tout $x > 0$. On sait que $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$, donc par continuité de l'exponentielle, $x^{1/x}$ tend vers 1.

La transformation de toute expression $f(x)^{g(x)}$ en $e^{g(x)\ln f(x)}$ est la règle pour étudier les limites.

**13** Soit $f, g$ deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^*$ telles que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tende vers 1 quand $x$ tend vers 0. Alors on peut dire que sur un voisinage de 0

❐ **a.** $f(x) = g(x)$ ☒ **b.** $f$ et $g$ ont le même signe

❐ **c.** $f$ et $g$ ont le même sens de variation ❐ **d.** $f$ et $g$ sont continues

Par le théorème de localisation le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ est strictement positif sur un voisinage de 0 : il existe $\eta > 0$ tel que $\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant \frac{1}{2}$ pour $x \in [-\eta, \eta]$.

La réponse **a.** ne convient pas car « tendre vers 1 » ne veut pas dire « être égal à 1 sur un voisinage de 0 ». Le sens de variation n'est pas forcément défini ! Mais même si $f$ et $g$ sont monotones sur un voisinage de 0, rien ne permet de dire qu'elles ont la même monotonie (prendre par exemple $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto e^{-x}$). Enfin, rien dans l'énoncé ne permet d'affirmer la continuité de $f$ et $g$ au voisinage de 0.

**14** Laquelle des propositions suivantes n'implique pas que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue en 0 ?

❐ **a.** $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta, \eta], |f(x) - f(0)| \leqslant 2\varepsilon$

❐ **b.** $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta, \eta], |f(x) - f(0)| \leqslant |x| + \varepsilon$

❐ **c.** $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta, \eta], |f(x) - f(0)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$

☒ **d.** $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta, \eta], |f(x) - f(0)| \leqslant f(\varepsilon)$

En effet, $f(\varepsilon)$ n'a pas de raison d'être « petit ». Prenons par exemple $f$ qui vaut 1 partout sauf en 0 où elle vaut 1/2. Pour $\varepsilon > 0$ quelconque on a donc $f(\varepsilon) = 1$ et tout $\eta > 0$ rend la proposition vraie puisque $|f(x) - f(0)|$ vaut 0 ou 1/2. Pourtant $f$ est discontinue en 0.

Démontrer que chacune des trois autres propositions conduit à la continuité de $f$ en 0 constitue un petit exercice sur la quantification. Pour ce faire, on fixe d'abord $\varepsilon > 0$, puis on exploite la propriété de l'énoncé au rang $\frac{\varepsilon}{2}$ (cas **a.** et **b.**) ou $\varepsilon^2$ (cas **c.**). La valeur de $\eta$ fournie par la propriété convient alors directement (cas **a.** et **c.**), sinon on prend $\min(\eta, \varepsilon/2)$ dans le cas **b.**.

**15** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction périodique de plus petite période $T > 0$. Alors $T^2$ est une période de $f$,

❐ **a.** si et seulement si $T = 1$ ☒ **b.** si et seulement si $T$ est entier

❐ **c.** pour tout $T$ ❐ **d.** pour aucune valeur de $T$

Comme $T$ est la plus petite période de $f$, les périodes de $f$ sont exactement les multiples entiers de $T$. Ainsi, si $T^2$ est une période, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $T^2 = Tm$, ce qui fait $T = m$. La réciproque est vraie.

**16** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On suppose que $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 1 quand $x$ tend vers $+\infty$. Alors sur un voisinage de $+\infty$

❒ **a.** $f(x) = x$ ❒ **b.** $f(x) \geqslant x$

☒ **c.** $f(x) \geqslant \dfrac{x}{2}$ ❒ **d.** $f(x) \geqslant 2x$

En effet, comme $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 1 le théorème de localisation permet de dire que $\dfrac{f(x)}{x} \geqslant \dfrac{1}{2}$ sur un voisinage de $+\infty$.

La fonction $f : x \mapsto x - 1$ fournit un contre-exemple aux trois autres réponses proposées.

**17** Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ la fonction $f : x \mapsto x^\alpha E(1/x)$ admet-elle une limite finie à droite en 0 ? On rappelle que $E$ désigne la fonction partie entière.

❒ **a.** $\alpha > 1$ ☒ **b.** $\alpha \geqslant 1$

❒ **c.** $\alpha > 0$ ❒ **d.** tout réel $\alpha$

On a $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n}{n^\alpha} = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ qui diverge vers l'infini lorsque $\alpha < 1$. Il est donc nécessaire que $\alpha \geqslant 1$ pour que $f$ ait une limite finie.

Vérifions que cette condition est suffisante. Pour le voir on encadre la partie entière :

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x} - 1 \leqslant E\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x},$$

ce qui donne en multipliant par $x^\alpha$, $x^{\alpha-1} - x^\alpha \leqslant f(x) \leqslant x^{\alpha-1}$. Lorsque $\alpha > 1$ cette inégalité montre grâce au théorème d'encadrement que $f(x)$ tend vers 0. Lorsque $\alpha = 1$, elle montre que $f(x)$ tend vers 1.

Quand on étudie les limites de fonctions définies à l'aide d'une partie entière $E(g(x))$ où $g$ est une fonction quelconque, on se pose d'abord la question du comportement de $g$. Si $|g(x)|$ tend vers l'infini, on peut souvent conclure à partir de l'encadrement $g(x) - 1 \leqslant E(g(x)) \leqslant g(x)$ . Si $g(x)$ reste bornée, il est courant que $E(g(x))$ soit constant au voisinage du point considéré. Les autres cas (lorsque $g$ est non bornée et ne tend pas vers l'infini) sont vraiment peu usuels.

**18** Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ la fonction $f : x \mapsto \dfrac{E(x)}{x^\alpha}$ tend-elle vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ?

❒ **a.** $\alpha > 0$ ❒ **b.** $\alpha \geqslant 1$ ☒ **c.** $\alpha > 1$ ❒ **d.** $\alpha \geqslant 2$

On a $f(n) = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ pour $n$ entier naturel. Il est donc nécessaire que $\alpha > 1$ pour que $f$ tende vers 0.

Mais cette condition est suffisante. Pour le voir on majore la partie entière : $E(x) \leqslant x$. On en déduit que $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ pour tout $x > 0$ et le majorant tend vers 0 en $+\infty$ lorsque $\alpha - 1 > 0$.

**19** Soit $f$ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, $A$ l'assertion « $f(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$ » et $B$ l'assertion « la suite $f(n)$ converge vers 0 ». Alors

☒ **a.** $A$ implique $B$

❒ **b.** $B$ implique $A$

❒ **c.** $A$ et $B$ sont équivalentes

❒ **d.** il n'y a pas d'implication entre $A$ et $B$

La caratérisation séquentielle des limites affirme que $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $f(x_n)$ converge vers 0 pour **toute** suite $(x_n)$ qui tend vers $+\infty$. En particulier $A$ implique $B$. Toutefois, lorsque $f(x_n)$ tend vers 0 pour **une** suite particulière, on ne peut rien en conclure sur le comportement de la fonction $f$ : prendre l'exemple de $f : x \mapsto \sin(\pi x)$ qui n'a pas de limite en $+\infty$ alors que la suite $f(n)$ est identiquement nulle.

**20** Soit $f$ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ avec $f(0) = 0$. On suppose que la suite $f(1/n)$ converge vers 0. Laquelle des conditions suivantes permet de déduire que $f$ est continue à droite en 0 ?

❒ **a.** $f$ est bornée

☒ **b.** $f$ est croissante

❒ **c.** $f$ est paire

❒ **d.** c'est toujours le cas

En effet, si $f$ est croissante on sait que $f$ admet une limite $f_d(0)$ à droite en 0, et que $f(0) \leqslant f_d(0) \leqslant f(1/n)$ pour tout $n$. Le théorème d'encadrement s'applique alors pour affirmer que $f_d(0) = f(0)$ et donc que $f$ est continue à droite en 0.

Aucun des autres arguments proposés ne permet de conclure à l'existence de la limite de $f$ à droite en 0. C'est souvent l'existence de la limite qui est le plus difficile à prouver : lorsqu'on sait que la limite existe, trouver sa valeur est plus simple.

## 14 Continuité sur un intervalle

**1** Soit $f$ une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$, telle que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \neq 0$. Alors on peut dire que $f$ est soit strictement positive sur tout l'intervalle $[0, 1]$, soit strictement négative sur tout l'intervalle $[0, 1]$. Quel est l'argument invoqué ?

☒ **a.** le théorème des valeurs intermédiaires

❒ **b.** $f$ est bornée sur le segment $[0, 1]$

❒ **c.** $f$ est une bijection continue

❒ **d.** aucun, cela serait vrai même si $f$ n'était pas continue

Si $f$ changeait de signe, on pourrait trouver $x$ tel que $f(x) > 0$ et $y$ tel que $f(y) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à $f$ entre $x$ et $y$, permettrait alors d'affirmer que $f$ passe par 0, ce qui est impossible. Le résultat serait faux si $f$ n'était pas continue, par exemple pour la fonction $f$ définie par $f(x) = 1$ si $x < 1$ et $f(1) = -1$.

**2** Soit $f$ croissante sur $\mathbf{R}^+$ et $\ell$ la limite à droite en 0 de $f$ . Alors

❒ **a.** $\ell$ existe et vaut $f(0)$ ☒ **b.** $\ell$ existe et $\ell \geqslant f(0)$

❒ **c.** $\ell$ existe et $\ell \leqslant f(0)$ ❒ **d.** $\ell$ n'existe pas forcément

Le théorème des limites monotones assure l'existence de $\ell$ et le fait que $\ell \geqslant f(0)$. Mais on n'a pas forcément $\ell = f(0)$ comme le montre l'exemple de la fonction $f$ définie par $f(x) = 1$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$. La limite à droite en 0 est alors égale à 1.

**3** L'image de l'intervalle $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$ par la fonction sinus est

❒ **a.** $\left]0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$ ❒ **b.** $\left]0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

❒ **c.** $\left]-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right[ \cup \left]0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$ ☒ **d.** $\left]0, 1\right]$

La fonction sinus établit une bijection entre $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $]0, 1]$ ainsi qu'entre $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$. On obtient donc $]0, 1]$. Attention, comme sinus n'est pas monotone sur l'intervalle considéré il ne suffit pas de prendre les valeurs au bord pour trouver l'intervalle image.

**4** Laquelle des fonctions suivantes ne se prolonge pas par continuité en 0 ?

☒ **a.** $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ ❒ **b.** $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ ❒ **c.** $x \mapsto \sqrt{x^2}$

❒ **d.** $f(x) = x$ si $x > 0$ et $f(x) = 2x$ si $x < 0$

La fonction de **a.** a une limite à droite égale à 1 et une limite à gauche égale à $-1$ donc elle ne se prolonge pas par continuité en 0.

En revanche, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité avec la valeur 1 en 0. Ce prolongement est infiniment dérivable comme vous pourrez le constater facilement en Spéciales avec la notion de série entière. La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$ est bien entendu définie et continue sur $\mathbf{R}$. Enfin dans l'exemple **d.** la fonction f tend vers 0 à droite et à gauche en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$.

**5** L'image de l'intervalle $\mathbf{R}^+$ par une fonction continue ne peut pas être

❒ **a.** $\mathbf{R}^-$ ❒ **b.** $\mathbf{R}$ ☒ **c.** $\mathbf{R}^*$ ❒ **d.** un singleton

Par le théorème des valeurs intermédiaires l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Pour obtenir $\mathbf{R}^-$ on peut prendre la fonction $x \mapsto -x$, pour obtenir $\mathbf{R}$ on peut prendre la fonction $x \sin x$ et pour obtenir un singleton il suffit de prendre une fonction constante.

**6** Quelle condition est *nécessaire* pour que la fonction $f$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ admette une limite finie en $+\infty$ ?

❒ **a.** $f$ est monotone et bornée au voisinage de $+\infty$

❒ **b.** $f$ est constante au voisinage de $+\infty$

☒ **c.** $f(x+1) - f(x)$ tend vers 0 en $+\infty$

❒ **d.** $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ tend vers 1 en $+\infty$

En effet, si $f(x)$ tend vers $\ell$ en $+\infty$, il en est de même de $f(x+1)$ donc la différence $f(x+1) - f(x)$ tend vers 0.

Le quotient $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ tend bien vers 1 *si $\ell$ est un réel non nul* mais ce n'est pas forcément le cas si $\ell = 0$. Dans le cas de la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$, on a alors $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{e}$. Cet exemple prouve aussi que la réponse **b.** est incorrecte : une fonction peut avoir une limite qu'elle n'atteint jamais.

Enfin, l'exemple de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$ qui tend vers 0 sans être monotone au voisinage de l'infini montre que la réponse **a.** est fausse.

**7** Laquelle des assertions suivantes permet de dire que $f$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$ ?

❒ **a.** $\forall \varepsilon > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \exists \eta > 0, |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$

❒ **b.** $\exists \varepsilon > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$

☒ **c.** $\forall \varepsilon > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + |x - y|$

❒ **d.** $\exists \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$

Comme l'inégalité $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + |x - y|$ est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on peut faire tendre $\varepsilon$ vers 0 pour obtenir $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$. Ainsi la fonction $f$ est 1-lipschitzienne et donc uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

**8** Soit $f$ une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$. Laquelle des conditions suivantes assure l'existence d'un point fixe de $f$ (i.e. d'un réel $x$ tel que $f(x) = x$) ?

❒ **a.** $f(0)$ et $f(1)$ sont de signes contraires

❒ **b.** $f$ est strictement croissante

☒ **c.** $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$

❒ **d.** $f(0)$ et $f(1)$ sont de même signe

En effet, si on considère la fonction continue $g(x) = f(x) - x$, on a $g(0) = 1$ et $g(1) = -1$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure que $g$ s'annule dans l'intervalle $[0, 1]$.

La condition **a.** ou la stricte croissance de $f$ de **b.** ne sont pas suffisantes comme le montre l'exemple de la fonction $f(x) = x - \frac{1}{2}$ qui n'a aucun point fixe. Pour avoir un contre-exemple à **d.** on peut prendre $x \mapsto x + 1$.

**9** Soit $f$ continue sur un segment $[a, b]$ avec $f(a) < f(b)$. Alors $f([a, b])$

❒ **a.** est inclus dans $[f(a), f(b)]$ ❒ **b.** est égal à $[f(a), f(b)]$

☒ **c.** contient $[f(a), f(b)]$ ❒ **d.** est égal à $\{f(a), f(b)\}$

Par le théorème des valeurs intermédiaires $f$ atteint toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$. Donc $[f(a), f(b)]$ est inclus dans $f([a, b])$. Notons que l'autre inclusion n'est pas forcément vraie : si on prend $f(x) = x^2$ sur $[-1, 1]$ le segment $[f(-1), f(1)]$ est réduit au singleton $\{1\}$.

Bien entendu la réponse **d.** est à rejeter tout de suite puisque $\{f(a), f(b)\}$ n'est pas un intervalle.

**10** Soit $I$ un intervalle, $f : I \to \mathbf{R}$ continue et strictement positive. Quelle condition sur $I$ assure l'existence d'un réel $a > 0$ tel que $f(x) \geqslant a$ pour tout $x$ de $I$ ?

❒ **a.** c'est vrai pour tout intervalle $I$

❒ **b.** c'est vrai lorsque $I$ est un intervalle borné

☒ **c.** c'est vrai lorsque $I$ est un segment

❒ **d.** $I = \mathbf{R}$

C'est un résultat très important du cours : une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Si $x_0$ est un point où $f$ atteint son minimum, on a alors pour tout $x$, $f(x) \geqslant a$ avec $a = f(x_0) > 0$.

Le résultat n'est pas vrai pour tout intervalle $I$ : prendre par exemple $f(x) = e^x$ sur $I = \mathbf{R}$. La condition « $I$ borné » n'est pas suffisante comme le montre le simple exemple $f(x) = x$ sur $]0, 1[$.

**11** Laquelle des fonctions suivantes n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}$ ?

❒ **a.** $x \mapsto \sin x$ ❒ **b.** $x \mapsto x + 1$

☒ **c.** $x \mapsto x^2$ ❒ **d.** $x \mapsto \arctan x$

Les fonctions sin, arctan et $x \mapsto x + 1$ sont toutes les trois 1-lipschitiziennes sur $\mathbf{R}$ en vertu de l'inégalité des accroissements finis puisque leurs dérivées sont toutes bornées par 1. Elles sont donc uniformément continues et par élimination on en déduit que la bonne réponse est **c.**.

Pour montrer qu'une fonction $f$ n'est pas uniformément continue sur un intervalle $I$ le plus commode est d'utiliser la caractérisation séquentielle suivante : $f$ est uniformément continue sur $I$ si et seulement si, pour tout couple de suites $(x_n)$ et $(y_n)$ à valeurs dans $I$ on a :

$$y_n - x_n \to 0 \Longrightarrow f(y_n) - f(x_n) \to 0.$$

Pour l'exemple de la fonction $x \mapsto x^2$ avec $I = \mathbf{R}$ on met ce critère en défaut en prenant par exemple $x_n = n$ et $y_n = n + \dfrac{1}{n}$. En effet, $y_n - x_n$ tend vers 0 mais $f(y_n) - f(x_n) = 2 + \dfrac{1}{n^2}$ ne tend pas vers 0.

**12** Soit $f$ continue et strictement monotone sur $[0, 1[$. L'image de $[0, 1[$ ne peut pas être

❒ **a.** $[0, +\infty[$ ❒ **b.** $[1, +\infty[$ ❒ **c.** $]0, 1]$ ☒ **d.** $]0, 1[$

En effet, si $f$ est strictement croissante son image est l'intervalle semi-ouvert $[f(0), \lim_{x\to 1} f(x)[$ et si $f$ est strictement décroissante son image est l'intervalle semi-ouvert $]\lim_{x\to 1} f(x), f(0)]$. Il ne peut pas s'agir d'un intervalle ouvert.

En revanche, on obtient $[0, +\infty[$ par exemple avec $x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$, $[1, +\infty[$ avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $]0, 1]$ simplement avec la symétrie $x \mapsto 1 - x$.

**13** Soit $f$ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Laquelle des propriétés suivantes est vraie ?

❒ **a.** si $f$ est continue en 0, elle est continue sur un voisinage de 0

❒ **b.** si $f(0) > 0$, alors $f > 0$ sur un voisinage de 0

☒ **c.** si $f(0) > 0$ et si $f$ est continue en 0, alors $f > 0$ sur un voisinage de 0

❒ **d.** si $f(0) > 0$ et si $f$ est continue en 0, alors $f$ est continue et strictementpositive sur un voisinage de 0

Il s'agit du théorème de localisation : si $f(0) > 0$ et si $f$ est continue en 0 alors $f$ reste strictement positive au voisinage de 0. En effet, il suffit d'appliquer la définition de la continuité en prenant $\varepsilon = \dfrac{f(0)}{2}$. On peut trouver $\eta > 0$ tel que pour $x \in [-\eta, \eta]$, $|f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$. Par inégalité triangulaire on a alors $f(x) \geqslant \dfrac{f(0)}{2} > 0$ pour tout $x \in [-\eta, \eta]$.

L'hypothèse de continuité est essentielle comme le montre la fonction $f$ telle que $f(0) = 1$ et $f(x) = -1$ pour tout $x \neq 0$. Donc la réponse **b.** est fausse. De plus la continuité en un point est une notion locale : si $f$ est continue en 0 elle ne l'est pas forcément sur un voisinage de 0 et il faut donc rejeter les réponses **a.** et **d.**.

Il est difficile de trouver un exemple de fonction qui soit continue en 0 mais pas au voisinage de 0. Nous vous laissons vérifier à titre d'exercice que la fonction suivante convient : on prend $f(x) = x$ lorsque $x$ est rationnel et $f(x) = 0$ lorsque $x$ est irrationnel.

**14** Soit $f$ une fonction bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour $h > 0$ on pose

$$w(h) = \sup\{|f(x) - f(y)|,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ |x - y| \leqslant h\}$$

Dire que $f$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$, c'est dire que

❒ **a.** $w$ est bornée ❒ **b.** $w$ est fini pour tout $h > 0$

❒ **c.** $w$ est continue ☒ **d.** $w(h)$ tend vers 0 lorsque $h$ tend vers $0^+$

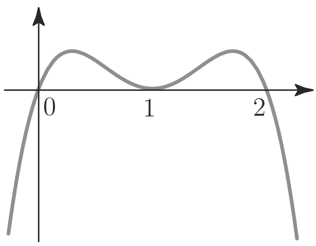
En effet, $f$ est uniformément continue si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $\eta > 0$ tel que $0 \leqslant w(h) \leqslant \varepsilon$ lorsque $h \leqslant \eta$.

**15** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$. L'ensemble $E$ des réels $x$ tels que $f(x) > 0$ est forcément différent de

❒ **a.** $\mathbf{R}$ ☒ **b.** $]0, 1]$ ❒ **c.** $]0, 1[$ ❒ **d.** $]0, 1[\cup]1, 2[$

Il s'agit ici d'une vision topologique de la continuité qui sera précisée dans le cours de Spéciales : l'image réciproque d'un ensemble ouvert par une fonction continue est ouvert. L'ensemble $E$ ne peut donc pas être l'intervalle $]0, 1]$. En effet, supposons que ce soit le cas. Alors en particulier $f(1) > 0$. Mais comme $f$ est continue en 1, le théorème de localisation assure que $f$ reste strictement positive sur un intervalle ouvert contenant 1, ce qui est contradictoire.

Tous les autres ensembles proposés sont ouverts et peuvent être obtenus : pour $\mathbf{R}$ il suffit de prendre la fonction exponentielle, pour $]0, 1[$ la fonction polynôme $x \mapsto x(1 - x)$ et pour $]0, 1[\cup]1, 2[$ la fonction polynôme $x \mapsto x(2 - x)(1 - x)^2$.




**16** Soit $f$ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, A l'assertion « $f$ est strictement croissante », B l'assertion « $f$ est continue » et C l'assertion « $f$ est surjective ». Alors

❒ **a.** (A et B) implique C

☒ **b.** (A et C) implique B

❒ **c.** (B et C) implique A

❒ **d.** aucune des 3 propositions ne résulte des deux autres

Lorsque $f$ est strictement croissante elle admet en tout point $x$ une limite à gauche et à droite par le théorème des limites monotones. Si de plus, elle est surjective, ces limites sont forcément égales à $f(x)$ de sorte que $f$ est continue en $x$.

En revanche, si f est strictement croissante et continue, elle n'est pas forcément surjective car sa limite en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) ne vaut pas forcément $+\infty$ (respectivement $-\infty$). Il suffit de prendre la fonction arctangente par exemple. Enfin **c.** est faux : la surjectivité d'une fonction continue n'implique aucun résultat de monotonie, comme le montre la fonction $x \mapsto x \sin x$ par exemple.

**17** Si $f$ est continue sur $\mathbf{R}$ et vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}$, que peut-on dire ?

❒ **a.** $f = \mathrm{Id}$

❒ **b.** $f$ est strictement croissante

☒ **c.** $f$ est strictement monotone

❒ **d.** le graphe de $f$ est symétrique par rapport à la droite $y = -x$

La fonction $f$ est bijective car involutive (elle est elle-même sa propre bijection réciproque). Or une injection continue sur un intervalle $I$ est nécessairement strictement monotone. Ce résultat, bien qu'assez intuitif, n'est pas si facile à démontrer.

Comme $f$ est sa propre réciproque, son graphe est symétrique par rapport à la droite $y = x$, mais pas forcément par rapport à la droite $y = -x$.

## 15 Dérivabilité des fonctions réelles

**1** Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction dérivable paire, alors $f'$ est

❒ **a.** paire

☒ **b.** impaire

❒ **c.** ni paire, ni impaire

❒ **d.** nulle

On a $f(x) = f(-x)$ pour tout réel $x$. En dérivant cette égalité de fonctions, il vient $f'(x) = -f'(-x)$ pour tout $x$, ce qui prouve que $f'$ est impaire. On peut observer que $f'(0)$ est nécessairement nul, mais que $f'$ n'est identiquement nulle que si $f$ est constante, ce qui n'est pas le cas *a priori*.

Si vous avez répondu **a.**, vous avez oublié le signe moins dans la dérivée de la fonction composée $x \mapsto f(-x)$.

**2** Si $f$ et $g$ sont deux fonctions réelles dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ avec $f(1) = g(1)$ alors

❒ **a.** $f'(1) = g'(1)$

❒ **b.** $f'(1) \neq g'(1)$

❒ **c.** $f'(1) < g'(1)$

☒ **d.** on ne peut rien dire

Effectivement tout est possible. Si $f = g$ on a $f'(1) = g'(1)$. Si on prend par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ on a $f'(1) = 1 < 2 = g'(1)$. L'égalité $f(1) = g(1)$ est ponctuelle et ne peut pas être dérivée. On ne peut dériver qu'une égalité de fonctions.

**3** Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dérivable, la dérivée de $x \mapsto f(x^3)$ est

❒ **a.** $x \mapsto 3x^2 f'(3x^2)$

❒ **b.** $x \mapsto 3f'(x^3)^2$

☒ **c.** $x \mapsto 3x^2 f'(x^3)$

❒ **d.** $x \mapsto f'(x^3)$

La dérivée d'une composée $x \mapsto f(g(x))$ est le produit $x \mapsto g'(x)f'(g(x))$. On obtient donc ici $x \mapsto 3x^2 f'(x^3)$.

**4** Si $f, g, h$ sont trois fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, la dérivée du produit $fgh$ vaut

❐ **a.** $f'g'h'$ ❐ **b.** $f'gh + fgh'$

☒ **c.** $f'gh + fg'h + fgh'$ ❐ **d.** $f'g'h + fgh'$

On utilise deux fois la règle de dérivation d'un produit. On a

$$(fgh)' = (fg)'h + (fg)h' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

Plus généralement, la dérivée d'un produit $(f_1 f_2 \dots f_n)$ est

$$f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \quad \cdots \quad + f_1 \cdots f_{n-1} f_n'.$$

**5** La dérivée en $x \in \mathbf{R}$ de la fonction sinus est

☒ **a.** $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ❐ **b.** $\sin(x + \pi)$

❐ **c.** $\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ ❐ **d.** $\sin(x + 2\pi)$

La dérivée de sin est $x \mapsto \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Cette expression est particulièrement utile lorsque qu'on dérive la fonction sinus $n$ fois de suite : $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Les réponses **b.**, **c.** et **d.** ne conviennent pas ; rappelons que l'on a $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\sin(x + \frac{3\pi}{2}) = -\cos x$ et enfin que sin est $2\pi$-périodique et donc que $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

**6** L'équation de la tangente en $\frac{\pi}{4}$ au graphe de la fonction $x \mapsto \tan x$ est

❐ **a.** $y - \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4}$ ❐ **b.** $y = 1 + 2x$

❐ **c.** $y = 2x - 1$ ☒ **d.** $y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

De façon générale, la tangente en $x_0$ au graphe de la fonction $f$ est la droite d'équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ici, on a $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ et $\tan'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$. Par suite l'équation de la tangente en $\frac{\pi}{4}$ est $y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

**7** En 0 la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$ tend vers

❐ **a.** 0 ☒ **b.** 1 ❐ **c.** $\dfrac{1}{\cos x}$ ❐ **d.** $+\infty$

La fonction sinus est dérivable en 0 de dérivée $\cos(0) = 1$. Donc le taux d'accroissement $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$ tend vers 1 quand $x$ tend vers 0 et il en est de même de son inverse.
La réponse **c.** n'a aucun sens : la limite ne peut pas dépendre de la variable $x$, ce n'est pas une fonction.

**8** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable avec $f'(0) = 2$. Alors $x \mapsto \dfrac{f(2x) - f(x)}{2x}$ a pour limite en 0

☐ **a.** 0 ☒ **b.** 1 ☐ **c.** 2 ☐ **d.** 3

On peut obtenir ce résultat de deux façons. D'abord en exprimant $\dfrac{f(2x) - f(x)}{2x}$ à l'aide de taux d'accroissements par rapport à 0 : on introduit $f(0)$ au numérateur pour obtenir :

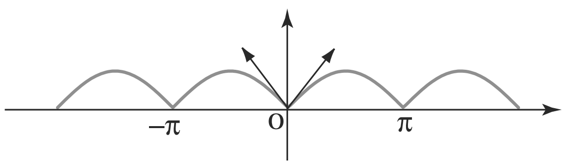
$$\frac{f(2x) - f(x)}{2x} = \frac{f(2x) - f(0)}{2x} - \frac{f(x) - f(0)}{2x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0) - \frac{1}{2}f'(0) = 1.$$

Mais on peut aussi utiliser les développements limités en 0 : on écrit alors $f(x) = f(0) + 2x + o(x)$, donc $f(2x) = f(0) + 4x + o(x)$ et par différence $f(2x) - f(x) = 2x + o(x)$. Ainsi $\dfrac{f(2x) - f(x)}{2x} = 1 + o(1)$ tend vers 1.

**9** La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sin^2 x}$ est dérivable sur

☐ **a.** $\mathbf{R}$ ☐ **b.** $\mathbf{R}^*$
☐ **c.** $\mathbf{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ ☒ **d.** $\mathbf{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$

On a $f(x) = |\sin x|$. C'est une fonction $\pi$-périodique. On étudie la dérivabilité sur $[0, \pi]$. Sur cet intervalle le sinus est positif et $f(x) = \sin x$. Donc $f$ est dérivable sur $]0, \pi[$, dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = 1$ et dérivable à gauche en $\pi$ avec $f'_g(\pi) = -1$.




On en déduit que $f$ n'est pas dérivable en 0 car $f'_g(0) = -1$ par périodicité. Ainsi $f$ n'est dérivable que sur $\mathbf{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

**10** La dérivée de $f : x \mapsto \ln|x|$ sur $\mathbf{R}^*$ est

☐ **a.** $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ ☐ **b.** $x \mapsto \left|\dfrac{1}{x}\right|$ ☐ **c.** $x \mapsto \dfrac{1}{\ln|x|}$ ☒ **d.** $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

En effet, sur $\mathbf{R}_+^*$, on a $f(x) = \ln x$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Sur l'intervalle $\mathbf{R}_-^*$, on a de même $f(x) = \ln(-x)$ et donc $f'(x) = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$.

**11** La fonction $f : x \mapsto x + \sin x$ est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. Sa bijection réciproque est dérivable sur

❒ **a.** $\mathbf{R}$
❒ **b.** $\mathbf{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$
☒ **c.** $\mathbf{R} \setminus \{(2k-1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$
❒ **d.** $\mathbf{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$

On a $f'(x) = 1 + \cos x$ pour tout $x$ et cette dérivée est nulle lorsque $x$ est de la forme $-\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. La fonction $f^{-1}$ n'est pas dérivable en l'image de ces points par $f$ et on a $f(-\pi + 2k\pi) = -\pi + 2k\pi = (2k-1)\pi$.

**12** Soit $f, g$ deux fonctions deux fois dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Quelle est la dérivée seconde de $f \circ g$ ?

☒ **a.** $g'' \times (f' \circ g) + (g')^2 \times (f'' \circ g)$
❒ **b.** $g'' \times g' \times (f \circ g) + g' \times (f' \circ g)$
❒ **c.** $g' \circ f' \circ g \circ g'' \circ f \circ g$
❒ **d.** $f'' \circ g''$

La dérivée de $f \circ g$ est $g' \times (f' \circ g)$. Il suffit maintenant de dériver ce produit avec la règle appropriée :

$$(g' \times (f' \circ g))' = g'' \times (f' \circ g) + g' \times g' \times f'' \circ g.$$

**13** La dérivée de la fonction $x \mapsto x^x$ sur $\mathbf{R}_+^*$ est

❒ **a.** $x \mapsto x^{x-1}$
❒ **b.** $x \mapsto xx^{x-1} = x^x$
☒ **c.** $x \mapsto (1 + \ln x)x^x$
❒ **d.** $x \mapsto (1 + \ln x)x^{x-1}$

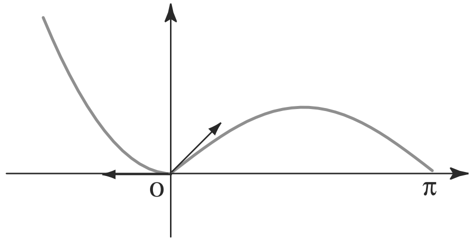
On a $x^x = \exp(x \ln x)$ pour tout $x > 0$. C'est une composée de deux fonctions. La dérivée de $x \mapsto x \ln x$ étant $x \mapsto 1 + \ln x$ on obtient pour dérivée la fonction $x \mapsto (1 + \ln x)\exp(x \ln x) = (1 + \ln x)x^x$. Cette technique de calcul est obligatoire dès que l'on veut dériver des expressions de la forme $x \mapsto f(x)^{g(x)}$.

La dérivée de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ n'est égale à $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ que lorsque $\alpha$ est une constante réelle.

**14** La fonction $f$ définie par $f(x) = x^2$ pour $x \leqslant 0$ et $f(x) = \sin x$ pour $x \geqslant 0$ est

☒ **a.** seulement continue sur $\mathbf{R}$
❒ **b.** de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$
❒ **c.** de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$
❒ **d.** de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$

La fonction est continue en 0 car continue à droite et à gauche. En revanche, la dérivée à droite en 0 vaut 1, et la dérivée à gauche 0 : elle n'est donc pas dérivable en 0 mais présente un point anguleux :




**15** Pour $k \leqslant n$ la dérivée $k$-ième de $x \mapsto x^n$ est

☒ **a.** $x \mapsto \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k}$ ❒ **b.** $x \mapsto \dbinom{n}{k}\, x^{n-k}$

❒ **c.** $x \mapsto k!\, x^{n-k}$ ❒ **d.** $x \mapsto (n-k)!\, x^{n-k}$

En effet, la dérivée première de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto nx^{n-1}$, la dérivée seconde est $x \mapsto n(n-1)x^{n-2}$, et par une récurrence immédiate la dérivée $k$-ième est

$$x \mapsto n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k}.$$

**16** Laquelle des fonctions suivantes vérifie : $\forall x \in \mathbf{R}_+,\ f(x)f'(x) = 1$ ?

❒ **a.** $x \mapsto e^{-x}$ ❒ **b.** $x \mapsto \ln(\ln x)$

☒ **c.** $x \mapsto \sqrt{2x}$ ❒ **d.** $x \mapsto \tan x$

La fonction $x \mapsto f(x)f'(x)$ est la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{2}f^2(x)$. Les fonctions qui vérifient $ff' = 1$ sont exactement celles telles que $x \mapsto f^2(x) - 2x$ soit constante sur $\mathbf{R}_+$ (car de dérivée nulle sur un intervalle). Ce sont les fonctions du type $x \mapsto \sqrt{2x + C}$, qui sont définies sur $\mathbf{R}_+$ lorsque $C$ est une constante $\geqslant 0$. Les réponses **b.** et **d.** pouvaient être exclues car les fonctions ne sont pas définies sur $\mathbf{R}_+$.

**17** Soit $f : x \mapsto (1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)$. La valeur de $f'(0)$ est

❒ **a.** $1$ ❒ **b.** $n+1$ ☒ **c.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ❒ **d.** $n!$

On a $\ln f(x) = \ln(1+x) + \cdots + \ln(1+nx)$ pour tout $x > -\dfrac{1}{n}$. Donc, en dérivant cette égalité, on obtient

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+2x} + \cdots + \frac{n}{1+nx}.$$

En prenant la valeur en 0, il vient $f'(0) = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Cette technique, appelée dérivée logarithmique, est très utile dans le cas du calcul de la dérivée d'un produit de plusieurs fonctions. Toutefois, attention à vérifier que les fonctions sont bien strictement positives avant de passer au logarithme.

Si vous avez répondu **d.**, vous avez confondu la dérivée d'un produit de plusieurs fonctions avec le produit des dérivées !

**18** La fonction $f : x \mapsto 2 + x^5$ est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. Sa bijection réciproque

❒ **a.** n'est pas dérivable en 0 ☒ **b.** n'est pas dérivable en 2

❒ **c.** n'est pas dérivable en $\sqrt[5]{-2}$ ❒ **d.** est dérivable en tout point

En effet, on a $f'(x) = 5x^4$ pour tout $x$ et $f'$ s'annule en 0, de sorte que $f^{-1}$ n'est pas dérivable en $f(0) = 2$.

**19** Quelle est la dérivée en 0 de la fonction $f : x \mapsto \tan(1 + \sin(\tan x^2))$ ?

☒ **a.** 0 ❒ **b.** $\tan 1$ ❒ **c.** $\frac{\pi}{4}$ ❒ **d.** $1 + \tan^2 1$

La fonction $f$ est dérivable par les théorèmes d'opération du cours. Elle s'écrit $f(x) = g(x^2)$ avec $g$ dérivable. Ainsi $f'(x) = 2xg'(x^2)$ s'annule en 0. Plus généralement une fonction dérivable paire a toujours une dérivée nulle en 0.

L'idée générale de ce qui peut apparaître à tort ici comme une astuce de calcul réside dans le fait qu'il n'est pas nécessaire de calculer la dérivée pour tout $x$, alors que l'on a besoin uniquement de la dérivée en un point.

**20** Soit $n \geqslant 2$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2}$. Si on dérive $n$ fois l'égalité $(1 + x^2)f(x) = 1$ on obtient la relation

❒ **a.** $(1 + x^2)f^{(n)}(x) = 0$

❒ **b.** $(1 + x^2)f^{(n)}(x) + 2xf^{(n-1)}(x) + 2f^{(n-2)}(x) = 0$

❒ **c.** $(1 + x^2)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + \dfrac{n(n-1)}{2}f^{(n-2)}(x) = 0$

☒ **d.** $(1 + x^2)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$

C'est une application de la formule de Leibniz qui permet de dériver $n$ fois un produit de deux fonctions.

N'oubliez pas les coefficients binomiaux dans la formule de Leibniz.

**21** Soit $f$ dérivable sur $\mathbf{R}$ et tendant vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$. On définit $g$ sur $[-1, 1]$ par $g(-1) = g(1) = 0$ et $g(x) = f\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$ pour $x \in ]-1, 1[$. Alors

❒ **a.** $g$ est continue sur $]-1, 1[$ et dérivable sur $]-1, 1[$

☒ **b.** $g$ est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$

❒ **c.** $g$ est continue sur $]-1, 1[$ et dérivable sur $[-1, 1]$

❒ **d.** $g$ est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $[-1, 1]$

Comme composée de fonctions continues et dérivables, $g$ est continue et dérivable sur $]-1,1[$. Rien ne permet d'affirmer que $g$ est dérivable aux bornes de cet intervalle, mais par contre $g$ y est continue, puisque par composition de limites $g(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 1 (ou vers $-1$). N'oublions pas que $g$ est forcément continue sur un intervalle sur lequel elle est dérivable.

**22** Soit $f, g$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ qui admettent la même tangente en 0. Alors on peut affirmer que $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$ pour

❒ **a.** $k = 0$ ☒ **b.** $k$ dans $\{0, 1\}$

❒ **c.** $k$ dans $\{0, 1, 2\}$ ❒ **d.** tout entier $k$

Les points $(0, f(0))$ et $(0, g(0))$ étant sur la tangente on a nécessairement $f(0) = g(0)$. La pente de la tangente étant donnée par la dérivée on a aussi $f'(0) = g'(0)$. Mais c'est tout ce que l'on peut dire : les dérivées suivantes ne coïncident pas forcément.

On peut prendre par exemple $f(x) = e^x$ et $g(x) = 1+x$ pour le constater : ces deux fonctions ont même tangente $y = 1 + x$ mais $f''(0) = 1 \neq g''(0) = 0$.

**23** La fonction $f : x \mapsto x + \ln x$ est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$. On note $g$ sa bijection réciproque qui est dérivable sur $\mathbf{R}$. Alors on a pour tout $x \in \mathbf{R}$,

☒ **a.** $g'(x) = \dfrac{g(x)}{g(x)+1}$ ❒ **b.** $g'(x) = \dfrac{g(x)+1}{g(x)}$

❒ **c.** $g'(x) = \ln g(x)$ ❒ **d.** $g'(x) = 1 + e^x$

On a par définition $g(x) + \ln g(x) = x$ pour tout réel $x$. En dérivant cette égalité de fonctions, on obtient $g'(x) + \dfrac{g'(x)}{g(x)} = 1$, ce qui revient à $g'(x) = \dfrac{g(x)}{g(x)+1}$.

## 16 Variations des fonctions, accroissements finis

**1** Si $f$ est une fonction réelle dérivable avec $f'(0) = 0$ alors

❒ **a.** $f$ admet un minimum local en 0

❒ **b.** $f$ admet un maximum local en 0

❒ **c.** $f$ est paire

☒ **d.** on ne peut rien dire

Effectivement, la seule chose qu'on peut dire c'est que $f$ admet en 0 une tangente horizontale. Par exemple $f : x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0 mais n'admet pas d'extremum local en 0 puisqu'elle est positive à droite de 0 et négative à gauche. Une fonction dérivable paire a forcément une dérivée nulle en 0 mais la réciproque est fausse comme le montre d'ailleurs l'exemple précédent.

**2** Pour tous $x, y$ réels on peut majorer $|\sin x - \sin y|$ par

☒ **a.** $|x - y|$ ❐ **b.** $\frac{1}{2}|x - y|$ ❐ **c.** $x|x - y|$ ❐ **d.** $1$

La dérivée de $x \mapsto \sin x$ est $x \mapsto \cos x$ qui est une fonction bornée par 1. L'inégalité des accroissements finis montre que $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$ pour tous $x, y$, autrement dit que la fonction sinus est 1-lipschitizienne.

La constante 1 est la meilleure possible car en prenant $y = 0$, le rapport $\frac{|\sin x|}{|x|}$ tend vers 1 quand $x$ tend vers 0. En particulier la réponse **b.** n'est pas bonne. La réponse **c.** est grossièrement fausse pour $x = 0$ lorsque $\sin y$ n'est pas nul. Enfin en ce qui concerne **d.** on notera que l'écart $|\sin x - \sin y|$ peut valoir jusqu'à 2.

**3** Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ et vérifiant $f'(x) = g'(2x)$ pour tout $x$, quelle fonction est constante ?

❐ **a.** $x \mapsto f(x) - g(2x)$ ☒ **b.** $x \mapsto 2f(x) - g(2x)$

❐ **c.** $x \mapsto f(x) - 2g(2x)$ ❐ **d.** $x \mapsto f(x) - 2g(x)$

La dérivée de la fonction $x \mapsto 2f(x) - g(2x)$ est $x \mapsto 2f'(x) - 2g'(2x) = 0$. Cette fonction est donc constante sur $\mathbf{R}$. Attention simplement à ne pas oublier le 2 dans la dérivée de la composée $x \mapsto g(2x)$.

**4** Quel est le plus grand intervalle sur lequel la fonction $f(x) = x + \sin x$ est croissante ?

☒ **a.** $\mathbf{R}$ ❐ **b.** $[-\pi, \pi]$ ❐ **c.** $]-\pi, \pi[$ ❐ **d.** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

On a $f'(x) = 1 + \cos x$ pour tout $x$ et $f'$ est donc positive sur $\mathbf{R}$. Alors $f$ est croissante sur $\mathbf{R}$.

**5** Quel est le plus grand intervalle sur lequel la fonction $f(x) = x + \sin x$ est strictement croissante ?

☒ **a.** $\mathbf{R}$ ❐ **b.** $[-\pi, \pi]$ ❐ **c.** $]-\pi, \pi[$ ❐ **d.** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

On a $f'(x) = 1 + \cos x$ qui est positive sur $\mathbf{R}$. Donc $f$ est croissante sur $\mathbf{R}$. Comme de plus $f'$ ne s'annule qu'en des points isolés $f$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. On retiendra qu'il est suffisant mais pas nécessaire que $f'$ soit strictement positive pour que $f$ soit strictement croissante.

**6** La dérivée sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto x^{1/x}$ est

❐ **a.** $x \mapsto x^{-2+1/x}$ ❐ **b.** $x \mapsto \frac{1 + \ln x}{x^2}\, x^{1/x}$

☒ **c.** $x \mapsto \frac{1 - \ln x}{x^2}\, x^{1/x}$ ❐ **d.** $x \mapsto -\frac{1}{x^2}\, x^{1/x}$

Pour étudier des fonctions de la forme $a(x)^{b(x)}$ il est fortement conseillé de toujours revenir à la forme exponentielle. Une erreur (qui donne la réponse **a.**) serait d'appliquer la formule donnant la dérivée de $x^\alpha$ qui n'est valable que lorsque $\alpha$ est une constante (et pas lorsque $\alpha$ est une fonction de $x$).

Ici on a $f(x) = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$. On applique alors la formule de dérivation d'une composée : $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}\, x^{1/x}$ puisque la dérivée de $\frac{\ln x}{x}$ est $\frac{1 - \ln x}{x^2}$.

**7** Si $f$ est dérivable, la dérivée de arctan $f$ est

❒ **a.** $\arctan f'$ ❒ **b.** $\frac{1}{1+f^2}$

☒ **c.** $\frac{f'}{1+f^2}$ ❒ **d.** $f'(1 + \arctan f^2)$

Il s'agit de dériver une fonction composée. La dérivée de $x \mapsto \arctan x$ étant $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, le bon résultat est $\frac{f'}{1+f^2}$.

**8** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable sur $\mathbf{R}$. On suppose que $f'$ ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$. Alors

❒ **a.** $f$ ne s'annule pas non plus ❒ **b.** $f$ s'annule exactement une fois

❒ **c.** $f$ s'annule au moins une fois ☒ **d.** $f$ s'annule au plus une fois

Si $f$ s'annule en deux points $a$ et $b$ avec $a < b$, le théorème de Rolle donne l'existence d'un zéro de $f'$ entre $a$ et $b$. Ainsi, $f$ s'annule au plus une fois. Elle peut ne pas s'annuler du tout comme par exemple dans le cas de la fonction exponentielle ou s'annuler une fois comme dans le cas de la fonction $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$.

À titre culturel indiquons que l'hypothèse que $f'$ ne s'annule pas permet de dire que $f'$ garde un signe constant sur $\mathbf{R}$ même si $f$ n'est pas supposée de classe $\mathscr{C}^1$. Il s'agit d'un théorème de Darboux (l'image d'un intervalle par une fonction dérivée est toujours un intervalle). Ainsi la fonction $f$ est nécessairement strictement monotone sur $\mathbf{R}$ ce qui donne un autre éclairage du résultat.

**9** Si $f$ est une fonction dérivable et si $f'$ est paire alors $f$ est

❒ **a.** paire ❒ **b.** impaire

❒ **c.** sans parité ☒ **d.** impaire ou sans parité

On a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) - f'(-x) = 0$. Cela signifie que la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x) + f(-x)$ est nulle. Il existe donc une constante $c \in \mathbf{R}$ telle que $f(-x) = -f(x) + c$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. La fonction $f$ n'est impaire que si on a $c = 0$ ; cela n'est pas forcément le cas. Par exemple la fonction $f : x \mapsto x + 1$, qui est sans parité, a pour dérivée $f' : x \mapsto 1$ qui est paire. En revanche $g : x \mapsto x$ a la même dérivée que $f$ et elle est impaire. D'une manière générale, la primitive de $f'$ qui est nulle en 0 est la seule à être impaire.

**10** Si $f$ est une fonction dérivable et si $f'$ est impaire alors $f$ est

☒ **a.** paire ❒ **b.** impaire

❒ **c.** sans parité ❒ **d.** impaire ou sans parité

La fonction $x \mapsto f(x) - f(-x)$ a une dérivée nulle par hypothèse. Elle est donc constante sur $\mathbf{R}$. Comme elle s'annule en 0 elle est nulle sur $\mathbf{R}$ et $f$ est donc paire.

**11** Soit $a < b$ deux réels strictement positifs. Le taux d'accroissement $\dfrac{b^{3/2} - a^{3/2}}{b - a}$ est compris entre

❒ **a.** $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ ❒ **b.** 0 et $\sqrt{a}$

❒ **c.** 0 et $\sqrt{b}$ ☒ **d.** $\dfrac{3}{2}\sqrt{a}$ et $\dfrac{3}{2}\sqrt{b}$

En effet, considérons la fonction $f : x \mapsto x^{3/2}$. Elle est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et on a pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$. Sur l'intervalle $[a, b]$, $f'(x)$ est compris entre $\dfrac{3}{2}\sqrt{a}$ et $\dfrac{3}{2}\sqrt{b}$. Le théorème des accroissements finis permet de conclure.

**12** Que vaut $\sup\limits_{x\in[0,2]} (1 - x^2)^2$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** 2 ☒ **d.** 9

La fonction $f : x \mapsto (1 - x^2)^2$ est décroissante sur $[0, 1]$ (car c'est le carré d'une fonction positive décroissante) avec $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ et croissante sur $[1, 2]$ (car c'est le carré d'une fonction négative décroissante) avec $f(2) = 3$. Le maximum de $f$ est donc $f(2) = 3^2 = 9$. On observera que $f'(2)$ n'est pas nul, ce qui est possible car 2 est au bord de l'intervalle d'étude. Le minimum de $f$ est 0 et il est atteint en 1.

**13** Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. On suppose que $f$ s'annule $n$ fois dans l'intervalle $I$ et que $f'$ s'annule $p$ fois. Alors on a forcément

☒ **a.** $p \geqslant n - 1$ ❒ **b.** $p \geqslant n$ ❒ **c.** $p = n$ ❒ **d.** $p \leqslant n - 1$

Le théorème de Rolle donne l'existence d'un zéro de $f'$ entre deux zéros consécutifs de $f$. Ainsi, $f'$ s'annule au moins $n - 1$ fois dans $I$. Il se peut que $f'$ s'annule exactement $n - 1$ fois. On peut prendre par exemple l'intervalle $[0, \pi]$ et $f(x) = \sin x$. On a alors $n = 2$ et $p = 1$. Mais il se peut aussi que $p > n - 1$ comme c'est le cas avec $f : x \mapsto x^2$ sur $I = \mathbf{R}$ (on a dans ce cas $n = 1$ et $p = 1$).

**14** Soit $f$ dérivable sur $\mathbf{R}$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $f'$ ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$ ?

❐ **a.** $f$ est strictement monotone ❐ **b.** $f$ n'a pas d'extremum local

❐ **c.** $f$ est injective ☒ **d.** $x \mapsto f(x) - x$ est croissante

Si $f(x) - x$ est croissante, sa dérivée $f' - 1$ est positive ou nulle. On a donc $f' \geqslant 1$ et $f'$ ne s'annule pas. Les assertions **a. b.** et **c.** ne sont pas suffisantes comme le montre la fonction $f : x \mapsto x^3$.

**15** Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ dérivable sur $\mathbf{R}_+$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $f(x+1) - f(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ?

☒ **a.** $f'(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$

❐ **b.** $f'$ est strictement positive

❐ **c.** $f'(x+1) - f'(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$

❐ **d.** $f'$ est 1-périodique

Pour tout réel $x$ la formule des accroissements finis affirme l'existence d'un point $c$ dans l'intervalle $]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(c)$. Si $f'$ tend vers 0 quand $x$ tend vers l'infini, il en est donc de même de $f(x+1) - f(x)$.

La condition $f' > 0$ permet de dire que $f$ est strictement croissante mais ne donne pas le comportement de $f(x+1) - f(x)$. On pourra regarder l'exemple de $f(x) = x$ ou $f(x) = x^2$. Le fait que $f'(x+1) - f'(x)$ tend vers 0 ne suffit pas, comme le montre l'exemple de $f(x) = x$. Enfin, l'hypothèse « $f'$ 1-périodique » n'est pas non plus suffisante : dans ce cas la fonction $f(x+1) - f(x)$ a une dérivée nulle donc est constante, mais elle n'est pas forcément nulle (prendre par exemple $f(x) = x + \sin(2\pi x)$.

**16** Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $K$-lipschitzienne sur $[0,1]$, alors $A = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$ vérifie

❐ **a.** $A = K$ ☒ **b.** $A \leqslant K$ ❐ **c.** $A \geqslant K$ ❐ **d.** $A = \dfrac{1}{K}$

Tous les taux d'accroissements $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ sont bornés par $K$. En faisant tendre $h$ vers 0 on en déduit donc par passage des inégalités larges à la limite que $|f'(x)| \leqslant K$ et cela pour tout $x$. Donc $A \leqslant K$ mais il n'y a pas forcément égalité (prendre $f$ nulle et $K = 1$).

**17** Que vaut $\sup_{x\in\mathbf{R}} \dfrac{2x}{1+x^2}$ ?

❐ **a.** 0 ☒ **b.** 1 ❐ **c.** 2 ❐ **d.** $+\infty$

La dérivée de $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ est $f' : x \mapsto \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. Ainsi $f$ est décroissante sur $]-\infty, -1]$, puis croissante sur $[-1, 1]$, enfin décroissante sur $[1, +\infty[$. L'étude de ces variations montre que $f$ atteint un maximum absolu en 1 avec $f(1) = 1$.

**18** Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $f$ admet un maximum local en 0 ?

❒ **a.** $f'(0) = 0$ ❒ **b.** $f'(x) = x + o(x)$

☒ **c.** $f'(x) = -x + o(x)$ ❒ **d.** $f'(x) = -x^2 + o(x^2)$

Si $f'(x) = -x+o(x)$ le théorème de localisation assure que $f'(x)$ a le même signe que $-x$ sur un voisinage $[-a, a]$ de 0 (avec $a > 0$). Alors $f$ est croissante sur $[-a, 0]$ et décroissante sur $[a, 0]$ : elle admet donc un maximum local en 0. On montre de même qu'avec l'hypothèse **b.** $f$ admet un minimum local en 0. Rappelons toutefois que la condition **a.** $f'(0) = 0$ ne suffit pas pour avoir un extremum local en 0, comme le montre l'exemple de la fonction $f(x) = x^3$.

## 17 Développements limités

**1** Si $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, alors $f^2(x)$ admet comme développement limité :

❒ **a.** $1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$ ☒ **b.** $1 + 2x + 3x^2 + o(x^2)$

❒ **c.** $1 + 2x + 4x^2 + o(x^2)$ ❒ **d.** $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 + o(x^4)$

Le moyen le plus fiable pour calculer un développement limité, consiste à commencer par le terme constant, puis le terme en $x$, puis le terme en $x^2$, etc.

La réponse **d.** ne convient pas, car dans un produit de développements limités du type $(1 + u)(1 + v)$, la précision ne peut pas augmenter.

**2** Si $f$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ telle que $f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + o(x^3)$ alors la valeur de $f^{(3)}(0)$ est

❒ **a.** 1/2 ❒ **b.** 3 ❒ **c.** 9 ☒ **d.** 18

En effet, d'après la formule de Taylor-Young, le coefficient de $x^3$ dans le développement limité est $\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}$. On a donc ici $f^{(3)}(0) = 3 \times 3! = 18$.

**3** En 0 la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{1 + x} - 1$ est équivalente à

☒ **a.** $\dfrac{x}{3}$ ❒ **b.** $\sqrt[3]{x}$ ❒ **c.** $x$ ❒ **d.** $3x$

Pour déterminer un équivalent, on prend le premier terme non nul du développement limité. Ici, il suffit de calculer le développement limité à l'ordre 1 :

$$\sqrt[3]{1 + x} - 1 = (1 + x)^{1/3} - 1 = \frac{x}{3} + o(x).$$

**4** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Le polynôme de Taylor de $f$ d'ordre 2 en 1 est

❒ **a.** $f(1) + xf'(1) + \dfrac{x^2}{2}f''(1)$

❒ **b.** $(x-1)\big(f(1) + xf'(1) + \dfrac{x^2}{2}f''(1)\big)$

☒ **c.** $f(1) + (x-1)f'(1) + \dfrac{(x-1)^2}{2}f''(1)$

❒ **d.** $f(x) + (x-1)f'(x) + \dfrac{(x-1)^2}{2}f''(x)$

Il est conseillé de faire le changement de variable $x = 1 + h$ (soit $h = x - 1$) pour se ramener en zéro. Le polynôme de Taylor est alors plus facile à écrire : c'est $f(1) + hf'(1) + \dfrac{h^2}{2}f''(1)$. La proposition **d.** ne convient pas : la fonction

$$x \longmapsto f(x) + (x-1)f'(x) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(x)$$

n'est en général pas polynomiale.

**5** Si en 0 on a $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 2x + o(x)$ alors $f + g$ admet pour développement limité

❒ **a.** $1 + 3x + o(x^2)$

☒ **b.** $1 + 3x + o(x)$

❒ **c.** $1 + 3x + o(x) + o(x^2)$

❒ **d.** $1 + 3x + o(x^{3/2})$

Les termes $x^2$ et $o(x^2)$ sont négligeables devant $x$. On a donc

$$(f+g)(x) = 1 + 3x + o(x).$$

La réponse **c.** est formellement correcte mais dans un développement limité on ne fait figurer qu'un seul reste et le terme $o(x) + o(x^2)$ est simplement un $o(x)$. De façon générale, pour calculer une somme de développements limités, on doit d'abord les tronquer à la plus faible précision, c'est-à-dire au terme $o(x^k)$ de plus petit exposant.

**6** Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1+x)^{3/2}$ est

❒ **a.** $1 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{15}{8}x^2 + o(x^2)$

☒ **b.** $1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + o(x^2)$

❒ **c.** $1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{4}x^2 + o(x^2)$

❒ **d.** $1 + \dfrac{3}{2}x + o(x^2)$

Rappelons plus généralement le développement limité à l'ordre 2 de $(1+x)^\alpha$ :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2).$$

**7** Laquelle des fonctions suivantes n'admet pas de développement limité d'ordre $n \geqslant 1$ en 1 ?

❒ **a.** $x \mapsto \sqrt{x}$ ❒ **b.** $x \mapsto \ln x$

❒ **c.** $x \mapsto \sin x$ ☒ **d.** $x \mapsto \arcsin x$

En effet, $x \mapsto \arcsin x$ n'est pas dérivable en 1 (son graphe admet une tangente verticale). Elle n'admet donc pas de développement limité à l'ordre 1 ni *a fortiori* à un ordre supérieur.

En revanche, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ (ainsi que les deux autres) est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 1 et admet donc par la formule de Taylor-Young un DL à tout ordre, que l'on écrit plus facilement en posant $x = 1 + h$. C'est en zéro que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'admet pas de DL.

**8** Lequel des développements limités suivants montre que la fonction $f$ est, au voisinage de 0, au-dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = 1 - x$ ?

❒ **a.** $f(x) = 1 - x + x^3 + o(x^3)$ ☒ **b.** $f(x) = 1 - x + x^2 + o(x^2)$

❒ **c.** $f(x) = 1 - x + o(x)$ ❒ **d.** $f(x) = 1 - x - x^4 + o(x^4)$

En effet, on a alors $f(x) - (1 - x) \sim x^2$ et $f(x) - (1 - x)$ est donc positif au voisinage de 0.

Dans le cas où $f(x) = 1 - x + x^3 + o(x^3)$, $f$ est au-dessus de sa tangente en $0^+$ et en-dessous en $0^-$. Si $f(x) = 1 - x + o(x)$, alors le DL n'est pas assez précis et on ne peut rien dire de la position de $f$ par rapport à sa tangente. Enfin, lorsque $f(x) = 1 - x - x^4 + o(x^4)$, $f$ est en-dessous de sa tangente au voisinage de 0.

**9** Parmi les $2n + 1$ coefficients du développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de $\sqrt{1 + x}$, combien sont positifs ?

❒ **a.** un seul ❒ **b.** $n$ ☒ **c.** $n + 1$ ❒ **d.** tous

Le coefficient du terme en $x^k$ est $\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2} - 1\right)\dots\left(\dfrac{1}{2} - (k-1)\right)$. Dans ce produit, tous les termes sauf le premier sont négatifs. Si $k \geqslant 1$, leur produit est donc du signe de $(-1)^{k-1}$, donc positif lorsque $k$ est impair. Il y a $n$ entiers impairs entre 1 et $2n$, et le premier terme (constant) est lui aussi positif.

**10** Laquelle des fonctions suivantes n'est pas majorée par $x^2$ au voisinage de 0 ?

❒ **a.** $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ ❒ **b.** $x \mapsto \sqrt{1 + x^2} - 1$

☒ **c.** $x \mapsto 1 - \cos 2x$ ❒ **d.** $x \mapsto (\sin x)^2$

En effet, on a $1 - \cos 2x = 2x^2 + o(x^2)$, donc $1 - \cos 2x - x^2 = x^2 + o(x^2)$ est strictement positive sur un voisinage de 0.

Étudions rapidement les autres cas proposés :

- $\ln(1 + x^2) - x^2 = -\dfrac{x^4}{2} + o(x^4)$,

- $\sqrt{1+x^2} - 1 - x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$,
- $\sin^2(x) - x^2 = -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$,

donc ces écarts sont tous localement négatifs sur un voisinage de 0.

> De façon générale, notez qu'un développement limité ne donne qu'une information locale (ici en 0) : les trois fonctions vont être majorées par $x^2$ sur un voisinage de 0 mais ce voisinage est *a priori* inconnu. Il ne faut donc pas utiliser un développement limité si vous devez démontrer une inégalité globale (par exemple du genre $\sin x \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$).

**11** La limite en 0 de $\dfrac{\tan x - x}{\sin x - x}$ vaut

☒ **a.** $-2$ ❒ **b.** $0$ ❒ **c.** $1$ ❒ **d.** $+\infty$

On a $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Par suite

$$\frac{\tan x - x}{\sin x - x} = \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -2 + o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -2\,.$$

**12** Au voisinage de 0, la fonction $f(x) = \cos(x) - 1 + ax^2$ est

☒ **a.** positive pour $a \geqslant \frac{1}{2}$, négative pour $a < \frac{1}{2}$

❒ **b.** positive pour $a > \frac{1}{2}$, nulle pour $a = \frac{1}{2}$, négative pour $a < \frac{1}{2}$

❒ **c.** positive pour $a > \frac{1}{2}$, négative pour $a \leqslant \frac{1}{2}$

❒ **d.** positive pour $a \geqslant -\frac{1}{2}$, négative pour $a < -\frac{1}{2}$

Calculons un développement limité de la fonction : on obtient

$$f(x) = \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Or la fonction est équivalente au premier terme non nul du développement.

- Si $a > \frac{1}{2}$, $f(x) \sim \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2$ et est donc localement positive.
- Si $a = \frac{1}{2}$, alors $f(x) \sim \frac{x^4}{24}$ et est donc localement positive.
- Si $a < \frac{1}{2}$, $f(x) \sim \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2$ et est donc localement négative.

Lorsque $a$ est différent de $\frac{1}{2}$, il suffit d'écrire le DL à l'ordre 2 pour conclure. Mais pour $a = \frac{1}{2}$, il faut pousser le développement limité à l'ordre 4 ; le fait que $f(x) = o(x^2)$ ne signifie pas que $f$ est nulle au voisinage de 0.

**13** Considérons la fonction polynomiale $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Au voisinage de zéro, on a $P(x) = o(x^2)$ si et seulement si

❒ **a.** $a = b = 0$ ☒ **b.** $a = b = c = 0$

❒ **c.** $a = b = c = d = 0$ ❒ **d.** $c = d = 0$

Le développement limité à l'ordre 2 de $P(x)$ est $a + bx + cx^2 + o(x^2)$. Par unicité du développement limité, $P(x) = o(x^2)$ si et seulement si $a$, $b$, et $c$ sont nuls.

**14** Lequel des développements limités suivants montre que la fonction $f$ admet en 0 un point d'inflexion ?

❒ **a.** $f(x) = x + x^2 + o(x^2)$ ❒ **b.** $f(x) = x + o(x)$

☒ **c.** $f(x) = x - x^3 + o(x^3)$ ❒ **d.** $f(x) = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$

Dans chacun des cas proposés, $f$ admet en 0 la droite $y = x$ pour tangente. On parle de point d'inflexion lorsque la courbe « traverse » la tangente. Il faut donc que le signe de $f(x) - x$ change au passage de 0. C'est ici le cas lorsque $f(x) - x = -x^3 + o(x^3)$ : la fonction $f$ est en-dessous de sa tangente en $0^+$ et au-dessus en $0^-$.

Dans le cas où $f(x) = x + x^2 + o(x^2)$, $f$ est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0. Si $f(x) = x + o(x)$ alors le DL n'est pas assez précis et on ne peut rien dire de la position de $f$ par rapport à sa tangente. Enfin, lorsque $f(x) = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$, $f$ est en-dessous de sa tangente au voisinage de 0 (et le terme en $x^3$ ne change rien).

**15** Pour obtenir un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{x^2 \cos x}{\sin x}$ on a besoin

☒ **a.** du DL de cosinus à l'ordre 4 et du DL de sinus à l'ordre 5

❒ **b.** du DL de cosinus à l'ordre 5 et du DL de sinus à l'ordre 5

❒ **c.** du DL de cosinus à l'ordre 3 et du DL de sinus à l'ordre 4

❒ **d.** du DL de cosinus à l'ordre 3 et du DL de sinus à l'ordre 5

Posons $\cos x = 1 + u$ et $\sin x = x(1 + v)$. On a alors $f(x) = x\dfrac{1+u}{1+v}$. Il nous faut donc un DL de $u$ et $v$ à l'ordre 4, c'est-à-dire le DL de cosinus à l'ordre 4 et le DL de sinus à l'ordre 5. C'est toujours une bonne idée dans un calcul de développement limité de prévoir à l'avance à quelle précision chaque terme doit être calculé. Pour cela pensez à toujours mettre en facteur la partie principale lorsque le DL ne commence pas par un coefficient constant.

## 18 Fonctions convexes

**1** Sur lequel des intervalles suivants la fonction sinus est-elle convexe ?

❒ **a.** $[0, \frac{\pi}{2}]$ ☒ **b.** $[\pi, 2\pi]$ ❒ **c.** $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ ❒ **d.** $]0, \pi[$

Lorsque $f$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, $f$ est convexe sur $I$ si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur $I$. Ici, la dérivée seconde de $x \mapsto \sin x$ est $x \mapsto -\sin x$, qui est positive sur $[\pi, 2\pi]$, mais pas sur les autres intervalles proposés.

Toutefois, sur les autres intervalles proposés, il se trouve que la dérivée seconde est négative. On peut alors dire que $x \mapsto \sin x$ est concave sur ces intervalles.

**2** Si $f$ est convexe et dérivable sur $\mathbf{R}$, alors pour tout réel $x$ on a :

☒ **a.** $f(x) \geqslant f(1) + (x-1)f'(1)$ ❒ **b.** $f(x) \leqslant f(1) + (x-1)f'(1)$

❒ **c.** $f(x) \geqslant f(1) + (x-1)f'(x)$ ❒ **d.** $f(x) = f(1) + (x-1)f'(1)$

Une fonction convexe est toujours au-dessus de ses tangentes. Ici, on s'intéresse à la tangente en 1 de $f$ qui a pour équation $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

La réponse **d.** ne convient pas car $f$ n'est pas forcément confondue avec sa tangente (ce n'est le cas que si $f$ est affine).

**3** Pour quelles valeurs du réel $a$ la fonction $x \mapsto x^a$ est-elle convexe sur $\mathbf{R}_+^*$ ?

❒ **a.** pour $a$ dans $]0, 1[$ ☒ **b.** pour $a$ en dehors de $]0, 1[$

❒ **c.** pour $a$ positif ou nul ❒ **d.** pour $a$ rationnel

La dérivée seconde de la fonction est $a(a-1)x^{a-2}$. Elle est positive sur $\mathbf{R}_+^*$ lorsque $a$ est en dehors de $]0, 1[$.

**4** Si $f$ est convexe sur $\mathbf{R}$, laquelle des fonctions suivantes est forcément croissante sur $]0, +\infty[$ ?

❒ **a.** $x \mapsto f(x)$ ❒ **b.** $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$

☒ **c.** $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ ❒ **d.** $x \mapsto f''(x)$

Il s'agit du taux d'accroissement entre 0 et $x$ ; c'est une fonction croissante de $x$. Les autres réponses ne conviennent pas : une fonction convexe sur $\mathbf{R}$ n'est pas forcément croissante comme le montre l'exemple de $x \mapsto e^{-x}$. Lorsque $f(x) = 1$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas une fonction croissante. Enfin, la dérivée seconde d'une fonction convexe n'est que positive : c'est la dérivée première qui est croissante.

**5** Pour $a, b$ positifs, on a par concavité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ :

❒ **a.** $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$ ☒ **b.** $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqslant \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$

❒ **c.** $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{2}}$ ❒ **d.** $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqslant \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{2}}$

C'est l'inégalité de concavité (la même que l'inégalité de convexité mais dans l'autre sens) appliquée avec la moyenne de $a$ et $b$ : la racine de la moyenne est supérieure à la moyenne des racines.

La concavité de $g : x \mapsto \sqrt{x}$ se justifie par exemple par le fait que sa dérivée sur $]0, +\infty[$ (qui vaut $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$) est décroissante.

**6** La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbf{R}$. On peut donc écrire pour tout $t$ dans $[0, 1]$,

❒ **a.** $\exp t \leqslant t + (1-t)e$ ❒ **b.** $\exp t \geqslant t + (1-t)e$

☒ **c.** $\exp t \leqslant (1-t) + te$ ❒ **d.** $\exp t \geqslant (1-t) + te$

On écrit l'inégalité de convexité entre 0 et 1 : comme $t = t.1 + (1-t).0$, on obtient

$$\exp t \leqslant (1-t)\exp 0 + t \exp 1 = (1-t) + te.$$

La convexité de l'exponentielle se justifie par exemple par le fait que sa dérivée seconde (qui vaut aussi exp) est positive.

**7** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. L'ensemble $E$ des points où $f$ admet un minimum absolu ne peut pas être

❒ **a.** vide ❒ **b.** un singleton

☒ **c.** un ensemble à deux éléments ❒ **d.** infini

Si l'ensemble $E$ contient deux points $a < b$, alors par convexité, si $x \in [a, b]$ on a $f(x) \leqslant f(a)$, mais par minimalité $f(x) \geqslant f(a)$. On en déduit alors $f(x) = f(a)$ et donc $x \in E$. Ainsi $E$ contient tout l'intervalle $[a, b]$ donc est infini. Il est donc impossible que $E$ soit exactement de cardinal 2.

En revanche, $E$ peut être vide, par exemple pour l'exponentielle ; $E$ peut être un singleton, par exemple pour $f : x \mapsto x^2$ ; et $E$ peut être infini, par exemple pour une fonction constante.

**8** L'ensemble des points où une fonction convexe de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est négative ne peut pas être

❒ **a.** vide ❒ **b.** un singleton

☒ **c.** un ensemble à deux éléments ❒ **d.** $\mathbf{R}$

En effet, si $f$ est négative en $a$ et en $b$, elle est négative sur tout le segment $[a, b]$ par l'inégalité de convexité. L'ensemble des points où f est négative est donc un intervalle.

Il peut toutefois être vide, par exemple pour l'exponentielle. Pour $f(x) = x^2$, c'est un singleton, et pour $f(x) = -1$ il est égal à $\mathbf{R}$. Toutefois le dernier cas ($f$ convexe négative sur tout $\mathbf{R}$) ne peut survenir que pour une fonction constante. C'est un bon exercice que de le démontrer.

## 19 Intégrales

**1** Soit $F(x) = \int_0^x f(\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$ où $f$ est une fonction continue. Alors $F'(x)$ est égal à

☒ **a.** $f(\sin^2 x)$ ❒ **b.** $2\cos x\ \sin x\, f(\sin^2 x)$

❒ **c.** $2\cos x\ \sin x\, f'(\sin^2 x)$ ❒ **d.** $\int_0^x 2\cos t\ \sin t\, f'(\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$

Posons $g(t) = f(\sin^2 t)$. Alors $g$ est une fonction continue, donc la fonction $F : x \mapsto \int_0^x g$ est dérivable de dérivée $F'(x) = g(x)$. On obtient donc ici $f(\sin^2 x)$.

**2** La suite $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\ \mathrm{d}x$ est

❒ **a.** croissante ❒ **b.** strictement croissante

❒ **c.** décroissante ☒ **d.** strictement décroissante

Pour tout $x$ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\sin x \in [0,1]$ et donc $\sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$. Cette inégalité est même stricte pour $x$ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a donc $I_{n+1} < I_n$ pour tout $n$ et la suite est strictement décroissante.

Pour prouver une inégalité entre intégrales, on procède généralement en intégrant une inégalité sur les intégrandes. Évitez de former la différence entre les deux intégrales pour étudier son signe ; c'est certes équivalent d'un point de vue logique, mais cela n'apporte strictement rien d'autre que des erreurs de calcul.

**3** En supposant les intégrales bien définies, que vaut $\sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ ?

❒ **a.** $\int_0^k f(t)\,\mathrm{d}t$ ❒ **b.** $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$

☒ **c.** $\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ ❒ **d.** $\int_{-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$

Ce résultat découle de la formule de Chasles. Pour éviter les erreurs dans les indices, on détaille la somme en

$$\int_0^1 + \int_1^2 + \cdots + \int_n^{n+1} = \int_0^{n+1}$$

Le résultat ne peut dépendre de $k$ qui est l'indice de sommation.

**4** Si on fait le changement de variable $u = at$ $(a > 0)$ dans l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ on obtient

❐ **a.** $\int_0^1 f\left(\frac{u}{a}\right)du$ ❐ **b.** $\int_0^a f\left(\frac{u}{a}\right)du$

❐ **c.** $a\int_0^1 f\left(\frac{u}{a}\right)du$ ☒ **d.** $\frac{1}{a}\int_0^a f\left(\frac{u}{a}\right)du$

On remplace $t$ par $\frac{u}{a}$, l'élément différentiel $dt$ par $\frac{du}{a}$ et les bornes de la nouvelle intégrale sont 0 et $a$.

**5** En intégrant $\int_0^1 xe^x\,dx$ par parties on trouve

❐ **a.** 0 ☒ **b.** 1 ❐ **c.** $e$ ❐ **d.** $2e - 1$

On a effectivement $\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = 1$ (attention au signe – devant la seconde intégrale).

Si vous avez répondu **a.**, notez que la fonction intégrée étant strictement positive sur $]0, 1]$ son intégrale ne peut pas être nulle.

**6** Soit $f \in \mathscr{C}^0([0, 2], \mathbf{R})$. Que vaut $\int_0^1 f - \int_0^2 f$ ?

☒ **a.** $-\int_1^2 f$ ❐ **b.** $-\int_2^1 f$ ❐ **c.** $-\int_0^1 f$ ❐ **d.** $\int_1^2 f$

On a, par la relation de Chasles, $\int_0^2 f - \int_0^1 f = \int_1^2 f$ et le résultat en découle en prenant l'opposé.

> De manière générale, il est absolument recommandé de toujours ordonner les bornes (si on peut le faire), donc d'utiliser la relation $\int_b^a f = -\int_a^b f$ afin de toujours mettre la borne la plus petite en bas. Cela évite bien des erreurs notamment lorsque l'on établit des inégalités entre intégrales.

**7** La suite $u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \cos\frac{k\pi}{n}$ converge vers

❐ **a.** $\int_0^1 x^2 \cos x\,dx$ ☒ **b.** $\int_0^1 x^2 \cos(\pi x)\,dx$

❐ **c.** $\int_0^\pi x^2 \cos x\,dx$ ❐ **d.** $\int_0^1 x^3 \cos(\pi x)\,dx$

Si on pose $f(x) = x^2 \cos(\pi x)$ on a $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. Comme $f$ est continue sur $[0, 1]$, le théorème sur les sommes de Riemann assure que $u_n$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Notons toutefois que $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cos x \ \mathrm{d}x$ est la limite de $\dfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \cos\dfrac{k}{n}$ ; que $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos x \ \mathrm{d}x$ est la limite de $\dfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\pi^2 \cos\dfrac{k\pi}{n}$, et que $\displaystyle\int_0^1 x^3 \cos(\pi x)\,\mathrm{d}x$ est la limite de $\dfrac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3 \cos\dfrac{k\pi}{n}$.

**8** Le changement de variable $u = \sin t$ dans l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/6} f(\sin t)\,\mathrm{d}t$ donne

☒ **a.** $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$ ❒ **b.** $\displaystyle\int_0^{\pi/6} f(u)\mathrm{d}u$

❒ **c.** $\displaystyle\int_0^{1/2} f(u)\mathrm{d}u$ ❒ **d.** $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$

On a $\mathrm{d}u = \cos t\ \mathrm{d}t = \sqrt{1-u^2}\ \mathrm{d}t$ car le cosinus est positif sur l'intervalle considéré. Comme le sinus est nul en 0 et vaut $\dfrac{1}{2}$ en $\dfrac{\pi}{6}$ on obtient

$$I = \int_0^{1/2} \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u.$$

Les autres réponses témoignent d'un oubli du changement de bornes ou de l'élément différentiel lors du changement de variables. Ce sont des erreurs classiques qui s'évitent par une pratique régulière du calcul.

**9** Soit $a > 0$ ; si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction réelle continue telle que $|f| \leqslant M$, alors l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^a f(t)\cos t\ \mathrm{d}t$ est comprise entre

❒ **a.** $-M$ et $M$ ☒ **b.** $-aM$ et $aM$

❒ **c.** $-M\sin a$ et $M\sin a$ ❒ **d.** $M\cos 0$ et $M\cos a$

En effet, par l'inégalité triangulaire, $|I| \leqslant \displaystyle\int_0^a |f(t)\cos t|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^a M\ \mathrm{d}t = aM$. Ici, une erreur classique consiste à multiplier l'inégalité $-M \leqslant f \leqslant M$ par $\cos t$, alors que ce nombre peut être négatif.

**10** Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ est majorée par

❒ **a.** $\displaystyle\ln 2 \int_0^1 f(x)\,dx$ ❒ **b.** $\displaystyle\sqrt{\ln 2 \int_0^1 f^2(x)\,dx}$

☒ **c.** $\displaystyle\sqrt{\int_0^1 \frac{f^2(x)}{2}\,dx}$ ❒ **d.** $\displaystyle\frac{1}{2}\sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx}$

Rappelons l'inégalité générale de Cauchy-Schwarz sur un segment :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\;dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}.$$

Ici, on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\,dx \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2}} = \sqrt{\int_0^1 \frac{f^2(x)}{2}\,dx}.$

**11** Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit $f(1) = f(0) + f'(0) + R$ où $R$ vaut

❒ **a.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{f''(t)t^2}{2!}\,dt$ ❒ **b.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{f''(t)(1-t)^2}{2!}\,dt$

☒ **c.** $\displaystyle\int_0^1 f''(t)(1-t)\,dt$ ❒ **d.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{f''(t)(1-t)}{2!}\,dt$

De façon générale, rappelons que le reste d'ordre $n$ dans la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction $f$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ est $\displaystyle\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt$. Cette formule se prouve par récurrence à l'aide d'une intégration par parties.

**12** Soit $f, g$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, $f$ vérifiant de plus les conditions aux bords $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$. En intégrant deux fois par parties, $\displaystyle\int_0^1 fg''$ est égal à

❒ **a.** $\displaystyle\int_0^1 f'g$ ☒ **b.** $\displaystyle\int_0^1 f''g$ ❒ **c.** $\displaystyle-\int_0^1 f''g$ ❒ **d.** $\displaystyle-\int_0^1 f'g$

Une première intégration par parties donne

$$\int_0^1 fg'' = [fg']_0^1 - \int_0^1 f'g' = -\int_0^1 f'g'$$

et une seconde donne

$$-[f'g]_0^1 + \int_0^1 f''g = \int_0^1 f''g.$$

N'oubliez pas le signe moins dans l'intégration par parties.

Ici, les conditions sur $f$ permettent d'annuler les crochets. Mais de façon générale, on démontre facilement par récurrence la formule d'intégration par parties généralisée :

$$\int_a^b f^{(n)}g = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[f^{(n-1-k)}g^{(k)}\right]_a^b + (-1)^n\int_a^b fg^{(n)}$$

**13** Si dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t$ on effectue le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - u$ on obtient

☒ **a.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n u \, \mathrm{d}u$ ❒ **b.** $\displaystyle-\int_0^{\pi/2} \cos^n u \, \mathrm{d}u$

❒ **c.** $\displaystyle(-1)^{n+1}\int_0^{\pi/2} \cos^n u \, \mathrm{d}u$ ❒ **d.** $\displaystyle(-1)^n\int_0^{\pi/2} \cos^n u \, \mathrm{d}u$

On a $\sin t = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$ et comme les bornes sont échangées,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t = -\int_{\pi/2}^0 \cos^n u\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \cos^n u\mathrm{d}u.$$

**14** Si $E$ est la fonction partie entière et $n$ un entier naturel alors $I = \displaystyle\int_0^n E(x)\,\mathrm{d}x$ vaut

❒ **a.** $n$ ❒ **b.** $E(n^2/2)$ ☒ **c.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ❒ **d.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$

Par la relation de Chasles on a $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} E(t)\,\mathrm{d}t$. Or sur l'intervalle $[k, k+1[$ la partie entière est constante et vaut $k$. Par suite, $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Lors d'un calcul d'intégrale, la relation de Chasles permet de gérer le cas des fonctions définies à partir de la partie entière, mais aussi des fonctions définies à l'aide de valeurs absolues, de sorte que l'on divise l'intervalle d'intégration en segments sur lesquels on peut enlever la valeur absolue.

**15** Soit $a \leqslant b$ deux réels tels que $\displaystyle\int_a^b \sin t \, \mathrm{d}t = b - a$. Alors forcément

❒ **a.** $\sin t = 1$ ❒ **b.** $b = a + 2k\pi$

☒ **c.** $b = a$ ❒ **d.** $\cos(b) = \cos(a)$

Comme $\sin t \leqslant 1$ pour tout réel $t$ on a toujours $\int_a^b \sin t \, \mathrm{d}t \leqslant b - a$. Pour qu'il y ait égalité, il faut que

$$\int_a^b (1 - \sin t) \, \mathrm{d}t = 0$$

Comme la fonction intégrée est positive et continue, il ne peut y avoir égalité que si la fonction sinus est constamment égale à 1 sur tout l'intervalle $[a, b]$. Cela ne peut se produire que si $b = a$.

**16** Laquelle des intégrales suivantes est égale à $I = \int_0^1 e^{-t} t^2 \, \mathrm{d}t$ ?

❒ **a.** $\int_1^e \frac{\ln u}{u^2} \mathrm{d}u$ ☒ **b.** $\int_1^e \frac{(\ln u)^2}{u^2} \mathrm{d}u$

❒ **c.** $\int_1^e \frac{(\ln u)^2}{u} \mathrm{d}u$ ❒ **d.** $\int_1^e (\ln u)^2 \mathrm{d}u$

Ici, il faut effectuer le changement de variable $u = e^t$, soit $t = \ln u$. On a $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u}$ et $e^{-t} t^2 = \frac{(\ln u)^2}{u}$, et lorsque $t$ parcourt le segment $[0, 1]$, $u$ parcourt le segment $[1, e]$.

**17** Lorsque $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue, laquelle des intégrales suivantes est strictement positive ?

❒ **a.** $\int_0^1 |f|$ ☒ **b.** $\int_0^1 f^2 - f + 1$

❒ **c.** $\int_0^1 f + |f|$ ❒ **d.** $\int_0^1 \sin(f)$

La fonction $f^2 - f + 1$ est strictement positive sur $[0, 1]$, car le polynôme du second degré $x^2 - x + 1$ est strictement positif sur $\mathbf{R}$ (son discriminant est strictement négatif). La positivité de l'intégrale donne le résultat.

Toutefois, en absence d'information sur la non-nullité de $f$, on peut affirmer que comme $|f|$ est positive, on a $\int_0^1 |f| \geqslant 0$, mais on ne peut conclure sur l'inégalité stricte. Il en est de même pour $f + |f|$. Par ailleurs, les hypothèses ne permettent pas de connaitre le signe de la fonction $\sin(f)$.

**18** Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f = 0$. Alors $f$

❒ **a.** est nulle

❒ **b.** s'annule exactement une fois sur $]0, 1[$

☒ **c.** s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$

❒ **d.** ne s'annule pas forcément

Comme $f$ est continue, si elle ne s'annule pas sur $]0, 1[$ elle y garde un signe constant (c'est un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires). Si par exemple elle est strictement positive, on obtient $\int_0^1 f > 0$ ce qui est absurde. Donc $f$ s'annule au moins une fois dans $]0, 1[$. On pourrait dire que $f = 0$ si on avait l'hypothèse $f$ positive, mais ce n'est pas le cas ici. En revanche, elle peut s'annuler plus d'une fois, voire être égale à la fonction nulle.

**19** La suite $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n+k}}$ tend vers

☒ **a.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ ❒ **b.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

❒ **c.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ ❒ **d.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+1/x}}\,\mathrm{d}x$

On fait apparaître une somme de Riemann en exprimant le terme général de la somme comme une fonction de $\dfrac{k}{n}$ : on écrit alors

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k/n}{\sqrt{1+k/n}}.$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. N'oubliez pas de justifier que cette dernière fonction est continue pour conclure que la somme de Riemann converge vers l'intégrale.

**20** Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sin x} f(t^2)\,\mathrm{d}t$ où $f$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F'(x)$ est égal à

☒ **a.** $\cos(x)\, f(\sin^2 x)$ ❒ **b.** $\displaystyle\int_0^{\cos x} f(t^2)\,\mathrm{d}t$

❒ **c.** $\displaystyle\int_0^{\sin x} 2tf'(t^2)\,\mathrm{d}t$ ❒ **d.** $\cos(x) f'(\sin^2 x)$

Notons $G$ une primitive de la fonction $t \mapsto f(t^2)$ ; on a alors pour tout réel $x$, $F(x) = G(\sin x) - G(0)$. Par la formule des dérivées composées, on a donc

$$F'(x) = \cos(x) G'(\sin x) = \cos(x) f(\sin^2 x).$$

**21** Si $\displaystyle\int_0^4 f = 1$ alors $\displaystyle\int_0^4 f^2$ est

☒ **a.** supérieur à $\dfrac{1}{4}$ ❒ **b.** inférieur à $\dfrac{1}{4}$

❒ **c.** supérieur à $\dfrac{1}{2}$ ❒ **d.** inférieur à $\dfrac{1}{2}$

En effet, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de dire que

$$1 = \left(\int_0^4 f\right)^2 \leqslant \int_0^4 1 \int_0^4 f^2 = 4\int_0^4 f^2 .$$

**22** Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Alors $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est équivalent en 0 à

❒ **a.** $0$ ❒ **b.** $\dfrac{x}{2}$ ☒ **c.** $\dfrac{x^2}{2}$ ❒ **d.** $x^2$

Comme $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$, sa primitive $F$ est de classe $\mathscr{C}^2$ avec $F(0) = 0$, $F'(0) = f(0) = 0$ et $F''(0) = f'(0) = 1$. Son développement limité à l'ordre 2 en 0 s'écrit donc

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{2}F''(0) + o(x^2)$$

ce qui donne ici $\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

**23** La fonction $F(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\lambda + \sin x}$, qui est définie sur $\mathbf{R}_+^*$,

❒ **a.** est croissante et tend vers 0 en $+\infty$

☒ **b.** est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$

❒ **c.** est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$

❒ **d.** est décroissante et tend vers $-\infty$ en $+\infty$

Si $\lambda \leqslant \lambda'$ on a $\dfrac{1}{\lambda' + \sin x} \leqslant \dfrac{1}{\lambda + \sin x}$ pour tout $x$ de $[0, 1]$. En intégrant cette inégalité il vient $F(\lambda') \leqslant F(\lambda)$ : la fonction $F$ est décroissante. De plus, on a

$$0 \leqslant F(\lambda) \leqslant \int_0^1 \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

pour tout $\lambda > 0$, ce qui montre que $F$ tend vers 0 en $+\infty$.

> Pour étudier le sens de variation de cette fonction, ne cherchez pas à dériver par rapport à $\lambda$, à l'aide de formulations confuses sur la « dérivée d'une intégrale ». Seules les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ peuvent se dériver facilement, ce n'est pas le cas si la variable $x$ (ou $\lambda$) est un **paramètre** à l'intérieur de l'intégrale.

## 20 Calcul des intégrales

**1** L'intégrale $I = \int_0^\pi \sin t \, \mathrm{d}t$ vaut

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ☒ **c.** 2 ❒ **d.** $\pi$

On a $I = [-\cos t]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2$. Notons que l'intégrale ne peut pas être nulle car la fonction sinus est strictement positive sur $]0, \pi[$.

**2** Pour trouver une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{2 + \cos^2 x}$ il est intéressant d'effectuer le changement de variable

❒ **a.** $u = \sin x$ ☒ **b.** $u = \cos x$

❒ **c.** $u = \tan \dfrac{x}{2}$ ❒ **d.** $u = \cos^2 x$

Le changement $u = \cos x$ est intéressant car il conduit directement à l'intégrale d'une fraction rationnelle à savoir $\displaystyle\int \frac{-\mathrm{d}u}{2 + u^2}$. On peut détecter son intérêt par les règles de Bioche (si vous les connaissez), ou plutôt en remarquant que la fonction à intégrer est de la forme $\sin(x) f(\cos x)$.

Le changement $u = \tan \dfrac{x}{2}$ conduit aussi à une fraction rationnelle mais elle est plus compliquée.

**3** La valeur moyenne de la fonction sh sur $[-1, 1]$ est

☒ **a.** 0 ❒ **b.** ch 1 ❒ **c.** 1 ❒ **d.** $\dfrac{\mathrm{ch}\, 1 + \mathrm{ch}(-1)}{2}$

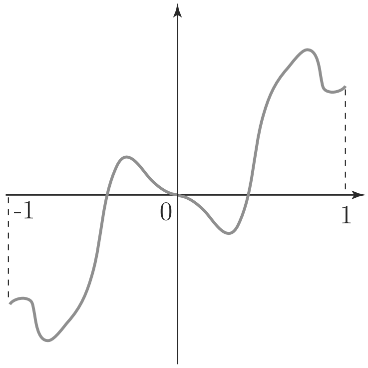
En effet, la fonction étant impaire, sa valeur moyenne sur $[-1, 1]$ est nulle. Cela se retrouve à partir de la définition $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{sh}\, t \, \mathrm{d}t$ en remarquant à l'aide du changement de variable $x = -t$ que pour une fonction $f$ impaire,

$$\int_{-1}^0 f(t)\, \mathrm{d}t = -\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x.$$

**4** Si $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue impaire, $\displaystyle\int_{-1}^1 f$ vaut

☒ **a.** 0 ❒ **b.** $2\displaystyle\int_0^1 f$ ❒ **c.** $f(1) - f(-1)$ ❒ **d.** $-2\displaystyle\int_0^1 f$

Comme $f$ est impaire, on obtient $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)dx = -\int_0^1 f(t)dt$ par le changement de variable $x = -t$. Par suite $\displaystyle\int_{-1}^1 f$ est nulle. Cela est clair si on interprète l'intégrale en termes d'aires.




Notons que pour une fonction paire on a cette fois-ci $\int_{-1}^{1} f = 2\int_{0}^{1} f$.

**5** Si $a > 0$ l'intégrale $\int_0^1 x^a \, \mathrm{d}x$ vaut

❐ **a.** $\frac{1}{a}$ ❐ **b.** $\frac{1}{a-1}$ ☒ **c.** $\frac{1}{a+1}$ ❐ **d.** $a+1$

On a $\int_0^1 x^a \, dx = \left[\frac{x^a+1}{a+1}\right]_0^1 = \frac{1}{a+1}$. C'est une valeur classique, que nous vous conseillons d'apprendre par coeur plutôt que de risquer des erreurs en la recalculant. Dans certains exercices cette identité peut être la clé de la solution. Par exemple si on cherche à simplifier la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$$

l'idée est de remplacer $\frac{1}{k+1}$ par $\int_0^1 x^k \, \mathrm{d}x$ pour obtenir $S_n = \int_0^1 (1+x)^n \, \mathrm{d}x$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. Nous vous invitons à terminer le calcul de l'intégrale !

**6** Que donne le changement de variable $t = \sqrt{x}$ dans le calcul de $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$ ?

❐ **a.** $\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ ☒ **b.** $\int \frac{2t \, \mathrm{d}t}{1+t}$

❐ **c.** $\int \frac{\mathrm{d}t}{2t(1+t)}$ ❐ **d.** $\int \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}(1+t)}$

On a $x = t^2$ et donc $\mathrm{d}x = 2t \, \mathrm{d}t$. Par suite, $\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t \, \mathrm{d}t}{1+t}$. Les autres réponses proposées témoignent d'une erreur ou d'un oubli dans le calcul de l'élément différentiel.

**7** Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+4}$ est

❐ **a.** $x \mapsto \arctan \frac{x}{2}$ ❐ **b.** $x \mapsto 2 \arctan \frac{x}{2}$

☒ **c.** $x \mapsto \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}$ ❐ **d.** $x \mapsto \arctan(2x)$

En effet, si on pose $x = 2u$, on a

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{4(u^2+1)} = \frac{1}{2}\arctan u = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}.$$

**8** Que donne le changement de variable $u = \tan x$ dans $I = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan^2 x\,\mathrm{d}x$ ?

❒ **a.** $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} u^2\,\mathrm{d}u$ ☒ **b.** $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$

❒ **c.** $I = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ ❒ **d.** $I = \displaystyle\int_0^{\pi/3} u^2\,\mathrm{d}u$

On a $\mathrm{d}u = (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x = (1+u^2)\,\mathrm{d}x$. Comme $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ on obtient donc $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$. Lorsque vous effectuez un changement de variable, il faut penser aux deux modifications nécessaires : l'élément différentiel et les bornes de l'intégrale.

**9** Pour calculer $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4}$, vous

❒ **a.** décomposez la fraction en éléments simples

❒ **b.** intégrez par parties

❒ **c.** faites le changement de variables $u = x^4$

☒ **d.** faites le changement de variables $u = x^2$

On observe que $\dfrac{x}{1+x^4} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{1+(x^2)^2}$, ce qui amène le changement de variable $u = x^2$. On obtient alors

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arctan(u) = \frac{1}{2}\arctan(x^2)\,.$$

Le changement de variable $u = x^4$ ne permet pas de gérer le numérateur de la fraction, tandis que $u = x^2$ le fait disparaître dans l'élément différentiel. L'intégration par parties ne résout rien, puisque l'on est forcé de dériver $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^4}$ et on augmenterait le degré du dénominateur de la fraction.

Enfin la décomposition en élément simples peut s'envisager, mais elle est difficile à réaliser techniquement, la factorisation du dénominateur n'étant pas du tout immédiate. Toutefois, c'est la seule technique à notre disposition si les changements de variable n'aboutissent pas, par exemple pour le calcul d'une primitive de $\dfrac{1}{1+x^4}$.

**10** Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2-1}$ sur un intervalle ne contenant ni $-1$ ni 1 est

❐ **a.** $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|$ ☒ **b.** $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t+1}{t-1}\right|$

❐ **c.** $t \mapsto \dfrac{1}{2}\left|\ln\dfrac{t-1}{t+1}\right|$ ❐ **d.** $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{|t|+1}{|t|-1}$

On décompose la fraction en éléments simples. On a $\dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{1/2}{t-1} - \dfrac{1/2}{t+1}$ et une primitive est donc $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|$.

**11** Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et $a, b$ deux réels non nuls. Une primitive de $x \mapsto bf'(ax)$ est

☒ **a.** $x \mapsto \dfrac{b}{a}f(ax)$ ❐ **b.** $x \mapsto abf(ax)$

❐ **c.** $x \mapsto abf(x)$ ❐ **d.** $x \mapsto \dfrac{a}{b}f(ax)$

Vérifions-le : la dérivée de $x \mapsto \dfrac{b}{a}f(ax)$ est bien $x \mapsto bf'(ax)$.

N'hésitez pas, lorsque vous avez un doute sur une primitive, à vérifier le résultat en le dérivant.

**12** Soit $F$ une fraction rationnelle. Les primitives de $F$ ne peuvent pas être des fractions rationnelles lorsque

❐ **a.** 0 est un pôle de $F$ ❐ **b.** 0 est une racine de $F$

☒ **c.** 0 est un pôle simple de $F$ ❐ **d.** 0 est une racine simple de $F$

En effet, si 0 est un pôle simple de $F$ la décomposition en éléments simples de la fraction $F(x)$ contient un terme $\dfrac{c}{x}$ avec $c$ non nul, dont la primitive est $c\ln|x|$. Notons que si 0 est pôle d'ordre supérieur à 2, les primitives peuvent être des fractions rationnelles. C'est par exemple le cas de $\dfrac{1}{x^n}$ pour tout $n \geqslant 2$.

**13** La valeur moyenne de la fonction tangente sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ vaut :

❐ **a.** $\dfrac{\ln 2}{2}$ ❐ **b.** $-\dfrac{2\ln 2}{\pi}$ ☒ **c.** $\dfrac{2\ln 2}{\pi}$ ❐ **d.** $\dfrac{4}{\pi}$

En effet, on reconnaît une primitive de la fonction $x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ en la fonction $x \mapsto -\ln(\cos x)$. La valeur moyenne est donc

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} \tan x \,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\Big[-\ln(\cos x)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{-4}{\pi}\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\pi}\ln 2\,.$$

Notons que la valeur moyenne d'une fonction positive est forcément positive, ce qui exclut naturellement la réponse **b.**.

**14** Une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$ est

❐ **a.** $x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ ❐ **b.** $x \mapsto x \ln x$

☒ **c.** $x \mapsto x \ln x - x$ ❐ **d.** $x \mapsto x \ln x + x$

> On intègre par parties, en dérivant $\ln x$, donc en intégrant la constante 1 :
> $$\int 1.\ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x \ln x - x\,.$$
> Il est classique en présence d'un logarithme (ou d'une arctangente) de faire une intégration par parties car c'est une fonction qui est plus compliquée que sa dérivée (qui est rationnelle).

**15** La valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$ est

❐ **a.** $(\ln 2)(\ln 3 - \ln 2)$ ❐ **b.** $\ln 3 - \ln 4$

❐ **c.** $\dfrac{1}{6}$ ☒ **d.** $\ln 4 - \ln 3$

> On peut facilement trouver la décomposition en éléments simples ; on a $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$ et donc
> $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} = \big[\ln(x+1) - \ln(x+2)\big]_0^1 = -\ln 3 + 2\ln 2 = \ln 4 - \ln 3\,.$$
> Le résultat ne peut pas être négatif car la fonction intégrée est positive. Cela exclut la réponse **b.**.

**16** Soit $f$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ avec $f'(0) = f'(1) = 0$. En intégrant par parties $I = \displaystyle\int_0^1 (ff')f''$ on obtient

❐ **a.** $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f'^3$ ☒ **b.** $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f'^3$ ❐ **c.** $2\displaystyle\int_0^1 f'^3$ ❐ **d.** $0$

> En effet, on a $I = \left[ff'^2\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 (ff'' + f'^2)f' = -I - \int_0^1 f'^3$.

**17** Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est décroissante, pour $n \geqslant 2$, on peut majorer $\dfrac{1}{n^3}$ par

❐ **a.** $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

❐ **b.** $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

☒ **c.** $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

❒ **d.** $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}$

On utilise la positivité de l'intégrale :

$$\frac{1}{n^3} = \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{n^3} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{n-1}^{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Plus généralement, lorsque $f$ est une fonction croissante, on a l'encadrement

$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et ces inégalités sont inversées lorsque $f$ est décroissante. Cet encadrement combiné à la relation de Chasles est très utile pour étudier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Concernant le calcul de l'intégrale, notons que l'intégrale est strictement positive ce qui permet d'exclure la réponse **b.** ; c'est un moyen rapide d'éviter nombre d'erreurs de calcul, à employer sans modération.

**18** Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ avec $f' > 0$. La dérivée de la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{f(0)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$ est

☒ **a.** $x \mapsto xf'(x)$ ❒ **b.** $x \mapsto x$

❒ **c.** $x \mapsto f^{-1}(x)$ ❒ **d.** $x \mapsto f'(x)f^{-1}(x)$

Les hypothèses assurent l'existence de $f^{-1}$ ainsi que la dérivabilité de cette fonction. Si $H$ est une primitive de $f^{-1}$ on a $g(x) = H(f(x)) - H(0)$ pour tout $x$. Par suite, le théorème de dérivation des fonctions composées donne

$$g'(x) = H'(f(x))f'(x) = f^{-1}(f(x))f'(x) = xf'(x).$$

**19** Soit $f$ une fonction continue sur $[0, 1]$. La suite $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x$ converge vers

❒ **a.** 0 ☒ **b.** $f(0)$ ❒ **c.** $f(1)$ ❒ **d.** $\displaystyle\int_0^1 f(u)du$

Il s'agit ici d'un exemple de problème d'interversion limite/intégrale. Pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x^n)$ tend vers $f(0)$ par continuité de $f$ et pour $x = 1$, $f(x^n)$ vaut constamment $f(1)$. Il est naturel de penser que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f(x^n)\,\mathrm{d}x = f(0).$$

Mais l'interversion ne peut pas se réaliser rigoureusement sans précaution ; elle fournit une idée du résultat mais pas une preuve. Le théorème de convergence dominée, qui sera vu en classe de spéciales, donne les conditions qui permettent d'obtenir le résultat.

On pourrait aussi établir la convergence de la suite à l'aide de techniques de quantification abordables en première année, mais cela est nettement plus difficile.

## 21 Étude métrique des courbes planes

**1** On considère l'arc paramétré $M(t) = (t, \operatorname{ch} t)$. Laquelle des fonctions suivantes est-elle une abscisse curviligne pour cet arc ?

❒ **a.** $t \mapsto \operatorname{ch} t$ ☒ **b.** $t \mapsto \operatorname{sh} t$

❒ **c.** $t \mapsto \sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 t}$ ❒ **d.** $t \mapsto \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}$

Le vecteur vitesse est $M'(t) = (1, \operatorname{sh} t)$ et sa norme euclidienne est donc $\|M'(t)\| = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{ch} t$ d'après la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique. Par définition une abscisse curviligne de l'arc est une primitive de cette fonction : c'est le cas de la fonction sh. On notera que les réponses **a.** et **d.** sont les mêmes !

**2** Soit $s \mapsto M(s)$ un arc birégulier paramétré par une abscisse curviligne. Comment reconnaît-on qu'il s'agit d'une portion de droite ?

❒ **a.** lorsque $M'(s) = 0$

☒ **b.** lorsque la courbure $c$ est nulle

❒ **c.** lorsque $c$ est une fonction affine de $s$

❒ **d.** lorsque le rayon de courbure est nul

L'arc paramétré est une portion de droite lorsque $M'(s) = T$ est constante. On va alors toujours dans la même direction. Cela se traduit par le fait que la dérivée de $T$ est nulle, et donc $c = 0$ par les formules de Frenet.

Le cas $M'(s) = 0$ ne peut se produire pour un arc paramétré par abscisse curviligne puisqu'on a toujours $\|M'(s)\| = 1$. Si $c$ est une fonction affine de $s$, la courbe va ressembler à une spirale. Enfin, le rayon de courbure n'est jamais nul, puisqu'il s'agit de l'inverse de la courbure.

**3** Soit $t \mapsto M(t)$ un arc de classe $\mathscr{C}^1$ dont la trajectoire est le cercle unité du plan $\mathbf{R}^2$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Alors

❒ **a.** l'arc est nécessairement birégulier

❒ **b.** l'arc est nécessairement régulier

❒ **c.** l'arc n'est régulier que si $t$ est une abscisse curviligne

☒ **d.** l'arc n'est pas forcément régulier

Il est important de retenir que la trajectoire d'un arc ne caractérise pas cet arc. Le cercle peut bien entendu être paramétré de manière birégulière par exemple avec $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, mais rien n'interdit de le parcourir en marquant des temps d'arrêt ! Par exemple si on prend $M : t \mapsto (\cos t^2, \sin t^2)$ la trajectoire est toujours le cercle mais le vecteur vitesse $M'(0)$ est nul. Donc la réponse **b.** et *a fortiori* la réponse **a.** sont incorrectes.

Un paramétrage par abscisse curviligne du cercle est nécessairement birégulier mais ce n'est pas le seul cas : par exemple pour $t \mapsto (\cos 2t, \sin 2t)$ on a un paramétrage birégulier mais comme $||M'(t)|| \neq 1$, $t$ n'est pas une abscisse curviligne.

**4** Soit $s \mapsto M(s)$ un arc birégulier paramétré par une abscisse curviligne. On note $(T, N)$ la base de Frenet et $c$ la courbure. Alors $\dfrac{\mathrm{d}(T+N)}{\mathrm{d}s}$ vaut

❒ **a.** $c(T - N)$ ☒ **b.** $c(N - T)$

❒ **c.** $c(T + N)$ ❒ **d.** $-c(T + N)$

Il s'agit simplement des deux formules de Frenet : $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = cN$ et $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} = -cT$.

**5** En quels points de l'ellipse $(x(t) = a\cos t, y(t) = b\sin t)$ a-t-on $c' = 0$ où $c$ est la courbure ?

❒ **a.** aux foyers ☒ **b.** aux quatre sommets

❒ **c.** au centre ❒ **d.** aux deux sommets situés sur l'axe focal

La courbure de l'ellipse est maximale aux sommets situés sur l'axe focal, et elle est minimale en les deux autres sommets : sa dérivée en ces points est donc nulle.

Si vous avez répondu **a.** ou **c.**, le centre et les foyers ne font pas partie de l'ellipse !

**6** Laquelle des intégrales suivantes donne la longueur de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ?

❒ **a.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ ❒ **b.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

☒ **c.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 t + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ ❒ **d.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2 t + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

On commence par paramétrer l'ellipse par $x(t) = \sqrt{2}\cos t$ et $y(t) = \sin t$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Si on pose $M(t) = (x(t), y(t))$ la longueur de l'ellipse est donnée par $\displaystyle\int_0^{2\pi} ||M'(t)||\,\mathrm{d}t$ et on a $||M'(t)|| = \sqrt{2\sin^2 t + \cos^2 t}$. La réponse **d.** ne donne que la longueur de la demi-ellipse.

Les réponses **a.** et **b.** témoignent d'une erreur dans la paramétrisation : le demi-grand axe est $\sqrt{2}$ et pas 2.

**7** Soit $t \mapsto M(t)$ un arc de classe $\mathscr{C}^2$ birégulier. On suppose que la tangente unitaire $T$ est donnée par $T = (\cos 2t, \sin 2t)$ et que $\|M'(t)\| = e^t$ pour tout $t$. Alors la courbure au point de paramètre $t$ vaut

❒ **a.** $2$ ❒ **b.** $e^{-t}$ ☒ **c.** $2e^{-t}$ ❒ **d.** $\frac{1}{2}e^{-t}$

L'énoncé nous donne directement un relèvement angulaire de la tangente unitaire $T$ à savoir $\varphi = 2t$. Par définition la courbure $c$ vaut $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$ où $s$ est une abscisse curviligne. Le lien entre une abscisse curviligne $s$ et le paramètre d'origine $t$ est donné par $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \| M'(t)\| = e^t$. Par dérivation des fonctions composées on a donc $c = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 2e^{-t}$.

**8** Si $t \mapsto M(t)$ est un arc régulier de classe $\mathscr{C}^k$ et si $\varphi$ est un relèvement de la tangente unitaire $T$ alors $\varphi$ est de classe

❒ **a.** $\mathscr{C}^k$ ❒ **b.** $\mathscr{C}^{k-1}$ ☒ **c.** $\mathscr{C}^{k-2}$ ❒ **d.** $\mathscr{C}^{k-3}$

Le vecteur vitesse $t \mapsto M'(t)$ est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ et il en est de même de la tangente unitaire $T = \frac{M'(t)}{\|M'(t)\|}$ car la norme ne s'annule jamais (régularité de l'arc). Le théorème du relèvement assure alors que $\varphi$ est aussi une fonction de classe $\mathscr{C}^{k-1}$.

**9** Parmi les arcs $t \mapsto (t, f_i(t))$ pour $i = 1, ..., 4$ définis par les fonctions suivantes, lequel a la plus grande courbure au point $(0, 0)$ de paramètre $0$ ?

❒ **a.** $f_1(t) = 0$ ☒ **b.** $f_2(t) = t^2$
❒ **c.** $f_3(t) = t^4$ ❒ **d.** $f_4(t) = t^6$

Pour les 4 arcs on a $f_i(0) = 0$ et $f_i'(0) = 0$ donc la tangente unitaire en $t = 0$ est le vecteur $T = (1, 0)$. Par suite le vecteur normal est $N = (0, 1)$. Nous savons que si $c$ désigne la courbure, l'accéleration s'exprime par $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}T + v^2cN$ où $v$ est la vitesse numérique. En ne gardant que la composante selon $N$ dans cette relation en $t = 0$ on a donc $f_i''(0) = c$ car dans tous les cas la vitesse numérique en 0 vaut 1. La courbure est donc la plus grande pour $f_2$ où elle vaut 2. Dans tous les autres cas elle est nulle, le paramètre $t = 0$ n'est pas birégulier.

**10** Soit $t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t)$ un arc birégulier de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$. Laquelle des notions suivantes n'est pas forcément conservée lors d'un reparamétrage de l'arc par un $\mathscr{C}^2$-difféomorphisme srictement croissant de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ ?

❒ **a.** le caractère birégulier

☒ **b.** le vecteur vitesse

❒ **c.** la courbure

❒ **d.** le vecteur normal $N$ du repère de Frenet

Posons $\gamma_1(u) = \gamma(\varphi(u))$ où $\varphi$ est un $\mathscr{C}^2$-difféomorphisme srictement croissant de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. On a pour tout réel $u$,

$$\gamma_1'(u) = \varphi'(u)\gamma'(\varphi(u)) = \varphi'(u)\gamma'(t)$$

où $t = \varphi(u)$. Le vecteur vitesse n'est donc pas forcément conservé car $\varphi'(u)$ peut être différent de 1. En revanche la tangente unitaire $T$ est conservée puisque $\varphi'(u) > 0$ et on a $T = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \dfrac{\gamma_1'(u)}{\|\gamma_1'(u)\|}$. Il en découle que le vecteur $N$ est aussi conservé : il est simplement obtenu en tournant $T$ de $\dfrac{\pi}{2}$. On en déduit aussi que la courbure est conservée, et donc le caractère birégulier, qui équivaut à ce que la courbure ne s'annule pas.

## 22 Fonctions de deux variables

**1** Soit $f : (x, y) \mapsto x^2y^2 + x^2 + y$. Que vaut $\dfrac{\partial^3 f}{\partial^2 x\partial y}(x, y)$ ?

❒ **a.** 4 ☒ **b.** $4y$ ❒ **c.** $2y + 3$ ❒ **d.** $2y$

On a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2y + 1$ et lorsqu'on dérive deux fois cela par rapport à $x$, il reste $4y$.

**2** Soit $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x+y$. La dérivée partielle de $f$ en $(0, 0)$ selon le vecteur $h = (1, 1)$ vaut

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ☒ **c.** 2 ❒ **d.** 4

Cette dérivée vaut $g'(0)$ où $g$ est la fonction définie par $g(t) = f(t, t) = 2t$. Elle est donc égale à 2.

**3** Laquelle des parties suivantes de $\mathbf{R}^2$ est ouverte ?

☒ **a.** $\mathbf{R}^2$ ❒ **b.** $\{(x, 0),\ 0 < x < 1\}$

❒ **c.** $\{(x, y),\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ ❒ **d.** $\{(x, x),\ x \in \mathbf{R}\}$

L'ensemble $\mathbf{R}^2$ est ouvert : il contient un disque autour de chacun de ses points. En revanche, la partie **c.** n'est pas ouverte : il s'agit du disque unité fermé, et il ne contient, par exemple, pas de boule centrée en $(1, 0)$.

La partie **d.** est une droite du plan. Elle ne contient aucun disque, donc elle n'est pas ouverte. Le même argument s'applique aussi pour la partie **b.**, qui est une partie d'une droite.

**4** Soit $f : (x, y) \mapsto xy^2 + \sin(xy)$. Que vaut $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** $b^2 + \cos(ab)$

☒ **c.** $b^2 + b\cos(ab)$ ❒ **d.** $2ab + a\cos(ab)$

On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + y\cos(xy)$ et on évalue cela au point $(a, b)$.

Si vous avez répondu **a.**, notez que l'écriture $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ signifie qu'on évalue la dérivée partielle de $f$ par rapport à sa première variable au point $(a, b)$. Il ne s'agit pas de la dérivation par rapport à $x$ de l'expression $f(a, b)$.

Si vous avez répondu **b.**, attention à la dérivation d'une fonction composée.

**5** Soit $C = [0, 1]^2$. L'intégrale $\displaystyle\iint_C (xy)^n \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ vaut

☒ **a.** $\dfrac{1}{(n+1)^2}$ ❒ **b.** $\dfrac{2}{(n+1)^2}$ ❒ **c.** $\dfrac{1}{n+1}$ ❒ **d.** $\dfrac{2}{n+1}$

La fonction intégrée est de la forme $f(x)g(y)$ et l'intégrale est prise sur un pavé, à savoir le carré $[0, 1]^2$. On a donc

$$I = \int_0^1 x^n\, dx \int_0^1 y^n\, dy = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

**6** Pour que la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{|x|^a}{x^2 + y^2}$ tende vers 0 lorsque $(x, y)$ tend vers $(0, 0)$ on doit avoir

❒ **a.** $a > 0$ ❒ **b.** $a > 1$ ❒ **c.** $a \geqslant 2$ ☒ **d.** $a > 2$

Si $f$ tend vers 0 en $(0, 0)$, l'application partielle $x \mapsto f(x, 0) = |x|^{a-2}$ doit aussi tendre vers 0 lorsque $x$ tend vers 0. Cela impose $a > 2$. On peut noter que cette condition est suffisante car on a alors pour tout couple $(x, y)$ la majoration $|f(x, y)| \leqslant |x|^{a-2}$. Comme le majorant tend vers 0 lorsque $(x, y)$ tend vers 0, il en est bien de même de $f$, par le critère de majoration.

**7** Soit $A$ et $B$ deux ouverts de $\mathbf{R}^2$. Laquelle des parties suivantes n'est pas forcément ouverte ?

❒ **a.** la réunion de $A$ et $B$

❒ **b.** l'intersection de $A$ et $B$

☒ **c.** le complémentaire de $A$

❒ **d.** l'ensemble des points de $A$ d'abscisse strictement positive

En général, le complémentaire d'un ensemble ouvert n'est pas ouvert : par exemple, si on prend pour $A$ le demi-plan ouvert formé des points $(x, y)$ vérifiant $x > 0$, son complémentaire n'est pas ouvert (il n'y a aucun disque centré en l'origine qui soit complètement inclus dedans ).

En revanche, la réunion et l'intersection de deux parties ouvertes sont toujours ouvertes. C'est d'ailleurs pour cette raison que la partie **d.** est ouverte, on peut la voir comme intersection de $A$ et du demi-plan ouvert $x > 0$.

**8** Que vaut $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$ ?

☒ **a.** 0 ❐ **b.** 1 ❐ **c.** $y$ ❐ **d.** elle n'existe pas

On a toujours $|\sin(xy)| \leqslant |xy|$ de sorte que la fonction est majorée par $|y|$. Elle tend donc vers 0 lorsque $(x, y)$ tend vers 0. Notons que la limite ne peut en aucun cas dépendre de $y$, qui est une variable muette dans l'expression de la limite.

**9** Soit $f : (x, y) \mapsto x^2e^y + yx$. Que vaut $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, x)$ ?

❐ **a.** 0 ❐ **b.** $x^2e^y + x$

❐ **c.** $(2x + x^2)e^x + 2x$ ☒ **d.** $x^2e^x + x$

Il ne s'agit pas de dériver par rapport à $y$ l'expression $f(x, x)$. Ici, on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2e^y + x$ et on évalue cette fonction au point $(x, x)$.

> Commencez toujours par calculer les dérivées partielles dans toute leur généralité avant de substituer.

**10** D'après le théorème de Schwarz, dans lequel des cas suivants ne peut-on pas trouver de fonction $f$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ soit en tout point le vecteur $(u(x, y), v(x, y))$ ?

❐ **a.** $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = y$ ❐ **b.** $u(x, y) = 1$ et $v(x, y) = 1$

☒ **c.** $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = x$ ❐ **d.** $u(x, y) = y$ et $v(x, y) = x$

S'il existe $f$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = u(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = v(x, y)$ on doit avoir par le théorème de Schwarz $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$. Cette condition n'est pas réalisée lorsque $u(x, y) = v(x, y) = x$.

En revanche, avec $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = y$ la fonction $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ convient ; avec $u(x, y) = 1$ et $v(x, y) = 1$ la fonction $f(x, y) = x + y$ convient ; et avec $u(x, y) = y$ et $v(x, y) = x$ la fonction $f(x, y) = xy$ convient.

D'une certaine façon, la condition $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ est suffisante (en tous cas sur $\mathbf{R}^2$) pour que $(u, v)$ soit le couple de dérivées d'une fonction $f$ de deux variables, i.e. que $(u, v)$ admette une primitive. C'est l'objet du théorème de Poincaré, qui sera vu en deuxième année.

**11** Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. On pose $g(x) = f(x^2, x^3)$ pour tout $x$. Que vaut $g'(x)$ ?

❐ **a.** $(2x + 3x^2)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2, x^3)$ ❐ **b.** $2x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2, x^3)$

❐ **c.** $6x^3\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2, x^3)$ ☒ **d.** $2x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2, x^3) + 3x^2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^2, x^3)$

C'est la formule de dérivation d'une fonction composée. De façon plus générale, si $g(x) = f(a(x), b(x))$ avec $a, b$ de classe $\mathscr{C}^1$, alors

$$g'(x) = a'(x)\frac{\partial f}{\partial x}(a(x), b(x)) + b'(x)\frac{\partial f}{\partial x}(a(x), b(x)).$$

**12** Quel est le seul point où la fonction $f : (x, y) \mapsto ax - yx + x^2$ peut admettre un extremum local ?

❐ **a.** (0,0) ☒ **b.** (0,a) ❐ **c.** (a,0) ❐ **d.** (a,a)

En un extremum local les dérivées partielles sont nulles. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a - y + 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x.$$

Le seul point où les dérivées partielles s'annulent conjointement est donc $(x, y) = (0, a)$. Pour voir s'il s'agit bien d'un extremum local, on peut étudier $f$ le long de droites passant par $(0, a)$. Fixons donc un paramètre $c$ et posons $g(t) = f(t, a + ct)$. En développant on a $g(t) = t^2 - ct^2$. Ainsi, si $c < 1$, $g$ admet en 0 un minimum local, mais si $c > 1$, alors $g$ admet en 0 un maximum local. Donc $f$ n'admet pas d'extremum local en $(0, a)$, ni ailleurs sur $\mathbf{R}^2$.

**13** Que vaut $I = \iint_{[0,1]^2} x^y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ?

❐ **a.** 0 ☒ **b.** $\ln 2$ ❐ **c.** 3/4 ❐ **d.** 1

On utilise le théorème de Fubini en intégrant d'abord par rapport à x :

$$I = \int_0^1 \left( \int_0^1 x^y \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = [\ln(1+y)]_0^1 = \ln 2.$$

Notons que comme la fonction intégrée est strictement positive, son intégrale ne peut pas être nulle, ce qui interdit la réponse **a.**.

**14** Soit $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y \geqslant 0, \; x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ et soit $f$ une fonction continue sur D. En passant en coordonnées polaires, l'intégrale $I = \iint_D f(x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ vaut :

❐ **a.** $2\pi \int_0^1 f(r^2)\mathrm{d}r$ ❐ **b.** $\pi \int_0^1 f(r^2)\mathrm{d}r$

❐ **c.** $2\pi \int_0^1 rf(r^2)\mathrm{d}r$ ☒ **d.** $\pi \int_0^1 rf(r^2)\mathrm{d}r$

Pour parcourir le demi-disque $D$ on fait varier r entre 0 et 1 et l'angle $\theta$ entre 0 et $\pi$. Ainsi,

$$I = \int_0^1 \int_0^\pi f(r^2) \, r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^1 rf(r^2)\mathrm{d}r = \pi \int_0^1 rf(r^2)\mathrm{d}r.$$

**15** Laquelle des fonctions suivantes admet un maximum local en $(0,0)$ ?

☒ **a.** $(x,y) \mapsto 1 - \exp(x^2 + y^2)$ ❒ **b.** $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$

❒ **c.** $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ ❒ **d.** $(x,y) \mapsto xy$

Chacune des fonctions proposées admet ses deux dérivées partielles nulles en $(0,0)$. La condition d'annulation de ces dérivées est d'ailleurs nécessaire mais non suffisante pour qu'une fonction admette un maximum local en un point. Étudions les quatre propositions :

• On a $1 - \exp(x^2 + y^2) \leqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = y = 0$. La fonction admet un maximum global (donc local) en $(0,0)$.

• Notons $f_b(x,y) = x^2 - y^2$. La fonction réelle $x \mapsto f_b(x,0) = x^2$ admet un minimum local en 0, mais $y \mapsto f_b(0,y)$ admet un maximum local en 0 : malgré l'annulation de ses dérivées partielles, $f_b$ n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

• La fonction $f_c(x,y) = x^2 + y^2$ vérifie $f_c(x,y) \geqslant f_c(0,0)$ pour tous $x, y$. Elle admet donc un minimum global (donc local) en 0.

• Enfin, si $f_d(x,y) = xy$, on remarque que $t \mapsto f(t,t) = t^2$ admet un minimum local en 0, tandis que $t \mapsto f(t,-t) = -t^2$ admet un maximum local en 0. On est dans la même situation que pour $f_b$, il n'y a pas d'extremum local en $(0,0)$.

**16** Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ qui vérifie $f(x,y) = f(y,x)$ pour tout couple $(x,y)$. Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est toujours égal à

❒ **a.** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$ ❒ **b.** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)$ ☒ **c.** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$ ❒ **d.** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

Si on dérive par rapport à $x$ l'égalité $f(x,y) = f(y,x)$ on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x).$$

Prenons par exemple $f(x,y) = xy$ ; on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$. Pour cette fonction, on a aussi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x) = x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) = x$. Ceci prouve bien que les autres réponses ne conviennent pas.

**17** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction qui tend vers 0 lorsque $(x,y)$ tend vers $(0,0)$. L'une des limites ci-après n'existe pas forcément. Laquelle ?

❒ **a.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$ ❒ **b.** $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$

☒ **c.** $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ ❒ **d.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(y,x)$

En effet, la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)$ n'a pas forcément de limite quand $y$ tend vers 0 lorsque $x$ est fixé et non nul.

En revanche, l'application partielle $x \mapsto f(x,0)$ tend vers 0 en 0. Il en est de même de l'application partielle $y \mapsto f(0,y)$. Ces deux applications partielles sont des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

# Partie 3
# Algèbre

# 23 Théorie des ensembles

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La notion d'appartenance et d'inclusion
- Les opérations sur les ensembles : intersection, réunion,...
- Les injections, surjections, bijections
- Les images directes et réciproques de parties
- Les relations binaires sur un ensemble
- La notion de relation d'ordre

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 233. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Laquelle des fonctions suivantes établit une surjection de **R** sur **R** ?

❒ **a.** $x \mapsto e^x$ ❒ **b.** $x \mapsto x^2$ ❒ **c.** $x \mapsto x^3$ ❒ **d.** $|x|$

**2** Parmi les relations binaires suivantes, laquelle n'est pas réflexive ?

❒ **a.** le parallélisme, sur l'ensemble des droites du plan

❒ **b.** l'orthogonalité, sur l'ensemble des droites du plan

❒ **c.** la divisibilité, sur l'ensemble des entiers naturels non nuls

❒ **d.** l'égalité, dans **R**

**3** Si $f$ et $g$ sont deux bijections de **R** sur **R**, quelle est la bijection réciproque de $g \circ f$ ?

❒ **a.** $g^{-1} \circ f^{-1}$ ❒ **b.** $f^{-1} \circ g^{-1}$

❒ **c.** $g^{-1} + f^{-1}$ ❒ **d.** $f^{-1} \times g^{-1}$

**4** Soit $E, F, G$ trois ensembles. Alors $E \cap (F \cup G)$ vaut

❒ **a.** $(E \cup F) \cap (E \cup G)$ ❒ **b.** $(E \cap F) \cup (E \cap G)$

❒ **c.** $(E \cap F) \cup G$ ❒ **d.** $(E \cap F) \cap (E \cap G)$

**5** Si $f$ est une application de $E$ dans $F$, et si $A$ est une partie de $F$, alors l'ensemble $f^{-1}(A)$ est

❒ **a.** $\{x \in E, f(x) \in A\}$ ❒ **b.** $\{f^{-1}(x), x \in A\}$

❒ **c.** $A \cap F$ ❒ **d.** $A \cap E$

**6** Soit $f$ une application de $E$ dans $E$. Laquelle des conditions suivantes n'est pas suffisante pour affirmer que $f$ est injective ?

❒ **a.** $f$ est bijective ❒ **b.** $f \circ f$ est bijective

❒ **c.** $f \circ f$ est injective ❒ **d.** $f \circ f$ est surjective

**7** Soit $E$ l'ensemble $\{\{1, 2\}, 3\}$. Alors

❒ **a.** 1 appartient à $E$ ❒ **b.** $\{1\}$ est inclus dans $E$

❒ **c.** $\{1, 2\}$ appartient à $E$ ❒ **d.** $\{1, 2\}$ est inclus dans $E$

**8** Si $E$ est un ensemble et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de ses parties on a toujours

❒ **a.** $E \subset \mathscr{P}(E)$ ❒ **b.** $E \in \mathscr{P}(E)$

❒ **c.** $\{E\} \in \mathscr{P}(E)$ ❒ **d.** $E \cap \mathscr{P}(E)$ non vide

**9** Soit $f$ une application de $E$ dans $F$. Quelle condition est *nécessaire* pour que la fonction $f \circ f$ soit définie ?

❒ **a.** $E = F$ ❒ **b.** $f(E) \subset E$

❒ **c.** $f(E) \subset F$ ❒ **d.** $f^{-1}(F) \subset E$

**10** Soit $f$ une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $g$ la restriction de $f$ à $[0, +\infty[$. On peut dire que

❒ **a.** si $f$ est surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$, alors $g$ est surjective de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

❒ **b.** si $f$ est surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$, alors $g$ est surjective de $[0, +\infty[$ sur $\mathbf{R}$.

❒ **c.** si $f$ est bijective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$, alors $g$ est bijective de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

❒ **d.** si $f$ est injective, alors $g$ est injective

**11** Que vaut la réunion suivante : $\bigcup_{n \geqslant 1} \left[1, 1 + \frac{1}{n}\right[$ ?

❒ **a.** $\{1\}$ ❒ **b.** $[1, 2[$ ❒ **c.** $]1, 2[$ ❒ **d.** $[1, 2]$

**12** Soit $E, F, G, H$ quatre ensembles tels que $E \subset G$ et $F \subset H$. Laquelle des inclusions suivantes n'est pas vérifiée ?

❒ **a.** $(E \cap F) \subset (G \cap H)$ ❒ **b.** $(E \cup F) \subset (G \cup H)$

❒ **c.** $(E \setminus F) \subset (G \setminus H)$ ❒ **d.** $(E \times F) \subset (G \times H)$

**13** Lequel des ensembles suivants est le graphe d'une application de **R** dans **R** ?

❒ **a.** $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \ y^2 = x^2\}$

❒ **b.** $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \ y^2 = x\}$

❒ **c.** $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \ y = x^2\}$

❒ **d.** $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \ |y| = x^2\}$

**14** Dans lequel des ensembles ordonnés suivants existe-t-il des parties non vides et non minorées ?

❒ **a.** **N** muni de l'ordre usuel

❒ **b.** $\mathbf{N}^*$ muni de la divisibilité

❒ **c.** $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ muni de l'inclusion

❒ **d.** $]0, +\infty[$ muni de l'ordre usuel

# Combinatoire

24

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les propriétés axiomatiques de $\mathbf{N}$
- Le cardinal de la réunion de deux ensembles
- Le nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre
- Les coefficients binomiaux, la formule de Pascal
- Le cardinal de $\mathscr{P}(E)$
- La formule du binôme de Newton
- Les bijections entre ensembles finis

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 236. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Si $E$ est un ensemble fini de cardinal $n$, l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ est de cardinal

❒ **a.** $n^4$ ❒ **b.** $2^{2n}$ ❒ **c.** $2^{2^n}$ ❒ **d.** $n!^2$

**2** Combien y a-t-il de couples $(a, b)$ dans $\{0, \ldots, 10\}^2$ tels que $a + b = 10$ ?

❒ **a.** 2 ❒ **b.** 10 ❒ **c.** 11 ❒ **d.** 22

**3** Le nombre de mots de 3 lettres distinctes qu'on peut écrire avec les 26 lettres de l'alphabet est

❒ **a.** $\binom{26}{3}$ ❒ **b.** $3\binom{26}{3}$ ❒ **c.** $26 \times 25 \times 24$ ❒ **d.** $26^3 - 26$

**4** Quel est le cardinal de $\{0, 1, \ldots, 10\}^2 \setminus \{(k, k), k \in \{0, \ldots, 10\}\}$ ?

❒ **a.** 10 ❒ **b.** 89 ❒ **c.** 90 ❒ **d.** 110

**5** Soit $n \in \mathbf{N}$. Le nombre de bijections de $\{0, \ldots, n\}$ sur lui-même est

❒ **a.** $n!$ ❒ **b.** $(n + 1)!$ ❒ **c.** $n^n$ ❒ **d.** $(n + 1)^{n+1}$

**6** Le nombre d'entiers entre 1 et 60 qui ont la propriété d'être pairs ou d'être divisibles par 3 est

❒ **a.** 20 ❒ **b.** 30 ❒ **c.** 40 ❒ **d.** 50

**7** Si $n \geqslant 1$, la somme $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}$ vaut

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** $2^n$ ❒ **d.** $n!$

**8** Si $E$ et $F$ sont deux ensembles finis, le cardinal de $E \setminus F$ vaut

❒ **a.** $|E| - |F|$ ❒ **b.** $|E| - |E \cap F|$

❒ **c.** $|E| - |F| + |E \cap F|$ ❒ **d.** $|E| + |F| - |E \cap F|$

**9** Le nombre de parties de $\{1, 2, ..., n\}$ qui ne contiennent pas 1 est

❒ **a.** $2^n - 1$ ❒ **b.** $2^{n-1}$ ❒ **c.** $2^n - n$ ❒ **d.** $\binom{n}{n-1}$

**10** Pour $1 \leqslant k \leqslant n$ l'entier $k\binom{n}{k}$ est égal à

❒ **a.** $n\binom{n-1}{k-1}$ ❒ **b.** $n\binom{n-1}{k}$

❒ **c.** $n\binom{n}{n-k}$ ❒ **d.** $n\binom{n}{k-1}$

**11** Combien y a-t-il de $n$-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n)$ d'entiers entre 1 et 10 qui contiennent au moins un nombre pair ?

❒ **a.** $\dfrac{10^n}{2}$ ❒ **b.** $10^n - 5^n$ ❒ **c.** $\dfrac{10^n}{5^n} = 2^n$ ❒ **d.** $n^{10} - n^5$

**12** Si $E$ est un ensemble fini de cardinal $n$, le nombre d'applications de $E \times E$ dans $E$ est

❒ **a.** $n^3$ ❒ **b.** $n^{2n}$ ❒ **c.** $n^{n^2}$ ❒ **d.** $n^n$

**13** Soit $n \geqslant 2$. On note $E$ la fonction partie entière. Combien y a-t-il d'entiers $k$ tels que $\dfrac{n}{2} \leqslant k \leqslant n$ ?

❒ **a.** $E\left(\dfrac{n}{2}\right) + 1$ ❒ **b.** $E\left(\dfrac{n}{2}\right)$

❒ **c.** $E\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ ❒ **d.** $E\left(\dfrac{n}{2}\right) + \dfrac{1}{2}$

**14** Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x$ un réel. Combien vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k+1}$ ?

❒ **a.** $(1+x)^{2n+1}$ ❒ **b.** $x(1+x^2)^n$

❒ **c.** $2^n x^{2k+1}$ ❒ **d.** $(1+x^{2+1/k})^n$

**15** Soit $n \geqslant 1$. Combien y a t-il de surjections de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\{n+1, \ldots, 2n\}$ ?

❒ **a.** $2^n$ ❒ **b.** $\binom{2n}{n}$ ❒ **c.** $(2n)!$ ❒ **d.** $n!$

**16** Pour $p \in \mathbf{N}$, que vaut $\binom{p+3}{p} + \binom{p+3}{p+1}$ ?

❒ **a.** $\binom{p+3}{p+2}$ ❒ **b.** $\binom{p+4}{p+1}$

❒ **c.** $\binom{p+4}{p}$ ❒ **d.** $\binom{p+4}{2p+1}$

**17** Pour tout $n \geqslant 1$, la somme $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ est égale à

❒ **a.** $\dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$ ❒ **b.** $\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

❒ **c.** $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ❒ **d.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$

**18** Le nombre de suites strictement croissantes formées de 5 entiers choisis dans l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ est

❒ **a.** $\dfrac{10!}{5!}$ ❒ **b.** $\binom{10}{5}$ ❒ **c.** $10^5$ ❒ **d.** $5!$

**19** Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ANAGRAMME ?

❒ **a.** $\dfrac{9!}{3!\,2!}$ ❒ **b.** $\dfrac{9!}{3 \times 2}$ ❒ **c.** $\dfrac{5!}{3!\,2!}$ ❒ **d.** $\dfrac{5!}{3 \times 2}$

**20** Quel est le nombre de couples $(a, b)$ de $\mathbf{Z}^2$ tels que $\max(|a|, |b|) \leqslant n$ ?

❒ **a.** $2n$ ❒ **b.** $4n+2$ ❒ **c.** $(2n)^2$ ❒ **d.** $(2n+1)^2$

**21** Soit $n \geqslant 2$. Quel est le nombre de couples $(a, b)$ tels que $1 \leqslant a < b \leqslant n$ ?

❒ **a.** $n(n-1)$ ❒ **b.** $\binom{n}{2}$ ❒ **c.** $n-b$ ❒ **d.** $n(n-1)\binom{n}{2}$

**22** Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$ et $A$ une partie de $E$ de cardinal $p$. Combien y a-t-il de parties de $E$ qui contiennent $A$ ?

❒ **a.** $2^p$ ❒ **b.** $2^{n-p}$ ❒ **c.** $\binom{n}{p}$ ❒ **d.** $\sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k}$

**23** Soit $n$, $p$ dans $\mathbf{N}^*$. Lorsque $f$ est une application de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\{1, 2, \ldots, p\}$, à partir de quelle valeur de $n$ est-on en mesure d'affirmer qu'un des éléments de $\{1, 2, \ldots, p\}$ admet au moins trois antécédents ?

❒ **a.** $n \geqslant 3$ ❒ **b.** $n \geqslant p + 3$ ❒ **c.** $n \geqslant 2p + 1$ ❒ **d.** $n \geqslant 3p$

# Groupes, anneaux et corps

25

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les lois de composition interne
- La structure de groupe
- La notion de sous-groupe
- Les morphismes de groupes
- Les notions d'anneau, de sous-anneaux, de corps
- Les règles de calcul dans un anneau

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 241. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Dans un groupe dont la loi est notée multiplicativement, quel est l'inverse de l'élément $xyz$ ?

❒ **a.** $x^{-1}y^{-1}z^{-1}$ ❒ **b.** $z^{-1}y^{-1}x^{-1}$

❒ **c.** $x^{-1}z^{-1}y^{-1}$ ❒ **d.** $zyx$

**2** Laquelle des parties suivantes est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$ ?

❒ **a.** $\{-1, 0, 1\}$ ❒ **b.** l'ensemble des nombres pairs

❒ **c.** $\mathbf{N}$ ❒ **d.** l'ensemble des nombres impairs

**3** Dans un anneau non commutatif on développe $(x + y)^2$ en

❒ **a.** $x^2 + y^2$ ❒ **b.** $x^2 + 2xy + y^2$

❒ **c.** $x^2 + xy + yx + y^2$ ❒ **d.** $x^2 + xy + y^2$

**4** Lequel des ensembles suivants n'est pas un sous-corps de $\mathbf{C}$ ?

❒ **a.** $\mathbf{C}$ ❒ **b.** $\mathbf{R}$ ❒ **c.** $\mathbf{Q}$ ❒ **d.** $i\mathbf{R} \cup \mathbf{R}$

**5** Parmi les parties suivantes, laquelle est un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$ ?

❒ **a.** $\mathbf{R}^*$ ❒ **b.** $\mathbf{R}_+^*$ ❒ **c.** $\mathbf{Q}$ ❒ **d.** $\mathbf{N}$

**6** Un groupe multiplicatif $G$ est non commutatif lorsque

❒ **a.** $xy \neq yx$ pour tout couple $(x, y) \in G^2$

❒ **b.** $xy \neq yx$ pour tout couple $(x, y) \in G^2$ avec $x \neq y$

❒ **c.** il existe $(x, y) \in G^2$ tel que $xy \neq yx$

❒ **d.** il existe $(x, y) \in G^2$ tel que $xy = yx$

**7** Dans le groupe des bijections de $\mathbf{R}$ dans lui-même, quel est l'élément neutre ?

❒ **a.** $x \mapsto x$ ❒ **b.** $x \mapsto 0$ ❒ **c.** $x \mapsto 1$ ❒ **d.** $x \mapsto -x$

**8** Soit $E$ un ensemble et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Laquelle des lois de composition interne suivantes sur $\mathscr{P}(E)$ n'est pas associative ?

❒ **a.** la réunion ❒ **b.** l'intersection ❒ **c.** la différence

❒ **d.** la différence symétrique $\Delta$ définie par $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

**9** Parmi les applications suivantes, laquelle n'est pas un morphisme du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ dans lui-même ?

❒ **a.** $x \mapsto \ln x$ ❒ **b.** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ ❒ **c.** $x \mapsto \sqrt{x}$ ❒ **d.** $x \mapsto x$

**10** Laquelle des applications suivantes n'est pas un morphisme de groupes de $(\mathbf{C}, +)$ dans lui-même ?

❒ **a.** $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ ❒ **b.** $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ ❒ **c.** $z \mapsto \overline{z}$ ❒ **d.** $z \mapsto |z|$

**11** Soit $f$ un morphisme d'un groupe $G$ dans un groupe $H$. Laquelle des propriétés suivantes implique que $f$ est injectif ?

❒ **a.** $x = e_G \Longrightarrow f(x) = e_H$ ❒ **b.** $f(x) = e_H \Longrightarrow x = e_G$

❒ **c.** $x = y \Longrightarrow f(x) = f(y)$ ❒ **d.** $y \in H \Longrightarrow \exists x \in G,\ y = f(x)$

**12** Si $B$ est un sous-anneau d'un anneau $A$ alors on a l'implication

❒ **a.** $xy \in B \Longrightarrow (x \in B \text{ et } y \in B)$

❒ **b.** $(x \in A \text{ et } y \in B) \Longrightarrow xy \in B$

❒ **c.** $(xy \in B \text{ et } y \in B) \Longrightarrow x \in B$

❒ **d.** $(x \in B \text{ et } y \in B) \Longrightarrow xy \in B$

**13** Si $x$ et $y$ sont deux éléments d'un anneau commutatif tels que $x^2 = y^2$, alors

❒ **a.** $x = y$ ❒ **b.** $x = \pm y$ ❒ **c.** $|x| = |y|$

❒ **d.** on ne peut rien dire en général

**14** Soit $G$ un groupe dont la loi est notée multiplicativement et $a$ un élément de $G$. Laquelle des applications suivantes est toujours un morphisme de groupes de $G$ dans $G$ ?

❒ **a.** $f_1 : x \mapsto ax$ ❒ **b.** $f_2 : x \mapsto axa^{-1}$

❒ **c.** $f_3 : x \mapsto axa$ ❒ **d.** $f_4 : x \mapsto x^{-1}$

**15** Sur lequel des ensembles suivants la composition ne définit pas une loi de composition interne ?

❒ **a.** l'ensemble des bijections de **R** sur **R**

❒ **b.** l'ensemble de toutes les applications [0, 1] dans **R**

❒ **c.** l'ensemble des fonctions croissantes sur **R**

❒ **d.** l'ensemble des fonctions impaires de **R** dans **R**

**16** Dans lequel des anneaux suivants (avec les lois usuelles) peut-on avoir $ab = 0$ avec $a$ et $b$ non nuls ?

❒ **a.** **C** ❒ **b.** **Z** ❒ **c.** l'anneau des fonctions de **R** dans **R**

❒ **d.** l'anneau des fonctions polynomiales de **R** dans **R**

**17** Dans l'anneau des applications de **R** dans **R** une fonction $f$ est inversible si et seulement si

❒ **a.** $f$ est strictement positive

❒ **b.** $f$ est strictement positive ou strictement négative

❒ **c.** $f(x) \neq 0$ pour tout $x$

❒ **d.** il existe un réel $x$ tel que $f(x) \neq 0$

**18** Lequel des entiers suivants divise $2^{100} + 1$ ?

❒ **a.** $2^{50} + 1$ ❒ **b.** $2^{25} + 1$ ❒ **c.** $2^4 + 1$ ❒ **d.** $2^1 + 1$

**19** Si $x$ est un élément d'un corps distinct de 1, l'élément $x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{11}$ vaut

❒ **a.** $\dfrac{x - x^{13}}{1 - x^2}$ ❒ **b.** $\dfrac{1 - x^{12}}{1 - x}$ ❒ **c.** $x\dfrac{1 - x^{11}}{1 - x}$ ❒ **d.** $\dfrac{1 - x^6}{1 - x}$

**20** Laquelle des applications suivantes est un morphisme de corps de **C** dans **C** ?

❒ **a.** $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ ❒ **b.** $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ ❒ **c.** $z \mapsto \overline{z}$ ❒ **d.** $z \mapsto |z|$

# 26 Arithmétique de Z

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La propriétés de la divisibilité
- La division euclidienne
- La définition du pgcd et du ppcm
- Les nombres premiers
- Les nombres premiers entre eux et le théorème de Bezout
- Le lemme de Gauss
- L'algorithme d'Euclide

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 247. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Soit $n \geqslant 2$ un entier. Quel est le pgcd de $n$ et $2n - 1$ ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** $n$ ❒ **d.** $2n - 1$

**2** Dans l'algorithme d'Euclide pour les entiers 21 et 8 la première étape s'écrit $21 = 2 \times 8 + 5$. Quelle est la suivante ?

❒ **a.** $21 = 10 \times 2 + 1$ ❒ **b.** $21 = 4 \times 5 + 1$

❒ **c.** $8 = 4 \times 2 + 0$ ❒ **d.** $8 = 1 \times 5 + 3$

**3** Soit $a, b, c$ des entiers. Si $a$ divise $bc$, quelle condition permet d'affirmer que $a$ divise $c$ ?

❒ **a.** $a$ ne divise pas $b$ ❒ **b.** $c$ est premier

❒ **c.** $a$ est premier avec $b$ ❒ **d.** $a$ est premier avec $c$

**4** Quel est le pgcd de $10^5$ et de $5^{10}$ ?

❒ **a.** $2^2$ ❒ **b.** $2^5$ ❒ **c.** $5^5$ ❒ **d.** $5^{10}$

**5** Quel est le ppcm de $10^5$ et $5^{10}$ ?

❒ **a.** $10^5\,5^5$ ❒ **b.** $10^5\,5^{10}$ ❒ **c.** $10^{10}\,5^5$ ❒ **d.** $10^{10}\,5^{10}$

**6** Si $a$ et $b$ sont deux entiers dont le pgcd est 4, alors le pgcd de $a^2$ et $b^2$ vaut

❒ **a.** 2 ❒ **b.** 4 ❒ **c.** 16 ❒ **d.** $2ab$

**7** Soit $a$ un entier tel que 9 divise $a^2$. Alors

❒ **a.** $a$ est divisible par 3

❒ **b.** $a$ est divisible par 9

❒ **c.** $a$ est divisible par 3 et non divisible par 9

❒ **d.** $a$ est impair

**8** Le nombre de diviseurs de $10^n$ dans $\mathbf{N}^*$ est

❒ **a.** $n$ ❒ **b.** $n+1$ ❒ **c.** $n^2$ ❒ **d.** $(n+1)^2$

**9** Soit $a, b, c$ trois entiers tels que $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$ et $\operatorname{pgcd}(b, c) = 1$. Alors

❒ **a.** $\operatorname{pgcd}(a, c) = 1$ ❒ **b.** $\operatorname{pgcd}(ab, bc) = 1$

❒ **c.** $\operatorname{pgcd}(ac, b) = 1$ ❒ **d.** $\operatorname{pgcd}(a + c, b) = 1$

**10** Si $a, b$ sont deux entiers tels que $15a + 17b = 4$ alors

❒ **a.** $\operatorname{pgcd}(a, b) = 4$ ❒ **b.** $\operatorname{pgcd}(a, b) | 4$ ❒ **c.** $\operatorname{pgcd}(a, 17) = 4$

❒ **d.** une telle relation est impossible dans $\mathbf{Z}$

**11** Si $n$ est entier, $n$ et $n + 2$ sont premiers entre eux

❒ **a.** pour tout $n$ ❒ **b.** seulement pour $n$ premier

❒ **c.** seulement pour $n$ pair ❒ **d.** seulement pour $n$ impair

**12** Soit $a, b$ dans $\mathbf{N}^*$. Le plus petit entier naturel non nul $n$ tel que $an$ soit divisible par $b$ est

❒ **a.** $b$ ❒ **b.** $\operatorname{ppcm}(a, b)$ ❒ **c.** $\dfrac{b}{\operatorname{pgcd}(a, b)}$ ❒ **d.** $\dfrac{b}{\operatorname{ppcm}(a, b)}$

**13** Soit $a, b$ dans $\mathbf{N}^*$. Laquelle des conditions suivantes n'implique pas que $a$ et $b$ sont premiers entre eux ?

❒ **a.** $\operatorname{pgcd}(a^2, b^2) = 1$ ❒ **b.** $\operatorname{ppcm}(a, b) = ab$

❒ **c.** $\operatorname{pgcd}(a + 1, b + 1) = 1$ ❒ **d.** $\operatorname{pgcd}(2a, 2b) = 1$

**14** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si $k$ est un diviseur de $3^n + 1$ alors forcément

❐ **a.** $k$ est pair ❐ **b.** $k$ est impair
❐ **c.** $k$ est divisible par 3 ❐ **d.** $k$ n'est pas divisible par 3

**15** Soit $a, b$ deux entiers. Quels sont les entiers qui peuvent s'écrire sous la forme $ka + k'b$ avec $k, k'$ dans $\mathbf{Z}$ ?

❐ **a.** tous les entiers ❐ **b.** seulement le pgcd de $a$ et $b$
❐ **c.** les diviseurs du pgcd de $a$ et $b$ ❐ **d.** les multiples du pgcd de $a$ et $b$

**16** Soit $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}^*$. Combien y a-t-il d'entiers $q \in \mathbf{Z}$ tels que $|a - bq| < b$ ?

❐ **a.** 0 ou 1 ❐ **b.** 1 ou 2 ❐ **c.** 2 ❐ **d.** $b - 1$

**17** Par élimination, lequel des entiers suivants est premier ?

❐ **a.** $2^{127} - 1$ ❐ **b.** $3^{127} - 1$ ❐ **c.** $4^{127} - 1$ ❐ **d.** $5^{127} - 1$

**18** Soit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers. On suppose que $P(3/4) = 0$. Alors

❐ **a.** tous les $a_k$ sont divisibles par 4 ❐ **b.** $a_0$ est divisible par 4
❐ **c.** $a_n$ est divisible par 4 ❐ **d.** $a_0$ et $a_n$ sont divisibles par 4

**19** Soit $a, b$ dans $\mathbf{N}^*$. Laquelle des conditions suivantes n'implique pas que $a$ divise $b$ ?

❐ **a.** $\operatorname{pgcd}(a, b) = a$ ❐ **b.** $\operatorname{ppcm}(a, b) = b$ ❐ **c.** $a^2$ divise $b^2$
❐ **d.** tout diviseur premier de $a$ divise aussi $b$

# Polynômes

27

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La structure d'algèbre de $K[X]$
- Les propriétés du degré
- La division euclidienne
- Les racines des polynômes
- Les racines multiples
- La factorisation selon les racines
- La dérivation des polynômes
- Les relations entre coefficients et racines

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 251. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Le degré du polynôme $P = (X+1)^n - (X-1)^n$ est

❒ **a.** $n^2$ ❒ **b.** $2n$ ❒ **c.** $n$ ❒ **d.** $n-1$

**2** La somme des quatre racines complexes du polynôme $7X^4 + 2X^2 - 3X + 5$ vaut :

❒ **a.** $0$ ❒ **b.** $\dfrac{3}{5}$ ❒ **c.** $-\dfrac{2}{7}$ ❒ **d.** $-2$

**3** Soit $A, B$ deux polynômes, avec $\deg B = n \geqslant 1$. Combien y a-t-il de polynômes $Q$ tels que $\deg(A - BQ) < n$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** 2 ❒ **d.** une infinité

**4** Quelles sont les racines du polynôme $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X^2 - k^2)$ ?

❒ **a.** $1, 2, \ldots, n$ ❒ **b.** $-n, -(n-1), \ldots, -1, 1, \ldots, n$

❒ **c.** $(-1)^n (n!)^2$ ❒ **d.** $-n^2, -(n-1)^2, \ldots, -1, 1, \ldots, n^2$

**5** Dans la division euclidienne de $P = X^5 + 3X^2 + 4$ par $X + 1$, le reste vaut

❒ **a.** 6 ❒ **b.** 8 ❒ **c.** $X + 3$ ❒ **d.** $X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 4$

**6** Un polynôme réel qui admet une infinité de racines est

❒ **a.** nul ❒ **b.** constant ❒ **c.** scindé ❒ **d.** de degré $+\infty$

**7** Soit $P = (X - 1)(X + 2)^n \in \mathbf{R}[X]$ où $n \in \mathbf{N}$. Alors $P'(1)$ vaut

❒ **a.** 0 ❒ **b.** $3^n$ ❒ **c.** $\binom{n}{1}3^n$ ❒ **d.** $\binom{n}{n-1}3^n$

**8** Soit $P$ un polynôme complexe tel que 0 soit une racine de $P'$ (polynôme dérivé) d'ordre 3. Alors 0

❒ **a.** est une racine de $P$ d'ordre $P(0)$

❒ **b.** est une racine de $P$ d'ordre 2

❒ **c.** est une racine de $P$ d'ordre 4

❒ **d.** n'est pas forcément racine de $P$

**9** Quelle est la dérivée $k$-ième du polynôme $X^n$ (lorsque $k \leqslant n$) ?

❒ **a.** $X^{n-k}$ ❒ **b.** $k!\, X^{n-k}$

❒ **c.** $(n-k)!\, X^{n-k}$ ❒ **d.** $\dfrac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}$

**10** Soit $P$ un polynôme de degré $n$. Combien $P$ admet-il au plus de racines doubles ?

❒ **a.** $\sqrt{n}$ ❒ **b.** $\dfrac{n}{2}$ ❒ **c.** $n - 2$ ❒ **d.** $2n$

**11** Soit $P$ un polynôme complexe et $Q(X) = P(\lambda X)$ où $\lambda \in \mathbf{C}$ est non nul. Lorsque $a$ est une racine de $P$, laquelle des valeurs suivantes est racine de $Q$ ?

❒ **a.** $\lambda$ ❒ **b.** $a$ ❒ **c.** $\lambda a$ ❒ **d.** $\dfrac{a}{\lambda}$

**12** La fonction $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

❒ **a.** est une fonction polynomiale de degré $\dfrac{1}{2}$

❒ **b.** est une fonction polynomiale de degré 1

❒ **c.** est une fonction polynomiale de degré 2

❒ **d.** n'est pas une fonction polynomiale

**13** Quel est le coefficient de $X^n$ dans le polynôme $P = (1 + X + X^2 + \cdots + X^n)^2$ ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** $n$ ❒ **d.** $n + 1$

**14** Soit $P$ un polynôme unitaire à coefficients réels dont toutes les racines dans $\mathbf{C}$ sont de module 1. Alors son coefficient constant vaut

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 0 ❒ **c.** 1 ou $-1$

❒ **d.** un réel quelconque de $[-1, 1]$

**15** Si $P$ et $Q$ sont deux polynômes de degré $n$, quel est le degré de $PQ' - P'Q$ ?

❒ **a.** $n^2 - n$ ❒ **b.** $n^2 - n - 1$ ❒ **c.** $2n - 1$

❒ **d.** il est inférieur à $2n - 2$

**16** Soit $R$ le reste de la division euclidienne de $X^n + 1$ par $X^2 - 1$. Combien vaut $R(1)$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** $X + 2$ ❒ **d.** $(-1)^n$

**17** Soit $P = 1 + 2(X - 1)^2 + 8(X - 1)^4 \in \mathbf{R}[X]$. Que vaut $P''(1)$ ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** 4 ❒ **d.** 8

**18** On écrit la division euclidienne d'un polynôme $A$ de degré 8 par un polynôme $B$ de degré 2. Le quotient est de degré

❒ **a.** strictement inférieur à 2 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** 4 ❒ **d.** 6

**19** Combien y a-t-il de polynômes $P$ à coefficients réels de degré 3 tels que $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 4$ ?

❒ **a.** aucun ❒ **b.** un seul

❒ **c.** 2 ❒ **d.** une infinité

**20** Soit $n \geqslant 1$. Combien vaut $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(2 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$ ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 0 ❒ **c.** $3^{n/2}$ ❒ **d.** $2^n - 1$

**21** Si $a, b$ et $c$ sont les trois racines complexes de $P = X^3 + 2X^2 - X + 1$, que vaut $a^2 + b^2 + c^2$ ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** 4 ❒ **d.** 6

**22** Soit $P$ un polynôme complexe, $A$ l'ensemble des racines de $P(X) - X$ et $B$ l'ensemble des racines de $P(P(X)) - X$. Alors on a

❒ **a.** $A = B$ ❒ **b.** $A \subset B$ ❒ **c.** $B \subset A$

❒ **d.** $A$ et $B$ sont complémentaires.

**23** Soit $P, Q, R$ trois polynômes complexes. À quelle condition sur $Q$, l'égalité $P(Q(X)) = R(Q(X))$ implique-t-elle que $P = R$ ?

❒ **a.** $Q = 1$ ❒ **b.** $Q$ est constant

❒ **c.** $Q$ est non constant ❒ **d.** $Q$ est non nul

**24** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. À l'aide de la formule de Leibniz, que vaut la dérivée $n$-ième en 1 du polynôme réel $P(X) = (X - 1)^n(X + 2)$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** $n!$ ❒ **d.** $3n!$

**25** Soit $P$ scindé à racines simples dans $\mathbf{C}[X]$. À quelle condition $P(X^2)$ est-il aussi scindé à racines simples ?

❒ **a.** c'est toujours le cas

❒ **b.** ce n'est jamais le cas

❒ **c.** uniquement si $P(X^2)$ est pair

❒ **d.** uniquement si 0 n'est pas racine de $P$

# Arithmétique des polynômes - Fractions rationnelles

28

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La factorisation dans $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$
- Le pgcd des polynômes
- Le théorème de Gauss
- Les fractions rationnelles
- La décomposition en éléments simples
- La décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 257. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** La fraction rationnelle $\dfrac{(X+1)^2(X-1)}{(X+1)(X^2+3)}$ est de degré

❒ **a.** $-1$ ❒ **b.** $0$ ❒ **c.** $1$ ❒ **d.** $3$

**2** Le polynôme $X^2 - 2\cos\theta X + 1$ est irréductible dans $\mathbf{R}[X]$

❒ **a.** pour tout $\theta$ ❒ **b.** pour $\theta$ non nul

❒ **c.** pour $\theta \notin \pi\mathbf{Z}$ ❒ **d.** pour aucune valeur de $\theta$

**3** Soit $P$, $Q$ des polynômes tels que $XP(X) = (X-1)Q(X)$. Quelle condition permet de dire que $P$ divise $Q$ ?

❒ **a.** $P(0) = 0$ ❒ **b.** $P(1) = 0$ ❒ **c.** $P(0) \neq 0$ ❒ **d.** $P(1) \neq 0$

**4** Le polynôme $X^4 + pX^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbf{R}[X]$

❒ **a.** pour tout réel $p$ ❒ **b.** pour aucun réel $p$

❒ **c.** pour $p > 0$ ❒ **d.** lorsque $p^2 < 4$

**5** Soit $P$ un polynôme complexe de degré $\geqslant 1$. Les polynômes $P$ et $P'$ sont premiers entre eux si et seulement si

❒ **a.** $\deg P = 1$ ❒ **b.** $P$ admet une unique racine

❒ **c.** $P'$ ne divise pas $P$ ❒ **d.** toutes les racines de $P$ sont simples

**6** Soit $P$ un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré $n$ qui admet $p$ racines distinctes. Le degré du pgcd de $P$ et $P'$ est égal à

❒ **a.** $p$ ❒ **b.** $n - p$ ❒ **c.** $\dfrac{n}{p}$ ❒ **d.** $\operatorname{pgcd}(n, p)$

**7** Soit $P, Q$ deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$, A la proposition « $\operatorname{pgcd}(P, Q) = 1$ » et B la proposition « $P$ et $Q$ n'ont pas de racine réelle commune ». Alors

❒ **a.** A implique B ❒ **b.** A et B sont équivalentes

❒ **c.** B implique A ❒ **d.** il n'y a pas d'implication entre A et B

**8** Un polynôme réel $P$ qui n'a pas de racine réelle est

❒ **a.** irréductible ❒ **b.** de degré 2 ❒ **c.** de degré pair

❒ **d.** de coefficient dominant strictement positif

**9** Soit $P$ un polynôme dans $\mathbf{C}[X]$. Quand peut-on trouver une relation de la forme $UP + VP' = 1$ avec $U, V$ dans $\mathbf{C}[X]$ ?

❒ **a.** pour tout $P$ ❒ **b.** lorsque $P$ est à racines simples

❒ **c.** lorsque $\deg P = 1$ ❒ **d.** lorsque $P$ n'a qu'une seule racine

**10** Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle de degré $n$. On suppose que $P(0)$ et $Q(0)$ sont non nuls. Quel est le degré de $F(1/X)$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** $-n$ ❒ **c.** $n - 1$ ❒ **d.** $1 - n$

**11** Une fraction rationnelle réelle $R$ est de degré strictement négatif si et seulement si

❒ **a.** $R(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers l'infini

❒ **b.** $\dfrac{1}{R}$ est un polynôme

❒ **c.** $R$ n'admet pas de racines

❒ **d.** $R$ n'admet pas de pôles

**12** Soit $R(X) = \dfrac{2X + 2}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)}$. Quel est le coefficient de $\dfrac{1}{X - 1}$ dans la décomposition en éléments simples de $R$ ?

❒ **a.** 2 ❒ **b.** $\dfrac{1}{2}$ ❒ **c.** $-2$ ❒ **d.** $-\dfrac{1}{2}$

**13** Soit $P$ un polynôme de degré $n$.

La partie entière de la fraction rationnelle $F = \left(P + \dfrac{1}{(X-1)^2}\right)^2$ est égale à $P^2$

❒ **a.** lorsque $n \leqslant 1$ ❒ **b.** lorsque $n \leqslant 2$ ❒ **c.** pour tout $n$

❒ **d.** lorsque 1 n'est pas racine de $P$

**14** Le polynôme réel $P(X) = X^3 + pX + 1$ admet au moins une racine réelle

❒ **a.** lorsque $p^2 - 4X \leqslant 0$ ❒ **b.** lorsque $p \leqslant 0$

❒ **c.** pour toute valeur de $p$ ❒ **d.** pour aucune valeur de $p$

**15** Soit $P = (X-1)^3(X-2)^4(X+1)$. Quel est le coefficient de $\dfrac{1}{X-1}$ dans la décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{P'}{P}$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** 2 ❒ **d.** 3

**16** Soit $F = \dfrac{(X-1)^2(X^2+X-2)}{(X^2-1)^3}$. On note $R$ l'ensemble des racines réelles et $P$ l'ensemble des pôles réels de $F$. On a

❒ **a.** $R = \{1, -2\}$ et $P = \{1, -1\}$ ❒ **b.** $R$ est vide et $P = \{1, -1\}$

❒ **c.** $R = \{1, -2\}$ et $P = \{-1\}$ ❒ **d.** $R = \{-2\}$ et $P = \{-1\}$

**17** Soit $P$ un polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$. Quels sont les pôles de $\dfrac{P'}{P}$ ?

❒ **a.** les racines de $P$ ❒ **b.** les racines simples de $P$

❒ **c.** les racines multiples de $P$ ❒ **d.** les pôles de $P'$

**18** Soit $P$ un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré $n$ qui admet $n$ racines distinctes. Le nombre de polynômes unitaires qui divisent $P$ est

❒ **a.** $n$ ❒ **b.** $n+1$ ❒ **c.** $2^n$ ❒ **d.** une infinité

**19** Soit $P$ un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré $n$ dont les racines sont toutes simples. Lequel des polynômes suivants est forcément à racines simples ?

❒ **a.** $P(X^2)$ ❒ **b.** $P(X)^2$ ❒ **c.** $P(X+2)$ ❒ **d.** $P(X)+2$

**20** Soit $R(X) = \dfrac{X+3}{X(X^2+1)(X^2-1)}$. Quel est le coefficient de $\dfrac{1}{X-1}$ dans la décomposition en éléments simples de $R$ ?

❒ **a.** 1/4 ❒ **b.** 0 ❒ **c.** 2 ❒ **d.** 1

# 29 Généralités sur les espaces vectoriels

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La structure d'espace vectoriel
- La notion de sous-espace vectoriel
- Les combinaisons linéaires
- Les sommes et sommes directes de sous-espaces
- Les applications linéaires
- La structure de $\mathcal{L}(E)$
- Les projecteurs
- L'image et le noyau d'une application linéaire

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 262. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**Notations.** Dans les questions qui suivent, sauf mention contraire, $E$ désigne un espace vectoriel réel quelconque. On note classiquement $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de $E$.

**1** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $u^2 = -\,\mathrm{Id}$, que vaut $(u^2 + u)^2$ ?

❒ **a.** $-2\,\mathrm{Id}$ ❒ **b.** $-2u$ ❒ **c.** $2\,\mathrm{Id} - 2u$ ❒ **d.** $0$

**2** Laquelle des parties suivantes de $\mathbf{R}^2$ est un sous-espace vectoriel ?

❒ **a.** $\{(x, y),\ y = 2x\}$ ❒ **b.** $\{(x, y),\ y + x = 1\}$

❒ **c.** $\{(x, y),\ yx = 1\}$ ❒ **d.** $\{(x, y),\ yx = 0\}$

**3** Laquelle des applications suivantes est linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ ?

❒ **a.** $f_1 : (x, y) \mapsto x$ ❒ **b.** $f_2 : (x, y) \mapsto xy$

❒ **c.** $f_3 : (x, y) \mapsto x + y + 1$ ❒ **d.** $f_4 : (x, y) \mapsto (x + y)(x - y)$

**4** Soit $E, F$ deux espaces vectoriels réels, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(e_1, ..., e_p)$ une famille de vecteurs de $E$. On a $u(\text{Vect}(e_1, ..., e_p)) = \text{Vect}(u(e_1), ..., u(e_p))$

❒ **a.** pour toute application linéaire $u$

❒ **b.** lorsque $u$ est injective

❒ **c.** lorsque $u$ est surjective

❒ **d.** lorsque $\text{Im}\, u \subset \text{Vect}(e_1, ..., e_p)$

**5** Laquelle des parties suivantes n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ ?

❒ **a.** l'ensemble des fonctions $f$ telles que $f(0) = 0$

❒ **b.** l'ensemble des fonctions paires

❒ **c.** l'ensemble des fonctions croissantes

❒ **d.** l'ensemble des fonctions polynomiales

**6** Lequel des ensembles suivants est un supplémentaire dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ de la droite $D = \{(x, 0),\ x \in \mathbf{R}\}$ ?

❒ **a.** $\{(x, x),\ x \in \mathbf{R}\}$ ❒ **b.** $\{(x, y),\ y \neq 0\}$

❒ **c.** $\{(x, 1),\ x \in \mathbf{R}\}$ ❒ **d.** $\{(0, 1)\}$

**7** Soit $u$ un endomorphisme de $E$. Quelle propriété est toujours vérifiée ?

❒ **a.** $\text{Im}\, u \subset \text{Im}\, u^2$ ❒ **b.** $\text{Im}\, u^2 \subset \text{Im}\, u$

❒ **c.** $\text{Im}\, u^2 \cap \text{Im}\, u = \{0\}$ ❒ **d.** $E = \text{Im}\, u + \text{Im}\, u^2$

**8** Si $u$ est un endomorphisme de $E$ on a toujours

❒ **a.** $\text{Ker}\, u \subset \text{Ker}\, u^2$ ❒ **b.** $\text{Ker}\, u^2 \subset \text{Ker}\, u$

❒ **c.** $\text{Ker}\, u = \text{Ker}\, u^2$ ❒ **d.** $\text{Ker}\, u \cap \text{Ker}\, u^2 = \{0\}$

**9** Lequel des ensembles suivants est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ ?

❒ **a.** l'ensemble des projecteurs

❒ **b.** l'ensemble des symétries

❒ **c.** l'ensemble des homothéties

❒ **d.** l'ensemble des automorphismes de $E$

**10** Dans l'espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, laquelle des fonctions suivantes est combinaison linéaire des fonctions $f_1 : x \mapsto \sin x$, $f_2 : x \mapsto \sin 2x$ et $f_3 : x \mapsto \sin 3x$ ?

❒ **a.** $x \mapsto \cos x$ ❒ **b.** $x \mapsto x \cos x$

❒ **c.** $x \mapsto \sin x \cos x$ ❒ **d.** $x \mapsto \tan x$

**11** Laquelle des applications suivantes est un projecteur de $\mathbf{R}^2$ ?

❒ **a.** $p_1 : (x, y) \mapsto (y, x)$ ❒ **b.** $p_2 : (x, y) \mapsto (1, 0)$

❒ **c.** $p_3 : (x, y) \mapsto (0, x)$ ❒ **d.** $p_4 : (x, y) \mapsto (0, y)$

**12** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ et $x$ un vecteur de $E$ tel que $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors pour $n \in \mathbf{N}$, $u^n(x)$ vaut

❒ **a.** $\lambda x^n$ ❒ **b.** $\lambda^n x$ ❒ **c.** $\lambda x$ ❒ **d.** $\lambda^n x^n$

**13** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, $u$ un endomorphisme de $E$, et $v$ la restriction de $u$ à $F$. Alors

❒ **a.** $v \in \mathscr{L}(F)$ ❒ **b.** $v \in \mathscr{L}(F, E)$ ❒ **c.** $v \in \mathscr{L}(E, F)$

❒ **d.** $v$ n'est pas forcément linéaire

**14** Soit $s$ une symétrie de l'espace vectoriel $E$. Laquelle des applications suivantes est un projecteur ?

❒ **a.** $s + \mathrm{Id}$ ❒ **b.** $\frac{1}{2}(\mathrm{Id} - s)$ ❒ **c.** $s^2 - s$ ❒ **d.** $s^2 = s$

**15** Soit $g$ non nulle dans $\mathscr{L}(E)$. Laquelle des applications suivantes de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$ n'est pas linéaire ?

❒ **a.** $f \mapsto g \circ f$ ❒ **b.** $f \mapsto f \circ g$

❒ **c.** $f \mapsto g + f$ ❒ **d.** $f \mapsto g \circ f \circ g$

**16** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $F$ un sous-espace de $E$. À quelle condition la restriction de $u$ à $F$ est-elle injective ?

❒ **a.** si $\mathrm{Ker}\, u = F$ ❒ **b.** si $F$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}\, u$

❒ **c.** si $F \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$ ❒ **d.** si $F \cap \mathrm{Ker}\, u = \emptyset$

**17** Lequel des sous-ensembles suivants de $\mathscr{L}(E)$ n'est pas stable par l'application $f \mapsto f \circ f$ ?

❒ **a.** l'ensemble des projecteurs

❒ **b.** l'ensemble des symétries

❒ **c.** l'ensemble des endomorphismes non nuls

❒ **d.** l'ensemble des homothéties

**18** Si $u, v$ sont deux endomorphismes de $E$ tels que $v = u \circ v$, alors

❒ **a.** $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$ ❒ **b.** $u = \operatorname{Id}$ ❒ **c.** $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$

❒ **d.** la restriction de $u$ à $\operatorname{Im} v$ est l'identité

**19** Soit $(e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$. Lequel des sous-espaces suivants n'est pas un supplémentaire de la droite $\operatorname{Vect}(e_1)$ ?

❒ **a.** $F_1 = \operatorname{Vect}(e_2, e_3)$ ❒ **b.** $F_2 = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2, e_1 + e_3)$

❒ **c.** $F_3 = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ ❒ **d.** $F_4 = \operatorname{Vect}(e_2 + e_3, e_2 - e_3)$

# 30 Espaces vectoriels de dimension finie

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Les familles génératrices et les bases
- Les familles libres et liées
- La théorie de la dimension
- La dimension d'une somme et d'un produit
- La dimension d'un sous-espace
- Le théorème de la base incomplète

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 267. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**Notations.** Dans toutes les questions, sauf mention contraire, $E$ est un espace vectoriel réel de dimension finie.

**1** Soit $E, F$ deux espaces vectoriels de dimension finie. La dimension de $E \times F$ est

❒ **a.** $\dim E + \dim F$ ❒ **b.** $\dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$

❒ **c.** $\dim E \times \dim F$ ❒ **d.** $\max(\dim E, \dim F)$

**2** Soit $E$ un espace vectoriel et $(e_1, ..., e_p)$ une famille génératrice de $E$. Alors

❒ **a.** $E$ est de dimension finie et $\dim E = p$

❒ **b.** $E$ est de dimension finie et $\dim E \leqslant p$

❒ **c.** $E$ est de dimension finie et $\dim E \geqslant p$

❒ **d.** $E$ n'est pas nécessairement de dimension finie

**3** On considère $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (1,1,1)$ dans $\mathbf{R}^3$. Alors la famille $(e_1, e_2, e_3)$ est

❒ **a.** génératrice mais pas libre ❒ **b.** libre mais pas génératrice

❒ **c.** une base ❒ **d.** ni libre, ni génératrice

**4** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Quelle affirmation est vraie ?

❒ **a.** toute base de $E$ contient une base de $F$

❒ **b.** toute base de $F$ est contenue dans une base de $E$

❒ **c.** toute famille génératrice de $E$ contient une famille génératrice de $F$

❒ **d.** toute base de $E$ contient une famille génératrice de $F$

**5** Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une famille de vecteurs de $E$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que cette famille est liée ?

❒ **a.** $(e_1, e_2, ..., e_p)$ engendre $E$

❒ **b.** $(e_1, e_2, ..., e_{p-1})$ engendre $E$

❒ **c.** $(e_1, e_2, ..., e_p)$ n'engendre pas $E$

❒ **d.** $(e_1, e_2, ..., e_{p-1})$ n'engendre pas $E$

**6** Soit $F, G, G'$ des sous-espaces de $E$ tels que $E = F \oplus G = F \oplus G'$. À quelle condition peut-on dire que $G = G'$ ?

❒ **a.** c'est toujours le cas ❒ **b.** si $G \subset G'$

❒ **c.** si $F$ est non nul ❒ **d.** si $G + G' = E$

**7** Soit $x_1, ..., x_n$ des vecteurs de $E$. Laquelle des conditions suivantes assure que $x_n$ est combinaison linéaire de $x_1, ..., x_{n-1}$ ?

❒ **a.** la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée

❒ **b.** la famille $(x_1, ..., x_{n-1})$ est libre

❒ **c.** la famille $(x_1, ..., x_{n-1})$ est libre et la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée

❒ **d.** la famille $(x_1, ..., x_{n-1})$ est liée et la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre

**8** Soit $(e_1, ..., e_n)$ et $(f_1, ..., f_n)$ deux bases de $E$. La famille $(e_1, ..., e_{n-1})$ peut être complétée en une base

❒ **a.** uniquement par le vecteur $e_n$

❒ **b.** par n'importe lequel des vecteurs $f_1, ..., f_n$

❒ **c.** par au moins un des vecteurs $f_1, ..., f_n$

❒ **d.** par aucun des vecteurs de la famille $(f_1, ..., f_n)$

**9** On suppose que $(e_1, e_2, e_3)$ engendre l'espace vectoriel $E$. Laquelle des conditions suivantes assure que $E$ est de dimension 3 ?

❒ **a.** $(e_1, e_2)$ est libre

❒ **b.** les familles $(e_1, e_2)$, $(e_2, e_3)$ et $(e_1, e_3)$ sont libres

❒ **c.** $(e_1, e_2)$ n'engendre pas $E$

❒ **d.** les familles $(e_1, e_2)$, $(e_2, e_3)$ et $(e_1, e_3)$ n'engendrent pas $E$.

**10** Soit $e_1, e_2, e_3, e_4$ des vecteurs de $E$. On suppose que les familles $(e_1, e_2, e_3)$ et $(e_3, e_4)$ sont libres. La dimension de $E$ est forcément supérieure ou égale à

❒ **a.** 2 ❒ **b.** 3 ❒ **c.** 4 ❒ **d.** 5

**11** Soit $E$ un espace vectoriel dans lequel toute famille de 3 vecteurs est liée. Alors

❒ **a.** $E$ est forcément de dimension finie et $\dim E \leqslant 3$

❒ **b.** $E$ est forcément de dimension finie et $\dim E \leqslant 2$

❒ **c.** $E$ est forcément de dimension finie et $\dim E \geqslant 3$

❒ **d.** $E$ n'est pas forcément de dimension finie

**12** Soit $(e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace $E$ de dimension 3 et $P$ un plan de $E$. À quelle condition $(e_1, e_2)$ est-elle une base de $P$ ?

❒ **a.** lorsque $e_3$ n'est pas dans $P$

❒ **b.** lorsque $e_1$ et $e_2$ sont dans $P$

❒ **c.** lorsque $e_3$ est dans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$

❒ **d.** lorsque $(e_1, e_2, e_3)$ est génératrice de $P$

**13** Soit $F$,$G$ deux sous-espaces de $E$. Avec quelle hypothèse peut-on trouver à coup sûr un vecteur non nul dans $F \cap G$ ?

❒ **a.** $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ ❒ **b.** $\dim F + \dim G = \dim E$

❒ **c.** $\dim F + \dim G > \dim E$ ❒ **d.** $\dim F = \dim G$

**14** Soit $F, G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, de dimensions respectives $p$ et $q$, et tels que $F + G = E$. La dimension d'un supplémentaire de $F \cap G$ dans $F$ est :

❒ **a.** $q$ ❒ **b.** 0 ❒ **c.** $n - q$ ❒ **d.** $n + q$

**15** Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces de dimension 3 de $\mathbf{R}^5$. La dimension $p$ de $F \cap G$ peut valoir

❒ **a.** 1 ou 2 ❒ **b.** 1, 2 ou 3

❒ **c.** 0, 1, ou 2 ❒ **d.** 0, 1, 2 ou 3

**16** Soit $F, G$ deux sous-espaces de $E$, $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille libre de $F$ et $(g_1, \ldots, g_q)$ une famille libre de $G$. Quelle condition suffit pour dire que $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est libre ?

❒ **a.** $F + G = E$ ❒ **b.** $F \cap G = \{0\}$ ❒ **c.** $F \subset G$

❒ **d.** $g_1, \ldots, g_q$ ne sont pas dans $F$ et $f_1, \ldots, f_p$ ne sont pas dans $G$

**17** Soit $F_1, ..., F_n$ des sous-espaces de $E$ qui vérifient $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n \subset E$. On est certain que deux des $F_i$ au moins sont égaux dès que

❒ **a.** $\dim E \leqslant n - 2$ ❒ **b.** $\dim E \leqslant n - 1$

❒ **c.** $\dim E \leqslant n$ ❒ **d.** $\dim E \leqslant n + 1$

**18** Soit $e_1, e_2, e_3$ trois vecteurs de $E$. On suppose que les familles $(e_1, e_2)$ et $(e_2, e_3)$ sont libres. À quelle condition supplémentaire est-on sûr que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) \cap \mathrm{Vect}(e_2, e_3) = \mathrm{Vect}(e_2)$ ?

❒ **a.** c'est toujours le cas ❒ **b.** lorsque $e_1 \neq e_3$

❒ **c.** lorsque $(e_1, e_3)$ est libre ❒ **d.** lorsque $(e_1, e_2, e_3)$ est libre

# 31 Applications linéaires en dimension finie

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La définition d'un endomorphisme sur une base
- Le noyau et l'image d'une application linéaire
- Le théorème du rang
- Les caractérisations des isomorphimes
- Les différentes propriétés du rang
- La dimension de $\mathcal{L}(E)$ et de $\mathcal{L}(E, F)$
- La structure de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$
- Les formes linéaires et les hyperplans

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 273. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**Notations.** Dans toutes les questions, sauf mention contraire, $E$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

**1** Soit $u, v$ deux endomorphismes de $E$. Si $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$, que peut-on en déduire ?

❒ **a.** $u = v$ ❒ **b.** $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$

❒ **c.** $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v$ ❒ **d.** $u$ et $v$ sont surjectives

**2** Soit $(e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Combien y a-t-il d'endomorphismes de $\mathbf{R}^2$ qui échangent $e_1$ et $e_2$ ?

❒ **a.** aucun ❒ **b.** 1 ❒ **c.** 2 ❒ **d.** une infinité

**3** Soit $v$ dans $\mathscr{L}(E)$ et $u$ dans $\mathrm{GL}(E)$. Le rang de $u \circ v \circ u^{-1}$ est égal à

❒ **a.** $\dim E$ ❒ **b.** $\operatorname{rg} v$ ❒ **c.** $\operatorname{rg} u$ ❒ **d.** $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v + \operatorname{rg} u^{-1}$

**4** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ de rang $r$. Quel est le rang maximal que peut avoir $u^2$ ?

❐ **a.** $r^2$ ❐ **b.** $2r$ ❐ **c.** $r$ ❐ **d.** $r-2$

**5** Soit $f, g$ deux endomorphismes de $E$. Laquelle des conditions suivantes implique que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$ ?

❐ **a.** $f^2 = g^2$ ❐ **b.** $f \circ g = g \circ f$

❐ **c.** $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ ❐ **d.** $\operatorname{rg}(f + \mathrm{Id}_E) = \operatorname{rg}(g + \mathrm{Id}_E)$

**6** Soit $f$ une forme linéaire sur $E$ et $u$ dans $\mathscr{L}(E)$. Laquelle des applications suivantes est aussi une forme linéaire sur $E$ ?

❐ **a.** $f \circ u$ ❐ **b.** $u \circ f$ ❐ **c.** $f \circ f$ ❐ **d.** $f^2$

**7** Soit $A$ une famille de vecteurs de $E$. À quelle condition peut-on trouver un endomorphisme de $E$ qui s'annule en tout vecteur de $A$ mais qui n'est pas identiquement nul ?

❐ **a.** si $A$ est libre ❐ **b.** si $A$ est génératrice

❐ **c.** si $A$ n'est pas libre ❐ **d.** si $A$ n'est pas génératrice

**8** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ tel que $u(F) = F$. Alors

❐ **a.** $\operatorname{Im} u = F$

❐ **b.** la restriction de $u$ à $F$ est l'identité

❐ **c.** la restriction de $u$ à $F$ est un automorphisme de $F$

❐ **d.** $F \subset \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$

**9** Soit $\varphi$ une forme linéaire non nulle de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. Alors $\varphi$ est nécessairement

❐ **a.** injective ❐ **b.** surjective

❐ **c.** constante ❐ **d.** un projecteur

**10** Si $E$ est de dimension $n$, la dimension de $\mathscr{L}(E \times E)$ est

❐ **a.** $2n^2$ ❐ **b.** $4n^2$ ❐ **c.** $2^{n^2}$ ❐ **d.** $n^4$

**11** Si $E$ est de dimension $n$, l'espace $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$ est de dimension

❐ **a.** $2n^2$ ❐ **b.** $n^4$ ❐ **c.** $2^{2^n}$ ❐ **d.** $4^n$

**12** Soit $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs de $E$. On suppose que $u$ est un endomorphisme de $E$ qui vérifie $u(e_1) = e_2,\ u(e_2) = e_3, \dots,\ u(e_{p-1}) = e_p$ et enfin $u(e_p) = e_1$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $u$ est bijectif ?

❒ **a.** $p \geqslant \dim E$ ❒ **b.** $p = \dim E$

❒ **c.** $(e_1, ..., e_p)$ est libre ❒ **d.** $(e_1, ..., e_p)$ est génératrice

**13** Soit $u, v$ deux endomorphismes de $E$. Laquelle des propriétés suivantes implique que $u = 0$ ?

❒ **a.** $u^2 = 0$ ❒ **b.** $u \circ v = 0$ et $v \neq 0$

❒ **c.** $v \circ u = 0$ et $\operatorname{Im} v = E$ ❒ **d.** $u \circ v = v \circ u$

**14** Soit $u$ dans $\mathscr{L}(E)$. Laquelle des propositions suivantes est fausse ?

❒ **a.** si $u$ est injectif, alors $u$ est inversible

❒ **b.** s'il existe $v$ dans $\mathscr{L}(E)$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors $u$ est inversible

❒ **c.** si $u + \mathrm{Id}_E$ est inversible, alors $u$ est inversible

❒ **d.** si $u^2$ est inversible, alors $u$ est inversible

**15** Quelle est la dimension de l'espace des polynômes réels $P$ de degré inférieur ou égal à 4 tels que $\displaystyle\int_0^1 P = 0$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** 3 ❒ **d.** 4

**16** Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ telle que $u^2 = 0$. Alors forcément

❒ **a.** $\operatorname{rg} u = 0$ ❒ **b.** $\operatorname{rg} u \leqslant 1$ ❒ **c.** $\operatorname{rg} u \leqslant 2$ ❒ **d.** $\operatorname{rg} u = 4$

**17** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ et $v$ la restriction de $u$ à $\operatorname{Im} u$. À quelle condition $v$ est-il un isomorphisme de $\operatorname{Im} u$ sur lui-même ?

❒ **a.** c'est toujours le cas

❒ **b.** lorsque $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont supplémentaires

❒ **c.** lorsque $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$

❒ **d.** lorsque $u$ n'est pas nul

**18** Soit $u, v$ deux endomorphismes de $E$. On suppose que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$. Alors

❒ **a.** $v$ est inversible ❒ **b.** $v$ est nul

❒ **c.** $\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$ ❒ **d.** $\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$

# Calcul matriciel

32

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- Le calcul du produit matriciel
- La base des matrices élémentaires $E_{ij}$ et leurs produits
- Les matrices diagonales, triangulaires supérieures ou inférieures
- La transposition
- Le groupe des matrices inversibles

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 277. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**Notations.** Dans toutes les questions qui suivent les matrices qui interviennent sont supposées être à coefficients réels. On note $E_{ij}$ les matrices de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

**1** Si $M$ est une matrice $3 \times 3$, combien de produits de coefficients doit-on effectuer pour calculer $M^2$ ?

❒ **a.** 9 ❒ **b.** 18 ❒ **c.** 27 ❒ **d.** 81

**2** Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice $(M - I_3)(M - 2I_3)(M - 3I_3)$ vaut

❒ **a.** $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

**3** Une matrice triangulaire supérieure et symétrique est

❒ **a.** nulle ❒ **b.** triangulaire inférieure

❒ **c.** diagonale ❒ **d.** antisymétrique

**4** Combien vaut la matrice $(E_{12} + E_{21})^2$ ?

❒ **a.** $2E_{11}$ ❒ **b.** $2E_{22}$ ❒ **c.** $E_{12} + E_{21}$ ❒ **d.** $E_{11} + E_{22}$

**5** La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

❒ **a.** $A$ est triangulaire supérieure ❒ **b.** $c = 0$ et $a = d$

❒ **c.** $a = c = d = 0$ ❒ **d.** $b = 0$

**6** Soit $M$ la matrice dont tous les coefficients valent 0 sur la diagonale et 1 ailleurs. Les coefficients de $M^2$ valent

❒ **a.** 0 sur la diagonale et $n - 1$ ailleurs

❒ **b.** $n - 2$ sur la diagonale et $n - 1$ ailleurs

❒ **c.** $n - 1$ sur la diagonale et $n - 2$ ailleurs

❒ **d.** $n - 2$ sur la diagonale et $n$ ailleurs

**7** Laquelle des hypothèses suivantes n'implique pas que la matrice $A$ soit aussi diagonale ?

❒ **a.** ${}^tA$ est diagonale ❒ **b.** $A - I$ est diagonale

❒ **c.** $A^2$ est diagonale ❒ **d.** $2A$ est diagonale

**8** Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est une matrice triangulaire supérieure inversible, son inverse est

❒ **a.** triangulaire supérieure ❒ **b.** triangulaire inférieure

❒ **c.** symétrique ❒ **d.** une telle matrice n'est jamais inversible

**9** Si $A$ est une matrice carrée, $({}^tA)A$ est toujours

❒ **a.** triangulaire supérieure ❒ **b.** diagonale

❒ **c.** symétrique ❒ **d.** antisymétrique

**10** Soit $A, B$ deux matrices carrées. Si $A$ et $B$ ne sont pas inversibles, laquelle des matrices suivantes peut quand même être inversible ?

❒ **a.** $AB$ ❒ **b.** $2A$ ❒ **c.** $A + B$ ❒ **d.** ${}^tA$

**11** On calcule tous les produits $E_{12}E_{ij}$. Combien de ces produits sont non nuls ?

❒ **a.** $n$ ❒ **b.** $n^2 - n$ ❒ **c.** $n^3$

❒ **d.** aucun car $E_{12}$ est non nulle

**12** Soit $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ défini par $\varphi(M) = {}^tM$. Alors $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id})$ est l'espace vectoriel

❒ **a.** $\{0\}$

❒ **b.** $\{-I\}$

❒ **c.** des matrices symétriques

❒ **d.** des matrices antisymétriques

**13** Si $A, B$ sont deux matrices carrées inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, l'inverse de ${}^t(AB)$ est :

❒ **a.** ${}^t(A^{-1})\,{}^t(B^{-1})$ ❒ **b.** ${}^t(B^{-1})\,{}^t(A^{-1})$

❒ **c.** $B^{-1}A^{-1}$ ❒ **d.** $A^{-1}B^{-1}$

**14** Combien des matrices $E_{ij}$ de la base canonique commutent avec $E_{11}$ ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** $(n-1)^2$ ❒ **c.** $(n-1)^2+1$ ❒ **d.** $n^2$

**15** Si $M$ est une matrice carrée telle que ${}^tM = 2M$, alors

❒ **a.** les coefficients diagonaux de $M$ sont nuls

❒ **b.** $M$ est une matrice diagonale

❒ **c.** $M$ est une matrice symétrique

❒ **d.** $M$ est nulle

**16** Soit $(A, B, C) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^3$. Si $ABC = 0$, alors on peut affirmer que

❒ **a.** $CBA = 0$

❒ **b.** $A$, $B$ ou $C$ est non inversible

❒ **c.** $A$, $B$ ou $C$ est nulle

❒ **d.** $A$, $B$ et $C$ sont nulles

# 33 Matrices et applications linéaires, systèmes linéaires

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La matrice d'une application linéaire
- L'application linéaire canoniquement associée à une matrice
- Le changement de bases
- Le rang des matrices
- Les opérations élémentaires et le pivot de Gauss
- La résolution générale d'un système d'équations linéaires

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 281. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension $n$ et $f$ une forme linéaire sur $E$. Une matrice qui représente $f$ possède

❒ **a.** $n$ lignes et $n$ colonnes ❒ **b.** $n$ lignes et une colonne

❒ **c.** une ligne et $n$ colonnes ❒ **d.** une ligne et une colonne

**2** Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$, $A$ la matrice de $u$ dans une base $\mathscr{B}$ et $A'$ la matrice de $u$ dans une autre base $\mathscr{B}'$. Si $P$ est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ on a

❒ **a.** $A' = PA$ ❒ **b.** $A' = AP^{-1}$

❒ **c.** $A' = PAP^{-1}$ ❒ **d.** $A' = P^{-1}AP$

**3** Soit $s$ une symétrie de $E$ (i.e. un endomorphisme vérifiant $s^2 = \mathrm{Id}$) et $\mathscr{B}$ une base quelconque de $E$. La matrice de $s$ dans la base $\mathscr{B}$ est

❒ **a.** symétrique ❒ **b.** diagonale

❒ **c.** triangulaire ❒ **d.** inversible

**4** Laquelle des matrices suivantes définit un projecteur de $\mathbf{R}^2$ ?

❒ **a.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ❒ **c.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

**5** Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Si on calcule $BA$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cela revient à

❒ **a.** rajouter à la première ligne de $A$ la seconde ligne multipliée par 2

❒ **b.** rajouter à la première colonne de $A$ la seconde colonne multipliée par 2

❒ **c.** rajouter à la seconde ligne de $A$ la première ligne multipliée par 2

❒ **d.** rajouter à la seconde colonne de $A$ la première colonne multipliée par 2

**6** Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel $E$, et $u$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Quel est le vecteur $u(e_1 + e_2 + e_3)$ ?

❒ **a.** $2e_1 + 3e_2$ ❒ **b.** $2e_1 + e_2 - e_3$

❒ **c.** $e_1 + e_2 + e_3$ ❒ **d.** $e_2 + 3e_3$

**7** Soit $E$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'endomorphisme $f$ de $E$ défini par $f(P) = P(X) - P(X-1)$. La matrice de $f$ dans la base canonique de $E$ est :

❒ **a.** $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**8** Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base d'un plan vectoriel $E$ et $\mathscr{B}' = (e_1 + e_2, e_2)$. Si un vecteur a pour coordonnées $(x, y)$ dans la base $\mathscr{B}$, ses coordonnées dans $\mathscr{B}'$ sont

❒ **a.** $(x + y, y)$ ❒ **b.** $(x, x + y)$

❒ **c.** $(x, y - x)$ ❒ **d.** $(x + y, -x)$

**9** Soit $A$ une matrice carrée réelle de taille $n \geqslant 1$. On suppose que les $p$ premières colonnes de $A$ sont nulles, les suivantes étant non nulles. Alors on a forcément

❒ **a.** $\operatorname{rg} A = p$ ❒ **b.** $\operatorname{rg} A = n - p$

❒ **c.** $\operatorname{rg} A \leqslant n - p$ ❒ **d.** $\operatorname{rg} A \geqslant n - p$

**10** Soit $A$ une matrice carrée réelle de taille 4 telle que $A^2 = 0$. L'ensemble des valeurs que peut prendre le rang de $A$ est

❒ **a.** $\{0\}$ ❒ **b.** $\{0, 1\}$ ❒ **c.** $\{0, 1, 2\}$ ❒ **d.** $\{0, 1, 2, 3\}$

**11** Soit $E$ un espace vectoriel dont $(e_1, e_2, e_3)$ est une base. Soit $u$ l'endomorphisme de $E$ défini par $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = e_1$. La matrice de $u$ dans la base $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ est

❒ **a.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**12** La matrice d'un endomorphisme $u$ dans une base $(e_1, e_2)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Sa matrice dans la base $(e_2, e_1)$ est

❒ **a.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**13** Soit $u$ un isomorphisme entre deux espaces vectoriels réels $E$ et $F$ (de même dimension $n \geqslant 1$). Soit $\mathscr{B}$ une base de $E$. Combien y a-t-il de bases $\mathscr{B}'$ de $F$ telles que la matrice de $u$ relativement à $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ soit la matrice identité ?

❒ **a.** aucune sauf si $u = \mathrm{Id}$ ❒ **b.** une seule ❒ **c.** $2^n$

❒ **d.** toutes les bases conviennent

**14** L'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ est

❒ **a.** $\{(1, 0, 0)\}$ ❒ **b.** $\{(0, 0, 1)\}$

❒ **c.** $\{(1 - t, t, t),\ t \in \mathbf{R}\}$ ❒ **d.** $\{(2 - t, 1 + t, t),\ t \in \mathbf{R}\}$

**15** Soit $(S)$ le système linéaire $AX = B$ où $A$ est une matrice carrée de taille $n$. Laquelle des conditions suivantes n'implique pas que $(S)$ est un système de Cramer ?

❒ **a.** $\operatorname{rg} A = n$

❒ **b.** $A$ est triangulaire supérieure

❒ **c.** il existe $B_0$ tel que le système $AX = B_0$ ait une unique solution

❒ **d.** le système homogène $AX = 0$ admet une unique solution

**16** Combien y a-t-il de matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?

❒ **a.** 2 ❒ **b.** 4 ❒ **c.** 8 ❒ **d.** une infinité

**17** Soit $A$ une matrice (pas forcément carrée). On considère les deux systèmes linéaires $(S_1)$ $AX = B_1$ et $(S_2)$ $AX = B_2$. Laquelle des situations suivantes est impossible ?

❒ **a.** $(S_1)$ et $(S_2)$ n'ont pas de solution

❒ **b.** $(S_1)$ n'a pas de solution et $(S_2)$ a une infinité de solutions

❒ **c.** $(S_1)$ n'a pas de solution et $(S_2)$ a une unique solution

❒ **d.** $(S_1)$ a une unique solution et $(S_2)$ a une infinité de solutions

# 34 Groupe symétrique

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La notion de permutation
- La notion de transposition
- La notion de cycle
- La signature d'une permutation

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 286. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**Notations.** Pour $n \geqslant 1$ on notera $\mathscr{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

**1** Le cardinal du groupe symétrique $\mathscr{S}_n$ est

❒ **a.** $n$ ❒ **b.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ❒ **c.** $n^n$ ❒ **d.** $n!$

**2** Le groupe symétrique $\mathscr{S}_n$ est commutatif pour

❒ **a.** $n = 1$ ❒ **b.** $n \leqslant 2$ ❒ **c.** $n \leqslant 3$ ❒ **d.** tout $n$

**3** Parmi les permutations $\sigma \in \mathscr{S}_3$, combien vérifient $\sigma(x) \neq x$ pour tout entier $x \in \{1, 2, 3\}$ ?

❒ **a.** 2 ❒ **b.** 3 ❒ **c.** 4 ❒ **d.** 8

**4** La composée $\sigma = (1, 2, 3) \circ (1, 3, 4)$ vaut

❒ **a.** $(2, 4, 3)$ ❒ **b.** $(2, 3, 4)$ ❒ **c.** $(1, 3, 4)$ ❒ **d.** $(3, 2, 4)$

**5** Soit $\sigma$ la permutation circulaire de $\{1, 2, \ldots, n\}$, définie par $\sigma(k) = k + 1$ et $\sigma(n) = 1$. Quelle est sa signature ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** $-1$ ❒ **c.** $(-1)^n$ ❒ **d.** $(-1)^{n-1}$

**6** Soit $\sigma$ une permutation de $\{1, 2, ..., n\}$ telle que $\sigma^7 = \mathrm{Id}$. Alors la signature de $\sigma$ est

❒ **a.** $1$ ❒ **b.** $-1$ ❒ **c.** $(-1)^n$ ❒ **d.** $(-1)^{n-1}$

**7** Une fonction $f$ de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ est symétrique en ses trois variables si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_3$ on a

❒ **a.** $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = f(x_1, x_2, x_3)$

❒ **b.** $f(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \sigma(x_3)) = f(x_1, x_2, x_3)$

❒ **c.** $\sigma(f(x, y, z)) = f(\sigma(x, y, z))$

❒ **d.** $f \circ \sigma \in \mathscr{S}_3$

**8** Dans $\mathscr{S}_n$, combien y a-t-il de transpositions ?

❒ **a.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ❒ **b.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ❒ **c.** $n(n-1)$ ❒ **d.** $n^2$

**9** Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$ telle que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$. Alors $\sigma$ possède forcément un point fixe

❒ **a.** si $n$ est pair ❒ **b.** si $n$ est impair

❒ **c.** si la signature de $\sigma$ vaut 1 ❒ **d.** dans tous les cas

**10** Soit $\sigma = (1, 2, 3) \circ (1, 5) \in \mathscr{S}_5$. Le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $\sigma^k = \mathrm{Id}$ est

❒ **a.** 4 ❒ **b.** 5 ❒ **c.** 6 ❒ **d.** 5 !

**11** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. L'application $f$ qui à une partie $A$ de $E$ associe son complémentaire $E \setminus A$ est une bijection de $\mathscr{P}(E)$. Quelle est sa signature ?

❒ **a.** $1$ ❒ **b.** $-1$ ❒ **c.** $(-1)^n$ ❒ **d.** $(-1)^{2^{n-1}}$

# 35 Déterminants

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La notion de forme $n$-linéaire alternée
- L'expression développée du déterminant
- La multiplicativité du déterminant
- La caractérisation des bases et des isomorphismes
- Le développement d'un déterminant selon une ligne ou une colonne
- La comatrice

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 289. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Si $B$ est une matrice carrée de taille $n$, alors $\det(nB)$ est égal à

❒ **a.** $n\det(B)$ ❒ **b.** $n!\det(B)$ ❒ **c.** $n^n\det(B)$ ❒ **d.** $\det(B)^n$

**2** Le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{pmatrix}$ est égal à

❒ **a.** $x+y+z$ ❒ **b.** $x-y+z$ ❒ **c.** $x-y-z$ ❒ **d.** $x+y-z$

**3** Soit $A$ une matrice $4\times 4$ de déterminant $-1$. Laquelle des matrices suivantes n'a pas le même déterminant que $A$ ?

❒ **a.** ${}^tA$ ❒ **b.** $A^{-1}$ ❒ **c.** $-A$ ❒ **d.** $A^2$

**4** Soit $A$, $B$ deux matrices inversibles de taille $n$ et $C = ABA^{-1}B^{-1}$. Le déterminant de $C$

❒ **a.** vaut 1 car $C$ est l'identité ❒ **b.** ne vaut 1 que si $A$ et $B$ commutent

❒ **c.** vaut toujours 1 ❒ **d.** ne peut pas être calculé en général

**5** Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base d'un espace vectoriel $E$ et $x$ un vecteur de $E$. La coordonnée de $x$ selon le vecteur $e_1$ vaut :

❒ **a.** $\det_{\mathscr{B}}(e_1, x, x, ..., x)$ ❒ **b.** $\det_{\mathscr{B}}(e_1, e_2 + x, ..., e_n + x)$

❒ **c.** $\det_{\mathscr{B}}(x, e_2, ..., e_n)$ ❒ **d.** $\det_{\mathscr{B}}(x + e_1, e_2, ..., e_n)$

**6** Par des opérations sur les lignes, on voit que le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est égal à celui de

❒ **a.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & -6 & -13 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 9 \\ 0 & 10 & 19 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$

**7** Par élimination le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ -2 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ vaut

❒ **a.** $700$ ❒ **b.** $\frac{35}{2}$ ❒ **c.** $-\frac{1}{5}$ ❒ **d.** $-355$

**8** La comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ est

❒ **a.** $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

**9** Soit $A, B$ deux matrices carrées de taille $n$ à coefficients entiers et telles que $AB = I_n$. Alors $\det A$ prend ses valeurs dans

❒ **a.** $\{-1, 1\}$ ❒ **b.** $\{-1, 0, 1\}$ ❒ **c.** $\mathbf{Z}^*$ ❒ **d.** $\mathbf{Q}^*$

**10** Soit $A$ inversible de taille $n$. On effectue toutes les permutations possibles sur les lignes de $A$ et on calcule les déterminants des matrices obtenues. Combien de résultats différents obtient-on ?

❒ **a.** $1$ ❒ **b.** $2$ ❒ **c.** $n$ ❒ **d.** $n!$

**11** Soit $C_1, ..., C_n$ des vecteurs colonnes de $\mathbf{R}^n$. On suppose que

$$\det(C_1, C_2, C_3, ..., C_n) = \det(C_2, C_1, C_3, ..., C_n)$$

Alors on peut en déduire que :

❐ **a.** $C_1 = C_2$ ❐ **b.** $C_1 = 0$ ou $C_2 = 0$ ❐ **c.** $C_1$ et $C_2$ sont liés

❐ **d.** $(C_1, ..., C_n)$ est une famille liée

**12** Dans l'espace des polynômes réels de degré $\leqslant n$, quel est le déterminant de l'application linéaire $P \mapsto P'$ ?

❐ **a.** 0 ❐ **b.** 1 ❐ **c.** $n!$ ❐ **d.** $(n+1)!$

**13** Soit $A$ une matrice carrée réelle de taille $n$ et de déterminant 2. Sa comatrice $B$ a pour déterminant

❐ **a.** 1 ❐ **b.** 2 ❐ **c.** $2^{n-1}$ ❐ **d.** 1/2

**14** Soit $f$ une forme $n$-linéaire sur un espace vectoriel $E$. Lorsqu'on développe complètement $f(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ par multilinéarité on obtient

❐ **a.** 2 termes ❐ **b.** $2n$ termes

❐ **c.** $n^2$ termes ❐ **d.** $2^n$ termes

**15** Pour quelles valeurs du réel $a$ la matrice $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

❐ **a.** pour $a \neq 0$ ❐ **b.** pour $a \neq 0$ et $a \neq -1$

❐ **c.** pour $a \neq 0$ et $a \neq -2$ ❐ **d.** pour $a \neq 0$ et $a \neq -3$

**16** On note $A$ la matrice de taille $n$ dont tous les coefficients valent 1 sauf ceux de la diagonale qui sont nuls. Soit $p_n$ (respectivement $q_n$) le nombre de permutations de $\mathscr{S}_n$ sans point fixe et de signature +1 (respectivement −1). Le déterminant de $A$ vaut

❐ **a.** $p_n$ ❐ **b.** $q_n$ ❐ **c.** $p_n + q_n$ ❐ **d.** $p_n - q_n$

# Espaces euclidiens

36

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La notion de produit scalaire
- L'inégalité de Cauchy-Schwarz
- Les propriétés de la norme euclidienne
- L'orthogonalité et le théorème de Pythagore
- Les bases orthonormées
- La notion de supplémentaire orthogonal
- Les projecteurs orthogonaux, la distance d'un vecteur à un sous-espace
- L'orthonormalisation de Gram-Schmidt

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 293. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**Notations.** Dans tout le test, $E$ désigne un espace euclidien. Le produit scalaire de deux vecteurs $x$ et $y$ de $E$ sera toujours noté $\langle x, y\rangle$ et la norme euclidienne de $x$ sera notée $||x||$.

**1** On munit $\mathbf{R}^2$ d'un produit scalaire en posant $\langle (a,b),(c,d)\rangle =$

❒ **a.** $ad + bc$ ❒ **b.** $ac$ ❒ **c.** $ab + cd$ ❒ **d.** $ac + 2bd$

**2** Dans un espace euclidien $E$, lorsque $x$ et $y$ sont des vecteurs et $t$ un réel, alors $\langle x + ty, x + ty\rangle$ est égal à

❒ **a.** $||x||^2 + t^2||y||^2$ ❒ **b.** $||x||^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2||y||^2$

❒ **c.** $||x|| + t||y||$ ❒ **d.** $||x|| + |t|.||y||$

**3** Soit $b$ et $b'$ deux produits scalaires sur l'espace réel $E$. Laquelle des applications suivantes est encore un produit scalaire sur $E$ ?

❒ **a.** $-2b$ ❒ **b.** $b + b'$ ❒ **c.** $b - b'$ ❒ **d.** $bb'$

**4** Soit $F$ un sous-espace de l'espace euclidien $E$, $x$ un vecteur de $E$ et $p(x)$ le projeté orthogonal de $x$ sur $F$. On a

❐ **a.** $||x||^2 + ||p(x) - x||^2 = ||p(x)||^2$ ❐ **b.** $||p(x)||^2 + ||p(x) - x||^2 = ||x||^2$

❐ **c.** $||x||^2 + ||p(x)||^2 = ||p(x) - x||^2$ ❐ **d.** $||x||^2 + ||p(x)||^2 = ||p(x) + x||^2$

**5** Soit $(e_1, e_2)$ la base canonique (orthonormale) de $\mathbf{R}^2$. Que donne le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la famille $(e_1 + e_2, e_1 + 2e_2)$ ?

❐ **a.** $\left(\dfrac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}, \dfrac{e_2 - e_1}{\sqrt{2}}\right)$ ❐ **b.** $\left(\dfrac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}, \dfrac{e_2 - e_1}{\sqrt{5}}\right)$

❐ **c.** $\left(\sqrt{\dfrac{e_1 + e_2}{2}}, \sqrt{\dfrac{e_2 - e_1}{2}}\right)$ ❐ **d.** $\left(\dfrac{e_1 + e_2}{2}, \dfrac{e_1 - e_2}{2}\right)$

**6** Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de l'espace euclidien $E$ et $(f_1, ..., f_n)$ son orthonormalisée de Gram-Schmidt. Laquelle des propriétés suivantes n'est pas forcément réalisée ?

❐ **a.** $f_k$ est proportionnel à $e_k$ pour tout $k$

❐ **b.** $||f_k|| = 1$ pour tout $k$

❐ **c.** $\mathrm{Vect}(f_1, ..., f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$ pour tout $k$

❐ **d.** $\langle e_k, f_k\rangle$ est strictement positif pour tout $k$

**7** Pour prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle x, y\rangle| \leqslant ||x||||y||$ dans un espace euclidien, on considère

❐ **a.** le polynôme $P(t) = \langle x - ty, x + ty\rangle$

❐ **b.** le polynôme $P(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle$

❐ **c.** le polynôme $P(t) = \langle x - ty, tx - y\rangle$

❐ **d.** la matrice $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$

**8** Soit $x, y$ deux vecteurs d'un espace euclidien $E$. À quelle condition les vecteurs $x + y$ et $x - y$ sont-ils orthogonaux ?

❐ **a.** c'est toujours le cas ❐ **b.** lorsque $x \perp y$

❐ **c.** lorsque $||x|| = ||y||$ ❐ **d.** lorsque $||x|| = \pm||y||$

**9** Si $x, y$ sont deux vecteurs d'un espace euclidien $E$ on a $\langle x, y\rangle = ||x||.||y||$ si et seulement si

❐ **a.** $x = y$ ❐ **b.** $x$ et $y$ sont orthogonaux ❐ **c.** $x$ et $y$ sont liés

❐ **d.** $x$ et $y$ sont sur une même demi-droite issue de l'origine

**10** Soit $a_1, ..., a_n$ des réels. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut majorer $\sum_{k=1}^{n} a_k$ par

❒ **a.** $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ ❒ **b.** $n \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ ❒ **c.** $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$ ❒ **d.** $\sqrt{n \sum_{k=1}^{n} a_k^2}$

**11** Soit $(x, y) \in E^2$ où $E$ est un espace euclidien. Si $||x|| = 1$ et $||y|| = 2$, alors $||x - y||$ est

❒ **a.** compris entre 1 et 3 ❒ **b.** égal à 1

❒ **c.** compris entre 1 et $\sqrt{5}$ ❒ **d.** inférieur à $-1$

**12** Soit $D$ une droite d'un espace euclidien $E$ dirigée par un vecteur non nul $e$ et $x$ un vecteur de $E$. Le projeté orthogonal de $x$ sur $D$ est

❒ **a.** $\langle x, e\rangle \dfrac{e}{||e||}$ ❒ **b.** $\langle x, e\rangle e$ ❒ **c.** $\dfrac{||x||}{||e||}$ ❒ **d.** $\langle x, e\rangle \dfrac{e}{||e||^2}$

**13** Soit $x, y, z$ trois vecteurs de norme 1 dans un plan euclidien, tels que $x \perp y$ et $y \perp z$. Alors

❒ **a.** $x \perp z$ par transitivité ❒ **b.** $z = x$ ❒ **c.** $z$ et $x$ sont colinéaires

❒ **d.** c'est impossible car le plan est de dimension 2

**14** Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien $E$ et le sous-espace $F = \text{Vect}(e_1, ..., e_{n-1})$. Combien y a-t-il de sous-espaces de $E$ qui sont orthogonaux à $F$ ?

❒ **a.** une infinité ❒ **b.** 2 ❒ **c.** 1 ❒ **d.** 0

**15** Les coordonnées de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base orthogonale $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbf{R}^2$ sont

❒ **a.** $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ ❒ **b.** $(3, -1)$

❒ **c.** $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ❒ **d.** $\left(3\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

**16** Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale ($n \geqslant 2$) d'un espace euclidien $E$. La famille

$$(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1)$$

est une base orthogonale

❒ **a.** lorsque $n$ est pair ❒ **b.** lorsque $n$ est impair

❒ **c.** pour tout $n$ ❒ **d.** pour aucune valeur de $n$

**17** Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien $E$. Quelle est la distance du vecteur $x = e_1 + \cdots + e_n$ à l'espace $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ ?

❒ **a.** $0$ ❒ **b.** $1$ ❒ **c.** $\sqrt{n-1}$ ❒ **d.** $n-1$

**18** Dans un espace euclidien $E$, soient $x, y$ deux vecteurs de norme 1 et tels que $\|x + y\| = \sqrt{3}$. Alors, $\langle x, y \rangle$ vaut

❒ **a.** $1$ ❒ **b.** $\frac{1}{2}$ ❒ **c.** $0$ ❒ **d.** $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$

**19** Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une famille de vecteurs d'un plan euclidien $P$. On suppose que le seul vecteur $x$ de $P$ tel que $\langle x, e_1 \rangle = \langle x, e_2 \rangle = 0$ est le vecteur nul. On en déduit que

❒ **a.** $\mathscr{B}$ est une base de $P$ ❒ **b.** $e_1$ et $e_2$ sont orthogonaux

❒ **c.** $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de $P$ ❒ **d.** $e_1$ et $e_2$ sont colinéaires

**20** Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de l'espace euclidien $E$, et $\mathscr{B}' = (f_1, ..., f_n)$ la base orthonormée obtenue à partir de $\mathscr{B}$ par le procédé de Gram-Schmidt. La matrice $P$ de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$ est

❒ **a.** diagonale ❒ **b.** triangulaire inférieure

❒ **c.** triangulaire supérieure ❒ **d.** symétrique

# Isométries

37

## Thèmes abordés

Avec ce QCM, vous évaluez vos compétences sur les sujets suivants :

- La notion d'automorphisme orthogonal d'un espace euclidien
- Les matrices orthogonales
- Les isométries vectorielles du plan
- Les rotations vectorielles de l'espace
- Les isométries affines
- Les similitudes directes du plan

## Consignes

Répondez d'abord aux questions suivantes, puis allez voir le corrigé page 299. Nous vous rappelons qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte par question. Certaines questions nécessitent d'écrire quelques lignes au brouillon.

**1** Soit $A$ et $B$ deux points distincts du plan $\mathbf{R}^2$. Combien y a t-il de réflexions affines qui envoient $A$ sur $B$ ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** une infinité

❒ **d.** cela dépend de $A$ et $B$

**2** Combien y a-t-il de matrices diagonales dans $\mathrm{O}_3(\mathbf{R})$ ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 3 ❒ **c.** 8 ❒ **d.** une infinité

**3** Soit $r$ la rotation d'un plan euclidien orienté d'angle $\theta$ et $x$ un vecteur de norme 1. Le produit scalaire $\langle x, r(x)\rangle$ vaut

❒ **a.** 1 ❒ **b.** $\cos\theta$ ❒ **c.** $\sin\theta$ ❒ **d.** $\pm\cos\theta$

**4** Laquelle des matrices suivantes n'est pas orthogonale ?

❒ **a.** $M_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $M_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

❒ **c.** $M_3 = \begin{pmatrix} \sin\theta & \sin\theta \\ -\cos\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $M_4 = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$

**5** Soit $r$ une rotation de $\mathbf{R}^3$ d'angle $\theta$. Le déterminant de $r$ vaut

❒ **a.** $\theta$ ❒ **b.** $\cos\theta$ ❒ **c.** $2\cos\theta + 1$ ❒ **d.** $1$

**6** Lequel des vecteurs suivants ne peut pas être l'image de $x = (1, 2, 2)$ par un endomorphisme orthogonal de $\mathbf{R}^3$ ?

❒ **a.** $(2, 2, 1)$ ❒ **b.** $(3, 0, 0)$

❒ **c.** $(1, 1, 2)$ ❒ **d.** $(-1, -2, -2)$

**7** Dans la base canonique du plan euclidien $\mathbf{R}^2$, la matrice de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ est

❒ **a.** $M_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $M_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $M_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $M_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

**8** La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

❒ **a.** n'est pas orthogonale

❒ **b.** définit la rotation de $\mathbf{R}^2$ d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

❒ **c.** définit la réflexion de $\mathbf{R}^2$ d'axe la droite d'équation $y = -x$

❒ **d.** définit la réflexion de $\mathbf{R}^2$ d'axe la droite d'équation $y = x$

**9** Dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$, soit $D'$ la droite d'équation $y = x$ et $D$ l'axe des abscisses. On note $s_D$ et $s_{D'}$ les réflexions d'axe $D$ et $D'$. La composée $s_D \circ s_{D'}$ est

❒ **a.** la réflexion par rapport à la bissectrice intérieure de $D$ et $D'$

❒ **b.** la projection sur $D$ parallèlement à $D'$

❒ **c.** la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

❒ **d.** la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

**10** Soit $r$ la rotation linéaire de $\mathbf{R}^3$ d'axe $D$ et d'angle $\theta$. Alors $r^2$

❒ **a.** est la rotation d'axe $D$ et d'angle $2\theta$

❒ **b.** est la rotation d'axe $D$ et d'angle $\theta^2$

❒ **c.** est la rotation d'axe $D^2$ et d'angle $\theta^2$

❒ **d.** n'est pas forcément une rotation

**11** Une homothétie $h = \lambda\,\mathrm{Id}$ d'un espace euclidien est une application orthogonale lorsque

❒ **a.** $\lambda = 1$ ❒ **b.** $\lambda \in \{-1, 1\}$

❒ **c.** $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ ❒ **d.** $\lambda \in \mathbf{Z}$

**12** Une similitude plane directe conserve

❒ **a.** les distances ❒ **b.** les angles orientés

❒ **c.** les aires ❒ **d.** le produit scalaire

**13** Quelle est la transformation géométrique dont la représentation complexe est $f : z \mapsto 2iz + 5$ ?

❒ **a.** l'homothétie de rapport $2i$ et de centre $1 + 2i$

❒ **b.** l'homothétie de rapport $2i$ et de centre 5

❒ **c.** la similitude de rapport 2, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre $1 + 2i$

❒ **d.** la similitude de rapport 2, d'angle $\pi$ et de centre 5

**14** Posons $j = e^{2i\pi/3}$. Quelle est l'écriture complexe de la rotation $r$ de centre $j$ et d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$ ?

❒ **a.** $z \mapsto jz + j$ ❒ **b.** $z \mapsto j^2 z + j$

❒ **c.** $z \mapsto j^2 z + j + 1$ ❒ **d.** $z \mapsto j^2 z + j - 1$

**15** Soit $D$ une droite vectorielle d'un plan euclidien $E$ dirigée par un vecteur $u$ et $s$ la réflexion d'axe $D$. On note $r_\theta$ la rotation de $E$ d'angle $\theta$. Alors $r_\theta \circ s$ est

❒ **a.** la rotation d'angle $2\theta$

❒ **b.** la rotation d'angle $-\theta$

❒ **c.** la réflexion dont l'axe est la droite dirigée par $r_{\theta/2}(u)$

❒ **d.** la réflexion dont l'axe est la droite dirigée par $r_\theta^{-1}(u)$

**16** Soit $x$ un vecteur colonne de $\mathbf{R}^3$. On peut trouver une matrice orthogonale de $O_3(\mathbf{R})$ dont la première colonne est $x$ si et seulement si

❒ **a.** $x$ est non nul ❒ **b.** $x$ est un vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^3$

❒ **c.** $\|x\| = 1$ ❒ **d.** $x\,{}^t x$ est la matrice identité

**17** Dans $O_3(\mathbf{R})$ on ne peut pas trouver de matrices

❒ **a.** à coefficients entiers ❒ **b.** à coefficients strictement positifs

❒ **c.** à coefficients rationnels ❒ **d.** d'inverse orthogonal

**18** Quelles sont les matrices de $O_2(\mathbf{R})$ qui peuvent s'écrire comme le carré d'une matrice de $O_2(\mathbf{R})$ ?

❒ **a.** toutes ❒ **b.** les rotations

❒ **c.** les réflexions droites et l'identité ❒ **d.** seulement l'identité

**19** Soit $A$ et $B$ deux points distincts du plan et $s_A$, $s_B$ les symétries de centres $A$ et $B$. Quels sont les points $M$ du plan tels que $s_A(M) = s_B(M)$ ?

❒ **a.** aucun ❒ **b.** le milieu de $[AB]$

❒ **c.** la droite $(AB)$ ❒ **d.** la médiatrice de $[AB]$

## 23 Théorie des ensembles

**1** Laquelle des fonctions suivantes établit une surjection de **R** sur **R** ?

❒ **a.** $x \mapsto e^x$ ❒ **b.** $x \mapsto x^2$ ☒ **c.** $x \mapsto x^3$ ❒ **d.** $|x|$

On peut exclure les réponses **a.**, **b.** et **d.** car les fonctions ne prennent que des valeurs positives ! Il reste donc **c.** et la fonction $x \mapsto x^3$ est même une bijection strictement croissante de **R** sur lui-même dont la réciproque est la fonction racine-cubique.

**2** Parmi les relations binaires suivantes, laquelle n'est pas réflexive ?

❒ **a.** le parallélisme, sur l'ensemble des droites du plan

☒ **b.** l'orthogonalité, sur l'ensemble des droites du plan

❒ **c.** la divisibilité, sur l'ensemble des entiers naturels non nuls

❒ **d.** l'égalité, dans **R**

L'orthogonalité n'est pas réflexive car une droite n'est jamais orthogonale à elle-même (on parle même de relation irréflexive dans ce cas).

Étudions les autres cas proposés. Le parallélisme est une relation d'équivalence tout comme l'égalité dans **R**, elles sont donc en particulier réflexives. La divisibilité est réflexive (tout entier se divise lui-même), transitive (si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$) mais ce n'est pas une relation symétrique : elle est antisymétrique sur $\mathbf{N}^*$ car si $a|b$ et $b|a$ on a forcément $a = b$. Autrement dit, la divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbf{N}^*$.

**3** Si $f$ et $g$ sont deux bijections de **R** sur **R**, quelle est la bijection réciproque de $g \circ f$ ?

❒ **a.** $g^{-1} \circ f^{-1}$ ☒ **b.** $f^{-1} \circ g^{-1}$

❒ **c.** $g^{-1} + f^{-1}$ ❒ **d.** $f^{-1} \times g^{-1}$

C'est une formule importante : on a bien $g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_{\mathbf{R}} \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_R$, et de même dans l'autre sens. Vous pouvez d'ailleurs retenir que dans n'importe quel groupe multiplicatif $(G, *)$ l'inverse d'un produit $a * b$ est $b^{-1} * a^{-1}$.

**4** Soit $E, F, G$ trois ensembles. Alors $E \cap (F \cup G)$ vaut

❒ **a.** $(E \cup F) \cap (E \cup G)$ ☒ **b.** $(E \cap F) \cup (E \cap G)$

❒ **c.** $(E \cap F) \cup G$ ❒ **d.** $(E \cap F) \cap (E \cap G)$

On dit que l'intersection est distributive sur la réunion. Notons que l'ensemble $(E \cup F) \cap (E \cup G)$ vaut $E \cup (F \cap G)$ car la réunion est aussi distributive sur l'intersection.

**5** Si $f$ est une application de $E$ dans $F$, et si $A$ est une partie de $F$, alors l'ensemble $f^{-1}(A)$ est

☒ **a.** $\{x \in E, f(x) \in A\}$ ❒ **b.** $\{f^{-1}(x), x \in A\}$

❒ **c.** $A \cap F$ ❒ **d.** $A \cap E$

Il s'agit exactement de la définition de l'image réciproque de la partie $A$ par $f$. L'ensemble **b.** est l'image directe de $A$ par $f^{-1}$ mais il n'est défini que lorsque $f$ est bijective (auquel cas il est bien égal à l'image réciproque de $A$ par $f$).

Nous vous invitons fortement à prendre garde à cette notation $f^{-1}(A)$ qui est un peu dangereuse puisque définie pour toutes les applications même non bijectives. Ainsi, pour $x \in F$, $f^{-1}(\{x\})$ existe toujours : il s'agit de l'ensemble des antécédents de $x$ par $f$, mais on ne peut parler de $f^{-1}(x)$ que si $f$ est bijective...

**6** Soit $f$ une application de $E$ dans $E$. Laquelle des conditions suivantes n'est pas suffisante pour affirmer que $f$ est injective ?

❒ **a.** $f$ est bijective ❒ **b.** $f \circ f$ est bijective

❒ **c.** $f \circ f$ est injective ☒ **d.** $f \circ f$ est surjective

Donnons un contre exemple où $f$ n'est pas injective alors que $f \circ f$ est surjective. Prenons $E = \mathbf{N}$ et $f$ définie par $f(0) = 0$ et $f(n) = n - 1$ pour $n \geqslant 1$. Elle n'est pas injective car $f(0) = f(1)$. Pourtant $f$ est surjective et donc $f \circ f$ aussi : $(f \circ f)(\mathbf{N}) = f(f(\mathbf{N})) = f(\mathbf{N}) = \mathbf{N}$.

Il faut retenir que de manière générale si une composée $g \circ f$ de deux applications est injective (resp. surjective) alors $f$ est injective (resp. $g$ est surjective). En particulier $f \circ f$ est injective, surjective ou bijective si et seulement si $f$ est respectivement injective, surjective ou bijective.

**7** Soit $E$ l'ensemble $\{\{1, 2\}, 3\}$. Alors

❒ **a.** 1 appartient à $E$ ❒ **b.** $\{1\}$ est inclus dans $E$

☒ **c.** $\{1, 2\}$ appartient à $E$ ❒ **d.** $\{1, 2\}$ est inclus dans $E$

L'ensemble $E$ possède deux éléments qui sont 3 et l'ensemble $\{1, 2\}$. L'ensemble $\{1, 2\}$ appartient donc à $E$ mais n'est pas inclus dans $E$ car cela voudrait dire que 1 et 2 sont deux élements de $E$, ce qui n'est pas le cas.

Distinguez bien appartenance et inclusion !

**8** Si $E$ est un ensemble et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de ses parties on a toujours

❒ **a.** $E \subset \mathscr{P}(E)$ ☒ **b.** $E \in \mathscr{P}(E)$

❒ **c.** $\{E\} \in \mathscr{P}(E)$ ❒ **d.** $E \cap \mathscr{P}(E)$ non vide

Comme $E$ est une partie de lui-même, $E \in \mathscr{P}(E)$. Un élément de $E$ n'est pas en général une partie de $E$ : par exemple si $E = \{1\}$, $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}\}$ et 1 n'appartient pas à $\mathscr{P}(E)$. Donc **a.** est incorrecte. Cet exemple montre aussi que $E \cap \mathscr{P}(E)$ peut être vide.

**9** Soit $f$ une application de $E$ dans $F$. Quelle condition est *nécessaire* pour que la fonction $f \circ f$ soit définie ?

❒ **a.** $E = F$ ☒ **b.** $f(E) \subset E$

❒ **c.** $f(E) \subset F$ ❒ **d.** $f^{-1}(F) \subset E$

De manière plus générale, si $f, g$ sont deux applications, pour que la fonction composée $g \circ f$ soit définie, il faut que l'image de $f$ soit incluse dans le domaine de définition de $g$. Ici, on doit donc avoir $f(E) \subset E$. On note que dans le cas où $E = F$ cette condition est automatiquement réalisée, mais il n'est pas nécessaire d'avoir $E = F$. Les conditions **c.** et **d.** sont toujours réalisées par définition ; on a même $f^{-1}(F) = E$.

**10** Soit $f$ une application de **R** dans **R** et $g$ la restriction de $f$ à $[0, +\infty[$. On peut dire que

❒ **a.** si $f$ est surjective de **R** sur **R**, alors $g$ est surjective de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

❒ **b.** si $f$ est surjective de **R** sur **R**, alors $g$ est surjective de $[0, +\infty[$ sur **R**.

❒ **c.** si $f$ est bijective de **R** sur **R**, alors $g$ est bijective de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

☒ **d.** si $f$ est injective, alors $g$ est injective

Cela provient du résultat général suivant : la restriction d'une application injective à un sous-ensemble reste injective. Il n'en va pas de même pour la surjectivité comme le montre simplement le cas $f = \mathrm{Id}_R$. L'assertion **a.** est aussi fausse : comme contre-exemple on peut prendre $f = x \mapsto -x$. Il en est de même *a fortiori* pour l'assertion **c.**.

**11** Que vaut la réunion suivante : $\displaystyle\bigcup_{n \geqslant 1} \left[1, 1 + \frac{1}{n}\right[$ ?

❒ **a.** $\{1\}$ ☒ **b.** $[1, 2[$ ❒ **c.** $]1, 2[$ ❒ **d.** $[1, 2]$

Tous les intervalles considérés sont inclus dans le premier d'entre eux, à savoir $[1, 2[$. C'est donc la valeur de la réunion. C'est l'intersection qui est restreinte au singleton $\{1\}$.

**12** Soit $E, F, G, H$ quatre ensembles tels que $E \subset G$ et $F \subset H$. Laquelle des inclusions suivantes n'est pas vérifiée ?

❒ **a.** $(E \cap F) \subset (G \cap H)$ ❒ **b.** $(E \cup F) \subset (G \cup H)$

☒ **c.** $(E \setminus F) \subset (G \setminus H)$ ❒ **d.** $(E \times F) \subset (G \times H)$

Si $x$ est dans $E \setminus F$ il est dans $E$ et donc dans $G$. Mais le fait que $x$ n'est pas dans $F$ ne permet pas de dire qu'il n'est pas dans $H$. Pour avoir un contre-exemple il suffit de prendre $G = H$, $F$ vide et $E$ non vide. Dans ce cas $E \setminus F = E$ et $G \setminus H = \emptyset$.

**13** Lequel des ensembles suivants est le graphe d'une application de **R** dans **R** ?

❒ **a.** $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \ y^2 = x^2\}$ ❒ **b.** $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \ y^2 = x\}$

☒ **c.** $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \ y = x^2\}$ ❒ **d.** $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \ |y| = x^2\}$

Une partie $G$ de $\mathbf{R}^2$ est le graphe d'une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe un unique point $y$ de **R** tel que $(x, y) \in G$. C'est le cas pour la partie **c.** qui est le graphe de l'application $f : x \mapsto x^2$.

La partie **b.** est aussi une parabole mais son axe est la droite des abscisses : il ne s'agit pas d'un graphe fonctionnel. De même la partie **a.** est la réunion des deux droites $y = x$ et $y = -x$ et ce n'est pas un graphe : en effet, pour $x = 1$ (par exemple), deux valeurs de $y$ conviennent. C'est pareil pour la partie **d.**.

**14** Dans lequel des ensembles ordonnés suivants existe-t-il des parties non vides et non minorées ?

❒ **a.** $\mathbf{N}$ muni de l'ordre usuel ❒ **b.** $\mathbf{N}^*$ muni de la divisibilité

❒ **c.** $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ muni de l'inclusion ☒ **d.** $]0, +\infty[$ muni de l'ordre usuel

La partie $]0, 1[$ est minorée dans $\mathbf{R}$ mais elle n'est pas minorée **dans** $]0, +\infty[$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'élément de $]0, +\infty[$ inférieur à tous les éléments de $]0, 1[$.

Rappelons en revanche que toute partie non vide de $\mathbf{N}$ possède un plus petit élément (donc est minorée) : c'est un axiome fondamental de la construction de $\mathbf{N}$ équivalent à l'axiome de récurrence. Pour la divisibilité toute partie non vide de $\mathbf{N}^*$ est minorée par 1. Enfin une partie non vide de $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ est minorée par l'ensemble vide pour la relation d'inclusion.

## 24 Combinatoire

**1** Si $E$ est un ensemble fini de cardinal $n$, l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ est de cardinal

❒ **a.** $n^4$ ❒ **b.** $2^{2n}$ ☒ **c.** $2^{2^n}$ ❒ **d.** $n!^2$

Comme $E$ est de cardinal $n$, le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est $2^n$. Le même argument implique que le cardinal de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ est donc $2^{2^n}$.

**2** Combien y a-t-il de couples $(a, b)$ dans $\{0, \dots, 10\}^2$ tels que $a + b = 10$ ?

❒ **a.** 2 ❒ **b.** 10 ☒ **c.** 11 ❒ **d.** 22

À chaque choix de $a$ dans $\{0, \dots, 10\}$ correspond une possibilité unique pour $b$. Rappelons que le cardinal de $\{0, \dots, 10\}$ est 11.

**3** Le nombre de mots de 3 lettres distinctes qu'on peut écrire avec les 26 lettres de l'alphabet est

❒ **a.** $\binom{26}{3}$ ❒ **b.** $3\binom{26}{3}$ ☒ **c.** $26 \times 25 \times 24$ ❒ **d.** $26^3 - 26$

En effet, on a 26 possibilités de choisir la première lettre. Pour chacun de ces choix, on a 25 manières de choisir la seconde puis 24 possibilités pour la troisième.

Une autre façon de voir est de choisir simultanément les 3 lettres : $\binom{26}{3}$ choix ; puis de les ordonner : $3! = 6$ choix. On construit ainsi $6 \times \binom{26}{3}$ mots de trois lettres distinctes. Le procédé combinatoire est différent, mais évidemment le résultat est le même.

**4** Quel est le cardinal de $\{0, 1, \dots, 10\}^2 \setminus \{(k, k), k \in \{0, \dots, 10\}\}$ ?

❒ **a.** 10 ❒ **b.** 89 ❒ **c.** 90 ☒ **d.** 110

Il y a 11 éléments dans $\{0, 1, \dots, 10\}$ et donc 121 éléments dans $\{0, 1, \dots, 10\}^2$. De ces éléments on enlève les 11 couples « diagonaux » $(k, k)$ ; il en reste donc 110.

**5** Soit $n \in \mathbf{N}$. Le nombre de bijections de $\{0, \dots, n\}$ sur lui-même est

❒ **a.** $n!$ ☒ **b.** $(n+1)!$ ❒ **c.** $n^n$ ❒ **d.** $(n+1)^{n+1}$

L'ensemble $\{0, \dots, n\}$ contient $n+1$ éléments. Il y a donc $(n+1)!$ permutations des éléments de cet ensemble.

**6** Le nombre d'entiers entre 1 et 60 qui ont la propriété d'être pairs ou d'être divisibles par 3 est

❒ **a.** 20 ❒ **b.** 30 ☒ **c.** 40 ❒ **d.** 50

Entre 1 et 60 il y a 30 entiers pairs et 20 entiers divisibles par 3. Les entiers divisibles par 6 qui sont au nombre de 10 sont cependant comptés deux fois. On obtient donc $30 + 20 - 10 = 40$ entiers.

Plus formellement, notons $A$ l'ensemble des éléments de $\{1, \dots, 60\}$ qui sont pairs, et $B$ l'ensemble des entiers divisibles par 3. Les éléments de $A \cap B$ sont ceux qui sont divisibles par 6. On utilise alors la formule

$$\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,A + \text{Card}\,B - \text{Card}\,(A \cap B) = 30 + 20 - 10 = 40\,.$$

**7** Si $n \geqslant 1$, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ vaut

☒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** $2^n$ ❒ **d.** $n!$

On reconnait le développement de $(1-1)^n = 0$ par le binôme de Newton.

**8** Si $E$ et $F$ sont deux ensembles finis, le cardinal de $E \setminus F$ vaut

❒ **a.** $|E| - |F|$ ☒ **b.** $|E| - |E \cap F|$

❒ **c.** $|E| - |F| + |E \cap F|$ ❒ **d.** $|E| + |F| - |E \cap F|$

On partage les éléments de E selon qu'ils sont dans F (et donc dans $E \cap F$) ou non (et donc dans $E \setminus F$). Il vient $|E| = |E \cap F| + |E \setminus F|$.

Rappelons que $E \setminus F$ désigne l'ensemble des éléments de $E$ qui ne sont pas dans $F$. La réponse **a.** est valable lorsque $F$ est inclus dans $E$, mais ce n'est pas supposé ici.

**9** Le nombre de parties de $\{1, 2, ..., n\}$ qui ne contiennent pas 1 est

❒ **a.** $2^n - 1$ ☒ **b.** $2^{n-1}$ ❒ **c.** $2^n - n$ ❒ **d.** $\displaystyle\binom{n}{n-1}$

Effectivement, il y en a autant que de parties de l'ensemble $\{2, 3, ..., n\}$. Comme cet ensemble est de cardinal $n-1$, il admet $2^{n-1}$ parties.

**10** Pour $1 \leqslant k \leqslant n$ l'entier $k\binom{n}{k}$ est égal à

☒ **a.** $n\binom{n-1}{k-1}$ ❒ **b.** $n\binom{n-1}{k}$

❒ **c.** $n\binom{n}{n-k}$ ❒ **d.** $n\binom{n}{k-1}$

En effet, on a $k\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$. On peut donner une démonstration combinatoire de cette égalité. Comptons le nombre de couples $(x, A)$ où $A$ est une partie de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de cardinal $k$ et $x$ un élément de $A$. On peut d'abord choisir la partie $A$ de $\binom{n}{k}$ manières et il y a ensuite $k$ possibilités de choisir l'élément $x$ dans la partie $A$. D'où un total de $k\binom{n}{k}$. Mais on peut d'abord choisir l'élément $x$ dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ et ce de $n$ manières différentes, puis compléter cet élément pour former la partie $A$ en choisissant les $k-1$ éléments manquants parmi les $n-1$ entiers restants. Avec cette façon de compter on a donc $n\binom{n-1}{k-1}$ couples $(x, A)$ et cela prouve l'égalité.

**11** Combien y a-t-il de $n$-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n)$ d'entiers entre 1 et 10 qui contiennent au moins un nombre pair ?

❒ **a.** $\dfrac{10^n}{2}$ ☒ **b.** $10^n - 5^n$ ❒ **c.** $\dfrac{10^n}{5^n} = 2^n$ ❒ **d.** $n^{10} - n^5$

Comme dans tout problème combinatoire où il faut compter des objets qui ont *au moins* un élément particulier, on dénombre plutôt le complémentaire : ici, il y a $10^n$ $n$-uplets d'entiers entre 1 et 10 auxquels on enlève les $5^n$ $n$-uplets ne contenant que des entiers impairs.

**12** Si $E$ est un ensemble fini de cardinal $n$, le nombre d'applications de $E \times E$ dans $E$ est

❒ **a.** $n^3$ ❒ **b.** $n^{2n}$ ☒ **c.** $n^{n^2}$ ❒ **d.** $n^n$

Rappelons qu'il y a $|A|^{|B|}$ applications d'un ensemble fini $B$ dans un ensemble fini $A$. Ici, le cardinal de $E \times E$ est $n^2$ et on a donc $n^{n^2}$ applications de $E \times E$ dans $E$. Il s'agit en fait du nombre de lois de compositions internes que l'on peut définir sur $E$.

**13** Soit $n \geqslant 2$. On note $E$ la fonction partie entière. Combien y a-t-il d'entiers $k$ tels que $\dfrac{n}{2} \leqslant k \leqslant n$ ?

☒ **a.** $E\left(\dfrac{n}{2}\right) + 1$ ❒ **b.** $E\left(\dfrac{n}{2}\right)$

❒ **c.** $E\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ ❒ **d.** $E\left(\dfrac{n}{2}\right) + \dfrac{1}{2}$

L'inégalité $\dfrac{n}{2} \leqslant k \leqslant n$ est équivalente à $0 \leqslant n - k \leqslant \dfrac{n}{2}$. Il y a donc autant d'entiers $k$ convenant que de valeurs de $n - k$ comprises entre 0 et $E\left(\dfrac{n}{2}\right)$. Rappelons que si $a \leqslant b$ sont entiers, il y a exactement $b - a + 1$ entiers $k$ compris entre $a$ et $b$.

Notons que l'on pouvait facilement exclure la réponse **d.** : un cardinal est toujours entier !

**14** Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x$ un réel. Combien vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k+1}$ ?

❒ **a.** $(1+x)^{2n+1}$ ☒ **b.** $x(1+x^2)^n$

❒ **c.** $2^n x^{2k+1}$ ❒ **d.** $(1+x^{2+1/k})^n$

Pour retrouver cette simplification, il faut d'abord remarquer que $x^{2k+1}$ n'est pas une puissance $k$-ième. Par contre, en factorisant la somme par $x$, il reste $x^{2k}$ qui est la puissance $k$-ième de $x^2$. On reconnait alors l'expression $x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k}$ qui se simplifie par la formule du binôme de Newton.

Les réponses **c.** et **d.** sont exclues, car le résultat ne peut pas dépendre de $k$ qui est l'indice muet de sommation.

**15** Soit $n \geqslant 1$. Combien y a t-il de surjections de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans $\{n+1, \dots, 2n\}$ ?

❒ **a.** $2^n$ ❒ **b.** $\binom{2n}{n}$ ❒ **c.** $(2n)!$ ☒ **d.** $n!$

Comme les deux ensembles considérés ont le même cardinal, toute surjection de l'un dans l'autre est bijective. On est donc simplement ramené à compter le nombre de bijections entre deux ensembles de cardinal $n$.

Le calcul du nombre de surjections d'un ensemble de cardinal $n$ sur un ensemble de cardinal $p \leqslant n$ est un problème plus difficile dans le cas général.

**16** Pour $p \in \mathbf{N}$, que vaut $\binom{p+3}{p} + \binom{p+3}{p+1}$ ?

❒ **a.** $\binom{p+3}{p+2}$ ☒ **b.** $\binom{p+4}{p+1}$

❒ **c.** $\binom{p+4}{p}$ ❒ **d.** $\binom{p+4}{2p+1}$

On peut rappeler la relation de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

qui est appliquée ici à $n = p+4$ et $k = p+1$.

**17** Pour tout $n \geqslant 1$, la somme $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ est égale à

☒ **a.** $\dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$ ❒ **b.** $\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

❒ **c.** $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ❒ **d.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$

On vérifie ce résultat classique par récurrence sur $n$. Ici, on peut choisir entre les 4 réponses proposées en vérifiant la formule aux rangs 1 et 2.

Au passage, la quantité $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ est en réalité la somme des cubes compris entre 1 et $n$, tandis que la quantité $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est la somme des entiers compris entre 1 et $n$. Il est bon de retenir ces sommes qui se rencontrent assez souvent.

**18** Le nombre de suites strictement croissantes formées de 5 entiers choisis dans l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ est

❒ **a.** $\dfrac{10!}{5!}$ ☒ **b.** $\dbinom{10}{5}$ ❒ **c.** $10^5$ ❒ **d.** $5!$

Pour construire une suite strictement croissante de 5 entiers, on choisit une partie $A$ à 5 éléments de $\{1, \dots, 10\}$ et on range les éléments de $A$ par ordre croissant. On peut bien obtenir ainsi chaque suite, et retrouver la partie $A$ choisie connaissant le résultat.

Il y a donc autant de telles suites que de parties à 5 éléments dans $\{1, 2, 3, ..., 10\}$, ce qui correspond à la définition d'un coefficient binomial.

**19** Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ANAGRAMME ?

☒ **a.** $\dfrac{9!}{3!\,2!}$ ❒ **b.** $\dfrac{9!}{3 \times 2}$ ❒ **c.** $\dfrac{5!}{3!\,2!}$ ❒ **d.** $\dfrac{5!}{3 \times 2}$

En effet, si les trois "A" et les deux "M" étaient différenciés, il y aurait 9! permutations de ces lettres, et donc autant d'anagrammes. Toute permutation des trois "A" et des deux "M" conduisant au même anagramme, il faut diviser le résultat par 3! puis par 2! .

**20** Quel est le nombre de couples $(a, b)$ de $\mathbf{Z}^2$ tels que $\max(|a|, |b|) \leqslant n$ ?

❒ **a.** $2n$ ❒ **b.** $4n + 2$ ❒ **c.** $(2n)^2$ ☒ **d.** $(2n + 1)^2$

La condition de l'énoncé est équivalente au fait que $|a| \leqslant n$ et $|b| \leqslant n$, soit que $(a, b)$ appartient à $\{-n, \dots n\}$. Ce dernier ensemble est bien de cardinal $(2n + 1)^2$.

Si vous avez répondu **c.**, vous avez fait une erreur très classique : le nombre d'entiers compris au sens large entre $n$ et $m \in \mathbf{Z}$ n'est pas $m - n$, mais $m - n + 1$.

**21** Soit $n \geqslant 2$. Quel est le nombre de couples $(a, b)$ tels que $1 \leqslant a < b \leqslant n$ ?

❒ **a.** $n(n-1)$ ☒ **b.** $\dbinom{n}{2}$ ❒ **c.** $n - b$ ❒ **d.** $n(n-1)\dbinom{n}{2}$

Pour construire ces couples, on prend simultanément deux éléments de $\{1, \dots, n\}$, on appelle $a$ le plus petit, et $b$ le plus grand. Vérifions ce procédé combinatoire : on peut bien obtenir ainsi tous les couples recherchés, et connaissant le résultat, on peut retrouver exactement les deux éléments choisis.

Il y a donc autant de tels couples $(a, b)$ que de parties à deux éléments dans l'ensemble des entiers de 1 à $n$, c'est-à-dire $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

**22** Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$ et $A$ une partie de $E$ de cardinal $p$. Combien y a-t-il de parties de $E$ qui contiennent $A$ ?

❒ **a.** $2^p$ ☒ **b.** $2^{n-p}$ ❒ **c.** $\binom{n}{p}$ ❒ **d.** $\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{k}$

Une partie de $E$ qui contient $A$ est la réunion de $A$ et d'une partie quelconque de $E \setminus A$. Il y en a donc autant que de parties du complémentaire de $A$ à savoir $2^{n-p}$.

On peut proposer une interprétation combinatoire des autres réponses : $2^p$ est le nombre de parties **incluses** dans $A$ ; $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties de $E$ de cardinal $p$ ; enfin $\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{k}$ représente le nombre de parties de $E$ qui ont plus de $p$ éléments, mais toutes ces parties ne contiennent pas $A$.

**23** Soit $n$, $p$ dans $\mathbf{N}^*$. Lorsque $f$ est une application de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\{1, 2, \ldots, p\}$, à partir de quelle valeur de $n$ est-on en mesure d'affirmer qu'un des éléments de $\{1, 2, \ldots, p\}$ admet au moins trois antécédents ?

❒ **a.** $n \geqslant 3$ ❒ **b.** $n \geqslant p + 3$ ☒ **c.** $n \geqslant 2p + 1$ ❒ **d.** $n \geqslant 3p$

Raisonnons par la contraposée : si chaque élément de $\{1, \ldots, p\}$ admet au plus deux antécédents, l'ensemble de départ contient au plus $2p$ éléments. Donc dès que $n \geqslant 2p + 1$, l'un des éléments de l'ensemble d'arrivée admet au moins trois antécédents. En revanche, si $n \leqslant 2p$, on peut construire une application $f$ pour laquelle chaque élément de $\{1, \ldots, p\}$ admet au plus 2 antécédents.

La réponse **a.** ne convient pas : lorsque $n$ est seulement supérieur à 3, il est juste possible qu'un élément de l'ensemble d'arrivée admette trois antécédents, mais ce n'est pas obligatoire. De même, la condition $n \geqslant 3p$ est certes suffisante pour conclure, mais elle est bien trop forte dans ce cas précis : la valeur de $3p$ n'est pas minimale.

## 25 Groupes, anneaux et corps

**1** Dans un groupe dont la loi est notée multiplicativement, quel est l'inverse de l'élément $xyz$ ?

❒ **a.** $x^{-1}y^{-1}z^{-1}$ ☒ **b.** $z^{-1}y^{-1}x^{-1}$
❒ **c.** $x^{-1}z^{-1}y^{-1}$ ❒ **d.** $zyx$

Il s'agit de $z^{-1}y^{-1}x^{-1}$ car $xyzz^{-1}y^{-1}x^{-1} = xyy^{-1}x^{-1} = xx^{-1} = e$ (où $e$ est le neutre du groupe) et de même pour le produit dans l'autre sens.

**2** Laquelle des parties suivantes est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$ ?

❒ **a.** $\{-1, 0, 1\}$ ☒ **b.** l'ensemble des nombres pairs
❒ **c.** $\mathbf{N}$ ❒ **d.** l'ensemble des nombres impairs

L'ensemble $2\mathbf{Z}$ formé des entiers pairs est la seule des parties proposées qui contient 0 est stable pour la somme et par passage à l'opposé. On montre dans le cours d'arithmétique, en utilisant la division euclidienne, que les seuls sous-groupes de $(\mathbf{Z}, +)$ sont les $n\mathbf{Z}$ pour $n \in \mathbf{N}$.

**3** Dans un anneau non commutatif on développe $(x+y)^2$ en

❐ **a.** $x^2 + y^2$ ❐ **b.** $x^2 + 2xy + y^2$

☒ **c.** $x^2 + xy + yx + y^2$ ❐ **d.** $x^2 + xy + y^2$

On a $(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2+xy+yx+y^2$. La formule du binôme ne peut s'appliquer que si les éléments $x$ et $y$ commutent ce qui n'est pas supposé ici. De manière générale dans une structure non commutative il faut prendre garde aux réflexes de calcul développés dans les cas commutatifs.

**4** Lequel des ensembles suivants n'est pas un sous-corps de $\mathbf{C}$ ?

❐ **a.** $\mathbf{C}$ ❐ **b.** $\mathbf{R}$ ❐ **c.** $\mathbf{Q}$ ☒ **d.** $i\mathbf{R} \cup \mathbf{R}$

L'ensemble donné en **d.** n'est pas stable pour la somme puisqu'il contient 1 et $i$ mais pas $1+i$. Les trois autres propositions sont des sous-corps usuels de $\mathbf{C}$ (mais il y en a beaucoup d'autres !).

**5** Parmi les parties suivantes, laquelle est un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$ ?

❐ **a.** $\mathbf{R}^*$ ❐ **b.** $\mathbf{R}_+^*$ ☒ **c.** $\mathbf{Q}$ ❐ **d.** $\mathbf{N}$

Une partie $H$ d'un groupe $G$ est un sous-groupe de $G$ si et seulement si $H$ contient le neutre (ici 0) est stable par la loi de groupe (ici l'addition) et par passage au symétrique (ici l'opposé). Parmi les 4 propositions seul $\mathbf{Q}$ possède ces trois qualités. Les exemples de **a.** et **b.** ne contiennent pas 0 et l'exemple de **d.** n'est pas stable par passage à l'opposé.

**6** Un groupe multiplicatif $G$ est non commutatif lorsque

❐ **a.** $xy \neq yx$ pour tout couple $(x, y) \in G^2$

❐ **b.** $xy \neq yx$ pour tout couple $(x, y) \in G^2$ avec $x \neq y$

☒ **c.** il existe $(x, y) \in G^2$ tel que $xy \neq yx$

❐ **d.** il existe $(x, y) \in G^2$ tel que $xy = yx$

Le groupe $G$ est commutatif (on dit aussi abélien) si $xy = yx$ pour tout couple $(x, y) \in G^2$. La négation de cela est qu'il existe $x$ et $y$ vérifiant $xy \neq yx$. Mais bien entendu il peut y avoir des couples $(x, y)$ d'éléments qui commutent : c'est notamment le cas si on prend $y = x$, voire $y = x^k$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Un exemple de groupe non abélien étudié en cours est le groupe symétrique $\mathscr{S}_n$ lorsque $n \geqslant 3$.

**7** Dans le groupe des bijections de $\mathbf{R}$ dans lui-même, quel est l'élément neutre ?

☒ **a.** $x \mapsto x$ ❐ **b.** $x \mapsto 0$ ❐ **c.** $x \mapsto 1$ ❐ **d.** $x \mapsto -x$

L'ensemble des bijections de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est un groupe pour la composition des applications dont l'élément neutre est l'identité $x \mapsto x$.

Au contraire, les fonctions constantes de **b.** et **c.** ne sont pas des bijections de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. Toutefois, la fonction nulle de **b.** est l'élément neutre dans le groupe additif $(\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}),+)$ et la fonction constante égale à 1 est l'élément unité dans l'anneau $(\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}),+,\times)$.

**8** Soit $E$ un ensemble et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Laquelle des lois de composition interne suivantes sur $\mathscr{P}(E)$ n'est pas associative ?

❒ **a.** la réunion ❒ **b.** l'intersection ☒ **c.** la différence

❒ **d.** la différence symétrique $\Delta$ définie par $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

La différence n'est pas associative : si $X, Y, Z$ sont trois parties de $E$ on n'a pas en général $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \setminus Z$. Si par exemple $X = Y = Z$ le premier ensemble vaut $X$ et le second est vide.

En revanche l'associativité de la réunion et de l'intersection sont des propriétés du cours. Concernant la différence symétrique on peut même montrer qu'elle munit $\mathscr{P}(E)$ d'une structure de groupe commutatif : l'élément neutre est l'ensemble vide et l'inverse de chaque partie $A$ est $A$ elle-même.

**9** Parmi les applications suivantes, laquelle n'est pas un morphisme du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ dans lui-même ?

☒ **a.** $x \mapsto \ln x$ ❒ **b.** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ ❒ **c.** $x \mapsto \sqrt{x}$ ❒ **d.** $x \mapsto x$

Toutes les applications $x \mapsto x^a$ pour $a \in \mathbf{R}$ sont des morphismes du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ dans lui-même. En revanche on n'a pas $\ln(xy) = (\ln x)(\ln y)$ mais $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, ce qui signifie que ln est un isomorphisme du groupe multiplicatif $(\mathbf{R}_+^*, \times)$ sur le groupe additif $(\mathbf{R}, +)$. À titre d'exercice vous pouvez montrer que les seuls morphismes de groupe continus de $\mathbf{R}_+^*$ dans lui-même sont les applications $x \mapsto x^a$ pour $a \in \mathbf{R}$.

**10** Laquelle des applications suivantes n'est pas un morphisme de groupes de $(\mathbf{C}, +)$ dans lui-même ?

❒ **a.** $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ ❒ **b.** $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ ❒ **c.** $z \mapsto \overline{z}$ ☒ **d.** $z \mapsto |z|$

Par l'inégalité triangulaire on a $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ pour tout couple $(z, z') \in \mathbf{C}^2$ mais il n'y a pas égalité en général : par exemple $|1 + i| = \sqrt{2} < |1| + |i| = 2$.

Les autres exemples sont bien des morphismes de groupes puisque

$$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z'),\ \mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z') \text{ et } \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}.$$

La conjugaison est même un automorphisme de corps de $\mathbf{C}$.

**11** Soit $f$ un morphisme d'un groupe $G$ dans un groupe $H$. Laquelle des propriétés suivantes implique que $f$ est injectif ?

❒ **a.** $x = e_G \Longrightarrow f(x) = e_H$ ☒ **b.** $f(x) = e_H \Longrightarrow x = e_G$

❒ **c.** $x = y \Longrightarrow f(x) = f(y)$ ❒ **d.** $y \in H \Longrightarrow \exists x \in G,\ y = f(x)$

C'est un résultat important du cours : le morphisme de groupes $f$ est injectif si et seulement si son noyau est réduit au neutre de $G$. Ceci est exactement l'assertion **b.** puisque le noyau de $f$ est l'ensemble des éléments $x$ de $G$ tels que $f(x) = e_H$.

La propriété **a.** est vérifiée pour tout morphisme de groupes. L'assertion **c.** est une tautologie : pour retrouver la définition de l'injectivité il faudrait renverser l'implication. Enfin **d.** traduit la surjectivité de $f$.

**12** Si $B$ est un sous-anneau d'un anneau $A$ alors on a l'implication

❒ **a.** $xy \in B \Longrightarrow (x \in B \text{ et } y \in B)$

❒ **b.** $(x \in A \text{ et } y \in B) \Longrightarrow xy \in B$

❒ **c.** $(xy \in B \text{ et } y \in B) \Longrightarrow x \in B$

☒ **d.** $(x \in B \text{ et } y \in B) \Longrightarrow xy \in B$

L'implication **d.** signifie que $B$ est stable pour le produit. Notons que le produit de deux éléments $x$ et $y$ de $A$ peut être dans $B$ sans que $x$ et $y$ soient eux-mêmes dans $B$ : prendre par exemple $B = \mathbf{Z}$, $A = \mathbf{Q}$, $x = \frac{3}{2}$ et $y = \frac{2}{3}$. Cet exemple prouve que **a.** est faux en général.

De même **b.** est une propriété qui intervient dans la définition d'un idéal mais qui est fausse pour un sous-anneau : prendre par exemple $A = \mathbf{Q}$, $B = \mathbf{Z}$, $y = 1$ et $x = \frac{1}{2}$. Enfin, on voit que **c.** est fausse en prenant $y = 0$ : tout élément $x$ de $A$ devrait alors être dans $B$.

**13** Si $x$ et $y$ sont deux éléments d'un anneau commutatif tels que $x^2 = y^2$, alors

❒ **a.** $x = y$ ❒ **b.** $x = \pm y$ ❒ **c.** $|x| = |y|$

☒ **d.** on ne peut rien dire en général

On a $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ car l'anneau est commutatif. Mais si celui-ci n'est pas intègre l'égalité $(x - y)(x + y) = 0$ ne permet pas de dire que $x = y$ ou $x = -y$. Il suffit de penser à l'anneau des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ : toute fonction qui ne prend que les valeurs 1 et $-1$ (et il y en a beaucoup) a pour carré la fonction constante 1.

La réponse **c.** peut être repoussée assez vite car la notion de valeur absolue n'est pas définie dans un anneau quelconque (on a besoin d'une relation d'ordre).

**14** Soit $G$ un groupe dont la loi est notée multiplicativement et $a$ un élément de $G$. Laquelle des applications suivantes est toujours un morphisme de groupes de $G$ dans $G$ ?

❒ **a.** $f_1 : x \mapsto ax$ ☒ **b.** $f_2 : x \mapsto axa^{-1}$

❒ **c.** $f_3 : x \mapsto axa$ ❒ **d.** $f_4 : x \mapsto x^{-1}$

L'application $f_2$ est un morphisme de groupes (et même un automorphisme) appelé conjugaison par $a$. En effet, on a

$$f_2(x)f_2(y) = (axa^{-1})(aya^{-1}) = axya^{-1} = f_2(xy)$$

pour tout couple $(x, y) \in G^2$. L'automorphisme réciproque est la conjugaison par $a^{-1}$.

La fonction $f_1$ donnée en **a.** ne peut convenir car elle n'envoie pas l'élément neutre sur lui-même mais sur $a$. Ce n'est pas un morphisme de groupe mais il s'agit tout de même d'une bijection importante de $G$ appelée translation : si $(G, +)$ est un groupe abélien additif il s'agit de l'application $x \mapsto a + x$ ce qui explique le nom.

Concernant l'inversion de **d.** il faut absolument retenir que $f_4(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = f_4(y)f_4(x)$ et ce n'est pas égal en général à $f_4(x)f_4(y)$. C'est d'ailleurs un petit exercice classique des oraux de concours de montrer que $f_4$ est un morphisme de groupes si et seulement si le groupe $G$ est commutatif.

**15** Sur lequel des ensembles suivants la composition ne définit pas une loi de composition interne ?

❒ **a.** l'ensemble des bijections de **R** sur **R**

☒ **b.** l'ensemble de toutes les applications [0, 1] dans **R**

❒ **c.** l'ensemble des fonctions croissantes sur **R**

❒ **d.** l'ensemble des fonctions impaires de **R** dans **R**

Si $f, g$ sont deux fonctions de $[0, 1]$ dans **R** la composée $g \circ f$ n'est pas forcément définie : il faudrait pour cela que $f$ prenne ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. En revanche la composée de deux bijections est bien une bijection (l'ensemble des bijections de **R** est même un groupe pour la composition), la composée de deux fonctions croissantes est bien croissante et la composée de deux fonctions impaires $f$ et $g$ est impaire :

si $x \in \mathbf{R}$ on a $(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x))$.

**16** Dans lequel des anneaux suivants (avec les lois usuelles) peut-on avoir $ab = 0$ avec $a$ et $b$ non nuls ?

❒ **a.** **C** ❒ **b.** **Z** ☒ **c.** l'anneau des fonctions de **R** dans **R**

❒ **d.** l'anneau des fonctions polynomiales de **R** dans **R**

Un anneau commutatif $A$ dans lequel on a l'implication $ab = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ est dit intègre. C'est notamment le cas d'un corps comme **C** (réponse **a.**) ou de l'anneau **Z**. Mais ce n'est pas le cas de l'anneau des fonctions de **R** dans **R** : par exemple pour la fonction $f$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = x$ si $x > 0$ et la fonction $g$ définie par $g(x) = 0$ si $x \geqslant 0$ et $g(x) = x$ si $x \leqslant 0$, on a $fg = 0$ mais ni $f$ ni $g$ n'est nulle.

Notons que le sous-anneau des fonctions polynomiales est intègre : cela provient de ce que si $P$ et $Q$ sont deux polynômes tels que $PQ = 0$, l'un des deux au moins a une infinité de racines et est donc identiquement nul.

**17** Dans l'anneau des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ une fonction $f$ est inversible si et seulement si

❒ **a.** $f$ est strictement positive

❒ **b.** $f$ est strictement positive ou strictement négative

☒ **c.** $f(x) \neq 0$ pour tout $x$

❒ **d.** il existe un réel $x$ tel que $f(x) \neq 0$

Dire que $f$ est inversible signifie qu'il existe une fonction $g$ telle que $fg = 1$ (où 1 désigne la fonction constante égale à 1). On a pour tout $x$, $f(x)g(x) = 1$ et donc $f(x) \neq 0$. Réciproquement, si $f$ ne s'annule pas, $\dfrac{1}{f}$ est bien définie sur $\mathbf{R}$ et est l'inverse de $f$.

Les fonctions de signe constant ne sont que des exemples particuliers de fonctions inversibles : sans hypothèse de continuité une fonction $f$ qui ne s'annule pas ne garde pas forcément un signe constant.

**18** Lequel des entiers suivants divise $2^{100} + 1$ ?

❒ **a.** $2^{50} + 1$ ❒ **b.** $2^{25} + 1$ ☒ **c.** $2^4 + 1$ ❒ **d.** $2^1 + 1$

On a $2^{100} + 1 = (2^4)^{25} + 1$ et $a^{25} + 1$ est divisible par $a + 1$ pour tout $a \in \mathbf{N}$. En effet, on a

$$a^{25} + 1 = (a + 1)(a^{24} - a^{23} + a^{22} - \cdots - a + 1).$$

**19** Si $x$ est un élément d'un corps distinct de 1, l'élément $x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{11}$ vaut

☒ **a.** $\dfrac{x - x^{13}}{1 - x^2}$ ❒ **b.** $\dfrac{1 - x^{12}}{1 - x}$ ❒ **c.** $x\dfrac{1 - x^{11}}{1 - x}$ ❒ **d.** $\dfrac{1 - x^6}{1 - x}$

Il s'agit de se ramener à la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique. C'est un calcul important qu'il faut savoir faire. Le premier réflexe est de toujours mettre en facteur le premier terme pour se ramener à une suite géométrique qui commence par 1 :

$$x + x^3 + \cdots + x^{11} = x(1 + x^2 + \cdots + (x^2)^5) = x\frac{1 - (x^2)^6}{1 - x^2} = \frac{x - x^{13}}{1 - x^2}.$$

**20** Laquelle des applications suivantes est un morphisme de corps de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ ?

❒ **a.** $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ ❒ **b.** $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ ☒ **c.** $z \mapsto \overline{z}$ ❒ **d.** $z \mapsto |z|$

La conjugaison est un automorphisme de corps de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}$ car c'est une bijection et on a $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ pour tout couple $(z, z') \in \mathbf{C}^2$ et $\overline{1} = 1$.

Les applications $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ et $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ sont des morphismes de groupes additifs mais elles n'ont pas de bonne propriété vis-vis du produit : $\mathrm{Re}(zz')$ n'est pas en général égal au produit des parties réelles de $z$ et $z'$. Pour le module on a bien $|zz'| = |z||z'|$ pour $(z, z') \in \mathbf{C}^2$ : le module (restreint à $\mathbf{C}^*$) est un morphisme de groupes de $(\mathbf{C}^*, \times)$ dans $(\mathbf{R}_+^*, \times)$. Mais $|z+z'|$ n'est pas en général égal à $|z| + |z'|$.

## 26 Arithmétique de Z

**1** Soit $n \geqslant 2$ un entier. Quel est le pgcd de $n$ et $2n - 1$ ?

☒ **a.** 1 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** $n$ ❒ **d.** $2n - 1$

Un entier qui divise $n$ et $2n - 1$ divise aussi $1 = 2 \times n - (2n - 1)$. Donc $n$ et $2n - 1$ sont premiers entre eux. On vient ici simplement d'exhiber une relation de Bezout entre $n$ et $2n - 1$.

**2** Dans l'algorithme d'Euclide pour les entiers 21 et 8 la première étape s'écrit $21 = 2 \times 8 + 5$. Quelle est la suivante ?

❒ **a.** $21 = 10 \times 2 + 1$ ❒ **b.** $21 = 4 \times 5 + 1$

❒ **c.** $8 = 4 \times 2 + 0$ ☒ **d.** $8 = 1 \times 5 + 3$

Dans la division suivante de l'algorithme on prend le diviseur et le reste de l'étape précédente, ici c'est donc $8 = 1 \times 5 + 3$. En poursuivant l'algorithme on obtient le pgcd des deux entiers : c'est le dernier reste non nul (ici il vaut bien entendu 1). Rappelons aussi qu'en remontant les divisions on obtient une relation de Bezout entre les deux entiers de départ.

**3** Soit $a, b, c$ des entiers. Si $a$ divise $bc$, quelle condition permet d'affirmer que $a$ divise $c$ ?

❒ **a.** $a$ ne divise pas $b$ ❒ **b.** $c$ est premier

☒ **c.** $a$ est premier avec $b$ ❒ **d.** $a$ est premier avec $c$

C'est exactement ce que dit le très important lemme de Gauss. Il s'agit d'une faute classique que de remplacer la bonne hypothèse par **a.**. L'argument **a.** est insuffisant comme le montre l'exemple $a = 4$, $b = 6$ et $c = 2$.

**4** Quel est le pgcd de $10^5$ et de $5^{10}$ ?

❒ **a.** $2^2$ ❒ **b.** $2^5$ ☒ **c.** $5^5$ ❒ **d.** $5^{10}$

On utilise la factorisation en nombres premiers. Celle de $10^5$ est $2^5 5^5$ et $5^{10}$ est déjà décomposé. On détermine alors le pgcd en prenant les exposants minimaux pour chaque facteur premier.

**5** Quel est le ppcm de $10^5$ et $5^{10}$ ?

☒ **a.** $10^5\,5^5$ ❒ **b.** $10^5\,5^{10}$ ❒ **c.** $10^{10}\,5^5$ ❒ **d.** $10^{10}\,5^{10}$

La décomposition en facteurs premiers de $10^5$ est $2^5 5^5$, et le ppcm vaut donc $2^5\,5^{10} = (2 \times 5)^5 5^5$ : pour chaque nombre premier on prend le plus grand exposant des deux entiers.

**6** Si $a$ et $b$ sont deux entiers dont le pgcd est 4, alors le pgcd de $a^2$ et $b^2$ vaut

❒ **a.** 2 ❒ **b.** 4 ☒ **c.** 16 ❒ **d.** $2ab$

Comme le pgcd de $a$ et $b$ est $4 = 2^2$, le seul facteur premier commun à $a$ et $b$ est 2. C'est donc aussi le seul facteur premier commun à $a^2$ et $b^2$. De plus, le plus petit exposant de 2 dans les décompositions de $a$ et $b$ est 2, donc le le plus petit exposant de 2 dans les décompositions de $a^2$ et $b^2$ est 4. Par suite le pgcd de $a^2$ et $b^2$ vaut $2^4 = 16$.

**7** Soit $a$ un entier tel que 9 divise $a^2$. Alors

☒ **a.** $a$ est divisible par 3

❒ **b.** $a$ est divisible par 9

❒ **c.** $a$ est divisible par 3 et non divisible par 9

❒ **d.** $a$ est impair

Les facteurs premiers intervenant dans la décomposition de $a^2$ sont ceux qui interviennent dans $a$ (ils ont juste un exposant double). Comme 3 divise $a^2$, il divise donc $a$. En revanche l'exposant de 3 dans la décomposition de $a$ peut très bien être égal à 1, comme le montre l'exemple $a = 3$, ce qui rend la réponse **b.** incorrecte. Mais cet exposant peut valoir 2 ou plus ce qui rend aussi **c.** incorrecte. Enfin **d.** doit être rejetée car rien n'interdit à $a$ d'être pair.

**8** Le nombre de diviseurs de $10^n$ dans $\mathbf{N}^*$ est

❒ **a.** $n$ ❒ **b.** $n+1$ ❒ **c.** $n^2$ ☒ **d.** $(n+1)^2$

On a $10^n = 2^n 5^n$. Ses diviseurs sont les entiers de la forme $2^a 5^b$ avec $a$ et $b$ entre 0 et $n$ que l'on peut choisir indépendamment l'un de l'autre. Cela fait $(n+1)^2$ possibilités. C'est un petit exercice que d'écrire la formule générale qui donne le nombre de diviseurs d'un entier $n$ quelconque en fonction des exposants qui interviennent dans sa factorisation en nombres premiers.

**9** Soit $a, b, c$ trois entiers tels que $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $\text{pgcd}(b, c) = 1$. Alors

❒ **a.** $\text{pgcd}(a, c) = 1$ ❒ **b.** $\text{pgcd}(ab, bc) = 1$

☒ **c.** $\text{pgcd}(ac, b) = 1$ ❒ **d.** $\text{pgcd}(a + c, b) = 1$

Les entiers $a$ et $c$ n'ont aucun facteur premier en commun avec $b$ donc $ac$ non plus et $\text{pgcd}(ac, b) = 1$. On peut aussi obtenir ce résultat en multipliant entre elles deux relations de Bezout.

En revanche $a$ et $c$ peuvent avoir des facteurs communs : prendre par exemple $a = 2$, $c = 4$ et $b = 3$. La réponse **b.** peut être rejetée tout de suite puisque $\text{pgcd}(ab, bc) = b\,\text{pgcd}(a, c)$ est toujours divisible par $b$. Concernant **d.** la somme de deux entiers premiers avec $b$ ne l'est pas forcément : on a le même contre-exemple $a = 2$, $c = 4$ et $b = 3$.

**10** Si $a, b$ sont deux entiers tels que $15a + 17b = 4$ alors

❒ **a.** $\text{pgcd}(a, b) = 4$ ☒ **b.** $\text{pgcd}(a, b)|4$ ❒ **c.** $\text{pgcd}(a, 17) = 4$

❒ **d.** une telle relation est impossible dans $\mathbf{Z}$

Le pgcd de $a$ et $b$ divise $a$ et $b$ donc divise $4 = 15a + 17b$. Il n'est pas forcément égal à 4 comme le montre l'exemple $a = -2$ et $b = 2$. Plus généralement le pgcd $d$ de deux entiers $a$ et $b$ peut toujours s'écrire sous la forme $d = ka + k'b$ avec $k, k' \in \mathbf{Z}$ mais inversement, une égalité $ka + k'b = d$ avec $d \in \mathbf{N}^*$ n'implique que $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$ que lorsque $d = 1$ : c'est l'important théorème de Bezout.

La réponse **c.** peut être exclue car, comme 17 est premier, le pgcd de $a$ et de 17 ne peut que valoir 1 ou 17.

**11** Si $n$ est entier, $n$ et $n + 2$ sont premiers entre eux

❐ **a.** pour tout $n$
❐ **b.** seulement pour $n$ premier
❐ **c.** seulement pour $n$ pair
☒ **d.** seulement pour $n$ impair

Un diviseur commun de $n$ et $n + 2$ divise la différence $(n + 2) - n = 2$. Si $n$ est impair, ce diviseur commun vaut donc 1. En revanche pour $n$ pair, $n$ et $n + 2$ sont tous les deux pairs et le pgcd vaut 2.

**12** Soit $a, b$ dans $\mathbf{N}^*$. Le plus petit entier naturel non nul $n$ tel que $an$ soit divisible par $b$ est

❐ **a.** $b$
❐ **b.** $\mathrm{ppcm}(a, b)$
☒ **c.** $\dfrac{b}{\mathrm{pgcd}(a, b)}$
❐ **d.** $\dfrac{b}{\mathrm{ppcm}(a, b)}$

En effet, si $d$ est le pgcd de $a$ et $b$ on peut écrire $a = da'$ et $b = db'$ avec $a'$ et $b'$ premiers entre eux. Alors $an$ n'est divisible par $b$ que lorsque $a'n$ est divisible par $b'$. D'après le lemme de Gauss cela est réalisé si et seulement si $b'$ divise $n$. L'entier $b$ convient mais ce n'est pas forcément le plus petit. On peut exlure la réponse **d.** car $\dfrac{b}{\mathrm{ppcm}(a, b)}$ n'est pas forcément un entier.

**13** Soit $a, b$ dans $\mathbf{N}^*$. Laquelle des conditions suivantes n'implique pas que $a$ et $b$ sont premiers entre eux ?

❐ **a.** $\mathrm{pgcd}(a^2, b^2) = 1$
❐ **b.** $\mathrm{ppcm}(a, b) = ab$
☒ **c.** $\mathrm{pgcd}(a + 1, b + 1) = 1$
❐ **d.** $\mathrm{pgcd}(2a, 2b) = 1$

Il suffit de donner un contre-exemple : si $a = 4$ et $b = 6$ alors $a + 1$ et $b + 1$ sont premiers entre eux (puisque ce sont deux nombres premiers distincts) mais $a$ et $b$ qui sont tous les deux pairs ne sont pas premiers entre eux.

Concernant les autres réponses proposées, notons que si $a^2$ et $b^2$ sont premiers entre eux, $a$ et $b$ ne peuvent avoir aucun facteur premier en commun, et sont donc eux aussi premiers entre eux. De plus, on a toujours $\mathrm{ppcm}(a, b)\,\mathrm{pgcd}(a, b) = ab$. Donc si $\mathrm{ppcm}(a, b) = ab$ alors $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$. Enfin, l'hypothèse **d.** n'a pas de sens puisque le pgcd de $2a$ et $2b$ est au moins divisible par 2.

**14** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si $k$ est un diviseur de $3^n + 1$ alors forcément

❐ **a.** $k$ est pair
❐ **b.** $k$ est impair
❐ **c.** $k$ est divisible par 3
☒ **d.** $k$ n'est pas divisible par 3

Si $k$ était divisible par 3, alors 3 diviserait aussi $3^n + 1$ donc diviserait 1 ce qui n'est pas le cas. On peut exclure **b.** car $3^n + 1$ est pair donc divisible par $k = 2$. De même **a.** est incorrecte car $3^n + 1$ peut avoir des diviseurs impairs : par exemple si $n = 2$ on obtient 10 qui est divisible par 5.

**15** Soit $a, b$ deux entiers. Quels sont les entiers qui peuvent s'écrire sous la forme $ka + k'b$ avec $k, k'$ dans $\mathbf{Z}$ ?

❒ **a.** tous les entiers ❒ **b.** seulement le pgcd de $a$ et $b$

❒ **c.** les diviseurs du pgcd de $a$ et $b$ ☒ **d.** les multiples du pgcd de $a$ et $b$

Un entier de la forme $ka + k'b$ avec $k, k'$ dans $\mathbf{Z}$ est forcément divisible par $d = \text{pgcd}(a, b)$. Par ailleurs le théorème de Bezout affirme que $d$ peut s'écrire sous cette forme. Il en est donc de même de tous ses multiples puisqu'il suffit de multiplier la relation de Bezout pour $d$ par un facteur convenable.

**16** Soit $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}^*$. Combien y a-t-il d'entiers $q \in \mathbf{Z}$ tels que $|a - bq| < b$ ?

❒ **a.** 0 ou 1 ☒ **b.** 1 ou 2 ❒ **c.** 2 ❒ **d.** $b - 1$

Il existe un unique entier $n$ tel que $nb \leqslant a < (n + 1)b$ : $n$ est la partie entière de $a/b$ ou encore le quotient dans la division euclidienne de $a$ par $b$. Si $a = nb$, la seule solution est à la question de l'énoncé $q = n$ mais si $nb < a < (n + 1)b$ il y a les deux solutions $q = n$ et $q = n + 1$. En fait pour assurer l'unicité dans la division euclidienne sur $\mathbf{Z}$ on impose au reste d'être positif.

**17** Par élimination, lequel des entiers suivants est premier ?

☒ **a.** $2^{127} - 1$ ❒ **b.** $3^{127} - 1$ ❒ **c.** $4^{127} - 1$ ❒ **d.** $5^{127} - 1$

Pour répondre à cette question on utilise l'identité remarquable suivante :

$$a^n - 1 = (a - 1)(1 + a + \cdots + a^{n-1}).$$

En particulier $a^{127} - 1$ est toujours divisible par $a - 1$ et il s'agit d'un facteur non trivial sauf si $a = 2$. On peut vérifier à l'aide d'une calculatrice (performante) que $2^{127} - 1$ est bien premier.

**18** Soit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers. On suppose que $P(3/4) = 0$. Alors

❒ **a.** tous les $a_k$ sont divisibles par 4 ❒ **b.** $a_0$ est divisible par 4

☒ **c.** $a_n$ est divisible par 4 ❒ **d.** $a_0$ et $a_n$ sont divisibles par 4

On multiplie la relation $P\left(\frac{3}{4}\right) = 0$ par $4^n$ pour obtenir

$$a_0 4^n + a_1 3.4^{n-1} + \cdots + a_{n-1} 3^{n-1}.4 = -a_n 3^n.$$

Cette relation montre que $3^n a_n$ est divisble par 4. Comme 4 est premier avec $3^n$, il divise forcément $a_n$ par le lemme de Gauss. Cette idée est importante et permet de trouver très efficacement toutes les racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers (ou rationnels).

Les autres propriétés proposées sont fausses en général comme le montre l'exemple de $P = 4X - 3$.

**19** Soit $a, b$ dans $\mathbf{N}^*$. Laquelle des conditions suivantes n'implique pas que $a$ divise $b$ ?

❐ **a.** $\text{pgcd}(a, b) = a$ ❐ **b.** $\text{ppcm}(a, b) = b$ ❐ **c.** $a^2$ divise $b^2$

☒ **d.** tout diviseur premier de $a$ divise aussi $b$

Le fait que $a$ divise $b$ se voit de la manière suivante sur la factorisation en nombres premiers : pour tout nombre premier $p$ l'exposant de $p$ dans $a$ (appelé la valuation de $a$ en $p$) doit être inférieur à l'exposant de $p$ dans $b$. En particulier tout diviseur premier de $a$ doit aussi diviser $b$ mais cela n'est pas suffisant : par exemple si $a = 12 = 2^2 \times 3$ et $b = 18 = 2 \times 3^2$, $a$ et $b$ ont les mêmes facteurs premiers mais $a$ ne divise pas $b$ (et $b$ ne divise pas $a$ non plus).

Le critère de divisibilité donné ci-dessus permet notamment de prouver que si $a^2$ divise $b^2$ alors $a$ divise $b$ : cela découle du fait que l'exposant (ou valuation) d'un nombre premier $p$ dans $a^2$ est le double de sa valuation dans $a$.

## 27 Polynômes

**1** Le degré du polynôme $P = (X+1)^n - (X-1)^n$ est

❐ **a.** $n^2$ ❐ **b.** $2n$ ❐ **c.** $n$ ☒ **d.** $n-1$

Ici, $P$ est la somme de deux polynômes de degré $n$. Mais comme les coefficients dominants sont opposés, le terme en $X^n$ disparaît dans la somme. Dans ce cas de compensation, le degré de la somme diminue, et donc $P$ est de degré $< n$, ce qui suffisait déjà à déterminer la bonne réponse parmi les 4 proposées.

Pour déterminer précisément le degré de la somme, on exploite le début de la formule du binôme de Newton :

$$P = (X^n + nX^{n-1} + \cdots) - (X^n - nX^{n-1} + \cdots) = 2nX^{n-1} + \cdots$$

On en déduit le degré de $P$ ainsi que son coefficient dominant.

**2** La somme des quatre racines complexes du polynôme $7X^4 + 2X^2 - 3X + 5$ vaut :

☒ **a.** 0 ❐ **b.** $\dfrac{3}{5}$ ❐ **c.** $-\dfrac{2}{7}$ ❐ **d.** $-2$

La somme des racines d'un polynôme $a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ est égale à $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$. Ici on obtient donc 0.

**3** Soit $A, B$ deux polynômes, avec $\deg B = n \geqslant 1$. Combien y a-t-il de polynômes $Q$ tels que $\deg(A - BQ) < n$ ?

❒ **a.** 0 ☒ **b.** 1 ❒ **c.** 2 ❒ **d.** une infinité

Le seul polynôme qui convient est le quotient dans la division euclidienne de $A$ par $B$. En effet, supposons que $\deg(A - BQ) < n$ et notons $R = A - BQ$. Alors on a $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$ : il s'agit bien de la division euclidienne de $A$ par $B$.

**4** Quelles sont les racines du polynôme $\prod_{k=1}^{n}(X^2 - k^2)$ ?

❒ **a.** $1, 2, \dots, n$ ☒ **b.** $-n, -(n-1), \dots, -1, 1, \dots, n$
❒ **c.** $(-1)^n(n!)^2$ ❒ **d.** $-n^2, -(n-1)^2, \dots, -1, 1, \dots, n^2$

On peut factoriser le polynôme : $\prod_{k=1}^{n}(X^2 - k^2) = \prod_{k=1}^{n}(X - k)\prod_{k=1}^{n}(X + k)$. On retrouve ainsi la liste des racines.

**5** Dans la division euclidienne de $P = X^5 + 3X^2 + 4$ par $X + 1$, le reste vaut

☒ **a.** 6 ❒ **b.** 8 ❒ **c.** $X + 3$ ❒ **d.** $X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 4$

Ecrivons la division euclidienne $P = (X + 1)Q + R$. Par définition, le degré de $R$ est strictement inférieur à celui de $X + 1$, donc $R$ est un polynôme constant. Si on évalue cette égalité en $-1$ on voit que $R = P(-1) = 6$.

Les réponses **c.** et **d.** sont à exclure par les considérations de degré précédentes : en fait le polynôme donné en **d.** est le quotient.

**6** Un polynôme réel qui admet une infinité de racines est

☒ **a.** nul ❒ **b.** constant ❒ **c.** scindé ❒ **d.** de degré $+\infty$

En effet, un polynôme non nul de degré $n \in \mathbf{N}$ admet moins de $n$ racines. Aucun polynôme n'est de degré $+\infty$. Par ailleurs, rappelons qu'un polynôme réel est dit scindé s'il s'écrit $P = \lambda(X - x_1)\dots(X - x_n)$ les $x_k$ étant des réels pas forcément distincts.

**7** Soit $P = (X - 1)(X + 2)^n \in \mathbf{R}[X]$ où $n \in \mathbf{N}$. Alors $P'(1)$ vaut

❒ **a.** 0 ☒ **b.** $3^n$ ❒ **c.** $\binom{n}{1}3^n$ ❒ **d.** $\binom{n}{n-1}3^n$

On dérive le produit : $P' = (X + 2)^n + n(X - 1)(X + 2)^{n-1}$. En évaluant en 1 on obtient donc $P'(1) = 3^n$.

**8** Soit $P$ un polynôme complexe tel que 0 soit une racine de $P'$ (polynôme dérivé) d'ordre 3. Alors 0

❒ **a.** est une racine de $P$ d'ordre $P(0)$

❒ **b.** est une racine de $P$ d'ordre 2

❒ **c.** est une racine de $P$ d'ordre 4

☒ **d.** n'est pas forcément racine de $P$

Une racine multiple de $P$ est racine du polynôme dérivé $P'$. En revanche, une racine de $P'$, même multiple, n'a aucune raison d'être racine de $P$. Par exemple, le polynôme $P = X^4 - 1$ admet comme racines $1, -1, i, -i$, mais son polynôme dérivé $P' = 4X^3$ n'admet que 0 comme racine (triple).

Cependant, si on sait que 0 est racine de $P$, alors il est vrai que son ordre de multiplicité est nécessairement 4.

**9** Quelle est la dérivée $k$-ième du polynôme $X^n$ (lorsque $k \leqslant n$) ?

❒ **a.** $X^{n-k}$ ❒ **b.** $k!\, X^{n-k}$

❒ **c.** $(n-k)!\, X^{n-k}$ ☒ **d.** $\dfrac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}$

On vérifie par récurrence sur $k$ que

$$(X^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)X^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}.$$

**10** Soit $P$ un polynôme de degré $n$. Combien $P$ admet-il au plus de racines doubles ?

❒ **a.** $\sqrt{n}$ ☒ **b.** $\dfrac{n}{2}$ ❒ **c.** $n-2$ ❒ **d.** $2n$

Si $x_1, ..., x_p$ sont des racines doubles distinctes de $P$, alors $P$ est divisible par le polynôme $(X-x_1)^2...(X-x_p)^2$ et en regardant les degrés on a donc $2p \leqslant n$, soit $p \leqslant \dfrac{n}{2}$.

La réponse **d.** est à exclure, car un polynôme de degré $n$ admet au plus $n$ racines distinctes.

**11** Soit $P$ un polynôme complexe et $Q(X) = P(\lambda X)$ où $\lambda \in \mathbf{C}$ est non nul. Lorsque $a$ est une racine de $P$, laquelle des valeurs suivantes est racine de $Q$ ?

❒ **a.** $\lambda$ ❒ **b.** $a$ ❒ **c.** $\lambda a$ ☒ **d.** $\dfrac{a}{\lambda}$

Il suffit de calculer $Q\left(\dfrac{a}{\lambda}\right) = P(a) = 0$. En revanche,

$$Q(\lambda) = P(\lambda^2), \quad Q(a) = P(\lambda a) \quad \text{et} \quad Q(\lambda a) = P(\lambda^2 a)$$

n'ont aucune raison d'être nuls.

**12** La fonction $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

❐ **a.** est une fonction polynomiale de degré $\frac{1}{2}$

❐ **b.** est une fonction polynomiale de degré 1

❐ **c.** est une fonction polynomiale de degré 2

☒ **d.** n'est pas une fonction polynomiale

On peut le prouver par deux arguments différents. D'abord l'analyse : on a $f(x) \sim x$ en $+\infty$. Donc si $f$ était une fonction polynomiale elle serait de degré 1 et de la forme $f(x) = x + a$. Mais on obtient une contradiction car $f(x)$ ne tend pas vers $-\infty$ en $-\infty$.

Ou bien une preuve algébrique : comme $f^2$ est polynomiale de degré 2, si $f$ était polynomiale elle serait de degré 1, donc admettrait une racine $a$. Alors $f^2$ admettrait la même racine, ce qui n'est pas le cas, car la fonction $f(x)$ ne s'annule pas sur **R**.

**13** Quel est le coefficient de $X^n$ dans le polynôme $P = (1 + X + X^2 + \cdots + X^n)^2$ ?

❐ **a.** 1 ❐ **b.** 2 ❐ **c.** $n$ ☒ **d.** $n + 1$

Posons $A = 1 + X + \cdots + X^n$. Si les $a_k$ sont les coefficients de A, le coefficient en $X^n$ de $A^2$ est, d'après la formule usuelle du produit, $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = n + 1$.

**14** Soit $P$ un polynôme unitaire à coefficients réels dont toutes les racines dans **C** sont de module 1. Alors son coefficient constant vaut

❐ **a.** 1 ❐ **b.** 0 ☒ **c.** 1 ou $-1$

❐ **d.** un réel quelconque de $[-1, 1]$

Comme $P$ est unitaire, le coefficient constant est au signe près égal au produit des racines de $P$. Son module est donc égal à 1 et il vaut donc 1 ou $-1$. Ces deux valeurs sont d'ailleurs possibles, comme on peut le voir par exemple avec $P = X - 1$ et $P = X + 1$.

**15** Si $P$ et $Q$ sont deux polynômes de degré $n$, quel est le degré de $PQ' - P'Q$ ?

❐ **a.** $n^2 - n$ ❐ **b.** $n^2 - n - 1$ ❐ **c.** $2n - 1$

☒ **d.** il est inférieur à $2n - 2$

Les polynômes $PQ'$ et $P'Q$ sont tous les deux de degré $n+(n-1) = 2n-1$ (rappelons que le degré d'un produit est égal à la somme des degrés) et ils ont le même coefficient dominant qui vaut $np_nq_n$ où $p_n$ est le coefficient dominant de $P$ et $q_n$ celui de $Q$. Par conséquent le degré de la différence est inférieur à $2n - 2$.

**16** Soit $R$ le reste de la division euclidienne de $X^n + 1$ par $X^2 - 1$. Combien vaut $R(1)$ ?

❐ **a.** 0 ☒ **b.** 2 ❐ **c.** $X + 2$ ❐ **d.** $(-1)^n$

On a par définition $X^n + 1 = (X^2 - 1)Q(X) + R(X)$ où $Q$ est le quotient dans la division. On applique cette identité en 1 pour obtenir $R(1) = 2$.

La réponse **c.** est à exclure : $R(1)$ est un nombre réel et pas un polynôme en $X$.

**17** Soit $P = 1 + 2(X-1)^2 + 8(X-1)^4 \in \mathbf{R}[X]$. Que vaut $P''(1)$ ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 2 ☒ **c.** 4 ❒ **d.** 8

La formule de Taylor en 1 dit que le coefficient en $(X-1)^2$ de $P$ est égal à $\dfrac{P''(1)}{2!}$. On a donc ici $P''(1) = 4$. Notons qu'on retrouve facilement le résultat en dérivant $P$ deux fois.

**18** On écrit la division euclidienne d'un polynôme $A$ de degré 8 par un polynôme $B$ de degré 2. Le quotient est de degré

❒ **a.** strictement inférieur à 2 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** 4 ☒ **d.** 6

Notons $A = BQ + R$ où $Q$ est le quotient et $R$ le reste, avec par hypothèse $\deg(R) < 2$ ; On a alors $BQ = A - R$. Comme les degrés de $A$ et de $R$ sont différents, $A - R$ est de degré $\max(\deg A, \deg R) = 8$ et donc $Q$ est de degré 6.

Si vous avez répondu **a.**, vous avez confondu quotient et reste : c'est $R$ qui a un degré strictement inférieur à 2. Si vous avez répondu **c.**, rappelons que le degré d'un produit est égal à la somme des degrés et non pas au produit des degrés.

**19** Combien y a-t-il de polynômes $P$ à coefficients réels de degré 3 tels que $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 4$ ?

☒ **a.** aucun ❒ **b.** un seul

❒ **c.** 2 ❒ **d.** une infinité

Si $P$ convient, le polynôme $P(X) - 4$ est de degré 3 et admet 4 racines distinctes, ce qui est impossible. En revanche (c'est la théorie de l'interpolation de Lagrange), il existe bien un unique polynôme vérifiant ces contraintes, mais de degré inférieur ou égal (et non égal) à 3. Ici, il s'agirait du polynôme constant $P(X) = 4$.

**20** Soit $n \geqslant 1$. Combien vaut $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(2 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$ ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 0 ❒ **c.** $3^{n/2}$ ☒ **d.** $2^n - 1$

En effet, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$ est la factorisation dans $\mathbf{C}$ du polynôme $X^n - 1$. Sa valeur en 2 est donc $2^n - 1$. Notons que le produit ne peut pas être nul car aucun de ses facteurs ne l'est.

**21** Si $a, b$ et $c$ sont les trois racines complexes de $P = X^3 + 2X^2 - X + 1$, que vaut $a^2 + b^2 + c^2$ ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** 4 ☒ **d.** 6

En effet, $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+ac+bc) = (-2)^2+2 = 6$. De façon générale, toute expression polynomiale qui est symétrique en $a$, $b$ et $c$ pourra s'exprimer aussi à l'aide de $\sigma_1 = a+b+c, \sigma_2 = ab+bc+ac, \sigma_3 = abc$, et ces trois valeurs se lisent sur les coefficients du polynôme.

**22** Soit $P$ un polynôme complexe, $A$ l'ensemble des racines de $P(X) - X$ et $B$ l'ensemble des racines de $P(P(X)) - X$. Alors on a

❒ **a.** $A = B$ ☒ **b.** $A \subset B$ ❒ **c.** $B \subset A$

❒ **d.** $A$ et $B$ sont complémentaires.

Il s'agit ici de comparer les propriétés « être dans $A$ » et « être dans $B$ » en termes d'implications logiques. Le complexe $z$ est dans $A$ lorsque $P(z) - z = 0$, soit lorsque $P(z) = z$. Il est dans $B$ lorsque $P(P(z)) = z$. On peut maintenant répondre à la question : si $z \in A$, alors $P(P(z)) = P(z) = z$, donc $z$ est dans $B$ : on a bien $A \subset B$. Cette inclusion affirme simplement qu'un point fixe de la fonction polynôme $P$ est encore un point fixe de $P \circ P$.

Il n'y a pas égalité en général. Par exemple si $P = X^2$ les racines de $P(X) - X$ sont 0 et 1 alors que $P(P(X)) - X = X^4 - X = X(X^3 - 1)$ admet deux racines de plus, qui sont $e^{2i\pi/3}$ et $e^{-2i\pi/3}$.

**23** Soit $P, Q, R$ trois polynômes complexes. À quelle condition sur $Q$, l'égalité $P(Q(X)) = R(Q(X))$ implique-t-elle que $P = R$ ?

❒ **a.** $Q = 1$ ❒ **b.** $Q$ est constant

☒ **c.** $Q$ est non constant ❒ **d.** $Q$ est non nul

Lorsque $Q$ n'est pas un polynôme constant il prend une infinité de valeurs.

Si $P(Q(X) = R(Q(X))$ les polynômes $P$ et $R$ coïncident en une infinité de points donc sont formellement égaux.

À l'inverse, lorsque $Q$ est constant, disons égal à $\lambda$, l'hypothèse revient à $P(\lambda) = R(\lambda)$, ce qui est insuffisant pour conclure à l'égalité de $P$ et $R$.

**24** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. À l'aide de la formule de Leibniz, que vaut la dérivée $n$-ième en 1 du polynôme réel $P(X) = (X - 1)^n(X + 2)$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** $n!$ ☒ **d.** $3n!$

On calcule la dérivée $n$-ième de $P$ à l'aide de la formule de Leibniz. On a

$$P^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}[(X-1)^n]^{(k)}(X+2)^{(n-k)} = \binom{n}{n}n!(X+2) + \binom{n}{n-1}n!(X-1)$$

car les dérivées d'ordre supérieur à 1 de $X+2$ sont nulles. En évaluant en 1 on obtient donc $3n!$ .

**25** Soit $P$ scindé à racines simples dans $\mathbf{C}[X]$. À quelle condition $P(X^2)$ est-il aussi scindé à racines simples ?

❒ **a.** c'est toujours le cas

❒ **b.** ce n'est jamais le cas

❒ **c.** uniquement si $P(X^2)$ est pair

☒ **d.** uniquement si 0 n'est pas racine de $P$

Le polynôme $P$ s'écrit $c(X-z_1)...(X-z_n)$ où les $z_k$ sont des complexes deux à deux distincts. On a donc $P(X^2) = c(X^2 - z_1)...(X^2 - z_n)$. Si les $z_k$ sont tous non nuls, les racines de $P$ sont les racines carrées des $z_k$ et elles sont deux à deux distinctes. En revanche si l'un des $z_k$ est nul, 0 devient une racine double de $P(X^2)$.

## 28 Arithmétique des polynômes - Fractions rationnelles

**1** La fraction rationnelle $\dfrac{(X+1)^2(X-1)}{(X+1)(X^2+3)}$ est de degré

❒ **a.** $-1$ ☒ **b.** 0 ❒ **c.** 1 ❒ **d.** 3

Le degré du numérateur est 3 et celui du dénominateur aussi. Donc la fraction est de degré $3 - 3 = 0$. Elle n'est pas irréductible mais cela n'importe pas dans le calcul du degré.

**2** Le polynôme $X^2 - 2\cos\theta X + 1$ est irréductible dans $\mathbf{R}[X]$

❒ **a.** pour tout $\theta$ ❒ **b.** pour $\theta$ non nul

☒ **c.** pour $\theta \notin \pi\mathbf{Z}$ ❒ **d.** pour aucune valeur de $\theta$

Les polynômes réels du second degré irréductibles sont ceux qui n'ont pas de racine réelle, c'est-à-dire ceux dont le discriminant est strictement négatif. Ici cela équivaut à $\cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta < 0$ c'est-à-dire à $\theta \notin \pi\mathbf{Z}$. On rencontre très souvent ce polynôme dont il est aussi bon de connaître la factorisation sur $\mathbf{C}$ : $X^2 - 2\cos\theta X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$.

**3** Soit $P, Q$ des polynômes tels que $XP(X) = (X-1)Q(X)$. Quelle condition permet de dire que $P$ divise $Q$ ?

❒ **a.** $P(0) = 0$ ❒ **b.** $P(1) = 0$ ❒ **c.** $P(0) \neq 0$ ☒ **d.** $P(1) \neq 0$

L'hypothèse nous dite que $P$ divise le produit $(X-1)Q$. Si $P$ est premier avec $X-1$ le lemme de Gauss nous permet d'affirmer que $P$ divise $Q$. Or cette condition revient exactement à dire que 1 n'est pas racine de $P$.

**4** Le polynôme $X^4 + pX^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbf{R}[X]$

❒ **a.** pour tout réel $p$ ☒ **b.** pour aucun réel $p$

❒ **c.** pour $p > 0$ ❒ **d.** lorsque $p^2 < 4$

Il est important de retenir que les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes du second degré sans racine réelle (de discriminant strictement négatif). Le polynôme proposé étant de degré 4 il n'est jamais irréductible.

**5** Soit $P$ un polynôme complexe de degré $\geqslant 1$. Les polynômes $P$ et $P'$ sont premiers entre eux si et seulement si

❐ **a.** $\deg P = 1$ ❐ **b.** $P$ admet une unique racine

❐ **c.** $P'$ ne divise pas $P$ ☒ **d.** toutes les racines de $P$ sont simples

Une racine de $P$ de multiplicité $m$ est racine de $P'$ avec la multiplicité $m - 1$. Or, comme on travaille sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, $P$ et $P'$ sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont aucune racine en commun, ce qui revient donc à dire ici que toutes les racines de $P$ sont simples.

C'est notamment le cas lorsque $\deg P = 1$ mais cette condition n'est pas nécessaire. Dans le cas **b.** où $P$ admet une unique racine on peut noter que $P'$ divise $P$. Voici enfin un contre-exemple pour **c.** : si $P(X) = X^2(X-1)$ alors $P'(X) = X(3X-2)$ ne divise pas $P$ mais n'est pas premier avec $P$.

**6** Soit $P$ un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré $n$ qui admet $p$ racines distinctes. Le degré du pgcd de $P$ et $P'$ est égal à

❐ **a.** $p$ ☒ **b.** $n - p$ ❐ **c.** $\dfrac{n}{p}$ ❐ **d.** $\operatorname{pgcd}(n, p)$

Posons $P(X) = \lambda(X - z_1)^{n_1} \dots (X - z_p)^{n_p}$ où les $z_i$ sont deux à deux distincts. Chaque $z_i$ est racine de $P'$ avec une multiplicité $n_i - 1$ et le pgcd de $P$ et $P'$ est donc le polynôme $(X - z_1)^{n_1 - 1} \dots (X - z_p)^{n_p - 1}$. Il est de degré

$$(n_1 - 1) + \cdots + (n_p - 1) = n_1 + \cdots + n_p - p = n - p.$$

C'est une formule qui peut se révéler très utile pour certains exercices.

**7** Soit $P, Q$ deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$, A la proposition « $\operatorname{pgcd}(P, Q) = 1$ » et B la proposition « $P$ et $Q$ n'ont pas de racine réelle commune ». Alors

❐ **a.** A implique B ❐ **b.** A et B sont équivalentes

☒ **c.** B implique A ❐ **d.** il n'y a pas d'implication entre A et B

Si $P$ et $Q$ sont premiers entre eux, ils n'ont pas de racine commune, car si $a$ était une telle racine $X - a$ serait un diviseur commun de $P$ et $Q$. La réciproque est vraie sur le corps des nombres complexes car si le pgcd de $P$ et $Q$ ne vaut pas 1 il est de degré $\geqslant 1$ et admet donc au moins une racine $a$, qui est alors racine commune à $P$ et $Q$. Mais sur $\mathbf{R}$ cela n'est plus le cas. Par exemple $P = X^2 + 1$ et $Q = (X^2 + 1)(X - 1)$ ne sont pas premiers entre eux mais ils n'ont aucune racine commune réelle.

**8** Un polynôme réel $P$ qui n'a pas de racine réelle est

❐ **a.** irréductible ❐ **b.** de degré 2 ☒ **c.** de degré pair

❐ **d.** de coefficient dominant strictement positif

Si $P$ n'a aucune racine réelle sa décomposition en irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ ne contient que des facteurs irréductibles de degré 2 et le degré de $P$ est donc pair. On peut aussi dire qu'un polynôme réel de degré impair admet toujours au moins une racine réelle grâce au théorème des valeurs intermédiaires (les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont infinies et « opposées »).

On ne peut pas dire mieux comme le montre $P = -(X^2 + 1)^2$ qui n'est ni irréductible, ni de degré 2, ni de coefficient dominant strictement positif, mais qui n'a aucune racine réelle.

**9** Soit $P$ un polynôme dans $\mathbf{C}[X]$. Quand peut-on trouver une relation de la forme $UP + VP' = 1$ avec $U, V$ dans $\mathbf{C}[X]$ ?

❒ **a.** pour tout $P$ ☒ **b.** lorsque $P$ est à racines simples

❒ **c.** lorsque $\deg P = 1$ ❒ **d.** lorsque $P$ n'a qu'une seule racine

L'existence d'une telle relation de Bezout équivaut à ce que $P$ et $P'$ soient premiers entre eux. Comme le corps de base est $\mathbf{C}$, cela revient à dire que $P$ et $P'$ n'ont pas de racine commune, autrement dit que toutes les racines de $P$ sont simples. C'est le cas en particulier lorsque $\deg P = 1$ mais cette condition n'est pas nécessaire.

**10** Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle de degré $n$. On suppose que $P(0)$ et $Q(0)$ sont non nuls. Quel est le degré de $F(1/X)$ ?

☒ **a.** 0 ❒ **b.** $-n$ ❒ **c.** $n - 1$ ❒ **d.** $1 - n$

Comme le coefficient constant de $P$ est non nul, $P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ est une fraction de degré 0 et il en est de même pour $Q\left(\dfrac{1}{X}\right)$. Donc $F\left(\dfrac{1}{X}\right)$ est aussi de degré 0.

**11** Une fraction rationnelle réelle $R$ est de degré strictement négatif si et seulement si

☒ **a.** $R(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers l'infini

❒ **b.** $\dfrac{1}{R}$ est un polynôme

❒ **c.** $R$ n'admet pas de racines

❒ **d.** $R$ n'admet pas de pôles

En l'infini une fraction rationnelle $R$ est équivalente à un terme de la forme $ax^n$ où $a$ est une constante non nulle et $n$ le degré de $R$. En particulier $R$ tend vers 0 en $\pm\infty$ si et seulement si $n < 0$.

Notons que si $\deg R < 0$ alors $\deg \dfrac{1}{R} > 0$ mais que cela ne permet pas de dire que $R$ est un polynôme, comme on le voit par exemple pour $R = \dfrac{X+1}{X^2}$.

**12** Soit $R(X) = \dfrac{2X+2}{(X-1)(X-2)(X-3)}$. Quel est le coefficient de $\dfrac{1}{X-1}$ dans la décomposition en éléments simples de $R$ ?

☒ **a.** 2 ❒ **b.** $\dfrac{1}{2}$ ❒ **c.** $-2$ ❒ **d.** $-\dfrac{1}{2}$

Le pôle 1 est un pôle simple de $R$ et la méthode la plus simple pour trouver le coefficient est de multiplier $R(X)$ par $X-1$ et d'évaluer la fraction obtenue en 1. On trouve ici $\dfrac{2\times 1+2}{(1-2)(1-3)} = 2$.

**13** Soit $P$ un polynôme de degré $n$.

La partie entière de la fraction rationnelle $F = \left(P + \dfrac{1}{(X-1)^2}\right)^2$ est égale à $P^2$

☒ **a.** lorsque $n \leqslant 1$ ❒ **b.** lorsque $n \leqslant 2$ ❒ **c.** pour tout $n$

❒ **d.** lorsque 1 n'est pas racine de $P$

On a $F = P^2 + \dfrac{2P}{(X-1)^2} + \dfrac{1}{(X-1)^4}$. Le premier terme $P^2$ est un polynôme. Le second terme est une fraction de degré $n-2$ et sa partie entière est donc nulle si et seulement si $n < 2$. Enfin le troisième terme est une fraction de degré $-4$ donc de partie entière nulle. Le fait que 1 soit ou ne soit pas racine de $P$ ne change rien au degré de la fraction du milieu.

**14** Le polynôme réel $P(X) = X^3 + pX + 1$ admet au moins une racine réelle

❒ **a.** lorsque $p^2 - 4X \leqslant 0$ ❒ **b.** lorsque $p \leqslant 0$

☒ **c.** pour toute valeur de $p$ ❒ **d.** pour aucune valeur de $p$

On a $P(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$ et $P(x) \to -\infty$ lorsque $x \to -\infty$. La fonction continue $P$ prend donc des valeurs positives et négatives et le théorème des valeurs intermédiaires assure alors que $P$ admet au moins une racine réelle. Ce résultat se généralise à tout polynôme de degré impair. Pour des question portant sur des polynômes à coefficients réels il faut toujours songer à la possibilité d'appliquer des théorèmes d'analyse sur les fonctions de la variable réelle (théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Rolle,...).

**15** Soit $P = (X-1)^3(X-2)^4(X+1)$. Quel est le coefficient de $\dfrac{1}{X-1}$ dans la décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{P'}{P}$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** 2 ☒ **d.** 3

Lorsque $F$ est une fraction rationnelle (disons ici réelle ou complexe), la fraction $\dfrac{F'}{F}$ s'appelle la dérivée logarithmique de $F$. Il est aisé de vérifier que la dérivée logarithmique d'un produit est la somme des dérivées logarithmiques. Comme la dérivée logarithmique du polynôme $(X-a)^k$ est $\dfrac{k}{X-a}$ il est facile d'en déduire qu'ici on a

$$\frac{P'}{P} = \frac{3}{X-1} + \frac{4}{X-2} + \frac{1}{X+1}.$$

Cette écriture est la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

**16** Soit $F = \dfrac{(X-1)^2(X^2+X-2)}{(X^2-1)^3}$. On note $R$ l'ensemble des racines réelles et $P$ l'ensemble des pôles réels de $F$. On a

❒ **a.** $R = \{1, -2\}$ et $P = \{1, -1\}$ ❒ **b.** $R$ est vide et $P = \{1, -1\}$

❒ **c.** $R = \{1, -2\}$ et $P = \{-1\}$ ☒ **d.** $R = \{-2\}$ et $P = \{-1\}$

Pour répondre à cette question il faut simplement prendre garde à considérer un représentant irréductible de la fraction $F$ ce qui n'est pas le cas de celui donné initialement. En effet, on a

$$F = \frac{(X-1)^2(X-1)(X+2)}{(X-1)^3(X+1)^3} = \frac{(X+2)}{(X+1)^3}$$

de sorte que $-2$ est la seule racine réelle (simple) de $F$, et $-1$ le seul pôle (d'ordre 3).

**17** Soit $P$ un polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$. Quels sont les pôles de $\dfrac{P'}{P}$ ?

☒ **a.** les racines de $P$ ❒ **b.** les racines simples de $P$

❒ **c.** les racines multiples de $P$ ❒ **d.** les pôles de $P'$

Le polynôme $P$ est scindé puisqu'on travaille sur le corps $\mathbf{C}$. On peut l'écrire $P = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - z_k)^{n_k}$ où les $z_k$ sont des nombres complexes deux à deux distincts. Chaque $z_k$ est racine de $P'$ à l'ordre $n_k - 1$, de sorte que chaque $z_k$ est un pôle simple de la fraction $\dfrac{P'}{P}$. Rappelons qu'un polynôme, comme $P'$, n'a pas de pôles mais des racines.

**18** Soit $P$ un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré $n$ qui admet $n$ racines distinctes. Le nombre de polynômes unitaires qui divisent $P$ est

❒ **a.** $n$ ❒ **b.** $n+1$ ☒ **c.** $2^n$ ❒ **d.** une infinité

Le polynôme $P$ s'écrit $\lambda(X-z_1)(X-z_2)...(X-z_n)$ où $z_1, ..., z_n$ sont les racines complexes deux à deux distinctes de $P$. Un diviseur unitaire de $P$ est un polynôme de la forme $\displaystyle\prod_{i\in I} (X - z_i)$ où $I$ est une partie quelconque de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Il y en a donc $2^n$.

**19** Soit $P$ un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré $n$ dont les racines sont toutes simples. Lequel des polynômes suivants est forcément à racines simples ?

❒ **a.** $P(X^2)$ ❒ **b.** $P(X)^2$ ☒ **c.** $P(X+2)$ ❒ **d.** $P(X)+2$

On peut écrire $P(X) = a(X - z_1)...(X - z_n)$ où les $z_i$ sont des nombres complexes deux à deux distincts. On a alors $P(X+2) = a(X - z_1 + 2)...(X - z_n + 2)$ et $P(X+2)$ admet les $z_i - 2$ pour racines simples.

Bien entendu on pouvait éliminer **b.** car $P(X)^2$ admet pour racines les $z_i$ mais à l'ordre 2. Pour **a.** on a seulement un problème lorsque l'un des $z_i$ est nul (car 0 est alors racine double). Enfin pour **d.** on a le contre-exemple $P(X) = X^2 - 2$.

**20** Soit $R(X) = \dfrac{X+3}{X(X^2+1)(X^2-1)}$. Quel est le coefficient de $\dfrac{1}{X-1}$ dans la décomposition en éléments simples de $R$ ?

❒ **a.** 1/4 ❒ **b.** 0 ❒ **c.** 2 ☒ **d.** 1

Pour trouver ce coefficient on multiplie $R(X)$ par $X - 1$ et on évalue la fraction obtenue en 1. On trouve ici $\dfrac{1+3}{1(1^2+1)(1+1)} = 1$.

## 29 Généralités sur les espaces vectoriels

**1** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $u^2 = -\operatorname{Id}$, que vaut $(u^2 + u)^2$ ?

❒ **a.** $-2\operatorname{Id}$ ☒ **b.** $-2u$ ❒ **c.** $2\operatorname{Id} - 2u$ ❒ **d.** 0

Il suffit de développer :

$$(u^2 + u)^2 = (u - \operatorname{Id})^2 = u^2 - 2u + \operatorname{Id} = -2u.$$

Notons qu'on peut utiliser la formule du binôme car Id et $u$ commutent.

**2** Laquelle des parties suivantes de $\mathbf{R}^2$ est un sous-espace vectoriel ?

☒ **a.** $\{(x, y),\ y = 2x\}$ ❒ **b.** $\{(x, y),\ y + x = 1\}$

❒ **c.** $\{(x, y),\ yx = 1\}$ ❒ **d.** $\{(x, y),\ yx = 0\}$

La partie **a.** est la droite vectorielle dirigée par exemple par le vecteur $(1, 2)$ : c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

En revanche, la partie **b.** est une droite affine ; elle ne contient pas le vecteur nul et ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$. La partie **c.** est une hyperbole (qui ne contient pas non plus 0) et la partie **d.** la réunion de deux droites vectorielles (les axes de coordonnées) : ce n'est pas un sous-espace car on n'a pas stabilité pour l'addition : $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ n'est pas dans la réunion des deux axes.

**3** Laquelle des applications suivantes est linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ ?

☒ **a.** $f_1 : (x, y) \mapsto x$ ❒ **b.** $f_2 : (x, y) \mapsto xy$

❒ **c.** $f_3 : (x, y) \mapsto x + y + 1$ ❒ **d.** $f_4 : (x, y) \mapsto (x + y)(x - y)$

L'application $f_1$ est la première forme linéaire coordonnée. L'application $f_2$ est bilinéaire mais n'est pas linéaire, car $f_2(x, y) \neq f_2(x, 0) + f_2(0, y)$. On vérifie de même que

$$f_4(2, 0) = 4 \neq f_4(1, 1) + f_4(1, -1) = 0.$$

Quant à $f_3$, c'est ce qu'on appelle une forme affine dont la partie linéaire est la forme linéaire $(x, y) \mapsto x + y$. Elle n'est pas linéaire car $f_3(0, 0) \neq 0$. En fait, les applications linéaires de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ sont exactement les formes linéaires $(x, y) \mapsto ax + by$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

**4** Soit $E, F$ deux espaces vectoriels réels, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(e_1, ..., e_p)$ une famille de vecteurs de $E$. On a $u(\text{Vect}(e_1, ..., e_p)) = \text{Vect}(u(e_1), ..., u(e_p))$

☒ **a.** pour toute application linéaire $u$

❒ **b.** lorsque $u$ est injective

❒ **c.** lorsque $u$ est surjective

❒ **d.** lorsque $\text{Im}\, u \subset \text{Vect}(e_1, ..., e_p)$

Si $x$ appartient à $\text{Vect}(u(e_1), ..., u(e_p))$ il s'écrit $x = \lambda_1 u(e_1) + \cdots + \lambda_p u(e_p)$ où $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des réels. Par linéarité de $u$, on a $x = u(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p)$ et $x$ est dans l'image par $u$ de l'espace $\text{Vect}(e_1, ..., e_p)$. On a de même l'autre inclusion.

**5** Laquelle des parties suivantes n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ ?

❒ **a.** l'ensemble des fonctions $f$ telles que $f(0) = 0$

❒ **b.** l'ensemble des fonctions paires

☒ **c.** l'ensemble des fonctions croissantes

❒ **d.** l'ensemble des fonctions polynomiales

L'ensemble des fonctions croissantes est stable pour la somme mais pas pour le produit par un scalaire : si $f$ est strictement croissante, $-f$ est strictement décroissante donc non croissante. Les trois autres ensembles proposés sont bien des espaces vectoriels : stables par somme et par multiplication par un réel.

**6** Lequel des ensembles suivants est un supplémentaire dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ de la droite $D = \{(x, 0),\ x \in \mathbf{R}\}$ ?

☒ **a.** $\{(x, x),\ x \in \mathbf{R}\}$ ❒ **b.** $\{(x, y),\ y \neq 0\}$

❒ **c.** $\{(x, 1),\ x \in \mathbf{R}\}$ ❒ **d.** $\{(0, 1)\}$

L'ensemble donné en **a.** est la droite dirigée par le vecteur $(1, 1)$ et elle forme un supplémentaire de $D$. Les trois autres ensembles proposés ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ : ils ne contiennent pas $(0, 0)$ !

**7** Soit $u$ un endomorphisme de $E$. Quelle propriété est toujours vérifiée ?

❒ **a.** $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} u^2$ ☒ **b.** $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$

❒ **c.** $\operatorname{Im} u^2 \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$ ❒ **d.** $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} u^2$

Tout élément de $\operatorname{Im} u^2$ s'écrit sous la forme $u(u(x))$ avec $x \in E$ et appartient donc à $\operatorname{Im} u$. Il n'y a toutefois pas forcément égalité : par exemple si $E = \mathbf{R}[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes réels et $u$ l'application qui à $P(X)$ associe $XP(X)$, l'image de $u$ est le sous-espace des polynômes qui ont 0 pour racine alors que $\operatorname{Im} u^2$ est l'espace des polynômes divisibles par $X^2$, c'est-à-dire qui ont 0 pour racine au moins double.

À partir de **b.**, on a $\operatorname{Im} u^2 \cap \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$ et la propriété **c.** n'est correcte que lorsque $u^2 = 0$. De même, $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$ et la propriété **d.** n'est correcte que si $u$ est surjective.

**8** Si $u$ est un endomorphisme de $E$ on a toujours

☒ **a.** $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$ ❒ **b.** $\operatorname{Ker} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$

❒ **c.** $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ ❒ **d.** $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} u^2 = \{0\}$

En effet, si $u(x) = 0$ alors $u^2(x) = u(u(x)) = u(0) = 0$. Il n'y a pas forcément égalité : considérons par exemple l'endomorphisme $u$ de $\mathbf{R}[X]$ qui à un polynôme $P$ associe $P'$ ; le noyau de $u$ est l'espace des polynômes constants et le noyau de $u^2$ est l'espace des polynômes de degré $\leqslant 1$.

De manière générale pour deux endomorphismes $u$ et $v$ de $E$ on a toujours l'inclusion $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v \circ u)$.

**9** Lequel des ensembles suivants est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ ?

❒ **a.** l'ensemble des projecteurs

❒ **b.** l'ensemble des symétries

☒ **c.** l'ensemble des homothéties

❒ **d.** l'ensemble des automorphismes de $E$

L'ensemble des homothéties est la droite vectorielle de $\mathscr{L}(E)$ engendrée par l'identité. L'ensemble des projecteurs n'est ni stable pour la somme, ni stable pour le produit par un scalaire : si $p$ est un projecteur non nul, $-p$ n'en est pas un. L'ensemble des symétries et le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ ne contiennent pas l'endomorphisme nul donc ne peuvent pas être des sous-espaces vectoriels.

**10** Dans l'espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, laquelle des fonctions suivantes est combinaison linéaire des fonctions $f_1 : x \mapsto \sin x$, $f_2 : x \mapsto \sin 2x$ et $f_3 : x \mapsto \sin 3x$ ?

❒ **a.** $x \mapsto \cos x$ ❒ **b.** $x \mapsto x \cos x$

☒ **c.** $x \mapsto \sin x \cos x$ ❒ **d.** $x \mapsto \tan x$

D'après les formules de trigonométrie usuelles la fonction $x \mapsto \sin x \cos x$ est égale à $\frac{1}{2} f_2$. Notons qu'une combinaison linéaire de $f_1, f_2, f_3$ est forcément impaire (ce qui n'est pas le cas de la fonction cosinus), bornée sur $\mathbf{R}$ (ce qui n'est pas le cas de la fonction $x \mapsto x \cos x$) et définie sur $\mathbf{R}$ (ce qui n'est pas le cas de la fonction tangente).

**11** Laquelle des applications suivantes est un projecteur de $\mathbf{R}^2$ ?

❒ **a.** $p_1 : (x, y) \mapsto (y, x)$ ❒ **b.** $p_2 : (x, y) \mapsto (1, 0)$

❒ **c.** $p_3 : (x, y) \mapsto (0, x)$ ☒ **d.** $p_4 : (x, y) \mapsto (0, y)$

L'application $p_4$ est linéaire et vérifie $p_4 \circ p_4 = p_4$. Il s'agit du projecteur de $\mathbf{R}^2$ sur la droite dirigée par $e_2 = (0, 1)$ parallèlement à la droite dirigée par $e_1 = (1, 0)$.

Étudions rapidement les autres réponses proposées. L'application $p_1$ est linéaire mais vérifie $p_1 \circ p_1 = \mathrm{Id}$ : il s'agit d'une symétrie. L'application $p_2$ vérifie $p_2 \circ p_2 = p_2$ mais elle n'est pas linéaire. Enfin l'application $p_3$ est linéaire mais vérifie $p_3 \circ p_3 = 0$ : on dit que cet endomorphisme est nilpotent.

**12** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ et $x$ un vecteur de $E$ tel que $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors pour $n \in \mathbf{N}$, $u^n(x)$ vaut

❒ **a.** $\lambda x^n$ ☒ **b.** $\lambda^n x$ ❒ **c.** $\lambda x$ ❒ **d.** $\lambda^n x^n$

On a $u^2(x) = u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda^2 x$ et par une récurrence sur $n$, $u^n(x) = \lambda^n x$ pour tout $n$. Lorsque $x$ n'est pas nul on dit qu'il s'agit d'un vecteur propre pour $u$ associé à la valeur propre $\lambda$. Le calcul précédent montre alors que $x$ est aussi un vecteur propre de $u^n$ associé à la valeur propre $\lambda^n$. Ces notions sont au cœur du programme de Spéciales.

Notons que les réponses **a.** et **d.** pouvaient être exclues très vite puisque l'écriture $x^n$ n'a pas de sens.

**13** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, $u$ un endomorphisme de $E$, et $v$ la restriction de $u$ à $F$. Alors

❒ **a.** $v \in \mathscr{L}(F)$ ☒ **b.** $v \in \mathscr{L}(F, E)$ ❒ **c.** $v \in \mathscr{L}(E, F)$

❒ **d.** $v$ n'est pas forcément linéaire

La restriction d'une application linéaire à un sous-espace reste linéaire. Mais $v$ n'est pas forcément à valeurs dans $F$ : il s'agit d'une application linéaire de $F$ dans $E$. Dans le cas particulier où l'espace $F$ est stable par $u$, alors $u$ induit un endomorphisme de $F$ noté $u_F$ mais qu'il ne faut pas confondre avec la restriction de $u$ à $F$ qui est toujours un élément de $\mathscr{L}(F, E)$.

**14** Soit $s$ une symétrie de l'espace vectoriel $E$. Laquelle des applications suivantes est un projecteur ?

❒ **a.** $s + \mathrm{Id}$ ☒ **b.** $\frac{1}{2}(\mathrm{Id} - s)$ ❒ **c.** $s^2 - s$ ❒ **d.** $s^2 = s$

On a en utilisant la formule du binôme (ce qui est légitime ici car Id et $s$ commutent),

$$\left(\frac{1}{2}(\mathrm{Id}-s)\right)^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{Id}+s^2-2s) = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}-s).$$

Il s'agit en fait du projecteur sur $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id})$. Notons que la proposition **d.** pouvait être éliminée directement ; elle témoigne toutefois d'une mauvaise lecture de l'énoncé car on ne demandait pas à quelle condition $s$ était un projecteur.

**15** Soit $g$ non nulle dans $\mathscr{L}(E)$. Laquelle des applications suivantes de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$ n'est pas linéaire ?

❒ **a.** $f \mapsto g \circ f$ ❒ **b.** $f \mapsto f \circ g$

☒ **c.** $f \mapsto g + f$ ❒ **d.** $f \mapsto g \circ f \circ g$

En effet, l'image de 0 (l'application nulle) n'est pas 0. En revanche la structure d'algèbre de $\mathscr{L}(E)$ rend linéaires les autres applications proposées.

**16** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $F$ un sous-espace de $E$. À quelle condition la restriction de $u$ à $F$ est-elle injective ?

❒ **a.** si $\mathrm{Ker}\, u = F$ ❒ **b.** si $F$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}\, u$

☒ **c.** si $F \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$ ❒ **d.** si $F \cap \mathrm{Ker}\, u = \emptyset$

Si on note $v$ a restriction de $u$ à $F$ on a de manière très générale $\mathrm{Ker}\, v = F \cap \mathrm{Ker}\, u$. Par ailleurs on sait qu'une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est nul.

Avec l'hypothèse **a.** $v$ serait identiquement nulle donc loin d'être injective si $F$ n'est pas nul. L'hypothèse **d.** ne peut se produire : l'intersection de deux sous-espaces vectoriels ne peut pas être vide car elle contient au moins le vecteur nul.

**17** Lequel des sous-ensembles suivants de $\mathscr{L}(E)$ n'est pas stable par l'application $f \mapsto f \circ f$ ?

❒ **a.** l'ensemble des projecteurs

❒ **b.** l'ensemble des symétries

☒ **c.** l'ensemble des endomorphismes non nuls

❒ **d.** l'ensemble des homothéties

Si $p$ est un projecteur de $E$ alors $p \circ p = p$, donc l'ensemble des projecteurs est stable. De même si $s$ est une symétrie de $E$ alors $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{Id}_E$ est bien une symétrie. Enfin si $h = \lambda\, \mathrm{Id}_E$ est l'homothétie de rapport $\lambda$ on a $h \circ h = \lambda^2\, \mathrm{Id}_E$ qui est encore une homothétie. Donc par élimination la réponse est **c.**.

De fait il existe bien des endomorphismes non nuls $u$ de $E$ tels que $u^2 = 0$ (du moins si $E$ n'est pas une droite ou l'espace nul).

On peut par exemple prendre $E = \mathbf{R}^2$ et $u : (x, y) \mapsto (0, x)$.

**18** Si $u, v$ sont deux endomorphismes de $E$ tels que $v = u \circ v$, alors

❒ **a.** $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$ ❒ **b.** $u = \mathrm{Id}$ ❒ **c.** $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$

☒ **d.** la restriction de $u$ à $\operatorname{Im} v$ est l'identité

On commence par réécrire l'hypothèse. Soit $y \in \operatorname{Im} v$ et $x \in E$ tel que $y = v(x)$. On a alors $u(y) = (u \circ v)(x) = v(x) = y$. Cela montre que la restriction de $u$ à $\operatorname{Im} v$ est l'identité.

Un contre-exemple pour **a.** est donné par $u = \mathrm{Id}$ : l'hypothèse $v = u \circ v$ est alors réalisée avec tout endomorphisme $v$. Lorsque $v$ est surjectif on a bien $u = \mathrm{Id}$ mais si par exemple $v = 0$, $u$ peut être quelconque. Il faut donc rejeter **b.**. Enfin si on avait l'hypothèse **c.** on aurait $u \circ v = 0$ et donc $v = 0$ ce qui n'est pas du tout nécessaire.

**19** Soit $(e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$. Lequel des sous-espaces suivants n'est pas un supplémentaire de la droite $\operatorname{Vect}(e_1)$ ?

❒ **a.** $F_1 = \operatorname{Vect}(e_2, e_3)$ ❒ **b.** $F_2 = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2, e_1 + e_3)$

☒ **c.** $F_3 = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ ❒ **d.** $F_4 = \operatorname{Vect}(e_2 + e_3, e_2 - e_3)$

Comme $e_1 = \dfrac{1}{2}(e_1 + e_2) + \dfrac{1}{2}(e_1 - e_2)$, le vecteur $e_1$ appartient à l'espace $F_3$ et la droite engendrée par $e_1$ est donc incluse dans $F_3$. Comme leur intersection n'est pas nulle, $F_3$ et $\operatorname{Vect}(e_1)$ ne sont pas en somme directe, donc non supplémentaires.

## 30 Espaces vectoriels de dimension finie

**1** Soit $E, F$ deux espaces vectoriels de dimension finie. La dimension de $E \times F$ est

☒ **a.** $\dim E + \dim F$ ❒ **b.** $\dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$

❒ **c.** $\dim E \times \dim F$ ❒ **d.** $\max(\dim E, \dim F)$

C'est une question de cours !

> Ne confondez pas avec la formule de Grassmann qui donne la dimension de la somme de deux espaces vectoriels.

Voici un bon moyen de ne pas se tromper : si $E$ est de dimension $n$ il est isomorphe à $K^n$ (où $K$ désigne le corps de base) et si $F$ est de dimension $p$ il est isomorphe à $K^p$. Alors $E \times F$ est isomorphe à $K^n \times K^p$ qui est clairement isomorphe à $K^{n+p}$ puisque se donner un couple formé d'un $n$-uplet et d'un $p$-uplet revient simplement à se donner un $(n + p)$-uplet.

**2** Soit $E$ un espace vectoriel et $(e_1, ..., e_p)$ une famille génératrice de $E$. Alors

❒ **a.** $E$ est de dimension finie et $\dim E = p$

☒ **b.** $E$ est de dimension finie et $\dim E \leqslant p$

❒ **c.** $E$ est de dimension finie et $\dim E \geqslant p$

❒ **d.** $E$ n'est pas nécessairement de dimension finie

Comme $E$ admet une famille génératrice finie, $E$ est par définition de dimension finie. On peut extraire une base de cette famille génératrice, donc sa dimension est inférieure ou égale à $p$. La dimension n'est égale à $p$ que si la famille est en plus libre, ce qui n'est pas supposé ici.

**3** On considère $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (1,1,1)$ dans $\mathbf{R}^3$. Alors la famille $(e_1, e_2, e_3)$ est

❒ **a.** génératrice mais pas libre ❒ **b.** libre mais pas génératrice

☒ **c.** une base ❒ **d.** ni libre, ni génératrice

Supposons que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = (0,0,0)$. Alors en calculant les trois coordonnées on a le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire que la famille $(e_1, e_2, e_3)$ est libre. Comme elle comporte 3 vecteurs et que $\mathbf{R}^3$ est de dimension 3, c'est une base.

Dans la mesure où on travaille avec une famille de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, seules les réponses **c.** et **d.** peuvent être envisagées. Les réponses **a.** et **b.** sont exclues pour n'importe quelle famille de trois vecteurs.

**4** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Quelle affirmation est vraie ?

❒ **a.** toute base de $E$ contient une base de $F$

☒ **b.** toute base de $F$ est contenue dans une base de $E$

❒ **c.** toute famille génératrice de $E$ contient une famille génératrice de $F$

❒ **d.** toute base de $E$ contient une famille génératrice de $F$

C'est le théorème de la base incomplète : une base de $F$ est libre dans $E$ donc peut être complétée en une base de $E$. En revanche, on peut très bien avoir une base de $E$ qui ne contient aucun vecteur de $F$. C'est par exemple le cas lorsque l'on prend pour $E$ le plan $\mathbf{R}^2$ avec sa base canonique, et que $F$ est la droite dirigée par $(1, 1)$. Aucun des deux vecteurs de la base canonique ne se trouve alors dans $F$.

**5** Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une famille de vecteurs de $E$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que cette famille est liée ?

❒ **a.** $(e_1, e_2, ..., e_p)$ engendre $E$

☒ **b.** $(e_1, e_2, ..., e_{p-1})$ engendre $E$

❒ **c.** $(e_1, e_2, ..., e_p)$ n'engendre pas $E$

❒ **d.** $(e_1, e_2, ..., e_{p-1})$ n'engendre pas $E$

En effet, si $(e_1, e_2, ..., e_{p-1})$ engendre $E$, alors $e_p$, qui est dans $E$, est combinaison linéaire de $(e_1, \ldots, e_{p-1})$.

La réponse **a.** ne convient pas : ce n'est pas parce qu'une famille est génératrice qu'elle ne peut pas être libre. Si c'est le cas c'est d'ailleurs une base de $E$.

**6** Soit $F, G, G'$ des sous-espaces de $E$ tels que $E = F \oplus G = F \oplus G'$. À quelle condition peut-on dire que $G = G'$ ?

❒ **a.** c'est toujours le cas ☒ **b.** si $G \subset G'$

❒ **c.** si $F$ est non nul ❒ **d.** si $G + G' = E$

En traduisant l'énoncé, $G$ et $G'$ sont deux supplémentaires de $F$. Un sous-espace non trivial (c'est-à-dire différent de $E$ et de $\{0\}$) admet une infinité de supplémentaires (du moins sur un corps infini comme le corps des réels). La seule propriété que tous ces supplémentaires ont en commun, c'est leur dimension. Donc si $G \subset G'$ ils sont forcément égaux.

**7** Soit $x_1, ..., x_n$ des vecteurs de $E$. Laquelle des conditions suivantes assure que $x_n$ est combinaison linéaire de $x_1, ..., x_{n-1}$ ?

❒ **a.** la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée

❒ **b.** la famille $(x_1, ..., x_{n-1})$ est libre

☒ **c.** la famille $(x_1, ..., x_{n-1})$ est libre et la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée

❒ **d.** la famille $(x_1, ..., x_{n-1})$ est liée et la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre

Comme la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée on peut trouver une relation de liaison s'écrivant $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$. Le fait que la famille $(x_1, ..., x_{n-1})$ est libre permet de dire que $\lambda_n$ est non nul. On peut alors exprimer $x_n$ comme combinaison linéaire de $x_1, ..., x_{n-1}$.

Si on a uniquement la condition $(x_1, ..., x_n)$ liée, cela ne suffit pas, comme par exemple dans le cas où $x_n$ n'est pas nul mais que $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$. Tout ce que l'on peut alors dire, c'est que *l'un* des vecteurs est combinaison linéaire des autres, mais ce n'est pas forcément le dernier.

**8** Soit $(e_1, ..., e_n)$ et $(f_1, ..., f_n)$ deux bases de $E$. La famille $(e_1, ..., e_{n-1})$ peut être complétée en une base

❒ **a.** uniquement par le vecteur $e_n$

❒ **b.** par n'importe lequel des vecteurs $f_1, ..., f_n$

☒ **c.** par au moins un des vecteurs $f_1, ..., f_n$

❒ **d.** par aucun des vecteurs de la famille $(f_1, ..., f_n)$

La famille $(e_1, ..., e_{n-1})$ est libre et la famille $F = (f_1, ..., f_n)$ est génératrice. Le théorème de la base incomplète permet de la compléter en une base en utilisant un vecteur de $F$. On a le plus souvent le choix du vecteur considéré dans $F$, mais pas toujours, par exemple lorsque $f_k = e_k$ pour tout $k$.

**9** On suppose que $(e_1, e_2, e_3)$ engendre l'espace vectoriel $E$. Laquelle des conditions suivantes assure que $E$ est de dimension 3 ?

❒ **a.** $(e_1, e_2)$ est libre

❒ **b.** les familles $(e_1, e_2)$, $(e_2, e_3)$ et $(e_1, e_3)$ sont libres

❒ **c.** $(e_1, e_2)$ n'engendre pas $E$

☒ **d.** les familles $(e_1, e_2)$, $(e_2, e_3)$ et $(e_1, e_3)$ n'engendrent pas $E$.

La dimension de $E$ est inférieure ou égale à 3. Si elle n'est pas égale à 3, la famille $(e_1, e_2, e_3)$ est liée. L'un des trois vecteurs, disons $e_3$, est alors combinaison linéaire des deux autres et dans ce cas la famille $(e_1, e_2)$ engendre $E$. Donc par contraposée, si aucune des familles $(e_1, e_2)$, $(e_2, e_3)$ ou $(e_1, e_3)$ n'engendre $E$, il est de dimension 3.

La condition **c.** n'est pas suffisante, comme dans le cas où $e_1$ et $e_2$ sont nuls, et $e_3$ non nul.

**10** Soit $e_1, e_2, e_3, e_4$ des vecteurs de $E$. On suppose que les familles $(e_1, e_2, e_3)$ et $(e_3, e_4)$ sont libres. La dimension de $E$ est forcément supérieure ou égale à

❒ **a.** 2 ☒ **b.** 3 ❒ **c.** 4 ❒ **d.** 5

En effet, comme $(e_1, e_2, e_3)$ est libre $\dim E \geqslant 3$. Cette dimension peut valoir 3, par exemple lorsque $e_4 = e_1$ : dans ce cas $(e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. Les hypothèses données n'impliquent pas que la famille $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ soit libre.

**11** Soit $E$ un espace vectoriel dans lequel toute famille de 3 vecteurs est liée. Alors

❒ **a.** $E$ est forcément de dimension finie et $\dim E \leqslant 3$

☒ **b.** $E$ est forcément de dimension finie et $\dim E \leqslant 2$

❒ **c.** $E$ est forcément de dimension finie et $\dim E \geqslant 3$

❒ **d.** $E$ n'est pas forcément de dimension finie

Si $E$ est de dimension finie $n \geqslant 3$, les trois premiers vecteurs d'une base de $E$ forment une famille libre. De même si $E$ est de dimension infinie, il contient des familles libres de trois vecteurs. Donc $E$ est de dimension inférieure ou égale à 2.

**12** Soit $(e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace $E$ de dimension 3 et $P$ un plan de $E$. À quelle condition $(e_1, e_2)$ est-elle une base de $P$ ?

❒ **a.** lorsque $e_3$ n'est pas dans $P$

☒ **b.** lorsque $e_1$ et $e_2$ sont dans $P$

❒ **c.** lorsque $e_3$ est dans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$

❒ **d.** lorsque $(e_1, e_2, e_3)$ est génératrice de $P$

*A priori*, une base de $E$ ne contient aucun vecteur de $P$. Mais si $e_1$ et $e_2$ sont dans $P$, la famille $(e_1, e_2)$ est libre et de cardinal $2 = \dim P$. C'est donc une base de $P$. Le fait que $e_3$ ne soit pas dans $P$ ne garantit absolument pas que $e_1$ et $e_2$ soient dans $P$.

Par ailleurs, les hypothèses de l'énoncé interdisent la réponse **c.** : la famille $(e_1, e_2, e_3)$ étant libre, $e_3$ ne peut pas appartenir au plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

**13** Soit $F$,$G$ deux sous-espaces de $E$. Avec quelle hypothèse peut-on trouver à coup sûr un vecteur non nul dans $F \cap G$ ?

❒ **a.** $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ ❒ **b.** $\dim F + \dim G = \dim E$

☒ **c.** $\dim F + \dim G > \dim E$ ❒ **d.** $\dim F = \dim G$

On peut trouver un vecteur non nul dès que $\dim(F \cap G) \geqslant 1$. Par la formule de Grassmann, on a

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) \geqslant \dim F + \dim G - \dim E.$$

On peut donc conclure dès que $\dim F + \dim G > \dim E$.

Remarquez que la réponse **a.** est à exclure, puisque si $F \oplus G = E$, alors par définition $F \cap G$ est l'espace nul.

**14** Soit $F, G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, de dimensions respectives $p$ et $q$, et tels que $F + G = E$. La dimension d'un supplémentaire de $F \cap G$ dans $F$ est :

❒ **a.** $q$ ❒ **b.** $0$ ☒ **c.** $n - q$ ❒ **d.** $n + q$

On sait que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $F$. Ainsi, un supplémentaire de $F \cap G$ dans $F$ est de dimension $\dim F - \dim(F \cap G) = p - \dim(F \cap G)$. On accède à cette dernière dimension par la formule de Grassman :

$$n = \dim E = \dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

On a alors $\dim(F \cap G) = p + q - n$, et la dimension cherchée est alors égale $p - (p + q - n)$ $= n - q$.

*A priori*, la réponse **d.** était à exclure, car aucun sous-espace vectoriel de $E$ ne peut être de dimension supérieure à $n$.

**15** Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces de dimension 3 de $\mathbf{R}^5$. La dimension $p$ de $F \cap G$ peut valoir

❒ **a.** 1 ou 2 ☒ **b.** 1, 2 ou 3

❒ **c.** 0, 1, ou 2 ❒ **d.** 0, 1, 2 ou 3

Comme $F \cap G$ est un sous-espace de $F$, on a déjà $p \leqslant \dim F = 3$. La formule de Grassmann donne aussi

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) \geqslant 3 + 3 - 5 = 1$$

car $F + G$ est de dimension inférieure à celle de $\mathbf{R}^5$. On a ainsi $p \in \{1, 2, 3\}$.

Ces trois dimensions sont possibles : si on note $(e_1, \dots, e_5)$ la base canonique de $\mathbf{R}^5$ et que l'on prend $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$, on peut obtenir $p = 1$ lorsque $G = \mathrm{Vect}(e_3, e_4, e_5)$, on a $p = 2$ pour $G = \mathrm{Vect}(e_2, e_3, e_4)$ et $p = 3$ pour $F = G$ (ce qui n'est pas exclu par l'énoncé).

**16** Soit $F, G$ deux sous-espaces de $E$, $(f_1, \dots, f_p)$ une famille libre de $F$ et $(g_1, \dots, g_q)$ une famille libre de $G$. Quelle condition suffit pour dire que $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est libre ?

❒ **a.** $F + G = E$ ☒ **b.** $F \cap G = \{0\}$ ❒ **c.** $F \subset G$

❒ **d.** $g_1, \dots, g_q$ ne sont pas dans $F$ et $f_1, \dots, f_p$ ne sont pas dans $G$

Une relation de la forme $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + \dots + \mu_q g_q = 0$ implique que le vecteur $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p = -(\mu_1 g_1 + \dots + \mu_q g_q)$ est dans $F \cap G$. Il est donc nul et comme les familles $(f_1, \dots, f_p)$ et $(g_1, \dots, g_q)$ sont libres, tous les scalaires sont nuls. La condition $F + G = E$ ne donne pas ce résultat : prendre $F = G = E$ et les familles égales.

On utilise assez souvent le résultat assez proche suivant : si $(f_1, \dots, f_p)$ est une base de $F$, si $(g_1, \dots, g_q)$ est une base de $G$, et si la somme $F \oplus G$ est directe, alors $(f_1, ..., f_p, g_1, ...g_q)$ est une base de $F \oplus G$. C'est le principe de juxtaposition de bases dans une décomposition en somme directe.

**17** Soit $F_1, ..., F_n$ des sous-espaces de $E$ qui vérifient $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n \subset E$. On est certain que deux des $F_i$ au moins sont égaux dès que

☒ **a.** $\dim E \leqslant n - 2$ ❒ **b.** $\dim E \leqslant n - 1$

❒ **c.** $\dim E \leqslant n$ ❒ **d.** $\dim E \leqslant n + 1$

En effet, supposons que les $F_i$ sont deux à deux distincts. Les inclusions sont toutes strictes et on a donc $\dim F_k + 1 \leqslant \dim F_{k+1}$. Comme $\dim F_1 \geqslant 0$, on a $\dim F_2 \geqslant 1$, $\dim F_3 \geqslant 2, \dots, \dim F_n \geqslant n - 1$. Ainsi $\dim E \geqslant \dim F_n \geqslant n - 1$. En contraposant, il vient nécessairement que $\dim E \leqslant n - 2$.

**18** Soit $e_1, e_2, e_3$ trois vecteurs de $E$. On suppose que les familles $(e_1, e_2)$ et $(e_2, e_3)$ sont libres. À quelle condition supplémentaire est-on sûr que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) \cap \mathrm{Vect}(e_2, e_3) = \mathrm{Vect}(e_2)$ ?

❒ **a.** c'est toujours le cas ❒ **b.** lorsque $e_1 \neq e_3$

❒ **c.** lorsque $(e_1, e_3)$ est libre ☒ **d.** lorsque $(e_1, e_2, e_3)$ est libre

La droite engendrée par $e_2$ est contenue dans les deux plans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. L'intersection des deux plans est égale à cette droite sauf lorsque les deux plans sont égaux. Cela n'est pas possible lorsque la famille $(e_1, e_2, e_3)$ est libre car un plan ne peut pas contenir une famille libre de 3 vecteurs.

Notons que la condition $e_1 \neq e_3$ n'implique pas que les deux plans soient distincts (ce n'est pas le cas par exemple lorsque $e_3 = -e_1$).

## 31 Applications linéaires en dimension finie

**1** Soit $u, v$ deux endomorphismes de $E$. Si $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$, que peut-on en déduire ?

❒ **a.** $u = v$ ❒ **b.** $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$

☒ **c.** $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v$ ❒ **d.** $u$ et $v$ sont surjectives

En passant l'égalité aux dimensions, on a $\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Im} v$ et donc par définition du rang $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} v$.

Mais on n'a pas forcément $u = v$, comme par exemple dans le cas des endomorphismes $u = \operatorname{Id}_E$ et $v = 2\operatorname{Id}_E$, pour lesquels $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v = E$. La réponse **b.** est aussi inexacte : le théorème du rang fournit l'égalité des dimensions de $\operatorname{Ker} u$ et de $\operatorname{Ker} v$ mais ces espaces ne sont pas nécessairement égaux. Vous pouvez prendre l'exemple de deux projecteurs sur le même sous-espace mais parallèlement à deux supplémentaires distincts.

**2** Soit $(e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Combien y a-t-il d'endomorphismes de $\mathbf{R}^2$ qui échangent $e_1$ et $e_2$ ?

❒ **a.** aucun ☒ **b.** 1 ❒ **c.** 2 ❒ **d.** une infinité

L'application linéaire qui envoie $(x, y)$ sur $(y, x)$ convient : c'est la seule car une application linéaire est déterminée de manière unique par l'image d'une base.

**3** Soit $v$ dans $\mathscr{L}(E)$ et $u$ dans $\mathrm{GL}(E)$. Le rang de $u \circ v \circ u^{-1}$ est égal à

❒ **a.** $\dim E$ ☒ **b.** $\operatorname{rg} v$ ❒ **c.** $\operatorname{rg} u$ ❒ **d.** $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v + \operatorname{rg} u^{-1}$

La composition à gauche ou à droite par un automorphisme ne change pas le rang. De façon générale, la réponse **d.** est à exclure : le rang de la composée de deux endomorphismes non nuls n'est jamais égal à la somme des rangs ; il est seulement inférieur ou égal au rang de chacun des deux endomorphismes.

**4** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ de rang $r$. Quel est le rang maximal que peut avoir $u^2$ ?

❒ **a.** $r^2$ ❒ **b.** $2r$ ☒ **c.** $r$ ❒ **d.** $r - 2$

On a $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$ donc $\operatorname{rg}(u^2) \leqslant \operatorname{rg} u = r$. Il peut y avoir égalité, par exemple lorsque $u$ est inversible. Il est important de retenir plus généralement que le rang de la composée de deux applications linéaires est toujours inférieur aux rangs de ces applications.

**5** Soit $f, g$ deux endomorphismes de $E$. Laquelle des conditions suivantes implique que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$ ?

❒ **a.** $f^2 = g^2$ ❒ **b.** $f \circ g = g \circ f$

☒ **c.** $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ ❒ **d.** $\operatorname{rg}(f + \operatorname{Id}_E) = \operatorname{rg}(g + \operatorname{Id}_E)$

Par le théorème du rang on sait que $\operatorname{rg} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$. Si $f$ et $g$ ont le même noyau, ils ont *a fortiori* le même rang.

Notons que la condition $f^2 = g^2$ n'implique pas que $f = g$ ni même que l'on ait $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$ : on peut prendre par exemple $f = 0$ et $g$ non nul tel que $g^2 = 0$. De même **b.** n'est pas suffisant : par exemple si on prend $f = \mathrm{Id}_E$, $f$ commute avec tous les endomorphismes $g$ de $E$.

Enfin, vous verrez en classes de spéciales que l'assertion **d.** signifie que les espaces propres de $f$ et $g$ relatifs à la valeur propre $-1$ ont la même dimension mais ce n'est pas suffisant non plus : prendre l'exemple de $f = \mathrm{Id}_E$ et $g = 0$.

**6** Soit $f$ une forme linéaire sur $E$ et $u$ dans $\mathscr{L}(E)$. Laquelle des applications suivantes est aussi une forme linéaire sur $E$ ?

☒ **a.** $f \circ u$ ❒ **b.** $u \circ f$ ❒ **c.** $f \circ f$ ❒ **d.** $f^2$

On sait que la composée de deux applications linéaires est linéaire. Donc $f \circ u$ est linéaire et comme elle est à valeurs dans $\mathbf{R}$, c'est une forme linéaire sur $E$. Les composées de **b.** et **c.** ne sont pas définies ce qui permet d'exclure rapidement ces réponses. La fonction $f^2$ est bien à valeurs réelles mais n'est pas linéaire si $f$ est non nulle (on a ce qu'on appelle une forme quadratique) : on a par exemple $f^2(2x) = 4f^2(x)$.

**7** Soit $A$ une famille de vecteurs de $E$. À quelle condition peut-on trouver un endomorphisme de $E$ qui s'annule en tout vecteur de $A$ mais qui n'est pas identiquement nul ?

❒ **a.** si $A$ est libre ❒ **b.** si $A$ est génératrice

❒ **c.** si $A$ n'est pas libre ☒ **d.** si $A$ n'est pas génératrice

Lorsque $A$ engendre $E$, une application linéaire qui s'annule sur $A$ est forcément nulle par linéarité. En revanche, si $A$ n'est pas génératrice elle engendre un sous-espace $F$ strictement inclus dans $E$. La projection sur un supplementaire $G$ de $F$ parallèlement à $F$ est alors non nulle, mais s'annule sur $F$ et donc sur $A$.

**8** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ tel que $u(F) = F$. Alors

❒ **a.** $\operatorname{Im} u = F$

❒ **b.** la restriction de $u$ à $F$ est l'identité

☒ **c.** la restriction de $u$ à $F$ est un automorphisme de $F$

❒ **d.** $F \subset \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$

La restriction de $u$ à $F$ est un endomorphisme surjectif de $F$ par hypothèse : il est nécessairement bijectif puisque $F$ est de dimension finie.

Cela dit il ne s'agit pas forcément de l'identité de $F$ : par exemple l'homothétie $u = 2\,\mathrm{Id}_E$ induit l'homothétie de rapport 2 sur tout sous-espace $F$ de $E$, et donc $u(F) = F$ pour tout sous-espace. Par ailleurs, le sous-espace $\operatorname{Im} u$ contient $F$ mais n'est pas forcément égal à $F$ (prendre le cas $u = \mathrm{Id}_E$). La réponse **d.** est à exclure pour les mêmes raisons que la réponse **b.** : $u$ peut laisser $F$ globalement invariant sans fixer tous ses vecteurs.

**9** Soit $\varphi$ une forme linéaire non nulle de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. Alors $\varphi$ est nécessairement

❒ **a.** injective ☒ **b.** surjective

❒ **c.** constante ❒ **d.** un projecteur

Comme $\varphi$ est non nulle, son image est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}$, non nul. C'est donc forcément $\mathbf{R}$ et $\varphi$ est donc surjective. Notons que ce résultat est valable en fait pour toute forme linéaire non nulle.

En revanche $\varphi$ n'est pas injective (son noyau est une droite de $\mathbf{R}^2$ d'après le théorème du rang). La réponse **c.** est exclue car si $\varphi$ était constante, on aurait forcément $\varphi(x) = \varphi(0) = 0$ pour tout $x$ et donc $\varphi$ serait nulle. On rejette aussi très vite **d.** puisque un projecteur est un endomorphisme c'est-à-dire une application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même et ce n'est pas le cas ici.

**10** Si $E$ est de dimension $n$, la dimension de $\mathscr{L}(E \times E)$ est

❒ **a.** $2n^2$ ☒ **b.** $4n^2$ ❒ **c.** $2^{n^2}$ ❒ **d.** $n^4$

L'espace $E\times E$ est de dimension $2n$, donc l'espace $\mathscr{L}(E\times E)$ est de dimension $(2n)^2 = 4n^2$.

**11** Si $E$ est de dimension $n$, l'espace $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$ est de dimension

❒ **a.** $2n^2$ ☒ **b.** $n^4$ ❒ **c.** $2^{2^n}$ ❒ **d.** $4^n$

L'espace $\mathscr{L}(E)$ est de dimension $n^2$ et $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$ est donc de dimension $(n^2)^2 = n^4$.

**12** Soit $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs de $E$. On suppose que $u$ est un endomorphisme de $E$ qui vérifie $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3, \dots,$ $u(e_{p-1}) = e_p$ et enfin $u(e_p) = e_1$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $u$ est bijectif ?

❒ **a.** $p \geqslant \dim E$ ❒ **b.** $p = \dim E$

❒ **c.** $(e_1, ..., e_p)$ est libre ☒ **d.** $(e_1, ..., e_p)$ est génératrice

La famille $(e_1, ..., e_p)$ est dans $\operatorname{Im} u$. Lorsqu'elle est génératrice, $u$ est surjective et donc bijective puisque $E$ est de dimension finie. La condition $p \geqslant \dim E$ (ou $p = \dim E$) n'est pas suffisante : ce n'est pas parce qu'il y a plus de $\dim E$ vecteurs que la famille est nécessairement génératrice. Il suffit par exemple de prendre $e_1 = e_2 = \cdots = e_p = 0$ et $u = 0$.

**13** Soit $u, v$ deux endomorphismes de $E$. Laquelle des propriétés suivantes implique que $u = 0$ ?

❒ **a.** $u^2 = 0$ ❒ **b.** $u \circ v = 0$ et $v \neq 0$

☒ **c.** $v \circ u = 0$ et $\operatorname{Im} v = E$ ❒ **d.** $u \circ v = v \circ u$

Si $\operatorname{Im} v = E$, $v$ est surjectif donc bijective puisqu'on est en dimension finie. En multipliant l'égalité $v \circ u = 0$ par $v^{-1}$ à gauche, on obtient que $u = 0$. Notons qu'on peut très bien avoir $u^2 = 0$ sans que $u$ soit nul (on dit alors que $u$ est nilpotent d'indice 2), ce qui fournit un contre-exemple aux réponses **a.** et **b.**.

**14** Soit $u$ dans $\mathscr{L}(E)$. Laquelle des propositions suivantes est fausse ?

❒ **a.** si $u$ est injectif, alors $u$ est inversible

❒ **b.** s'il existe $v$ dans $\mathscr{L}(E)$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors $u$ est inversible

☒ **c.** si $u + \mathrm{Id}_E$ est inversible, alors $u$ est inversible

❒ **d.** si $u^2$ est inversible, alors $u$ est inversible

L'endomorphisme nul n'est pas inversible et pourtant $0+\mathrm{Id}_E$ est inversible. Le cours permet d'exlure **a.** puisqu'un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie est toujours bijectif : cela découle du théorème du rang. Les affirmations **b.** et **d.** découlent du fait plus général suivant (valable uniquement en dimension finie) : si $v \circ u$ est inversible alors $v$ et $u$ le sont.

**15** Quelle est la dimension de l'espace des polynômes réels $P$ de degré inférieur ou égal à 4 tels que $\displaystyle\int_0^1 P = 0$ ?

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** 3 ☒ **d.** 4

L'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 est de dimension 5 une base de cet espace étant $(1, X, X^2, X^3, X^4)$. L'application qui à $P$ associe $\displaystyle\int_0^1 P$ est une forme linéaire non nulle sur cet espace. Son noyau est donc un hyperplan de dimension 4. On prendra garde au fait que l'espace des polynômes de degré inférieur à $n$ est de dimension $n + 1$ et pas $n$ (c'est une faute classique).

**16** Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ telle que $u^2 = 0$. Alors forcément

❒ **a.** $\mathrm{rg}\, u = 0$ ❒ **b.** $\mathrm{rg}\, u \leqslant 1$ ☒ **c.** $\mathrm{rg}\, u \leqslant 2$ ❒ **d.** $\mathrm{rg}\, u = 4$

Le fait que $u^2 = 0$ équivaut à dire que $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$. On a donc forcément $\mathrm{rg}\, u \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, u$. Par aileurs $\dim \mathrm{Ker}\, u = 4 - \mathrm{rg}\, u$ par le théorème du rang. Ainsi, $\mathrm{rg}\, u \leqslant 4 - \mathrm{rg}\, u$ c'est-à-dire $\mathrm{rg}\, u \leqslant 2$.

On ne peut pas dire mieux car tous les cas sont possibles : on peut avoir $\mathrm{rg}\, u = 0$ avec $u = 0$. En notant $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ on peut avoir $\mathrm{rg}\, u = 1$ ou $\mathrm{rg}\, u = 2$ en prenant les endomorphismes qui envoient $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ respectivement sur $(0, e_1, 0, 0)$ et $(0, 0, e_1, e_2)$.

**17** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ et $v$ la restriction de $u$ à $\mathrm{Im}\, u$. À quelle condition $v$ est-il un isomorphisme de $\mathrm{Im}\, u$ sur lui-même ?

❒ **a.** c'est toujours le cas

☒ **b.** lorsque $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ sont supplémentaires

❒ **c.** lorsque $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$

❒ **d.** lorsque $u$ n'est pas nul

L'application $v$ est un endomorphisme de $\mathrm{Im}\, u$, puisqu'elle est linéaire de $\mathrm{Im}\, u$ dans $\mathrm{Im}\, u$. De plus, on a par définition de la restriction $\mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u$. Donc $v$ est injectif si et seulement si $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont d'intersection nulle. Par le théorème du rang, cela revient à ce qu'ils sont supplémentaires. Dans ce cas, comme $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension finie, $v$ est bijectif.

**18** Soit $u, v$ deux endomorphismes de $E$. On suppose que $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\, u$. Alors

❒ **a.** $v$ est inversible ❒ **b.** $v$ est nul

☒ **c.** $\mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$ ❒ **d.** $\mathrm{Im}\, v \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$

L'image de $v \circ u$ est égale à $(v \circ u)(E) = v(\mathrm{Im}\, u)$. Elle a la même dimension que $\mathrm{Im}\, u$ si et seulement si la restriction de $v$ à $\mathrm{Im}\, u$ est injective, ce qui revient à dire que $\mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$. Cela est en particulier réalisé lorsque $v$ est inversible, mais cette condition n'est pas nécessaire.

## 32 Calcul matriciel

**1** Si $M$ est une matrice $3 \times 3$, combien de produits de coefficients doit-on effectuer pour calculer $M^2$ ?

❒ **a.** 9 ❒ **b.** 18 ☒ **c.** 27 ❒ **d.** 81

Pour chacun des neuf coefficients de $M^2$ on doit calculer la somme de trois produits. De la même façon, il faut $n^3$ calculs pour obtenir le produit de deux matrices de taille $n \times n$, et $n^2$ calculs pour obtenir le produit d'une matrice $n \times n$ par un vecteur colonne de $n$ lignes.

**2** Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice $(M - I_3)(M - 2I_3)(M - 3I_3)$ vaut

❒ **a.** $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ☒ **b.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Les matrices $M - I_3$, $M - 2I_3$, $M - 3I_3$ sont toutes trois diagonales. Leur produit est donc aussi une matrice diagonale, ce qui exclut directement la réponse **d.**. De plus, les coefficients diagonaux se multiplient terme à terme, et chaque coefficient diagonal s'annule dans l'une des trois matrices $M - I_3$, $M - 2I_3$ ou $M - 3I_3$.

Le résultat sera formulé en Spéciales en disant que $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$ est un polynôme annulateur de la matrice $M$.

**3** Une matrice triangulaire supérieure et symétrique est

❒ **a.** nulle ❒ **b.** triangulaire inférieure

☒ **c.** diagonale ❒ **d.** antisymétrique

En effet, si $A = (a_{ij})$ est symétrique on a $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout couple $(i, j)$ et si $A$ est triangulaire supérieure $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$. Il en résulte que $a_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$, c'est-à-dire que $A$ est diagonale. On peut aussi remarquer que $A$ est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure (car égale à sa transposée).

À propos de la réponse **c.** : une matrice qui est à la fois symétrique et antisymétrique est nulle.

**4** Combien vaut la matrice $(E_{12} + E_{21})^2$ ?

❒ **a.** $2E_{11}$ ❒ **b.** $2E_{22}$ ❒ **c.** $E_{12} + E_{21}$ ☒ **d.** $E_{11} + E_{22}$

On a $(E_{12} + E_{21})^2 = (E_{12})^2 + E_{12}E_{21} + E_{21}E_{12} + (E_{21})^2 = E_{11} + E_{22}$.

**5** La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

❒ **a.** $A$ est triangulaire supérieure ☒ **b.** $c = 0$ et $a = d$

❒ **c.** $a = c = d = 0$ ❒ **d.** $b = 0$

Calculons les produits : on a $AB = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux matrices ne sont égales que si $c = 0$ et $a = d$. On en déduit que la dimension du commutant de la matrice $B$ est égale à 2 et qu'une base en est donnée par les matrices $I_2$ et $B$.

**6** Soit $M$ la matrice dont tous les coefficients valent 0 sur la diagonale et 1 ailleurs. Les coefficients de $M^2$ valent

❒ **a.** 0 sur la diagonale et $n - 1$ ailleurs

❒ **b.** $n - 2$ sur la diagonale et $n - 1$ ailleurs

☒ **c.** $n - 1$ sur la diagonale et $n - 2$ ailleurs

❒ **d.** $n - 2$ sur la diagonale et $n$ ailleurs

Le coefficient d'indice $i, j$ de la matrice $M^2$ est $\sum_{k=1}^{n} M_{ik}M_{kj}$. Sur les $n$ termes de cette somme, $M_{ik}$ s'annule une fois (pour $k = i$) et $M_{kj}$ s'annule aussi une fois (pour $k = j$). Si $i = j$, le produit des deux ne s'annule qu'une fois ; et si $i \neq j$, le produit des deux s'annule 2 fois.

**7** Laquelle des hypothèses suivantes n'implique pas que la matrice $A$ soit aussi diagonale ?

❒ **a.** ${}^tA$ est diagonale ❒ **b.** $A - I$ est diagonale

☒ **c.** $A^2$ est diagonale ❒ **d.** $2A$ est diagonale

Si A est diagonale il en est de même de son carré, mais la réciproque est fausse. Par exemple la matrice $E_{12}$ de la base canonique a un carré nul (donc diagonal) mais n'est pas diagonale. Ainsi, le fait que $A^2$ soit diagonale n'implique pas que $A$ soit diagonale.

En revanche, les trois autres réponses proposées sont même équivalentes au fait que $A$ soit diagonale.

**8** Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est une matrice triangulaire supérieure inversible, son inverse est

☒ **a.** triangulaire supérieure ❒ **b.** triangulaire inférieure
❒ **c.** symétrique ❒ **d.** une telle matrice n'est jamais inversible

L'ensemble $\mathscr{T}_n^+(\mathbf{R})$ des matrices triangulaires supérieures est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, c'est notamment un ensemble stable par somme et produit. De plus si $M$ est une matrice inversible de $\mathscr{T}_n^+(\mathbf{R})$ alors son inverse reste encore dans $\mathscr{T}_n^+(\mathbf{R})$ ; autrement dit, le groupe des inversibles de l'algèbre $\mathscr{T}_n^+(\mathbf{R})$ est l'intersection de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et de $\mathscr{T}_n^+(\mathbf{R})$. Voici la preuve la plus efficace de ce résultat : l'application linéaire $\varphi : N \mapsto MN$ définit un endomorphisme de $\mathscr{T}_n^+(\mathbf{R})$ (car le produit de deux matrices triangulaires supérieures l'est encore). Mais comme $M$ est inversible, $\varphi$ est injective (si $MN = 0$ on a $N = 0$ en multipliant à gauche par $M^{-1}$). Comme $\mathscr{T}_n^+(\mathbf{R})$ est un espace de dimension finie, l'endomorphisme $\varphi$ est nécessairement bijectif. En particulier il existe une matrice $N$ triangulaire supérieure telle que $\varphi(N) = MN = I_n$. Nécessairement $N = M^{-1}$ qui est donc dans $\mathscr{T}_n^+(\mathbf{R})$. Cet argument s'adapte à toute sous-algèbre de dimension finie.

Rappelons au passage qu'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0.

**9** Si $A$ est une matrice carrée, $({}^tA)A$ est toujours

❒ **a.** triangulaire supérieure ❒ **b.** diagonale
☒ **c.** symétrique ❒ **d.** antisymétrique

On a ${}^t({}^tAA) = {}^tA\ {}^t({}^tA) = {}^tAA$ de sorte que la matrice $({}^tA)A$ est symétrique. Vous pouvez vérifier de la même façon que $A({}^tA)$ est aussi symétrique.

**10** Soit $A, B$ deux matrices carrées. Si $A$ et $B$ ne sont pas inversibles, laquelle des matrices suivantes peut quand même être inversible ?

❒ **a.** $AB$ ❒ **b.** $2A$ ☒ **c.** $A + B$ ❒ **d.** ${}^tA$

En effet, la somme de deux matrices non inversibles peut être inversible : par exemple lorsque $n = 2$, les matrices de la base canonique $E_{11}$ et $E_{22}$ sont non inversibles mais leur somme est la matrice identité, qui est inversible.

En revanche le produit de deux matrices non inversibles ne l'est pas non plus, et mieux : le rang du produit est inférieur au rang des deux matrices. Notons aussi que si $\lambda$ est un scalaire non nul $\lambda A$ et ${}^tA$ ont le même rang que $A$.

**11** On calcule tous les produits $E_{12}E_{ij}$. Combien de ces produits sont non nuls ?

☒ **a.** $n$ ❒ **b.** $n^2 - n$ ❒ **c.** $n^3$

❒ **d.** aucun car $E_{12}$ est non nulle

Utilisons la formule générale : $E_{12}E_{ij} = \delta_{2i}E_{1j}$. Le résultat est nul si et seulement si $\delta_{2i} = 0$, soit lorsque $i \neq 2$. Il y a donc $n$ produits non nuls (autant que de choix de l'indice $j$).

**12** Soit $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ défini par $\varphi(M) = {}^tM$. Alors $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id})$ est l'espace vectoriel

❒ **a.** $\{0\}$

❒ **b.** $\{-I\}$

❒ **c.** des matrices symétriques

☒ **d.** des matrices antisymétriques

La matrice $M$ est dans $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id})$ lorsque $\varphi(M) + \mathrm{Id}(M) = 0$, soit lorsque ${}^tM = -M$.

Au passage, la réponse **c.** est à exclure : $\{-I\}$ n'est pas un espace vectoriel, il ne contient pas 0. Il faut bien comprendre que l'identité dans $\varphi + \mathrm{Id}$ est l'application identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, et pas la matrice identité. Dans ce dernier cas, l'expression $\varphi + \mathrm{Id}$ ne serait pas homogène.

**13** Si $A, B$ sont deux matrices carrées inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, l'inverse de ${}^t(AB)$ est :

☒ **a.** ${}^t(A^{-1})\,{}^t(B^{-1})$ ❒ **b.** ${}^t(B^{-1})\,{}^t(A^{-1})$

❒ **c.** $B^{-1}A^{-1}$ ❒ **d.** $A^{-1}B^{-1}$

En effet, l'inverse de la transposée d'une matrice est la transposée de son inverse. On a donc ici

$$[{}^t(AB)]^{-1} = {}^t[(AB)^{-1}] = {}^t[B^{-1}A^{-1}] = ({}^tA^{-1})({}^tB^{-1}).$$

**14** Combien des matrices $E_{ij}$ de la base canonique commutent avec $E_{11}$ ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** $(n-1)^2$ ☒ **c.** $(n-1)^2 + 1$ ❒ **d.** $n^2$

En effet, on a $E_{11}E_{ij} = \delta_{1i}E_{1j}$ où $\delta_{1i}$ vaut 0 lorsque $i \neq 1$ et 1 lorsque $i = 1$. De même $E_{ij}E_{11} = \delta_{1j}E_{i1}$. Lorsque $i$ et $j$ sont distincts de 1, les deux produits sont nuls donc égaux. Lorsque $i = 1$, le premier produit vaut $E_{1j}$. Le deuxième ne lui est égal que si $j = 1$. Il y a donc $(n-1)^2 + 1$ matrices $E_{ij}$ qui commutent avec $E_{11}$.

**15** Si $M$ est une matrice carrée telle que ${}^tM = 2M$, alors

❒ **a.** les coefficients diagonaux de $M$ sont nuls

❒ **b.** $M$ est une matrice diagonale

❒ **c.** $M$ est une matrice symétrique

☒ **d.** $M$ est nulle

En effet, en transposant la relation de l'énoncé on obtient $M = 2\,{}^tM = 4M$ et donc $M = 0$. Les trois autres réponses sont logiquement vraies, mais ces conclusions sont insuffisantes.

**16** Soit $(A, B, C) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^3$. Si $ABC = 0$, alors on peut affirmer que

❒ **a.** $CBA = 0$

☒ **b.** $A$, $B$ ou $C$ est non inversible

❒ **c.** $A$, $B$ ou $C$ est nulle

❒ **d.** $A$, $B$ et $C$ sont nulles

Si $A$, $B$ et $C$ étaient toutes trois inversibles, il en serait de même de leur produit. En revanche il est fort possible qu'aucune des trois matrices ne soit nulle. De même, comme $A, B, C$ ne commutent pas forcément le produit $CBA$ peut être non nul : par exemple on peut prendre $C = B = E_{11}$ et $A = E_{12}$ ; on a $ABC = 0$ et $CBA = E_{12}$. Pensez à utiliser les matrices de la base canonique pour fabriquer des exemples !

## 33 Matrices et applications linéaires, systèmes linéaires

**1** Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension $n$ et $f$ une forme linéaire sur $E$. Une matrice qui représente $f$ possède

❒ **a.** $n$ lignes et $n$ colonnes

❒ **b.** $n$ lignes et une colonne

☒ **c.** une ligne et $n$ colonnes

❒ **d.** une ligne et une colonne

L'espace de départ de la forme linéaire $f$ est $E$ qui est de dimension $n$, et l'espace d'arrivée est le corps $\mathbf{R}$ est de dimension 1. Une matrice qui représente $f$ est donc une matrice ligne de taille $(1, n)$.

**2** Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$, $A$ la matrice de $u$ dans une base $\mathscr{B}$ et $A'$ la matrice de $u$ dans une autre base $\mathscr{B}'$. Si $P$ est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ on a

❒ **a.** $A' = PA$

❒ **b.** $A' = AP^{-1}$

❒ **c.** $A' = PAP^{-1}$

☒ **d.** $A' = P^{-1}AP$

C'est une question de cours. Il est rapide de retrouver la bonne formule en cas d'oubli à condition de connaitre la formule de changement de base pour les coordonnées d'un vecteur. En effet, soit $x \in E$ de coordonnées $X$ dans la base $\mathscr{B}$ et $X'$ dans la base $\mathscr{B}'$. Notons de même $y = u(x)$, $Y$ les coordonnées de $y$ dans $\mathscr{B}$ et $Y'$ les coordonnées de $y$ dans $\mathscr{B}'$. On a $Y = AX$ et $Y' = A'X'$. Or $X = PX'$ et $Y = PY'$. Ainsi,

$$Y' = P^{-1}Y = P^{-1}AX = P^{-1}APX'$$

et par unicité de la matrice de $u$ dans une base on a forcément $A' = P^{-1}AP$.

**3** Soit $s$ une symétrie de $E$ (i.e. un endomorphisme vérifiant $s^2 = \mathrm{Id}$) et $\mathscr{B}$ une base quelconque de $E$. La matrice de $s$ dans la base $\mathscr{B}$ est

❒ **a.** symétrique ❒ **b.** diagonale

❒ **c.** triangulaire ☒ **d.** inversible

Comme $s^2 = \mathrm{Id}$, alors $s$ est inversible et elle est sa propre inverse. Donc la matrice de $s$ dans une base quelconque est aussi inversible. L'exemple de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ montre que la matrice de $u$ peut ne pas être symétrique ni diagonale ; l'exemple de la matrice $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ montre qu'elle n'est pas forcément triangulaire non plus.

**4** Laquelle des matrices suivantes définit un projecteur de $\mathbf{R}^2$ ?

❒ **a.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☒ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ❒ **c.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Un projecteur de $\mathbf{R}^2$ est un endomorphisme $p$ vérifiant $p \circ p = p$. Donc si $M$ est une matrice $2 \times 2$, l'endomorphisme canoniquement associé à $M$ est un projecteur si et seulement si $M^2 = M$. Parmi les matrices proposées seule $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a cette propriété.

**5** Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Si on calcule $BA$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cela revient à

☒ **a.** rajouter à la première ligne de $A$ la seconde ligne multipliée par 2

❒ **b.** rajouter à la première colonne de $A$ la seconde colonne multipliée par 2

❒ **c.** rajouter à la seconde ligne de $A$ la première ligne multipliée par 2

❒ **d.** rajouter à la seconde colonne de $A$ la première colonne multipliée par 2

Multiplier à gauche par une matrice de manipulation revient toujours à agir sur les lignes (et multiplier à droite revient à agir sur les colonnes). Pour visualiser l'opération, il suffit de regarder comment est obtenue la matrice de manipulation à partir de l'identité : ici on l'obtient en rajoutant la seconde ligne multipliée par 2 à la première. C'est l'effet qu'a sur n'importe quelle matrice $A$ la multiplication à gauche par $B$.

**6** Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel $E$, et $u$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Quel est le vecteur $u(e_1 + e_2 + e_3)$ ?

☒ **a.** $2e_1 + 3e_2$ ❒ **b.** $2e_1 + e_2 - e_3$

❒ **c.** $e_1 + e_2 + e_3$ ❒ **d.** $e_2 + 3e_3$

Par la linéarité de $u$ on a $u(e_1+e_2+e_3) = u(e_1)+u(e_2)+u(e_3)$. Chacun de ces trois vecteurs s'obtient en lisant la colonne correspondante de la matrice. On a ainsi $u(e_1) = e_1 - e_3$, $u(e_2) = 2e_1 + e_2$ et $u(e_3) = -e_1 + 2e_2 + e_3$ et il suffit de faire la somme pour avoir le résultat.

**7** Soit $E$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'endomorphisme $f$ de $E$ défini par $f(P) = P(X) - P(X-1)$. La matrice de $f$ dans la base canonique de $E$ est :

❒ **a.** $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ☒ **d.** $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

L'espace $E$ est de dimension 4 et sa base canonique est $(1, X, X^2, X^3)$. On a $f(1) = 0$, $f(X) = 1$, $f(X^2) = X^2 - (X-1)^2 = 2X - 1$ et

$$f(X^3) = X^3 - (X-1)^3 = 3X^2 - 3X + 1.$$

La matrice cherchée est donc $M_4$. Comme la matrice d'un endomorphisme est nécessairement carrée on pouvait exclure immédiatement la réponse **c.**.

**8** Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base d'un plan vectoriel $E$ et $\mathscr{B}' = (e_1 + e_2, e_2)$. Si un vecteur a pour coordonnées $(x, y)$ dans la base $\mathscr{B}$, ses coordonnées dans $\mathscr{B}'$ sont

❒ **a.** $(x+y, y)$ ❒ **b.** $(x, x+y)$

☒ **c.** $(x, y-x)$ ❒ **d.** $(x+y, -x)$

On a $xe_1 + ye_2 = x(e_1+e_2) + (y-x)e_2$. Les coordonnées dans $\mathscr{B}'$ sont donc $(x, y-x)$. On peut bien entendu écrire aussi la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et utiliser les formules de changement de bases.

**9** Soit $A$ une matrice carrée réelle de taille $n \geqslant 1$. On suppose que les $p$ premières colonnes de $A$ sont nulles, les suivantes étant non nulles. Alors on a forcément

❒ **a.** $\operatorname{rg} A = p$ ❒ **b.** $\operatorname{rg} A = n - p$

☒ **c.** $\operatorname{rg} A \leqslant n - p$ ❒ **d.** $\operatorname{rg} A \geqslant n - p$

Le rang de $A$ est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses colonnes. Comme les $p$ premières sont nulles, ce sous-espace est aussi engendré par les $n-p$ colonnes non nulles. Sa dimension est donc inférieure ou égale à $n-p$. Elle ne vaut pas forcément $n-p$ car les colonnes non nulles peuvent très bien être liées.

**10** Soit $A$ une matrice carrée réelle de taille 4 telle que $A^2 = 0$. L'ensemble des valeurs que peut prendre le rang de $A$ est

❒ **a.** $\{0\}$ ❒ **b.** $\{0, 1\}$ ☒ **c.** $\{0, 1, 2\}$ ❒ **d.** $\{0, 1, 2, 3\}$

Si $A^2 = 0$, alors $A$ n'est pas inversible donc son rang $r$ est inférieur ou égal à 3. On peut démontrer mieux. En fait l'image $\operatorname{Im} A$ est incluse dans le noyau $\operatorname{Ker} A$. Le rang $r$ de $A$ est donc inférieur à la dimension de $\operatorname{Ker} A$ qui vaut $4 - r$ par le théorème du rang. Ainsi $r \leqslant 4 - r$ et donc $r \leqslant 2$.

Inversement toutes les valeurs de $\{0, 1, 2\}$ peuvent être atteintes : prendre $A = 0$ pour $r = 0$, $A = E_{14}$ pour $r = 1$ et $A = E_{13} + E_{24}$ pour $r = 2$ (où l'on note $E_{ij}$ les matrices de la base canonique de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$). On prendra garde au fait que $A^2 = 0$ n'implique pas $A = 0$ car l'algèbre des matrices carrées n'est pas intègre.

**11** Soit $E$ un espace vectoriel dont $(e_1, e_2, e_3)$ est une base. Soit $u$ l'endomorphisme de $E$ défini par $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = e_1$. La matrice de $u$ dans la base $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ est

☒ **a.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_2 + e_3$ et $f_3 = e_3 + e_1$. On a $u(f_1) = f_2$, $u(f_2) = f_3$ et $u(f_3) = f_1$. On en déduit la matrice de $u$. Il s'agit d'une matrice de permutation.

**12** La matrice d'un endomorphisme $u$ dans une base $(e_1, e_2)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Sa matrice dans la base $(e_2, e_1)$ est

❒ **a.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

☒ **c.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base on a les relations $u(e_1) = e_1 + 3e_2$ et $u(e_2) = 2e_1 + 4e_2$. Lorsqu'on prend $(e_2, e_1)$ comme nouvelle base on va donc échanger les deux colonnes de la matrice initiale mais aussi ses deux lignes. On obtient donc $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Cela revient à calculer $P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} P$ où $P$ est la matrice de permutation $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**13** Soit $u$ un isomorphisme entre deux espaces vectoriels réels $E$ et $F$ (de même dimension $n \geqslant 1$). Soit $\mathscr{B}$ une base de $E$. Combien y a-t-il de bases $\mathscr{B}'$ de $F$ telles que la matrice de $u$ relativement à $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ soit la matrice identité ?

❒ **a.** aucune sauf si $u = \mathrm{Id}$ ☒ **b.** une seule ❒ **c.** $2^n$

❒ **d.** toutes les bases conviennent

Posons $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ et soit $\mathscr{B}' = (f_1, ..., f_n)$ une base de $F$. Pour que la matrice de $u$ relativement à $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ soit l'identité, il faut et il suffit que pour tout $i$, $u(e_i) = f_i$. Comme $u$ est un isomorphisme, $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est bien une base de $F$ et c'est donc la seule qui convient.

Précisons que la proposition **a.** n'a pas de sens puisqu'on ne peut pas considérer l'identité de $E$ dans $F$.

**14** L'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ est

❒ **a.** $\{(1, 0, 0)\}$ ❒ **b.** $\{(0, 0, 1)\}$

☒ **c.** $\{(1 - t, t, t),\ t \in \mathbf{R}\}$ ❒ **d.** $\{(2 - t, 1 + t, t),\ t \in \mathbf{R}\}$

Il s'agit d'un système linéaire non homogène avec 2 équations et 3 inconnues. On peut choisir l'inconnue $z$ comme paramètre : si on pose $z = t$ on a $x = 1 - t$ et $y = t$. Notons que la solution ne peut pas être unique car le système ne peut pas être de Cramer (la matrice du système est de taille $2 \times 3$ et de rang 2).

**15** Soit $(S)$ le système linéaire $AX = B$ où $A$ est une matrice carrée de taille $n$. Laquelle des conditions suivantes n'implique pas que $(S)$ est un système de Cramer ?

❒ **a.** $\operatorname{rg} A = n$

☒ **b.** $A$ est triangulaire supérieure

❒ **c.** il existe $B_0$ tel que le système $AX = B_0$ ait une unique solution

❒ **d.** le système homogène $AX = 0$ admet une unique solution

Une matrice triangulaire n'est pas forcément inversible : il faut (et suffit) pour cela que ses coefficients diagonaux soient non nuls. En revanche, si le système $AX = B_0$ admet une unique solution, alors le noyau de $A$ est forcément nul, ce qui suffit pour dire que $A$ est inversible. C'est ce que propose l'hypothèse **c.** dont **d.** n'est que le cas particulier $B_0 = 0$.

**16** Combien y a-t-il de matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?

❒ **a.** 2 ❒ **b.** 4 ❒ **c.** 8 ☒ **d.** une infinité

Il y a autant d'endomorphismes $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ vérifiant $u^2 = \mathrm{Id}$ que de telles matrices $M$. Or la condition $u^2 = \mathrm{Id}$ caractérise les symétries ; il y en a une infinité. Matriciellement, on peut par exemple vérifier que toutes les matrices du type $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ conviennent.

Une matrice $M$ de symétrie est toujours semblable à l'une des matrices suivantes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mais cela ne veut pas dire que $M$ est forcément diagonale.

**17** Soit $A$ une matrice (pas forcément carrée). On considère les deux systèmes linéaires $(S_1)$ $AX = B_1$ et $(S_2)$ $AX = B_2$. Laquelle des situations suivantes est impossible ?

❒ **a.** $(S_1)$ et $(S_2)$ n'ont pas de solution

❒ **b.** $(S_1)$ n'a pas de solution et $(S_2)$ a une infinité de solutions

❒ **c.** $(S_1)$ n'a pas de solution et $(S_2)$ a une unique solution

☒ **d.** $(S_1)$ a une unique solution et $(S_2)$ a une infinité de solutions

Lorsqu'un système linéaire $(S)$ $AX = B$ est compatible, c'est-à-dire admet au moins une solution $X_0$, alors l'ensemble des solutions de $(S)$ est l'espace affine $X_0 + \operatorname{Ker} A$ dirigé par le noyau de $A$. Ainsi, si $(S_1)$ admet une solution unique on a forcément $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ (i.e. l'application linéaire $u$ canoniquement associée à la matrice $A$ est injective) et par suite $(S_2)$ ne peut pas avoir une infinité de solutions.

En revanche les autres situations sont possibles : pour **a.** il suffit de prendre $A$ nulle et $B_1$ et $B_2$ non nuls ; pour **b.** il suffit de prendre $B_2 = 0$ et $B_1$ non nul toujours avec $A = 0$ et enfin pour **c.** il suffit de prendre $A$ telle que $u$ soit injective mais non surjective (c'est possible puisque la matrice n'est pas forcément carrée), $B_2$ dans l'image de $A$ et $B_1$ en dehors de cette image.

## 34 Groupe symétrique

**1** Le cardinal du groupe symétrique $\mathscr{S}_n$ est

❒ **a.** $n$ ❒ **b.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ❒ **c.** $n^n$ ☒ **d.** $n!$

C'est une question de cours : pour définir une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ il faut choisir l'image de 1 ($n$ possibilités) puis l'image de 2 qui doit être différente ($n - 1$ possibilités) et ainsi de suite. Les choix étant indépendants il y a $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$ permutations.

C'est aussi le nombre de termes que l'on trouve dans la somme qui définit le déterminant d'une matrice carrée de taille $n$.

**2** Le groupe symétrique $\mathscr{S}_n$ est commutatif pour

❒ **a.** $n = 1$ ☒ **b.** $n \leqslant 2$ ❒ **c.** $n \leqslant 3$ ❒ **d.** tout $n$

Pour $n = 1$ le groupe symétrique est réduit à l'identité et il est donc commutatif. Pour $n = 2$ c'est aussi le cas car $\mathscr{S}_2$ ne contient que l'identité et la transposition $(1, 2)$. En revanche à partir de $n = 3$ le groupe $\mathscr{S}_n$ n'est plus commutatif : la transposition $(1, 2)$ ne commute pas avec la transposition $(1, 3)$.

**3** Parmi les permutations $\sigma \in \mathscr{S}_3$, combien vérifient $\sigma(x) \neq x$ pour tout entier $x \in \{1, 2, 3\}$ ?

☒ **a.** 2 ❒ **b.** 3 ❒ **c.** 4 ❒ **d.** 8

En effet, seuls les deux 3-cycles $(1, 2, 3)$ et $(1, 3, 2)$ vérifient cette condition. Remarquez que la réponse **d.** pouvait être exclue directement car $\mathcal{S}_3$ n'est que de cardinal 6.

**4** La composée $\sigma = (1, 2, 3) \circ (1, 3, 4)$ vaut

❒ **a.** $(2, 4, 3)$ ☒ **b.** $(2, 3, 4)$ ❒ **c.** $(1, 3, 4)$ ❒ **d.** $(3, 2, 4)$

On calcule les images par $\sigma$ des différents entiers. On a $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 4$ et enfin $\sigma(4) = 2$ et par conséquent $\sigma$ est le 3-cycle $(2, 3, 4)$.

On pouvait exclure la réponse **c.** car la permutation $(1, 2, 3)$ n'est pas l'identité. On peut aussi observer que **a.** et **d.** sont deux écritures différentes du même 3-cycle.

**5** Soit $\sigma$ la permutation circulaire de $\{1, 2, \dots, n\}$, définie par $\sigma(k) = k + 1$ et $\sigma(n) = 1$. Quelle est sa signature ?

❒ **a.** $1$ ❒ **b.** $-1$ ❒ **c.** $(-1)^n$ ☒ **d.** $(-1)^{n-1}$

Il faut savoir que de manière générale la signature d'un cycle de longueur $p$ est $(-1)^{p-1}$. Une permutation circulaire est un cycle de longueur $n$.

**6** Soit $\sigma$ une permutation de $\{1, 2, ..., n\}$ telle que $\sigma^7 = \mathrm{Id}$. Alors la signature de $\sigma$ est

☒ **a.** $1$ ❒ **b.** $-1$ ❒ **c.** $(-1)^n$ ❒ **d.** $(-1)^{n-1}$

La signature est un morphisme de groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\{\pm 1\}, \times)$ et on a donc $\varepsilon(\sigma)^7 = \varepsilon(\sigma^7) = \varepsilon(\mathrm{Id}) = 1$. On ne peut donc pas avoir $\varepsilon(\sigma) = -1$ et on a donc forcément $\varepsilon(\sigma) = 1$.

**7** Une fonction $f$ de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ est symétrique en ses trois variables si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_3$ on a

☒ **a.** $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = f(x_1, x_2, x_3)$

❒ **b.** $f(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \sigma(x_3)) = f(x_1, x_2, x_3)$

❒ **c.** $\sigma(f(x, y, z)) = f(\sigma(x, y, z))$

❒ **d.** $f \circ \sigma \in \mathcal{S}_3$

Des quatre propositions, c'est la seule qui a un sens. Dans les trois autres, on applique $\sigma$ à autre chose qu'un élément de $\{1, 2, 3\}$.

Le triplet $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ correspond à une permutation du triplet $(x_1, x_2, x_3)$, donc à une permutation des variables de $f$. Par exemple, on retrouve dans l'étude des relations entre coefficients et racines des polynômes les fonctions symétriques élémentaires

$$x_1 + x_2 + x_3, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad x_1x_2x_3.$$

**8** Dans $\mathscr{S}_n$, combien y a-t-il de transpositions ?

❒ **a.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ☒ **b.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ❒ **c.** $n(n-1)$ ❒ **d.** $n^2$

Une transposition $\tau$ est caractérisée par les deux éléments qu'elle échange. Il y a donc autant de transpositions que de choix de deux éléments parmi $n$, soit $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

**9** Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$ telle que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$. Alors $\sigma$ possède forcément un point fixe

❒ **a.** si $n$ est pair ☒ **b.** si $n$ est impair
❒ **c.** si la signature de $\sigma$ vaut 1 ❒ **d.** dans tous les cas

La propriété $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ implique que si $k$ est un entier non fixé par $\sigma$ alors l'orbite de $k$ est égale à la paire $\{k, \sigma(k)\}$. Ainsi $\sigma$ peut s'écrire comme une composée de transpositions à supports disjoints. Lorsque $n$ est impair, il reste au moins un point qui est fixe. Mais ce n'est pas le cas si $n$ est pair : si $n = 2p$ il suffit de prendre $\sigma = (1, 2) \circ (3, 4) \circ \cdots \circ (2p-1, 2p)$ qui n'a aucun point fixe et vérifie bien $\sigma^2 = \mathrm{Id}$. La signature de $\sigma$ sera reliée au nombre de transpositions qui interviennent mais cela n'a rien à voir avec la question posée.

**10** Soit $\sigma = (1, 2, 3) \circ (1, 5) \in \mathscr{S}_5$. Le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $\sigma^k = \mathrm{Id}$ est

☒ **a.** 4 ❒ **b.** 5 ❒ **c.** 6 ❒ **d.** 5 !

Il faut ici prendre garde au fait que le 3-cycle et la transposition qui définissent $\sigma$ ne sont pas à supports disjoints et ne commutent pas. Cela ne permet pas un calcul aisé des puissances successives de $\sigma$. En fait on a $\sigma = (1, 5, 2, 3)$ qui est un 4-cycle. On obtient donc l'identité pour la première fois en faisant agir $\sigma$ quatre fois de suite. Dans le langage de la théorie des groupes on vient de déterminer l'ordre de la permutation $\sigma$ dans le groupe symétrique $\mathscr{S}_5$.

La réponse **c.** serait correcte pour la composée d'un 3-cycle et d'une transposition à supports disjoints. Il est vrai que $\sigma^{5!}$ fait l'identité mais 5! n'est pas le plus petit entier qui a cette propriété.

**11** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. L'application $f$ qui à une partie $A$ de $E$ associe son complémentaire $E \setminus A$ est une bijection de $\mathscr{P}(E)$. Quelle est sa signature ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** $-1$ ❒ **c.** $(-1)^n$ ☒ **d.** $(-1)^{2^{n-1}}$

L'application $f$ échange chaque partie $A$ de $E$ et son complémentaire puisque $f(E \setminus A) = A$. Autrement dit, $f$ est un produit de transpositions. Comme $\mathscr{P}(E)$ est de cardinal $2^n$, $f$ est la composée de $2^{n-1}$ transpositions (il n'y a aucun point fixe car aucune partie ne peut être égale à sa complémentaire, $E$ n'étant pas vide). On en déduit le résultat. La signature est donc égale à 1 dès que $n \geqslant 2$ mais elle vaut 1 lorsque $n = 1$ car dans ce cas $f$ est une transposition.

## 35 Déterminants

**1** Si $B$ est une matrice carrée de taille $n$, alors $\det(nB)$ est égal à

❒ **a.** $n\det(B)$ ❒ **b.** $n!\det(B)$ ☒ **c.** $n^n\det(B)$ ❒ **d.** $\det(B)^n$

Dans le cas général, pour une constante $c$ quelconque, on a $\det(cB) = c^n\det(B)$. C'est une application de la multilinéarité du déterminant : le scalaire $c$ sort une fois pour chaque colonne.

> Si vous avez répondu **a.** : le déterminant est multilinéaire et pas linéaire. Il s'agit d'une source d'erreur assez classique.

**2** Le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{pmatrix}$ est égal à

❒ **a.** $x+y+z$ ❒ **b.** $x-y+z$ ❒ **c.** $x-y-z$ ☒ **d.** $x+y-z$

Au vu de la forme de la matrice, il est judicieux de calculer son déterminant en développant par rapport à la dernière colonne. Il faut juste prendre garde à ne pas oublier le signe moins pour le cofacteur de $y$.

**3** Soit $A$ une matrice $4 \times 4$ de déterminant $-1$. Laquelle des matrices suivantes n'a pas le même déterminant que $A$ ?

❒ **a.** ${}^tA$ ❒ **b.** $A^{-1}$ ❒ **c.** $-A$ ☒ **d.** $A^2$

Une matrice et sa transposée ont le même déterminant donc on peut exclure la réponse **a.**. On a $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = -1$ donc on peut éliminer **b.**. Comme $A$ est de taille $4 \times 4$ on a aussi $\det(-A) = (-1)^4 \det A = \det A$.

Finalement la réponse est **d.** car $\det(A^2) = (\det A)^2 = 1$.

**4** Soit $A, B$ deux matrices inversibles de taille $n$ et $C = ABA^{-1}B^{-1}$. Le déterminant de $C$

❒ **a.** vaut 1 car $C$ est l'identité ❒ **b.** ne vaut 1 que si $A$ et $B$ commutent
☒ **c.** vaut toujours 1 ❒ **d.** ne peut pas être calculé en général

Par multiplicativité du déterminant, on a

$$\det C = \det A \det B \det A^{-1} \det B^{-1}$$

et comme le déterminant de l'inverse est l'inverse du déterminant, ce produit se simplifie pour donner 1. Notons que la matrice $C$ ne vaut l'identité que si $A$ et $B$ commutent.

**5** Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base d'un espace vectoriel $E$ et $x$ un vecteur de $E$. La coordonnée de $x$ selon le vecteur $e_1$ vaut :

❒ **a.** $\det_{\mathscr{B}}(e_1, x, x, ..., x)$ ❒ **b.** $\det_{\mathscr{B}}(e_1, e_2 + x, ..., e_n + x)$

☒ **c.** $\det_{\mathscr{B}}(x, e_2, ..., e_n)$ ❒ **d.** $\det_{\mathscr{B}}(x + e_1, e_2, ..., e_n)$

En effet, si on pose $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ on a par linéarité par rapport à la première composante

$$\det_{\mathscr{B}}(x, e_2, ..., e_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \det_{\mathscr{B}}(e_k, e_2, ..., e_n) = x_1$$

car $\det_{\mathscr{B}}(e_k, e_2, ..., e_n) = 0$ pour $k \geqslant 2$ (la famille est liée car il y a deux fois le même vecteur) et vaut 1 pour $k = 1$.

Notons que le déterminant proposé réponse **a.** est nul dès que $n \geqslant 3$ et que celui de **d.** vaut $x_1 + 1$.

**6** Par des opérations sur les lignes, on voit que le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est égal à celui de

☒ **a.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & -6 & -13 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 9 \\ 0 & 10 & 19 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$

Soient $L_1$, $L_2$ et $L_3$ les trois lignes de la matrice de l'énoncé. La méthode du pivot de Gauss s'applique ici en remplaçant $L_2$ par $L_2 - 2L_1$ (on pivote par rapport au coefficient 1 de la première ligne) et en remplaçant $L_3$ par $L_3 - 4L_1$. Ces opérations ne modifient pas le déterminant et conduisent à la matrice **a.**.

**7** Par élimination le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ -2 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ vaut

☒ **a.** 700 ❒ **b.** $\frac{35}{2}$ ❒ **c.** $-\frac{1}{5}$ ❒ **d.** $-355$

Le déterminant de $A$ est forcément entier car les coefficients de $A$ sont tous entiers ce qui permet déjà d'éliminer les réponses **b.** et **c.**. Comme les coefficients de la première colonne sont tous pairs, on peut mettre 2 en facteur par multilinéarité et le déterminant qui reste est entier. Donc $\det(A)$ est pair.

**8** La comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ est

❒ **a.** $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☒ **b.** $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

En effet, le cofacteur de 1 est $-3$, celui de 2 est 1, celui de $-1$ est $-2$ et celui de $-3$ est 1.

N'oubliez pas les signes des cofacteurs.

**9** Soit $A, B$ deux matrices carrées de taille $n$ à coefficients entiers et telles que $AB = I_n$. Alors $\det A$ prend ses valeurs dans

☒ **a.** $\{-1, 1\}$ ❒ **b.** $\{-1, 0, 1\}$ ❒ **c.** $\mathbf{Z}^*$ ❒ **d.** $\mathbf{Q}^*$

On a par multiplicativité $\det A . \det B = 1$. Or, $\det A$ et $\det B$ sont deux entiers. Par conséquent $\det A$ (et $\det B$) valent 1 ou $-1$. Cela montre qu'une matrice $A$ de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$ qui est inversible dans cet anneau a forcément son déterminant dans $\{\pm 1\}$.

Par ailleurs, la réciproque est vraie : en effet si $\det A \in \{\pm 1\}$ alors $A$ est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et la formule qui donne l'inverse de $A$ à l'aide de la comatrice de $A$ montre que $A^{-1}$ est encore à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Il arrive souvent que cette question soit posée à l'écrit ou à l'oral des concours.

**10** Soit $A$ inversible de taille $n$. On effectue toutes les permutations possibles sur les lignes de $A$ et on calcule les déterminants des matrices obtenues. Combien de résultats différents obtient-on ?

❒ **a.** 1 ☒ **b.** 2 ❒ **c.** $n$ ❒ **d.** $n!$

Lorsqu'on effectue une permutation $\sigma$ sur des lignes de $A$, le déterminant de la matrice obtenue est $\varepsilon(\sigma) \det A$ où $\varepsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$ est la signature de $\sigma$. On obtient donc les deux déterminants différents $\det A$ et $-\det A$.

**11** Soit $C_1, ..., C_n$ des vecteurs colonnes de $\mathbf{R}^n$. On suppose que

$$\det(C_1, C_2, C_3, ..., C_n) = \det(C_2, C_1, C_3, ..., C_n)$$

Alors on peut en déduire que :

❒ **a.** $C_1 = C_2$ ❒ **b.** $C_1 = 0$ ou $C_2 = 0$ ❒ **c.** $C_1$ et $C_2$ sont liés

☒ **d.** $(C_1, ..., C_n)$ est une famille liée

On a $\det(C_2, C_1, C_3, ..., C_n) = -\det(C_1, C_2, C_3, ..., C_n)$ car le déterminant est une forme $n$-linéaire alternée. Avec l'hypothèse cela implique que $\det(C_1, C_2, C_3, ..., C_n) = 0$ et donc que $(C_1, ..., C_n)$ est une famille liée. On ne peut rien dire en particulier sur $C_1$ et $C_2$ : par exemple si $C_3 = 0$ l'hypothèse est vérifiée quels que soient $C_1$ et $C_2$.

**12** Dans l'espace des polynômes réels de degré $\leqslant n$, quel est le déterminant de l'application linéaire $P \mapsto P'$ ?

☒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** $n!$ ❒ **d.** $(n+1)!$

La dérivation sur l'espace des polynômes réels de degré $\leqslant n$ est linéaire mais non bijective puisque le noyau est la droite des polynômes constants. Son déterminant est donc forcément nul.

**13** Soit $A$ une matrice carrée réelle de taille $n$ et de déterminant 2. Sa comatrice $B$ a pour déterminant

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 2 ☒ **c.** $2^{n-1}$ ❒ **d.** 1/2

La relation fondamentale vérifiée par la comatrice est ${}^tBA = (\det A)I_n = 2I_n$. Comme $B$ et sa transposée ont le même déterminant, on obtient

$$\det(B)\det(A) = \det(2I_n) = 2^n.$$

Comme $\det(A) = 2$, il reste $\det(B) = 2^{n-1}$.

**14** Soit $f$ une forme $n$-linéaire sur un espace vectoriel $E$. Lorsqu'on développe complètement $f(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ par multilinéarité on obtient

❒ **a.** 2 termes ❒ **b.** $2n$ termes

❒ **c.** $n^2$ termes ☒ **d.** $2^n$ termes

On obtient, en développant, tous les termes du type $f(u_1, ..., u_n)$ avec $u_k$ qui vaut $x_k$ ou $y_k$ pour tout $k$. On a 2 choix pour chacune des $n$ composantes, ce qui donne $2^n$ possibilités au total.

Certains déterminants se calculent de cette manière, par exemple lorsque tous les vecteurs $y_k$ sont égaux : dans ce cas il ne reste que $n+1$ déterminants à évaluer car tous ceux qui contiennent au moins deux $y_k$ sont nuls.

**15** Pour quelles valeurs du réel $a$ la matrice $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

❒ **a.** pour $a \neq 0$ ❒ **b.** pour $a \neq 0$ et $a \neq -1$

❒ **c.** pour $a \neq 0$ et $a \neq -2$ ☒ **d.** pour $a \neq 0$ et $a \neq -3$

Le déterminant de la matrice, que l'on obtient par exemple en développant par rapport à la première colonne, est $(1+a)((1+a)^2 - 1) - a - a = a^2(a+3)$. Celui-ci s'annule pour $a = 0$ et $a = -3$, ce qui donne les cas où la matrice n'est pas inversible.

**16** On note $A$ la matrice de taille $n$ dont tous les coefficients valent 1 sauf ceux de la diagonale qui sont nuls. Soit $p_n$ (respectivement $q_n$) le nombre de permutations de $\mathscr{S}_n$ sans point fixe et de signature $+1$ (respectivement $-1$). Le déterminant de $A$ vaut

❒ **a.** $p_n$ ❒ **b.** $q_n$ ❒ **c.** $p_n + q_n$ ☒ **d.** $p_n - q_n$

On a $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n} = p_n - q_n$ car la quantité $\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n}$ vaut 0 si $\sigma$ a un point fixe (la diagonale de $A$ est nulle), 1 si $\sigma$ est paire et sans point fixe et $-1$ si $\sigma$ est impaire et sans point fixe.

## 36 Espaces euclidiens

**1** On munit $\mathbf{R}^2$ d'un produit scalaire en posant $\langle (a, b), (c, d) \rangle =$

❒ **a.** $ad + bc$ ❒ **b.** $ac$ ❒ **c.** $ab + cd$ ☒ **d.** $ac + 2bd$

De la même manière que pour le produit scalaire canonique défini par $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac + bd$, on vérifie que $ac + 2bd$ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive.

Voyons rapidement pourquoi les autres réponses ne conviennent pas :

- $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ad + bc$ est bilinéaire, symétrique, mais non positive : si $(a, b) = (c, d)$ elle vaut $2ab$ qui peut être négatif.
- $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac$ est bilinéaire, symétrique, positive, mais non définie : si $(a, b) = (c, d)$ elle vaut $a^2$, qui peut être nul sans que $(a, b)$ soit nul.
- $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ab + cd$ n'est pas bilinéaire : en fixant $(a, b)$, l'application $(c, d) \mapsto ab + cd$ n'est pas une forme linéaire (elle n'envoie pas $(0, 0)$ sur 0).

**2** Dans un espace euclidien $E$, lorsque $x$ et $y$ sont des vecteurs et $t$ un réel, alors $\langle x + ty, x + ty \rangle$ est égal à

❒ **a.** $||x||^2 + t^2||y||^2$ ☒ **b.** $||x||^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2||y||^2$

❒ **c.** $||x|| + t||y||$ ❒ **d.** $||x|| + |t|.||y||$

On obtient le bon résultat en développant par bilinéarité

$$\langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + \langle ty, x \rangle + \langle x, ty \rangle + \langle ty, ty \rangle = ||x||^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2||y||^2.$$

Ce développement, qui est une forme d'identité remarquable, est notamment utilisé dans la preuve classique de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Rappelons que $\langle x, x \rangle$ vaut $||x||^2$ (l'oubli du carré est une erreur classique).

**3** Soit $b$ et $b'$ deux produits scalaires sur l'espace réel $E$. Laquelle des applications suivantes est encore un produit scalaire sur $E$ ?

❒ **a.** $-2b$ ☒ **b.** $b + b'$ ❒ **c.** $b - b'$ ❒ **d.** $bb'$

En effet, $b + b'$ est une forme bilinéaire symétrique (l'ensemble des formes bilinéaires symétriques est un espace vectoriel) et elle est définie positive car pour $x$ dans $E$, $b(x, x) + b'(x, x) \geqslant 0$ et il n'y a égalité que si $b(x, x) = b'(x, x) = 0$ i.e. si $x = 0$.

En revanche, $-2b$ est une forme bilinéaire symétrique définie négative ; $bb'$ n'est pas une forme bilinéaire sur $E$ ; quant à $b - b'$, c'est toujours une forme bilinéaire symétrique, il arrive qu'elle soit positive, mais ce n'est pas toujours le cas (par exemple lorsque $b' = 2b$.)

**4** Soit $F$ un sous-espace de l'espace euclidien $E$, $x$ un vecteur de $E$ et $p(x)$ le projeté orthogonal de $x$ sur $F$. On a

❒ **a.** $\|x\|^2 + \|p(x) - x\|^2 = \|p(x)\|^2$ ☒ **b.** $\|p(x)\|^2 + \|p(x) - x\|^2 = \|x\|^2$

❒ **c.** $\|x\|^2 + \|p(x)\|^2 = \|p(x) - x\|^2$ ❒ **d.** $\|x\|^2 + \|p(x)\|^2 = \|p(x) + x\|^2$

En effet, par définition le vecteur $x - p(x)$ est dans l'orthogonal de $F$. En particulier il est orthogonal à $p(x)$ qui est dans $F$ et il suffit alors d'écrire le théorème de Pythagore.

Cette égalité permet d'en déduire l'inégalité $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$, i.e. le projeté orthogonal est plus petit que le vecteur. Cette propriété est d'ailleurs caractéristique des projecteurs orthogonaux.

**5** Soit $(e_1, e_2)$ la base canonique (orthonormale) de $\mathbf{R}^2$. Que donne le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la famille $(e_1 + e_2, e_1 + 2e_2)$ ?

☒ **a.** $\left(\dfrac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}, \dfrac{e_2 - e_1}{\sqrt{2}}\right)$ ❒ **b.** $\left(\dfrac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}, \dfrac{e_2 - e_1}{\sqrt{5}}\right)$

❒ **c.** $\left(\sqrt{\dfrac{e_1 + e_2}{2}}, \sqrt{\dfrac{e_2 - e_1}{2}}\right)$ ❒ **d.** $\left(\dfrac{e_1 + e_2}{2}, \dfrac{e_1 - e_2}{2}\right)$

De toutes les solutions proposées, c'est la seule à être une base orthonormale : rappelons les trois propriétés caractéristiques de l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $(e_1, e_2)$, que l'on note $(f_1, f_2)$ :

- $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$ et $\langle f_1, f_2\rangle = 0$
- $f_1$ est proportionnel à $e_1$
- $f_2 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $\langle f_2, e_2\rangle$ est strictement positif.

La réponse **c.** est inhomogène, car il n'est pas raisonnable d'extraire une racine carrée d'un vecteur. Si vous avez répondu **d.**, vous avez fait une erreur dans le calcul de la norme : on doit avoir $\left\|\dfrac{e_1 + e_2}{2}\right\|^2 = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{2}$.

**6** Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de l'espace euclidien $E$ et $(f_1, ..., f_n)$ son orthonormalisée de Gram-Schmidt. Laquelle des propriétés suivantes n'est pas forcément réalisée ?

☒ **a.** $f_k$ est proportionnel à $e_k$ pour tout $k$

❒ **b.** $\|f_k\| = 1$ pour tout $k$

❒ **c.** $\mathrm{Vect}(f_1, ..., f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$ pour tout $k$

❒ **d.** $\langle e_k, f_k\rangle$ est strictement positif pour tout $k$

Les trois autres propriétés sont caractéristiques de l'orthonormalisée de Gram-Schmidt. Si la propriété **a.** était aussi réalisée, alors la famille $(e_1, ..., e_n)$ serait orthogonale, ce qui n'est pas nécessairement le cas.

**7** Pour prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle x, y\rangle| \leqslant ||x||||y||$ dans un espace euclidien, on considère

❒ **a.** le polynôme $P(t) = \langle x - ty, x + ty\rangle$

☒ **b.** le polynôme $P(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle$

❒ **c.** le polynôme $P(t) = \langle x - ty, tx - y\rangle$

❒ **d.** la matrice $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$

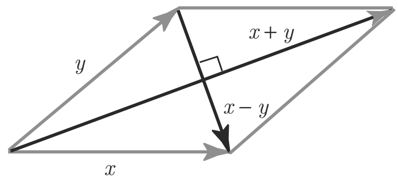
C'est une démonstration qu'il est important de connaître. L'idée consiste à dire que le polynôme $P(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle = ||x + ty||^2$ est toujours positif ou nul et que, dans le cas où $y$ n'est pas nul, son discriminant est négatif ou nul. On retrouve ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui est évidente dans le cas $y = 0$.

**8** Soit $x, y$ deux vecteurs d'un espace euclidien $E$. À quelle condition les vecteurs $x + y$ et $x - y$ sont-ils orthogonaux ?

❒ **a.** c'est toujours le cas ❒ **b.** lorsque $x \perp y$

☒ **c.** lorsque $||x|| = ||y||$ ❒ **d.** lorsque $||x|| = \pm||y||$

Il suffit de calculer le produit scalaire : $\langle x - y, x + y\rangle = ||x||^2 - ||y||^2$. Les deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $||x||^2 = ||y||^2$ ce qui équivaut à $||x|| = ||y||$ puisqu'une norme est positive. Géométriquement, cela signifie que le parallélogramme formé par les vecteurs $0, x, y, x + y$ est un losange si et seulement si ses diagonales sont orthogonales :




Remarquons que la réponse **d.** serait logiquement acceptable, mais une norme n'étant jamais négative, cette réponse est un peu hors sujet.

**9** Si $x, y$ sont deux vecteurs d'un espace euclidien $E$ on a $\langle x, y\rangle = ||x||.||y||$ si et seulement si

❒ **a.** $x = y$ ❒ **b.** $x$ et $y$ sont orthogonaux ❒ **c.** $x$ et $y$ sont liés

☒ **d.** $x$ et $y$ sont sur une même demi-droite issue de l'origine

Il s'agit du cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Les deux vecteurs doivent être colinéaires et avoir la même direction. Lorsque $x$ et $y$ sont seulement liés, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les carrés

$$\langle x, y\rangle^2 = ||x||^2.||y||^2$$

**10** Soit $a_1, ..., a_n$ des réels. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut majorer $\sum_{k=1}^{n} a_k$ par

❒ **a.** $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ ❒ **b.** $n \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ ❒ **c.** $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$ ☒ **d.** $\sqrt{n \sum_{k=1}^{n} a_k^2}$

On écrit que $a_k = 1.a_k$ et on a

$$\sum_{k=1}^{n} 1.a_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} = \sqrt{n \sum_{k=1}^{n} a_k^2}.$$

**11** Soit $(x, y) \in E^2$ où $E$ est un espace euclidien. Si $||x|| = 1$ et $||y|| = 2$, alors $||x - y||$ est

☒ **a.** compris entre 1 et 3 ❒ **b.** égal à 1

❒ **c.** compris entre 1 et $\sqrt{5}$ ❒ **d.** inférieur à $-1$

L'inégalité triangulaire permet de dire que $||x - y||$ est plus petit que $||x|| + ||y||$ ; une de ses variantes affirme que $||x - y||$ est plus grand que $||x|| - ||y||$ et que $||y|| - ||x||$.

La réponse **d.** est à exclure : une norme est toujours positive ! Quant à la réponse **c.**, elle témoigne d'une confusion : c'est uniquement dans le cas où $x$ et $y$ sont orthogonaux que l'on a $||x - y|| = \sqrt{5}$ par le théorème de Pythagore.

**12** Soit $D$ une droite d'un espace euclidien $E$ dirigée par un vecteur non nul $e$ et $x$ un vecteur de $E$. Le projeté orthogonal de $x$ sur $D$ est

❒ **a.** $\langle x, e\rangle \dfrac{e}{||e||}$ ❒ **b.** $\langle x, e\rangle e$ ❒ **c.** $\dfrac{||x||}{||e||}$ ☒ **d.** $\langle x, e\rangle \dfrac{e}{||e||^2}$

Si $u$ est un vecteur unitaire de $D$, le projeté orthogonal de $x$ sur $D$ est $\langle x, u\rangle u$. Mais ici, $(e)$ n'est pas une base orthonormée, puisque $e$ n'est pas censé être de norme 1. On pose donc $u = \dfrac{e}{||e||}$ et on conclut avec la bilinéarité du produit scalaire : le projeté orthogonal de $x$ sur $D$ est

$$\langle x, u\rangle u = \left\langle x, \frac{e}{||e||} \right\rangle \frac{e}{||e||} = \langle x, e\rangle \frac{e}{||e||^2}$$

La réponse **c.** ne peut convenir car elle n'est pas homogène : $\dfrac{||x||}{||e||}$ est un réel, pas un vecteur.

**13** Soit $x, y, z$ trois vecteurs de norme 1 dans un plan euclidien, tels que $x \perp y$ et $y \perp z$. Alors

❒ **a.** $x \perp z$ par transitivité ❒ **b.** $z = x$ ☒ **c.** $z$ et $x$ sont colinéaires

❒ **d.** c'est impossible car le plan est de dimension 2

Par hypothèse les vecteurs $x$ et $z$ sont sur la droite orthogonale à la droite engendrée par $y$. Ils sont donc colinéaires et comme ils sont tous les deux de norme 1 ils sont égaux ou opposés. L'orthogonalité n'est donc pas transitive.

Ce résultat n'est plus valable en dimension supérieure. À partir de la dimension 3, l'orthogonal de $y$ n'est plus une droite, et rien ne permet alors de dire que $x$ et $z$ sont liés.

**14** Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien $E$ et le sous-espace $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_{n-1})$. Combien y a-t-il de sous-espaces de $E$ qui sont orthogonaux à $F$ ?

❒ **a.** une infinité ☒ **b.** 2 ❒ **c.** 1 ❒ **d.** 0

Les sous-espaces de $E$ qui sont orthogonaux à $F$ sont exactement les sous-espaces de $F^\perp$. Or $F^\perp$ est ici une droite (la droite engendrée par $e_n$) et elle n'admet que deux sous-espaces : elle-même et l'espace nul.

En revanche, si on avait $\dim F \leqslant n-2$ on aurait alors effectivement une infinité de sous-espaces orthogonaux à $F$, puisque un plan (ou un espace de dimension supérieure) contient une infinité de droites vectorielles.

**15** Les coordonnées de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base orthogonale $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbf{R}^2$ sont

☒ **a.** $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ❒ **b.** $(3, -1)$

❒ **c.** $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ❒ **d.** $\left(3\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

Lorsque $(u, v)$ est une base orthogonale, et que $x$ est un vecteur qui s'écrit $x = au + bv$, on obtient les coordonnées $a$ et $b$ en effectuant les produits scalaires $\langle x, u\rangle = a\langle u, u\rangle$ et $\langle x, v\rangle = b\langle v, v\rangle$. C'est plus facile lorsque la base est orthonormale, puisque les carrés scalaires $\langle u, u\rangle$ et $\langle v, v\rangle$ valent 1, mais ce n'est pas le cas ici...

**16** Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthogonale ($n \geqslant 2$) d'un espace euclidien $E$. La famille

$$(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1)$$

est une base orthogonale

❒ **a.** lorsque $n$ est pair ❒ **b.** lorsque $n$ est impair

❒ **c.** pour tout $n$ ☒ **d.** pour aucune valeur de $n$

Le produit scalaire des deux premiers vecteurs est 1. Donc la famille proposée n'est jamais orthogonale. En revanche, on peut montrer que la famille est une base uniquement lorsque $n$ est impair.

**17** Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien $E$. Quelle est la distance du vecteur $x = e_1 + \cdots + e_n$ à l'espace $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$ ?

❒ **a.** 0 ☒ **b.** 1 ❒ **c.** $\sqrt{n-1}$ ❒ **d.** $n-1$

La composante de $x$ selon $F$ est $e_1 + \cdots + e_{n-1}$ et sa composante selon $F^\perp$ est $e_n$. La distance de $x$ à $F$ est donc $\|e_n\| = 1$.

La réponse **a.** ne convient pas car la distance de $x$ à $F$ ne pourrait être nulle que si l'on avait $x \in F$. Par ailleurs, si vous avez répondu **c.** ou **d.**, vous avez confondu la distance de $x$ à $F$ avec la norme du projeté orthogonal de $x$ sur $F$. Si on note $p_F(x)$ ce projeté, la distance de $x$ à $F$ est de façon générale $\|x - p_F(x)\|$.

**18** Dans un espace euclidien $E$, soient $x, y$ deux vecteurs de norme 1 et tels que $\|x+y\| = \sqrt{3}$. Alors, $\langle x, y\rangle$ vaut

❐ **a.** 1 ☒ **b.** $\frac{1}{2}$ ❐ **c.** 0 ❐ **d.** $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$

On utilise ici une formule de polarisation, qui permet de retrouver le produit scalaire à l'aide de normes. On a

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{2}(3-1-1) = \frac{1}{2}\cdot$$

**19** Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une famille de vecteurs d'un plan euclidien $P$. On suppose que le seul vecteur $x$ de $P$ tel que $\langle x, e_1\rangle = \langle x, e_2\rangle = 0$ est le vecteur nul. On en déduit que

☒ **a.** $\mathscr{B}$ est une base de $P$ ❐ **b.** $e_1$ et $e_2$ sont orthogonaux

❐ **c.** $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de $P$ ❐ **d.** $e_1$ et $e_2$ sont colinéaires

Par bilinéarité du produit scalaire, il est équivalent d'être orthogonal à la fois à $e_1$ et $e_2$, et être orthogonal à l'espace $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Ici, on cherche une condition sur $e_1$ et $e_2$ pour que son orthogonal soit nul ; ceci revient à $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = P$. Or cette condition impose que $(e_1, e_2)$ soit génératrice ; comme $P$ est de dimension 2, cela revient à dire que $\mathscr{B}$ est une base de $P$. Rien ne permet toutefois d'affirmer que $B$ est orthogonale ou orthonormée.

**20** Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de l'espace euclidien $E$, et $\mathscr{B}' = (f_1, ..., f_n)$ la base orthonormée obtenue à partir de $\mathscr{B}$ par le procédé de Gram-Schmidt. La matrice $P$ de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$ est

❐ **a.** diagonale ❐ **b.** triangulaire inférieure

☒ **c.** triangulaire supérieure ❐ **d.** symétrique

Par construction, chaque vecteur $f_k$ est choisi dans le sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$. Cela signifie que $P$ est triangulaire supérieure. On peut noter que $P$ est diagonale si et seulement si chaque vecteur $f_k$ est proportionnel à $e_k$. Cela revient à dire que $\mathscr{B}$ est une base orthogonale.

## 37 Isométries

**1** Soit $A$ et $B$ deux points distincts du plan $\mathbf{R}^2$. Combien y a t-il de réflexions affines qui envoient $A$ sur $B$ ?

☒ **a.** 1 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** une infinité

❒ **d.** cela dépend de $A$ et $B$

L'unique réflexion qui convient est la réflexion par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$.

**2** Combien y a-t-il de matrices diagonales dans $O_3(\mathbf{R})$ ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 3 ☒ **c.** 8 ❒ **d.** une infinité

Une matrice diagonale est orthogonale si et seulement si les coefficients diagonaux valent 1 ou $-1$ : les colonnes sont forcément deux à deux orthogonales donc elles doivent simplement être choisies unitaires. Il y en a donc 8.

**3** Soit $r$ la rotation d'un plan euclidien orienté d'angle $\theta$ et $x$ un vecteur de norme 1. Le produit scalaire $\langle x, r(x)\rangle$ vaut

❒ **a.** 1 ☒ **b.** $\cos\theta$ ❒ **c.** $\sin\theta$ ❒ **d.** $\pm\cos\theta$

L'angle orienté entre les vecteurs $x$ et $r(x)$ étant $\theta$ on a

$$\langle x, r(x)\rangle = \|x\|\|r(x)\|\cos\theta = \cos\theta.$$

**4** Laquelle des matrices suivantes n'est pas orthogonale ?

❒ **a.** $M_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $M_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

☒ **c.** $M_3 = \begin{pmatrix} \sin\theta & \sin\theta \\ -\cos\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $M_4 = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$

En effet, les deux colonnes de $M_3$ sont bien unitaires mais elles ne sont pas orthogonales.

**5** Soit $r$ une rotation de $\mathbf{R}^3$ d'angle $\theta$. Le déterminant de $r$ vaut

❒ **a.** $\theta$ ❒ **b.** $\cos\theta$ ❒ **c.** $2\cos\theta + 1$ ☒ **d.** 1

Toute application orthogonale est de déterminant 1 ou $-1$. Par définition les rotations sont celles qui sont de déterminant 1. On peut retenir que la quantité $2\cos\theta + 1$ est la trace de la rotation $r$, ce qui est utile pour trouver facilement le cosinus de l'angle lorsque l'on dispose de la matrice de $r$.

**6** Lequel des vecteurs suivants ne peut pas être l'image de $x = (1, 2, 2)$ par un endomorphisme orthogonal de $\mathbf{R}^3$ ?

❒ **a.** $(2, 2, 1)$ ❒ **b.** $(3, 0, 0)$

☒ **c.** $(1, 1, 2)$ ❒ **d.** $(-1, -2, -2)$

Un endomorphisme orthogonal conserve la norme et le vecteur $(1, 1, 2)$ n'a pas une norme égale à celle de $x$ qui vaut 3. Vous pouvez à titre d'exercice montrer le résultat suivant : si $x$ et $y$ sont deux vecteurs d'un espace euclidien $E$ qui ont la même norme, il existe un endomorphisme orthogonal $u$ de $E$ tel que $u(x) = y$.

**7** Dans la base canonique du plan euclidien $\mathbf{R}^2$, la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ est

☒ **a.** $M_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ❒ **b.** $M_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

❒ **c.** $M_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ❒ **d.** $M_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Plus généralement, la rotation d'angle $\theta$ d'un plan euclidien orienté a pour matrice dans toute base orthonormée directe $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Le fait que la matrice reste la même via un changement de base orthonormée directe provient de ce que le groupe $SO_2(\mathbf{R})$ est commutatif, et qu'une matrice de passage entre deux bases orthonormées directes est dans $SO_2(\mathbf{R})$. Ici, on obtient donc $M_1$. On pouvait exclure $M_2$ et $M_4$ qui ont un déterminant égal à $-1$.

**8** La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

❒ **a.** n'est pas orthogonale

❒ **b.** définit la rotation de $\mathbf{R}^2$ d'angle $\frac{\pi}{2}$

❒ **c.** définit la réflexion de $\mathbf{R}^2$ d'axe la droite d'équation $y = -x$

☒ **d.** définit la réflexion de $\mathbf{R}^2$ d'axe la droite d'équation $y = x$

La matrice $A$ est bien orthogonale et de déterminant $-1$. Elle définit donc une réflexion. Pour en trouver l'axe on cherche les vecteurs invariants par $A$. Ici, ce sont ceux de la forme $(x, x)$ avec $x$ réel, autrement dit les vecteurs de la droite d'équation $y = x$.

**9** Dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$, soit $D'$ la droite d'équation $y = x$ et $D$ l'axe des abscisses. On note $s_D$ et $s_{D'}$ les réflexions d'axe $D$ et $D'$. La composée $s_D \circ s_{D'}$ est

❒ **a.** la réflexion par rapport à la bissectrice intérieure de $D$ et $D'$

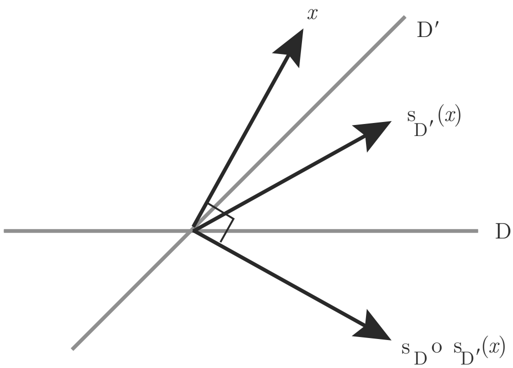
❒ **b.** la projection sur $D$ parallèlement à $D'$

❒ **c.** la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

☒ **d.** la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$

La composée de deux transformations orthogonales est une transformation orthogonale donc on peut exclure **b.**. Par multiplicativité du déterminant la composée de deux réflexions est une rotation. Il reste donc à trouver l'angle. Pour cela on choisit un vecteur quelconque

$x$ et on calcule son image. Prenons par exemple $x = (1, 1)$ qui dirige $D'$ et est donc invariant par la réflexion $s_{D'}$. On a $s_D(x) = (1, -1)$. L'angle est donc $-\dfrac{\pi}{2}$. On aurait un angle de $\dfrac{\pi}{2}$ en composant les deux réflexions dans l'autre sens.




**10** Soit $r$ la rotation linéaire de $\mathbf{R}^3$ d'axe $D$ et d'angle $\theta$. Alors $r^2$

☒ **a.** est la rotation d'axe $D$ et d'angle $2\theta$

❒ **b.** est la rotation d'axe $D$ et d'angle $\theta^2$

❒ **c.** est la rotation d'axe $D^2$ et d'angle $\theta^2$

❒ **d.** n'est pas forcément une rotation

L'axe d'une rotation est l'ensemble des vecteurs fixes et tout point fixe par $r$ l'est aussi par $r^2$. Dans le plan orthogonal à $D$, appliquer deux fois $r$ revient à tourner deux fois de l'angle $\theta$. Dans le cas particulier où $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$ $r$ est le retournement d'axe $D$ et on a alors $r^2 = \mathrm{Id}$.

Bien entendu la réponse **c.** n'a pas de sens et **d.** pouvait être éliminée tout de suite puisque la composée de deux rotations est toujours une rotation.

**11** Une homothétie $h = \lambda\,\mathrm{Id}$ d'un espace euclidien est une application orthogonale lorsque

❒ **a.** $\lambda = 1$ ☒ **b.** $\lambda \in \{-1, 1\}$

❒ **c.** $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ ❒ **d.** $\lambda \in \mathbf{Z}$

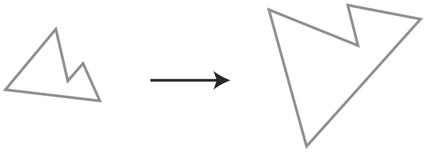
On a pour tout $x \in E$, $\|h(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ donc $h$ conserve la norme euclidienne si et seulement si $\lambda \in \{\pm 1\}$.

**12** Une similitude plane directe conserve

❒ **a.** les distances ☒ **b.** les angles orientés

❒ **c.** les aires ❒ **d.** le produit scalaire

Une similitude plane directe est la composée d'une homothétie et d'une isométrie directe (rotation ou translation). Les isométries directes conservent les 4 propriétés citées mais l'homothétie ne conserve que les angles orientés.



**13** Quelle est la transformation géométrique dont la représentation complexe est $f : z \mapsto 2iz + 5$ ?

❒ **a.** l'homothétie de rapport $2i$ et de centre $1 + 2i$

❒ **b.** l'homothétie de rapport $2i$ et de centre 5

☒ **c.** la similitude de rapport 2, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre $1 + 2i$

❒ **d.** la similitude de rapport 2, d'angle $\pi$ et de centre 5

Les transformations du plan complexe de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a$ non nul sont les similitudes directes. Lorsque $a = 1$ on a une translation et sinon il y a un unique point fixe appelé centre de la similitude.

Ici le centre de $f$ est le point d'affixe $1 + 2i$. En prenant ce centre pour nouvelle origine la similitude s'écrit $Z \mapsto 2iZ$. Le rapport de la similitude est le module de $2i$, donc 2, et l'angle est l'argument de $2i$, donc $\dfrac{\pi}{2}$. Géométriquement, $f$ est la composée de la rotation de centre $1 + 2i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ avec l'homothétie même centre et de rapport 2.

**14** Posons $j = e^{2i\pi/3}$. Quelle est l'écriture complexe de la rotation $r$ de centre $j$ et d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$ ?

❒ **a.** $z \mapsto jz + j$

❒ **b.** $z \mapsto j^2z + j$

☒ **c.** $z \mapsto j^2z + j + 1$

❒ **d.** $z \mapsto j^2z + j - 1$

La rotation d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$ et de centre l'origine s'écrit simplement $z \mapsto e^{4i\pi/3}z$. On se ramène à cela en prenant le point d'affixe $j$ pour origine. Mais comme $e^{4i\pi/3} = j^2$ on a pour tout $z \in \mathbf{C}$, $r(z) - j = j^2(z - j)$. Après simplification on obtient $r(z) = j^2z + j - 1$. On vérifie que le point $j$ est bien fixe par $r$.

**15** Soit $D$ une droite vectorielle d'un plan euclidien $E$ dirigée par un vecteur $u$ et $s$ la réflexion d'axe $D$. On note $r_\theta$ la rotation de $E$ d'angle $\theta$. Alors $r_\theta \circ s$ est

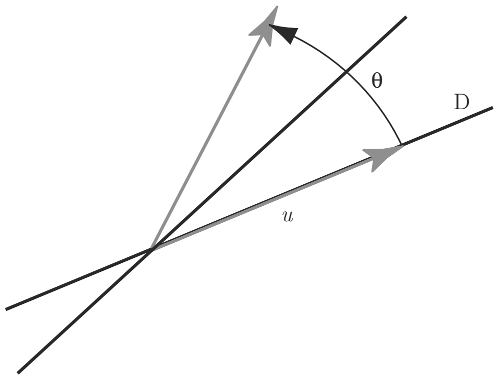
❒ **a.** la rotation d'angle $2\theta$

❒ **b.** la rotation d'angle $-\theta$

☒ **c.** la réflexion dont l'axe est la droite dirigée par $r_{\theta/2}(u)$

❒ **d.** la réflexion dont l'axe est la droite dirigée par $r_\theta^{-1}(u)$

Le déterminant de $r_\theta \circ s$ vaut $-1$ et comme cette application est toujours orthogonale il s'agit d'une réflexion. L'axe de cette reflexion est la bissectrice de $(x, (r_\theta \circ s)(x))$ pour tout vecteur non nul $x$. En prenant $x = u$ on obtient le résultat.




**16** Soit $x$ un vecteur colonne de $\mathbf{R}^3$. On peut trouver une matrice orthogonale de $O_3(\mathbf{R})$ dont la première colonne est $x$ si et seulement si

❒ **a.** $x$ est non nul ❒ **b.** $x$ est un vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^3$

☒ **c.** $\|x\| = 1$ ❒ **d.** $x\,{}^t x$ est la matrice identité

Une matrice est orthogonale lorsque ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$. Il faut donc déjà que $\|x\| = 1$. Cette condition est suffisante, puisque l'on peut alors compléter la famille orthonormée $(x)$ en une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$.

Remarquons que la matrice $x\,{}^t x$ est de rang inférieur à celui de la colonne $x$, donc à 1. Ainsi cette matrice ne peut jamais être égale à l'identité.

**17** Dans $O_3(\mathbf{R})$ on ne peut pas trouver de matrices

❒ **a.** à coefficients entiers ☒ **b.** à coefficients strictement positifs

❒ **c.** à coefficients rationnels ❒ **d.** d'inverse orthogonal

La matrice identité est une matrice orthogonale à coefficients entiers, et *a fortiori* rationnels. Toutes les matrices orthogonales sont inversibles et d'inverse orthogonales. En revanche, une matrice dont tous les coefficients sont strictement positifs ne peut pas être orthogonale, puisque le produit scalaire de ses deux premières colonnes ne peut alors être nul.

**18** Quelles sont les matrices de $O_2(\mathbf{R})$ qui peuvent s'écrire comme le carré d'une matrice de $O_2(\mathbf{R})$ ?

❒ **a.** toutes ☒ **b.** les rotations

❒ **c.** les réflexions droites et l'identité ❒ **d.** seulement l'identité

Il suffit de calculer tous les carrés des matrices de $O_2(\mathbf{R})$. Le carré de la rotation d'angle $\theta$ est la rotation d'angle $2\theta$ : toute rotation est donc est carré. En revanche, le carré d'une réflexion droite est l'identité : aucune réflexion ne peut être un carré.

**19** Soit $A$ et $B$ deux points distincts du plan et $s_A$, $s_B$ les symétries de centres $A$ et $B$. Quels sont les points $M$ du plan tels que $s_A(M) = s_B(M)$ ?

☒ **a.** aucun
❒ **b.** le milieu de $[AB]$
❒ **c.** la droite $(AB)$
❒ **d.** la médiatrice de $[AB]$

La condition est équivalente à $(s_A \circ s_B)(M) = M$ car $s_A^{-1} = s_A$. Or $s_A \circ s_B$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BA}$ et elle n'admet pas de point fixe car le vecteur $2\overrightarrow{BA}$ est non nul.