Exercices de révision sur les matrices

Exercice 1

On considère les matrices à coefficients réels P et Q définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{4}(I + P)$$

où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

1. Calculer P^2, PQ, QP en fonction de P.

Commentaires

Pour le calcul de P^2, on ne peut pas faire autrement que d'effectuer complètement ce calcul. Pour la suite, on essaiera de passer directement par les matrices.

On a

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\mathrm{P}$$

On a

$$QP = \frac{1}{4}(I + P)P = \frac{1}{4}(P + P^2) = \frac{1}{4}(P + 3P) = \frac{1}{4}4P = P$$
$$PQ = P\left(\frac{1}{4}(I + P)\right) = \frac{1}{4}(P + P^2) = P$$

2. Calculer les produits $(4I - P)Q$ et $Q(4I - P)$. Qu'en concluez-vous pour la matrice Q ?

Commentaires

Compte tenu des relations précédentes, il serait ici très maladroit de calculer explicitement (c'est-à-dire sous la forme d'un tableau) les deux matrices proposées.
Ce à quoi on peut s'attendre est sans doute la commutativité de ce produit.

On a

$$(4I - P)Q = 4Q - PQ = 4Q - P$$
$$Q(4I - P) = 4Q - QP = 4Q - P$$

La commutativité est vérifiée, mais on peut aller plus loin. En effet :

$$Q = \frac{1}{4}(I + P) \Leftrightarrow 4Q = I + P \Leftrightarrow 4Q - P = I$$

On a donc

$$(4I - P)Q = Q(4I - P) = I$$

On peut donc en conclure que la matrice Q est inversible et que l'on a

$$Q^{-1} = 4I - P$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n et b_n tels que :

$$Q^n = a_n I + b_n P$$

Les suites (a_n) et (b_n) vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + b_n \end{cases}$$

avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

Commentaires

La récurrence s'impose assez naturellement ici.

En pratique l'existence signifie la possibilité de calculer les termes.

Montrons que la relation proposée est vraie pour $n = 0$.
On a

$$Q^0 = I = 1I + 0P$$

La relation est vérifiée en posant

$$a_0 = 1 \quad b_0 = 0$$

On a

$$Q^1 = Q = \frac{1}{4}I + \frac{1}{4}P$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, montrons que si il existe a_n et b_n tels que $Q^n = a_n I + b_n P$ alors il existe deux nombres réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $Q^{n+1} = a_{n+1}I + b_{n+1}P$.
On a

$$\begin{aligned}
Q^{n+1} &= Q^n Q \\
&= (a_n I + b_n P)\left(\frac{1}{4}I + \frac{1}{4}P\right) \\
&= \frac{1}{4}a_n I^2 + \frac{1}{4}b_n PI + \frac{1}{4}a_n IP + \frac{1}{4}b_n P^2 \\
&= \frac{1}{4}a_n I + \left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n\right)P \\
&= \frac{1}{4}a_n I + \left(b_n + \frac{1}{4}a_n\right)P
\end{aligned}$$

Si a_n et b_n existent alors a_{n+1} et b_{n+1} existent aussi et l'on a

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{4a_n} + b_n \end{cases}$$

4. En déduire a_n en fonction de n.

La suite (a_n) est une suite géométrique de raison $1/4$ et de terme initial $a_0 = 1$.
On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}$$

5. Justifier que pour tout entier n, non nul :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = b_n$$

Il s'agit d'une simple application de la règle des dominos (ou des calculs en cascades).
On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = b_{n-1+1} - b_0 = b_n - 0 = b_n$$

6. En déduire que pour tout entier n :

$$b_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

On a

$$b_{k+1} = \frac{1}{4}a_k + b_k$$

Donc

$$b_{k+1} - b_k = \frac{1}{4}a_k = \frac{1}{4^{k+1}}$$

Donc

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4^{k+1}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4^k}$$

On a donc

$$b_n = \frac{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

7. Donner alors l'expression, sous forme matricielle, de Q^n en fonction de l'entier n.

On a $Q^n = a_n I + b_n P$, donc :

$$Q^n = \frac{1}{4^n}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{2}{3\times 4^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 4^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 4^n} + \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3\times 4^n} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 4^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 4^n} + \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3\times 4^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\times 4^n} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3\times 4^n} + \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

8. On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + y_n + z_n)\\ y_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + 2y_n + z_n)\\ z_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + y_n + 2z_n)\end{cases}$$

avec $x_0 = 1, y_0 = z_0 = 0$.
On pose alors :

$$U_n = \begin{pmatrix}x_n\\ y_n\\ z_n\end{pmatrix}$$

a. Déterminer U_0, U_1.

On a par définition

$$U_0 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(2x_0 + y_0 + z_0) = \frac{1}{2} \\ y_1 = \frac{1}{4}(x_0 + 2y_0 + z_0) = \frac{1}{4} \\ z_1 = \frac{1}{4}(x_0 + y_0 + 2z_0) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

On a donc

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = QU_n$$

On a

$$\begin{aligned} QU_n &= \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x_n}{2} + \frac{y_n}{4} + \frac{z_n}{4} \\ \frac{x_n}{4} + \frac{y_n}{2} + \frac{z_n}{4} \\ \frac{x_n}{4} + \frac{y_n}{4} + \frac{z_n}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2x_n + y_n + z_n) \\ \frac{1}{4}(x_n + 2y_n + z_n) \\ \frac{1}{4}(x_n + y_n + 2z_n) \end{pmatrix} \\ &= U_{n+1} \end{aligned}$$

c. Puis montrer que, pour tout entier naturel n :

$$U_n = Q^n U_0$$

Démonstration par récurrence immédiate (identique à celle du cours sur les suites géométriques).

d. En déduire l'écriture de x_n, y_n, z_n en fonction de n, puis leur limite lorsque n tend vers plus l'infini.

On a d'après la formule démontrée à la question précédente :

$$U_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3 \times 4^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3 \times 4^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3 \times 4^n} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3 \times 4^n} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3 \times 4^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3 \times 4^n} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3 \times 4^n} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3 \times 4^n} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3 \times 4^n} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3 * 4^n} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3 * 4^n} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3 * 4^n} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{2}{3*4^n} + \dfrac{1}{3} \\ y_n = -\dfrac{1}{3*4^n} + \dfrac{1}{3} \\ z_n = -\dfrac{1}{3*4^n} + \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Et donc puisque $\lim_{n\to+\infty} 1/4^n = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{1}{3}$$

Exercice 2

On donne les matrices suivantes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tels que $A^2 = aA + bI_3$.

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

On cherche a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$.
On a

$$aA + bI_3 = a\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -3a & 6a \\ 6a & b-8a & 12a \\ 3a & -3a & b+4a \end{pmatrix}$$

Pour que la relation soit vérifiée, il faut donc que :

$$a + b = 1 \quad \text{et} \quad -3a = 3$$

Ce qui donne

$$a = -1 \text{ et donc } b = 2$$

On a bien

$$-A + 2I = -\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = A^2$$

2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.

Commentaires

Ce type de question est on ne peut plus classique : ayant une relation entre A^2, A et I_3, il s'agit d'isoler I, puis par factorisation de A d'écrire $AB = I_3$ où B est une matrice que l'on déterminera en fonction de la matrice A. Remarquons que la factorisation de A pouvant se faire à droite ou à gauche, on aura aussi bien $AB = I_3$ que $BA = I_3$.

On a

$$A^2 = -A + 2I$$

Donc

$$A^2 + A = 2I_3$$

Donc

$$\frac{1}{2}(A^2 + A) = I_3$$

Et donc

$$A\left(\frac{1}{2}(A+I_3)\right)=\left(\frac{1}{2}(A+I_3)\right)A=I_3$$

La matrice A est donc inversible et l'on a :

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(A+I_3)$$

Remarque

Attention à la factorisation de A qui ne laisse pas 1 mais I.

3. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies par les relations de récurrence:

$$u_0=0;\ \ v_0=1;\ \ u_{n+1}=-u_n+v_n\,;\ \ v_{n+1}=2u_n$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n\geq 0$, $A^n=u_nA+v_nI_3$.

On a

$$A^0=I_3=0A+1I_3=u_0A+v_0I_3$$

La propriété est initialisée.

$\forall\ n\geq 0$, montrons que si $A^n=u_nA+v_nI_3$ alors $A^{n+1}=u_{n+1}A+v_{n+1}I_3$ avec $u_{n+1}=-u_n+v_n$ et $v_{n+1}=2u_n$.

On a

$$A^{n+1}=AA^n=A(u_nA+v_nI_3)=u_nA^2+v_nA$$

Or $A^2=-A+2I_3$, donc :

$$\begin{aligned}A^{n+1}&=u_n(-A+2I_3)+v_nA\\&=(-u_n+v_n)A+2u_nI_3\\&=u_{n+1}A+2u_nI_3\end{aligned}$$

Il y a donc hérédité et donc

$$\forall n\geq 0, A^n=u_nA+v_nI$$

4. a. On pose $x_n=u_n+v_n$. Montrer que, pour tout entier $n\geq 0$, on a $x_n=1$.

Commentaires

Le résultat demandé revient à démontrer que la suite (x_n) est constante (ou stationnaire) et que son terme initial est égal à 1.

Pour démontrer qu'une suite récurrente est stationnaire, il suffit de montrer que $\forall\ n, x_{n+1}=x_n$.

Par une récurrence immédiate, on a alors : $\forall n\in\mathbb{N}, x_n=x_0$.

On a

$$x_{n+1}=u_{n+1}+v_{n+1}=-u_n+v_n+2u_n=u_n+v_n=x_n$$

La suite (x_n) est donc stationnaire. On a

$$x_0=u_0+v_0=0+1=1$$

Donc

$$\forall n\in\mathbb{N}, x_n=1$$

b. Pour tout entier $n\geq 0$, on pose $y_n=2u_n-v_n$.

Montrer que la suite (y_n) est géométrique et préciser sa raison. Exprimer alors y_n en fonction de n.

On a pour tout entier n :

$$\begin{aligned}y_{n+1}&=2u_{n+1}-v_{n+1}\\&=2(-u_n+v_n)-2u_n\\&=-4u_n+2v_n\end{aligned}$$

On en déduit que

$$y_{n+1} = -2(2u_n - v_n) = -2y_n$$

La suite (y_n) est donc une suite géométrique de raison -2. On a donc pour tout entier n :

$$y_n = y_0(-2)^n = (2u_0 - v_0)(-2)^n = -1(-2)^n = -(-2)^n$$

c. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

On a donc

$$\begin{cases} u_n + v_n = 1 \\ 2u_n - v_n = -(-2)^n \end{cases}$$

Ce qui donne par addition :

$$3u_n = 1 - (-2)^n$$

Et donc

$$u_n = \frac{1}{3}(1 - (-2)^n)$$

Soit par substitution :

$$v_n = 1 - u_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n$$

5. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$A^n = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n\right] A + \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n\right] I_3$$

Cette formule est-elle encore valable pour $n = -1$?

Commentaires :

La formule proposée est là pour permettre une vérification des calculs précédents.

On a

$$A^n = u_n A + v_n I_3 = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n\right] A + \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n\right] I_3$$

D'après les résultats précédents.

On a

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^{-1}\right] A + \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^{-1}\right] I_3 &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) A + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) I_3 \\ &= \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} I_3 \\ &= A^{-1}\end{aligned}$$

La formule est donc vraie pour $n = -1$.

Exercice 3

On considère les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A tout nombre réel x on associe la matrice

$$M(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 \qquad (*)$$

1. Calculer A^2 et A^3 et en déduire, pour tout entier $n > 3$, la valeur de A^n.

Commentaires

La matrice A est une matrice triangulaire avec uniquement des zéros sur la diagonale. Elle sera nilpotente, c'est-à-dire que l'une des puissances de cette matrice va être égale à la matrice nulle.

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\forall n \geq 3, A^n = A^3 A^{n-3} = AO = O$$

2. Calculer en utilisant la formule (*) le produit $M(x)M(y)$ et montrer que

$$M(x)M(y) = M(x+y) \quad (**)$$

On a

$$\begin{aligned} M(x)M(y) &= \left(I + xA + \frac{x^2}{2}A^2\right)\left(I + yA + \frac{y^2}{2}A^2\right) \\ &= I^2 + xAI + \frac{x^2}{2}A^2 I + yIA + xyA^2 + \frac{x^2 y}{2}A^3 + \frac{y^2}{2}IA^2 + \frac{xy^2}{2}A^3 + \frac{x^2y^2}{4}A^4 \\ &= I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 + yA + xyA^2 + O + \frac{y^2}{2}A^2 + O + O \\ &= I + (x+y)A + \left(\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}\right)A^2 \\ &= I + (x+y)A + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2}A^2 \\ &= I + (x+y)A + \frac{(x+y)^2}{2}A^2 \\ &= M(x+y) \end{aligned}$$

3. Montrer que pour tout entier positif n : $(M(x))^n = M(nx)$. Reconnaître $M(0)$.

On a évidemment

$$(M(x))^0 = I$$

On a

$$M(0x) = I + 0A + \frac{0^2}{2}A^2 = I$$

La formule est initialisée.

$\forall\, n \geq 0$, montrons que si $(M(x))^n = M(nx)$ alors $(M(x))^{n+1} = M((n+1)x)$.
On a

$$(M(x))^{n+1} = M(x)(M(x))^n = M(x)M(nx) = M(x+nx) = M((n+1)x)$$

La formule est héréditaire et l'on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (M(x))^n = M(nx)$$

On a bien sûr $M(0) = I$

4. Ecrire les matrice $M(x)$ et $\left(M(x)\right)^n$ sous forme de tableaux.

On a

$$\begin{aligned} M(x) &= I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a de la même façon

$$\left(M(x)\right)^n = M(nx) = \begin{pmatrix} 1 & nx & \frac{(nx)^2}{2} \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Justifier l'inversibilité de la matrice $M(x)$ sans chercher à calculer son inverse.

La matrice $M(x)$ est une matrice triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale : elle est donc inversible.

6. Déterminer l'inverse de $M(x)$ en n'utilisant que la relation (**).

Commentaires

L'idée est ici de chercher une matrice de la même forme dont le produit par $M(x)$ donne la matrice I. Or l'énoncé nous a fait remarquer que $M(0) = I$. La question revient donc à chercher $M(y)$ telle que

$$M(x)M(y) = I$$

On a pour tout nombre réel x

$$M(x)M(y) = M(x + y)$$

Donc

$$M(x)M(-x) = M(x - x) = M(0) = I$$

Comme la matrice $M(x)$ est inversible, la relation précédente montre que :

$$M(-x) = M(x)^{-1}$$

7. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Écrire sous forme de tableaux les matrices B^{-1} et B^n.

Commentaires

Il faut « identifier » la matrice B comme une matrice $M(x)$ particulière pour pouvoir utiliser les résultats précédents.

On a clairement

$$B = M(4)$$

Car

$$\frac{(4)^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

On en déduit que

$$B^{-1} = M(-4) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et que pour tout entier n :

$$B^n = M(4)^n = \begin{pmatrix} 1 & 4n & 8n^2 \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Retrouver la valeur de B^{-1} en utilisant la méthode du pivot.

On « complète la matrice B » :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a en faisant $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 8L_3 \end{cases}$

$$B_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis en faisant

$$L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$$

On a

$$B_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est bien le résultat trouvé plus haut.

Exercice 4

Dans cet exercice on étudie l'évolution au cours du temps d'un titre dans une bourse de valeurs.

Partie 1

Le but de la première partie est de calculer les puissances successives de la matrice:

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où a représente un nombre réel.

1. Montrer que, pour tous réels a, b, on a : $M(a).M(b) = M(a+b-3ab)$.

Commentaires

On peut procéder par un produit direct, mais il est sans toute plus astucieux de remarquer que

$$M(a) = (1-2a)I + aA$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*. Le produit* $M(a)M(b)$ *s'exprimera alors en fonction de* A^2 *qu'il conviendra de calculer.*

On peut remarquer que $M(a) = (1-2a)I + aA$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=2I+A$$

On a

$$\begin{aligned}M(a)M(b)&=\big((1-2a)I+aA\big)\big((1-2b)I+bA\big)\\&=(1-2a)(1-2b)I^2+(1-2a)bIA+a(1-2b)AI+abA^2\\&=(1-2a)(1-2b)I+(1-2a)bA+(1-2b)aA+ab(2I+A)\\&=(1-2a-2b+4ab+2ab)I+(b-2ab+a-2ab+ab)A\\&=(1-2a-2b+6ab)I+(a+b-3ab)A\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}M(a+b-3ab)&=\big(1-2(a+b-3ab)\big)I+(a+b-3ab)A\\&=(1-2a-2b+6ab)I+(a+b-3ab)A\\&=M(a)M(b)\end{aligned}$$

2. En déduire les valeurs de a pour lesquelles la matrice $M(a)$ est inversible et exprimer son inverse.

Commentaires

La question est ambigüe : elle suppose implicitement que la matrice inverse quand elle existe sera de la forme $M(x)$, c'est-à-dire que pour une matrice $M(a)$ inversible, sa matrice inverse sera une matrice $M(b)$. Pour répondre à la question, nous allons chercher les valeurs de a pour lesquelles la matrice $M(a)$ admet une matrice inverse de la même forme, puis nous montrerons que pour les autres valeurs de a, il n'y a pas de matrice inverse de cette forme car il n'y a pas de matrice inverse du tout.

Soit a un nombre réel tel que la matrice $M(a)$ admette une matrice inverse de la même forme, c'est-à-dire telle qu'il existe un nombre réel b tel que $M(a)M(b)=I$

On a

$$M(a)M(b)=(1-2a-2b+6ab)I+(a+b-3ab)A$$

On veut que

$$(1-2a-2b+6ab)I+(a+b-3ab)A=I$$

Ce qui donne

$$(1-2a-2b+6ab)I+(a+b-3ab)A-I=O$$

Ou encore

$$(-2a-2b+6ab)I+(a+b-3ab)A=O$$

On en tire

$$-2(a+b-3ab)I+(a+b-3ab)A=O$$

Ce qui donne

$$(a+b-3ab)(-2I+A)=O$$

Or

$$-2I+A=-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\neq O$$

Donc l'égalité

$$(a+b-3ab)(-2I+A)=O$$

conduit à :

$$a+b-3ab=0$$

Connaissant a, il faut pouvoir déterminer b. On est donc ramené à la résolution d'une équation en b pour laquelle la question est de savoir pour quelles valeurs de a elle est possible.

On a

$$a + b(1 - 3a) = 0$$

On a donc

$$\text{Si } a \neq \frac{1}{3}, \text{alors } b = -\frac{a}{1 - 3a} = \frac{a}{3a - 1}$$

On en déduit que pour tout $a \neq \frac{1}{3}$, on a

$$M(a)M\left(\frac{a}{3a - 1}\right) = I$$

Comme $M(a)M(b) = M(b)M(a)$, on aura aussi

$$M\left(\frac{a}{3a - 1}\right)M(a) = I$$

La matrice $M(a)$ est inversible et l'on a

$$M(a)^{-1} = M\left(\frac{a}{3a - 1}\right)$$

Il nous reste à examiner le cas particulier de $a = 1/3$.

On a

$$M\left(\frac{1}{3}\right) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)I + \frac{1}{3}A = \frac{1}{3}I + \frac{1}{3}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est évidemment pas inversible **puisqu'elle a deux colonnes identiques (l'application linéaire associée n'est pas bijective)**.

3. Déterminer le réel a_0 non nul, tel que :

$$[M(a_0)]^2 = M(a_0)$$

Commentaires

Par le calcul, la question est moins simple qu'elle n'en a l'air

On a

$$[M(a_0)]^2 = M(a_0)M(a_0) = M(a_0 + a_0 - 3a_0a_0) = M(2a_0 - 3a_0^2)$$

On veut que

$$M(2a_0 - 3a_0^2) = M(a_0)$$

Peut-on affirmer sans danger que cette égalité conduit nécessairement à

$$2a_0 - 3a_0^2 = a_0$$

Oui par identification. En effet si l'on écrit :

$$M(2a_0 - 3a_0^2) = \begin{pmatrix} 1 - 2(2a_0 - 3a_0^2) & 2a_0 - 3a_0^2 & 2a_0 - 3a_0^2 \\ 2a_0 - 3a_0^2 & 1 - 2(2a_0 - 3a_0^2) & 2a_0 - 3a_0^2 \\ 2a_0 - 3a_0^2 & 2a_0 - 3a_0^2 & 1 - 2(2a_0 - 3a_0^2) \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} 1 - 2(2a_0 - 3a_0^2) & 2a_0 - 3a_0^2 & 2a_0 - 3a_0^2 \\ 2a_0 - 3a_0^2 & 1 - 2(2a_0 - 3a_0^2) & 2a_0 - 3a_0^2 \\ 2a_0 - 3a_0^2 & 2a_0 - 3a_0^2 & 1 - 2(2a_0 - 3a_0^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2a_0 & a_0 & a_0 \\ a_0 & 1 - 2a_0 & a_0 \\ a_0 & a_0 & 1 - 2a_0 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne bien d'après l'égalité de deux matrices :

$$2a_0 - 3a_0^2 = a_0$$

On en déduit que

$$a_0 - 3a_0^2 = 0$$

Et donc

$$a_0(1-3a_0)=0$$

Comme a_0 ne doit pas être nul selon l'énoncé on en tire

$$a_0=\frac{1}{3}$$

Pour aller plus loin

De façon générale, une égalité de la forme $M^2=M$ a quelque chose à voir avec la non-inversibilité de M.

Supposons qu'une matrice carrée M remplisse une telle égalité et qu'elle soit inversible, on aurait :

$$M^2=M \Leftrightarrow M^{-1}M^2=M^{-1}M \Leftrightarrow M=I$$

La seule matrice carrée inversible remplissant $M^2=M$ est donc la matrice identité.

Ce qui ne veut bien entendu pas dire que toutes les matrices non inversibles remplissent cette égalité.

Ici cela permettait de savoir que la seule valeur de a_0 possible était $a_0=1/3$ correspondant à la seule matrice non inversible. Il fallait encore vérifier que cette valeur était correcte :

$$\left(M\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=M\left(\frac{1}{3}\right)$$

4. On considère les matrices :

$$P=M(a_0)\ \text{ et }\ Q=I-P$$

où I désigne la matrice carrée unité d'ordre 3.

a) Montrer qu'il existe un réel α, *que l'on exprimera en fonction de* a, tel que :

$$M(a)=P+\alpha Q$$

La décomposition de $M(a)$ proposée plus haut va nous permettre de répondre à cette question assez simplement.

On a

$$M(a)=(1-2a)I+aA$$

Or

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}(I+A)$$

Et donc

$$A=3P-I$$

Donc

$$M(a)=(1-2a)I+a(3P-I)=(1-2a-a)I+3aP=(1-3a)I+3aP$$

Soit en remplaçant I par $P+Q$, on obtient

$$M(a)=(1-3a)(P+Q)+3aP=(1-3a)Q+P=P+\alpha Q\ \text{ avec } \alpha=1-3a$$

b. Calculer P^2, QP, PQ, Q^2.

Commentaires

Il faut absolument éviter ici d'effectuer les calculs sous forme matricielle. On utilisera la relation qui caractérise P : $P^2=P$.

On a

$$P^2 = \left(M\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2 = M\left(\frac{1}{3}\right) = P$$

On a

$$QP = (I - P)P = P - P^2 = P - P = O$$
$$PQ = P(I - P) = P - P^2 = P - P = O$$
$$Q^2 = (I - P)^2$$

On peut appliquer l'identité remarquable car $IP = PI$

On a

$$Q^2 = I^2 - 2IP + P^2 = I - 2P + P = I - P = Q$$

c. Pour tout entier naturel n, non nul, montrer que $[M(a)]^n$ s'écrit comme combinaison linéaire de P et Q.

On a

$$M(a)^1 = M(a) = P + \alpha Q$$

Donc pour $n = 1$, $[M(a)]^n$ s'écrit bien comme combinaison linéaire de P et de Q.

$\forall\ n \geq 1$, montrons que si il existe deux nombres réels a_n et b_n tels que $[M(a)]^n = a_n P + b_n Q$ alors il existe deux nombres réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $[M(a)]^{n+1} = a_{n+1}P + b_{n+1}Q$

On a

$$\begin{aligned}[M(a)]^{n+1} &= M(a)[M(a)]^n \\ &= (P + \alpha Q)(a_n P + b_n Q) \\ &= a_n P^2 + \alpha a_n QP + b_n PQ + \alpha b_n Q^2 \\ &= a_n P + O + O + \alpha b_n Q \\ &= a_n P + \alpha b_n Q\end{aligned}$$

En posant

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \alpha b_n$$

on montre bien que si a_n et b_n existent alors a_{n+1} et b_{n+1} existent aussi.

Donc $\forall n \geq 1$, $[M(a)]^n$ s'écrit comme combinaison linéaire des matrices P et Q.

d. Expliciter alors la matrice $[M(a)]^n$.

Nous avons trouvé dans la question précédente une relation entre les coefficients successifs des combinaisons linéaires.

On a

$$a_{n+1} = a_n$$
$$b_{n+1} = \alpha b_n$$

La suite (a_n) est donc stationnaire et donc

$$\forall n \geq 1, a_n = a_1 = 1$$

La suite (b_n) est une suite géométrique de raison α et de terme initial $b_1 = \alpha$.

On a donc

$$b_n = b_1 \alpha^{n-1} = \alpha \alpha^{n-1} = \alpha^n$$

On a donc

$$\forall n \geq 1, [M(a)]^n = P + \alpha^n Q$$

Partie 2 : Évolution d'un titre boursier au cours du temps.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

1. On définit des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par leur premier terme p_1, q_1, r_1, et les relations de récurrence : $\begin{cases} p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{cases}$

a. Exprimer p_n, q_n, r_n en fonction de n, p_1, q_1, r_1.

On peut écrire le système qui définit chacune des trois suites sous une forme matricielle. On a

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

Posons $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$. On a :

$$X_{n+1} = M(a)X_n$$

Par une récurrence immédiate, on a :

$$X_n = [M(a)]^{n-1}X_1 = [M(a)]^{n-1}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix}$$

b. Étudier la convergence de ces suites.

On a donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} &= (P + \alpha^{n-1}Q)\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} \\ &= P\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} + \alpha^{n-1}Q\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a $\alpha = 1 - 3a$.

Or $a \in]0,2/3[$, donc par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto 1 - 3x$, on a

$$1 - 3 \times 0 > 1 - 3a > 1 - 3 \times \frac{2}{3}$$

Et donc

$$-1 < \alpha < 1$$

La suite géométrique de raison α et de terme général α^n est donc convergente et sa limite est égale à 0. On en conclut que

$$\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}q_1 + \frac{1}{3}r_1 \\ \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}q_1 + \frac{1}{3}r_1 \\ \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}q_1 + \frac{1}{3}r_1 \end{pmatrix}$$

2. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. Dans un modèle mathématique, on considère que :

→ le premier jour le titre est stable ;

→ si un jour n, le titre monte, le jour $n + 1$, il montera avec la probabilité (2/3), restera stable avec la probabilité (1/6), et baissera avec la probabilité (1/6);

→ si un jour n, le titre est stable, le jour $n + 1$, il montera avec la probabilité (1/6), restera stable avec la probabilité (2/3), et baissera avec la probabilité (1/6);

→ si un jour n, le titre baisse, le jour $n + 1$, il montera avec la probabilité (1/6), restera stable avec la probabilité (1/6), et baissera avec la probabilité (2/3).

On note M_n (respectivement S_n, respectivement B_n) l'évènement « le titre donné monte (respectivement reste stable, respectivement baisse) le jour n. »

a. Exprimer les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour $n+1$ en fonction de ces mêmes probabilités au jour n.

La famille $\{M_n, S_n, B_n\}$ forme un système complet d'évènements au jour n.
On a
$$M_{n+1} = (M_{n+1} \cap M_n) \cup (M_{n+1} \cap S_n) \cup (M_{n+1} \cap B_n)$$
Donc par incompatibilité :
$$\begin{aligned} P(M_{n+1}) &= P_{M_n}(M_{n+1}) \times P(M_n) + P_{S_n}(M_{n+1}) \times P(S_n) + P_{B_n}(M_{n+1}) \times P(B_n) \\ &= \frac{2}{3}P(M_n) + \frac{1}{6}P(S_n) + \frac{1}{6}P(B_n) \end{aligned}$$
En reprenant le même raisonnement pour les évènements S_{n+1} et B_{n+1}, on a :
$$\begin{aligned} P(S_{n+1}) &= P_{M_n}(S_{n+1}) \times P(M_n) + P_{S_n}(S_{n+1}) \times P(S_n) + P_{B_n}(S_{n+1}) \times P(B_n) \\ &= \frac{1}{6}P(M_n) + \frac{2}{3}P(S_n) + \frac{1}{6}P(B_n) \end{aligned}$$
On aura de même
$$P(B_{n+1}) = \frac{1}{6}P(M_n) + \frac{1}{6}P(S_n) + \frac{2}{3}P(B_n)$$

b. En déduire les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour n.

Commentaires

Il faut se ramener au problème précédent.

Posons $p_n = P(M_n), q_n = P(S_n), r_n = P(B_n)$. On a sous forme matricielle :
$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \times \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 1 - 2 \times \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 1 - 2 \times \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$
On est donc dans la configuration des questions précédentes avec $a = 1/6$.
On en tire
$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} + \left(1 - 3 \times \frac{1}{6}\right)^{n-1} Q \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix}$$
On a
$$p_1 = P(M_1) = 0$$
$$q_1 = P(S_1) = 1$$
$$r_1 = P(B_1) = 0$$
Donc
$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
On a
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } Q = I - P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1}{3} \\ \dfrac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1}{3} \\ \dfrac{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1}{3} \end{pmatrix}$$

On en tire que

$$p_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$q_n = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$r_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

c. Quelles sont les limites de ces probabilités lorsque n tend vers l'infini ?

Comme $1/2$ est compris entre -1 et 1, on retrouve les limites déjà trouvées dans les questions précédentes :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{3}$$