MON $\boxed{\text{UE}}$: UN PASSEPORT

EXERCICES, TRAVAUX DIRIGES ANCIENS SUJETS CORRIGES

TOME 1
PARCOURS MIA ET INFORMATIQUES L2

Auteurs : BERTE OUSMANE L3 et BAKAYOKO AMARA L2
Berteousmane2012@hotmail.fr 09 11 03 13 / 77 01 84 03

MON UE : UN PASSPORT

Exercices d'analyse 3

Une Jeunesse Consciente Et Intellectuelle

UN ETUDIANT,UN DOCUMENT

EDITEURS
BERTE OUSMANE L3
BAKAYOKO AMARA L2
09110313 / 77018403
berteousmane2012@hotmail.fr

Exercices : Intégrales généralisées

Exercice 1:

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et le cas échéant calculer **leur valeur** :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\,dt$
5. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,dt$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

Exercice 2:

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-5}{x^2+4x+4}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x+4}\,dx$
6. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{t^2-t}\,dt$
7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}\,dt$
8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,dx$

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$

1. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$?
2. Déterminer le tableau de variations de f.
3. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln^2(n)}$
4. Généraliser ce résultat en déterminant la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln^\beta(n)}$, où $\beta>1$.

Exercice 4:

On note f la fonction définie pour tout réel $x>0$ par $f(x)=\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$.

On pose pour tout entier $n\geqslant 1$, $I_n=\displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\,dx$

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n.
2. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ est convergente.

Exercice 5:

Soit f la fonction définie par $f(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x}}{1+t}\,dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Quel est le sens de variation de f ?
3. On admet que f est une fonction continue sur son ensemble de définition.
   Déterminer $f(x)+f(x+1)$ pour $x>0$.
   En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

1

Travaux dirigés No. 1
Intégrales généralisées

EXERCICE 1. (Application immédiate)
Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes : identifier en quel point se **trouve le** problème et trouver si l'intégrale converge (ou non) en ce point.

$$\int_0^1 \ln x\,dx;\ \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx\ (\alpha\in\mathbb{R});\ \int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx;\ \int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx;\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}\,dx;\ \int_0^1 e^{\frac{1}{x}}dx;$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}dx;\ \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{E(x)}}dx;\ \int_1^{+\infty}\frac{x^{\ln x}}{e^x}dx;\ \int_0^1\frac{(\ln x)^2}{1-x}dx;\ \int_1^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}dx;\ \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln x}{e^x-1}dx;$$

EXERCICE 2. (Calcul de la valeur d'une intégrale généralisée)

1) Montrer que l'intégrale $I=\int_0^1\frac{ln(1-x^2)}{x^2}dx$ converge et préciser sa valeur.

2) Pour tout réel α, on pose $I_\alpha=\int_0^{+\infty}\frac{x\,lnx}{(1+x^2)^\alpha}dx$

   a) Déteminer suivants la valeur de α la nature de l'intégrale I_α.

   b) A l'aide d'un changement de variable $u=\frac{1}{x}$ et d'un intégration par parties, calculer I_2 et I_3.

3) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{lnx}{1+x^2}dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty}\frac{lnx}{1+x^2}dx=0$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{lnx}{(1+x^2)^2}dx$.

4) Prouver la convergence et donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}dx$, $(n\in\mathbb{N}^*)$.

EXERCICE 3. (Calcul d'intégrale) Soit les intégrales $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x\sin x)dx$.
1) Montrer que l'intégrale I converge.
2) Montrer que $J=2I$.
3) Calculer I.

EXERCICE 4. (Intégrales et paramètre)

1) Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}dx,\quad(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

2) Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx,\quad(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

3) Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}x^\alpha\ln(1+e^{\beta x})dx,\quad(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

4) Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{(x+1)^\alpha-x^\alpha}{x^\beta}dx,\quad(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 5. (Intégrales et paramètre 2) On définit, pour deux réels strictement positifs a et b, une fonction $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par la formule :

$$\forall x>0,\qquad f_{a,b}(x)=\frac{1-e^{-ax}\sqrt{1+x}}{x^b}.$$

1) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et b pour que l'intégrale $\int_1^{+\infty}f_{a,b}(x)dx$ soit convergente.

2) Même question pour l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{a,b}(x)dx$.

3) Même question pour l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(1+x) f_{a,b}(x)dx$.

X $\boxed{\text{EXERCICE 6.}}$ (Etude de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$)

Soit α un réel fixé.

1) Montrer que, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $0 < \alpha < 2$. ~~Et que cette convergence n'est pas absolue~~.

2) En déduire que les intégrales de Fresnel

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx$$

convergent mais pas absolument.

$\boxed{\text{EXERCICE 7.}}$ (Calcul d'une intégrale particulière)

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel $a < b$ et f une fonction définie et continue sur $[0, +\infty[$. On suppose que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ est ~~absolument~~ convergente.

1) Soit $u > 0$ et $k > 0$ Montrer que l'intégrale $\int_u^{+\infty} \frac{f(kx)}{x} dx$ converge.

2) Montrer que

$$\int_u^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t} dt$$

3) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx$ est convergente et vaut $f(0) \ln \frac{a}{b}$.

4) Prouver la convergence et calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t} dt.$$

$$* \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sum x^n = \frac{1}{1-x}.$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \frac{1}{1+x} = \sum (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{Arctan} x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$$

$$-\ln(1-x) = \sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

3

BE DCX 12

Université Nangui Abrogoua — 2013–2014
Licence 2 — UE ANALYSE

Travaux dirigés No. 2
Séries numériques

EXERCICE 1. (Vrai ou faux) Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier vos réponses.

a) Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.
b) Une série qui diverge peut converger absolument.
c) La série $\sum \sin n$ converge.
d) Si $\sum(u_n + v_n)$ converge alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.

EXERCICE 2. (Nature d'une série)
Etudier la nature des séries suivantes :

$$1)\, u_n = \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n};\qquad 2)\, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+n\cos^2 n};\qquad 3)\, u_n = \frac{2+\sin n}{n^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}$$

$$4)\, u_n = \sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n};\qquad 5)\, u_n = Arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right);\qquad 6)\, u_n = \frac{1}{2+\sin n\frac{\pi}{4}}$$

EXERCICE 3. (Nature et somme)
1) Donner la nature et la somme éventuelle des séries de terme général suivant :

$$u_n = \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}},\ n\geq 1;\qquad v_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\ n\geq 2;\qquad w_n = \frac{4n+2}{n(n+1)(n+2)},\ n\geq 1.$$

2) Déterminer les valeurs des réels a, b et c pour lesquelles la série, de terme général $u_n = a\ln n + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$, converge. Calculer dans ce cas sa somme.

EXERCICE 4. (Série à terme de signe non constant) Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = (-1)^n\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}},\qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}},\qquad u_n = \ln n\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right),\qquad u_n = e^{(-1)^n/n^\alpha}-1.$$

$$u_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n},\qquad u_n = (-1)^n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right),\qquad u_n = \sin\sqrt{1+n^2\pi^2},\qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}.$$

EXERCICE 5. (Exercice théorique)
1) Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels positifs.
Montrer que si la série de terme général u_n est convergente, alors, les séries de terme général u_n^2 et $\frac{u_n}{1+u_n}$ sont convergentes.
2) Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques à terme strictement positifs.

a) On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\frac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.

$\frac{n+1}{n+2}$

b) On pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n = \frac{n^{n+1}}{e^n(n+1)!}$. Montrer que $\frac{w_{n+1}}{w_n}\geq\frac{n+1}{n+2}$. En déduire la nature de la série $\sum w_n$.

3) Soit $(u_n)_n$ une suite strictement positive et un réel α.
On suppose que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ où $\lim_{n\to+\infty}\cancel{\frac{1}{n}}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Montrer que :
- si $\alpha > 1$, la série de terme général u_n converge ;
- si $\alpha < 1$, la série de terme général u_n diverge.

Application : Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1\times 3\times 5\cdots(2n-3)(2n-1)}{2\times 4\times 6\cdots(2n-2)(2n)}$.

4

Travaux dirigés No. 3
Suites et Séries de fonctions

EXERCICE 1. (Vrai ou faux) Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. **Justifier vos** réponses.

a) La limite simple d'une suite de fonctions croissantes est une fonction croissante.
b) La limite simple d'une suite de fonctions bornées est une fonction bornée.
c) La limite simple d'une suite de fonctions continue est une fonction continue.
d) La limite uniforme d'une suite de fonctions bornées est une fonction bornée.

EXERCICE 2. (Convergence d'une suite de fonctions) Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes sur l'ensemble I indiqué :

1) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $I = \mathbb{R}$; 2) $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = \dfrac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}$, $I = [0, +\infty[$ et $I =]0, +\infty[$;

3) $f_n = \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$, $I = \mathbb{R}$ et $I = [0,1]$; 4) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $I = [-1, 1]$

5) $f_n(x) = nx$ si $x \in \left[0; \dfrac{1}{n}\right[$, $f_n(x) = \dfrac{n(x-1)}{1-n}$ si $x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$, $I = [0, 1]$.

EXERCICE 3. (Suite de foncions définie par récurrence) On considère la suite de fonctions définie par :

$$f_0(t) = 0, \qquad f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}, \text{ pour } t \geq 0.$$

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2) Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, +\infty[$?
3) Démontrer que pour tout $t > 0$, $|f_{n+1}(t) - f(t)| \leq \dfrac{|f_n(t) - f(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.
4) En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

EXERCICE 4. (Suite de fonction et intégration) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^n}.$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et uniformément sur $[0, +\infty[$.
2) On pose : $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt$ pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.
   a) Etudier la convergence simple de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, +\infty[$. Sans démonstration supplémentaire, en déduire un domaine de convergence uniforme de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) Calculer $F_n(0)$ et montrer que F_n admet une limite finie en $+\infty$. Tracer le tableau de variation des fonctions F_n.
   c) En déduire la convergence uniforme de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, +\infty[$.

EXERCICE 5. (Convergene de série de fonctions) Etudier la nature (convergence simple, convergence uniforme, convergence normale) de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de terme général défini par

1) $f_n(x) = x^n \ln x$ sur $[0, 1]$ (on a bien sur posé $f_n(0) = 0$), 2) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{(1+\frac{x}{n})^{n^2}}$ sur $[0, +\infty[$,

3) $f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(x+1)}\right)$ sur $[0, +\infty[$.

5

EXERCICE 6. (Série de fonctions et série des dérivées)

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \geq 0$, $f(x) = \dfrac{x}{1+n^3x^2}$

1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ Quelle conclusion peut-on en tire concernant la somme f de la série ?

3) Soit a un réel tel que $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge normalement su $[a, +\infty[$. Quelle conclusion peut-on en tirer concernant la fonction f ?

4) Montrer l'existence, pour tout réel $x > 0$, de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3x^2}$.

On définit dès lors la fonction g en posant pour tout réel $x > 0$, $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3x^2}$.

5) A l'aide d'un changement de variable, exprimer simplement $g(x)$ en fonction de x.

6) Montrer que $f(x) \geq xg(x)$, pour tout $x > 0$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Conclure.

EXERCICE 7. (Classe de la somme d'une série de fonctions)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{n(1+nx^2)}. \end{array}$$

1) Etudier la nature de la série de fonctions $\sum f_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, sur $[0, +\infty[$.

2) On note S la fonction somme de la série : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a) Montrer que S est de classe C^1 sur tout intervalle $[a; b] \subset]0, +\infty[$, puis sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée.

b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

c) L'application S est-elle dérivable en 0 ?

EXERCICE 8. (Egalité série et intégrale généralisée)

1) Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^1 x^{-x} dx$.

2) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

3) Calculer l'intégrale $\int_0^1 (-x\ln x)^n dx$ (on peut choisir x^{n+1} comme nouvelle variable).

4) Déduire des questions 1), 2) et 3) que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

EXERCICE 9. (Série absolument convergente, ne convergeant ni uniformément, ni normalement)

1) On considère la série $\sum_{n=0}^{+\infty} nxe^{-nx^2}$.

a) Montrer que cette série est absolument convergente sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'elle n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, cette série converge normalement sur l'intervalle A_ε défini par : $A_\varepsilon = \mathbb{R}\setminus]-\varepsilon, \varepsilon[$.

2) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} nxe^{-nx^2}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

a) Justifier l'obtention d'une fonction g vérifiant $f(x) = g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, par intégration terme à terme de la série de la question 1).

b) Calculer $g(x)$ et en déduire $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

c) Montrer que f n'est pas continue au point 0 et que la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} nxe^{-nx^2}$ n'est pas uniforme.

6

BBS BEDZIC -

Université Nangui Abrogoua
Licence 2 : MIA

Année Universitaire 2013-2014
Analyse

Travaux dirigés No. 4
Séries entières et séries de Fourier

EXERCICE N° 1 :

Déterminer le rayon de convergence et le domaine de convergence simple des séries entières de terme général suivant :

1) $u_n(x) = \dfrac{\ln x}{n^2}x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$. 2) $u_n(x) = \dfrac{z^n}{n^{3n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$. 3) $u_n(x) = \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

4) $u_n(x) = n^{\ln n}x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$. 5) $u_n(x) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

5) $u_n(x) = \left(\dfrac{4n+3}{n+1}\right)x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE N° 2 :

Déterminer le rayon de convergence, le domaine de convergence simple et la somme des séries entières réelles suivantes :

1) $u_n(x) = ch(na)x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$. 2) $u_n(x) = (-1)^n x^n$, $n \in \mathbb{N}$. 3) $u_n(x) = \left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE N° 3 :

Soit S la somme de la série entière $\sum \dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$, $n \geq 0$. 14 17

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série.
2. Montrer que S est continue sur $[-1, 1]$.
3. Déterminer pour tout $x \in]-1, 1[$, $S'(x)$. En déduire $S(x)$.
4. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$.

EXERCICE N° 4 :

Développer en séries entières du réel x les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = (2+x)e^x, \quad f_2(x) = \ln(2+x), \quad f_3(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)} \quad f_4(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}.$$

EXERCICE N° 5 :

Montrer qu'il existe pour l'équation différentielle suivantes une solution développable en série entière. Déterminer le rayon de convergence de la série obtenue et calculer sa somme.

EXERCICE N° 6 :

Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x$ sur $]-\pi, \pi[$.

1. Montrer que la série de fourier de f est $Sf(x) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1)^{n-1}\sin nx}{n}$.
2. a) Montrer que : $\forall x \in]-\pi, \pi[$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1)^{n-1}\sin nx}{n} = \frac{x}{2}$.
   b) Etudier la convergence de cette série pour $x = \pi$.
3. En appliquant le théorème de Paseval, montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

7.

Université d'Abobo-Adjamé
UFR - SFA, Département de Math
Année 2006 - 2007

SFA2 EXAMEN D'ANALYSE 1 (2ème session)
Durée : 3 heures

January 29, 2008

Exercice 1 (6.5 points).

1. Etudier la nature de la série $\sum_n u_n$ avec $u_n = (n \sin \frac{1}{n})^{n^2}$

2. Etudier, suivant les valeurs du réel strictement positif a, la nature de la série de terme général
$u_n = \sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an}$

3. Soient α un réel, a un réel strictement positif. Etudier la naturede la série de terme général $u_n = \frac{n^\alpha}{a^n}$.

Exercice 2 (5 points)

1. Déterminer la nature et la valeur de l'intégrale généralisée
$\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2})\, dx$

2. Etudier, suivant les valeurs du réel $\alpha \geq 0$, la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$.

Exercice 3 (4.5 points)

On considère la série entière $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n^2-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Quel est le rayon de convergence R de cette série? :
2. Montrer que la série est normalement convergente sur $[-1, 1]$
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$. Calculer la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$
4. Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$

8

Exercice 3 (5 points).

1. Montrer que $n \sin \dfrac{1}{n} > 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
2. Donner le développement limité d'ordre 4 en zéro de $\sin x$
3. En déduire :

a) Le développement limité en zéro d'ordre 3 de $n \sin \dfrac{1}{n}$ $(n \to +\infty)$

b) Le développement limité en zéro d'ordre 3 de $\ln\left(n \sin \dfrac{1}{n}\right)$ $(n \to +\infty)$

4. Déterminer toutes les valeurs du nombre réel α pour lesquelles la série de terme général $u_n = (n \sin \dfrac{1}{n})^{n^\alpha}$ est convergente.

Exercice 4 (4 points)

1. Calculer le rayon de convergence de la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 3$.
2. Exprimer sa somme $S(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n(x)$ à l'aide de fonctions connues.

Université d'Abobo-Adjamé
UFR - SFA, Département de Math et Informatique
Année 2007 - 2008

SFA2 EXAMEN D'ANALYSE 1 (1ère session)
Durée : 3 heures

October 10, 2008

Questions de cours (5 points)

1. Montrer que l'intégrale généralisée de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, converge si et seulement si $\alpha > 1$ et préciser sa valeur en cas de convergence.

2. Donner une série numérique $\sum_n u_n$ convergente dont la somme vaut $S = 2$

3. Montrer que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

4. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum e^{\sin 2n} z^n$. Justifier votre réponse

Exercice 1 (3 points).
1. Etudier la nature de la série $\sum_n u_n$ avec

a) $\forall n \geq 0, u_n = 0$, b) $\forall n \geq 1, u_n = \frac{-\sqrt{3}}{n}$ c) $\forall n \geq 1, u_n = n^{-ch\frac{1}{n}}$

d) $\forall n \geq 0, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^2}{n^2 + (\cos x)^2}\, dx$ e) $\forall n \geq 1, u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{1 + (chx)^2}\, dx$.
On justifiera les réponses

Exercice 2 (3 points).
Déterminer la nature de l'intégrale suivante :
1. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{(1+\frac{1}{\ln x})}}$ 2. $\int_1^{+\infty} e^{-x+\cos x}\, dx$ 3. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\, dx$

10

Exercice 3 (5 points).

1. Montrer que $n \sin \frac{1}{n} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. Donner le développement limité d'ordre 4 en zéro de $\sin x$
3. En déduire :

a) Le développement limité en zéro d'ordre 3 de $n \sin \frac{1}{n}$ $(n \to +\infty)$

b) Le développement limité en zéro d'ordre 3 de $\ln(n \sin \frac{1}{n})$ $(n \to +\infty)$

4. Déterminer toutes les valeurs du nombre réel α pour lesquelles la série de terme général $u_n = (n \sin \frac{1}{n})^{n^\alpha}$ est convergente.

Exercice 4 (4 points)

1. Calculer le rayon de convergence de la série de terme général $u_n(x) = \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 3$.
2. Exprimer sa somme $S(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n(x)$ à l'aide de fonctions connues.

11

2

Université d'Abobo-Adjamé
UFR .. SFA, Laboratoire de Mathématiques et Informatique
Année 2008- 2009

SFA2 **Examen d'Analyse1, 1ère session**

July 7, 2009

Durée 3 heures

Exercice 1 (4 points). Déterminer la nature de l'intégrale suivante :
1. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{(1+\frac{1}{\ln x})}}$ 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x}\,dx$ 3. $\int_1^{+\infty} e^{-x+\cos x}\,dx$ 4. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(lnx)}$

div div div div

Exercice 2 (3 points)
1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \ln x\,dx$ est convergente et calculer sa valeur.
2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx$ est-elle convergente?

1) $x^{1/2} \ln x = 0$

2)

Exercice 3 (5 points).
1. Montrer que $n \sin \frac{1}{n} > 0 \; \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
2. Donner le développement limité d'ordre 4 en zéro de $sinx$
3. En déduire :
a) Le développement limité en zéro d'ordre 3 de $n \sin \frac{1}{n}$ $(n \to +\infty)$
b) Le développement limité en zéro d'ordre 3 de $ln(\,n \sin \frac{1}{n})$ $(n \to +\infty)$
4. Déterminer toutes les valeurs du nombre réel α pour lesquelles la série de terme général $u_n = (n \sin \frac{1}{n})^{n^\alpha}$ est convergente.

12

$\dfrac{x^{n}}{n(n+1)(n-1)}$

Exercice 4 (4 points)

1. Calculer le rayon de convergence de la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 3$.

2. Exprimer sa somme $S(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n(x)$ à l'aide de fonctions connues.

Exercice 5 (4 points).

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \neq k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que si on avait $lim_{n\to+\infty} sin(n\theta) = 0$, alors on aurait $lim_{n\to+\infty} cos(n\theta) = 0$ et que ces deux résultats ne peuvent être vrais simultanément.

b) Déduire de a) que $sin(n\theta)$ ne tend pas vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} (sin(n\theta))\, z^n$, $z \in \mathbb{C}$.

$\sum (\sin(n\theta)) z^n$

$-1 \leq \sin(n\theta) \leq 1$

~~$0 \leq z^n(\sin(n\theta)) \leq z^n$~~

$|z|^n < 1 \Rightarrow \sum U_n \to CV$

$|z|^n > 1 \Rightarrow \sum U_n \to div$ $\Rightarrow R = 1$

2002

$\int_0^1 \ln x \, dx = ?$

Soit $t \in]0,1]$ $\Rightarrow \int_t^1 \ln x \, dx = \phi(t)$

$\Rightarrow \phi(t) = [x \ln x - x]_t^1 = t\ln t - t - 1 = -1 - t\ln t + t$

$\phi(t) = -1 - t\ln t + t$

$= -1 - t(\ln t - 1)$

$\lim_{t\to 0} \phi(t) = -1 \neq 0$ donc $\int_0^1 \ln(x)dx$ CV et vaut $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$

$\dfrac{1}{1-x}$

13

2

$\dfrac{1}{1-}$

$\dfrac{1}{2-}$

$\dfrac{2}{x-1}$

1/2ch

Ekimou Angoua fidele
Licence L2 MATHS

Université d'Abobo-Adjamé
UFR - SFA, Département de Math. et Informatique
Année 2009 - 2010

SFA2 EXAMEN D'ANALYSE 1 (1ère session)
Durée : 3 heures

July 18, 2010

Exercice 1 (2.5 points).
Etudier la nature de la série $\sum_n u_n$ suivante :

1. $u_n = 2 \; \forall n$. 2. $u_n = (-1)^n \sin(\frac{1}{n}) \; \forall n \geq 1$

Exercice 2 (2points)
Déterminer la nature de l'intégrale généralisée
$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4}\, dx$

Exercice 3 (4.5 points)
On pose $f_n(x) = \frac{1}{n^x}, \forall\, n \geq 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$.
1.Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ est :
a) simplement convergente sur $]1, +\infty[$
b) uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où a est un réel > 1.
2. Montrer que sa fonction somme $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est :
a) définie sur $]1, +\infty[$.
b) continue sur $]1, +\infty[$.

14

$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}$

Exercice 4(6 points)

Calculer le rayon de convergence R de la série entière

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-3)^n z^{4n+1}}{2n+5}$, $z \in \mathbb{C}$ 2. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$, $z \in \mathbb{C}$

3. $\sum_{n\geq 0} (\frac{n^2}{n^2+1})^{n^3} x^n$, $x \in \mathbb{R}$ 4. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2-\cos\ (n\theta)} x^{2n}$, où $\theta, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 (3.5 points)

On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1} z^n$, $z \in \mathbf{C}$

1. Calculer son rayon de convergence R

2.a) Sur le cercle d'incertitude, déterminer l'ensemble des valeurs de z où la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1} z^n$ est absolument convergente.

b) Donner une valeur de z où la série est semi-convergente, puis une valeur de z où la série est divergente

3. Calculer sa somme lorsque $z = x \in \mathbf{R}_+^*$

Exercice 6 (1.5 point)

Donner le développement en série entière au voisinage de zéro de la fonction f définie par

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. Quel est le rayn de convergence R de la série obtenue?

15

L2 MATHS INFO APPT

Université Nangui Abrogoua
UFR-SFA
Laboratoire de Mathématiques et Informatique

UE Intégration et séries

Durée globale 3 heures = 1 heure 30 (ECU1) + 1 heure 30 (ECU2)

Les ECU "Intégrales généralisées et séries de fonctions" et "Séries entières et séries de Fourier" doivent être rédigés sur des copies différentes. Il est conseillé au candidat de respecter la durée de 1 heure 30 pour chaque ECU et d'attendre la fin des 3 heures globales avant de rendre ses copies.

ECU1 Intégrales généralisées et séries de fonctions

Session de février 2013

Durée 1 heure 30

Exercice 1 (4.5 points)
Etudier la nature de chacune des intégrales généralisées suivantes.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}dx$ 2. $\int_{1}^{+\infty}(e^{6}-(1+\frac{3}{x})^{2x})dx$

Exercice 2 (4.5 points)
Etudier d'abord la nature de l'intégrale généralisée $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$. Calculer ensuite sa valeur en cas de convergence

Exercice 3 (2.5 points)
Etudier la nature de la série $\sum_{n} u_n$ suivante :

1. $u_n = 0\ \forall n$ 2. $u_n = (-1)^n\ \forall n$ 3. $u_n = (-1)^n\ sin\frac{1}{n}\ \forall n \geq 1$

Exercice 4 (1.5 points)
On pose $f_n(x) = \frac{1}{n^x}\ \forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. 1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est simplement convergente sur l'intervalle $]1, +\infty[$

2. Soit a un nombre réel donné tel que $a > 1$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est uniformément convergente sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

(suite page 2)

16

Université Nangui Abrogoua
UFR-SFA
Laboratoire de Mathématiques et Informatique

UE Intégration et séries

Session de février 013

Durée globale 3 heures = 1 heure 30 (ECU1) + 1 heure 30 (ECU2)

Les ECU "Intégrales généralisées et séries de fonctions" et "Séries entières et séries de Fourier" doivent être rédigés sur des copies différentes. Il est conseillé au candidat de respecter la durée de 1 heure 30 pour chaque ECU et d'attendre la fin des 3 heures globales avant de rendre ses copies.

ECU2 Séries entières, séries de Fourier

Durée 1 heure 30

Exercice 5 (7 points)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes, où $z \in \mathbb{C}$:

1. $\sum_{n\geq 1} (\sqrt{n})^n z^n$ 2. $\sum_{n\geq 1} (\ln n)^n z^n$ 3. $\sum_{n\geq 0} (e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}}) z^n$

4. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-3)^n z^{4n+1}}{2n+5}$, 5. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$, 6. $\sum_{n\geq 0} (\frac{n^2}{n^2+1})^{n^3} x^n$, $x \in \mathbb{R}$

Exercice 6 (5 points)

On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1} z^n$, $z \in \mathbb{C}$

1. Calculer son rayon de convergence R

2. a) Sur le cercle d'incertitude, déterminer l'ensemble des valeurs de z où la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1} z^n$ est absolument convergente.

b) Etudier la convergence de la série en $z = 1$ puis en $z = -1$.

3. Exprimer sa somme lorsque $z = x \in \mathbb{R}_+^*$ à l'aide d'une fonction connue.

17

Université Nangui Abrogoua
UFR-SFA
Laboratoire de Mathématiques et Informatique

L2 semestre 3 (2ème session)

UE Intégration et séries

Durée globale 3 heures = 1 heure 30 par ECU

Les ECU "Intégrales généralisées et séries de fonctions" et "Séries entières et séries de Fourier" doivent être rédigés sur des copies différentes. Il est conseillé au candidat de respecter la durée de 1 heure 30 pour chaque ECU et d'attendre la fin des 3 heures globales avant de rendre ses copies.

ECU1 Intégrales généralisées et séries de fonctions

2ème Session 2013

Durée 1 heure 30

Exercice1 (5 points)

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ est convergente et calculer sa valeur

2. a) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 |\ln(x)|\,dx$ converge.

b) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx$ converge. Au voisinage de $+\infty$, on pourra utiliser le critère $x^\alpha f(x)$

Exercice 2 (1 point)

Etudier la nature de la série $\sum_n u_n$ avec $u_n = \frac{3^{2^n}}{2^{3^n}}$ $\forall n$:

Exercice 3 (4 points)

Montrer que chacune des séries $\sum_{n\geq 0} x^n \cos n\theta$ et $\sum_{n\geq 0} x^n \sin n\theta$, où $x \in]-1,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, est convergente puis calculer sa somme. On pourra commencer par étudier la convergence et calculer la somme de la série à termes complexes $\sum_{n\geq 0} x^n e^{in\theta}$.

18

Ekumou Anguan Fidele
L2 Maths Int. Aff
[illegible]

Université Nangui Abrogoua
UFR-SFA
Laboratoire de Mathématiques et Informatique

UE Intégration et séries

2ème Session 2013

ECU2 Séries entières, séries de Fourier

Durée 1 heure 30

Les ECU "Intégrales généralisées et séries de fonctions" et "Séries entières et séries de Fourier" doivent être rédigés sur des copies différentes. Il est conseillé au candidat de respecter la durée de 1 heure 30 pour chaque ECU et d'attendre la fin des 3 heures globales avant de rendre ses copies.

Exercice 4 (3 points)

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sqrt{n})^n} z^n$ 2. $\sum_{n\geq 1} (\ln(1+1/n))^n z^n$ 3. $\sum_{n\geq 2} \ln(\frac{n-1}{n}) z^n$

Exercice 5 (7 points)

a) Quel est le rayon de convergence R et la somme $S(x)$ de la série géométrique $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} x^n$?

b) En déduire par récurrence la formule $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.

c) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a + bn + cn^2 = a + (b+c)n + cn(n-1)$

d) Quel est le rayon de convergence de chacune des série entières $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} ax^n$, $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} (b+c)nx^n$ et $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} cn(n-1)x^n$?

e) En déduire la somme $S(x)$ de la série $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} (a+bn+cn^2)x^n$. On précisera le domaine de validité de cette somme

19

Université Nangui Abrogoua
UFR-SFA
Laboratoire de Mathématiques et Informatique

UE Intégration et séries

Durée globale 3 heures = 1 heure 30 (ECU1) + 1 heure 30 (ECU2)

Les ECU "Intégrales généralisées et séries de fonctions" et "Séries entières et séries de Fourier" doivent être rédigés sur des copies différentes. Il est conseillé au candidat de respecter la durée de 1 heure 30 pour chaque ECU.

ECU1 Intégrales généralisées et séries de fonctions

Session 1 (014)

Durée 1 heure 30

Exercice1 (1.5 points)
Etudier la nature de l'intégrale généralisée
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x+2}dx$

Exercice 2 (4 points)

On considère l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{chx}{ch2x}dx$

1. Montrer qu'elle est convergente

2. Calculer sa valeur $\int_0^{+\infty} \frac{chx}{ch2x}dx$. On pourra utiliser le changement de variable $u = shx$

Exercice 3 (2.5 points)
Etudier la nature de la série $\sum_n u_n$ suivante :

1. $u_n = 1,5\ \forall n$ 2. $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \forall n$ 3. $u_n = \frac{-3+(-1)^n}{5^n}\ \forall n$

Exercice 4 (2 points) Soit $u_n = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})$, $n \geq 1$
Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente

20

UE Intégration et séries

Durée globale 3 heures = 1 heure 30 (ECU1) + 1 heure 30 (ECU2)

Session 1 (mai 014)

Les ECU "Intégrales généralisées et séries de fonctions" et "Séries entières et séries de Fourier" doivent être rédigés sur des copies différentes. Il est conseillé au candidat de respecter la durée de 1 heure 30 pour chaque ECU.

ECU2 Séries entières, séries de Fourier

Durée 1 heure 30

Exercice 5 (4 points)

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes où $z \in \mathbb{C}$:

1. $\sum_{n\geq 1} (\sqrt{2n})^{n+1} z^n$
2. $\sum_{n\geq 1} (\ln n)^{-3n} z^n$
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3n+1} z^{5n+2}$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$

Exercice 6 (6 points)

1. a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente

b) Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ de cette série.

2. a) Calculer le rayon de convergence R de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} z^n$, $z \in \mathbb{C}$.

b) Etudier la convergence sur le cercle de convergence d'équation $|z| = R$.

c) Désormais on prend $z = x$ réel.

A partir de l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ vraie pour $|x| < 1$, donner le développement en série entière de $\ln(1-x)$,

d) En déduire une expression de la série somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$ à l'aide de fonctions connues, où x est réel avec $|x| < 1$.

21

MON UE : UN PASSEPORT

Exercices de proba-stat

Une Jeunesse Consciente Et Intellectuelle

UN ETUDIANT, UN DOCUMENT

EDITEURS

BERTE OUSMANE L3

BAKAYOKO AMARA L2

09110313 / 77018403

berteousmane2012@hotmail.fr

Université Nangui Abrogoua

–*Licence 2 MIA*

Année : 2012 / 2013

TD de Probabilités

Fiche 1

Exercice 1

1. Trouver l'ensemble N des nombres entiers naturels composés de 5 chiffres.
2. Trouver l'effectif M des nombres entiers naturels composés de 5 chiffres 2 à 2 distincts.

Exercice 2 Une urne contient 7 boules indiscernables au toucher : 4 vertes et 3 rouges. On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne en notant à chaque tirage la couleur de la boule obtenue.

1. Trouver le nombre de résultats possibles.
2. Trouver le nombre de résultats ayant exactement une boule verte.
3. Trouver le nombre de résultats ayant au moins une boule verte.

Exercice 3 Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : 6 vertes, 4 blanches et 2 boules oranges. On tire successivement avec remise 5 boules de l'urne en notant à chaque tirage la couleur de la boule obtenue.

1. Trouver le nombre N de résultats possibles.
2. Trouver le nombre n de résultats posssibles ayant exactement 2 boules verts et 2 boules blanches.

Exercice 4 Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \quad \text{et} \quad C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p.$$

Exercice 5 Huit personnes se répartissent dans deux véhicules de 4 places chacun. Combien de possibilités peut-on dénombrer, si on ne tient pas compte de l'emplacement des individus dans les véhicules ?

Exercice 6 Dans une banque, chaque client posséde un compte dont le code est composé de de 3 lettres et 5 chiffres non nécessairement distincts du type LMD 54221.

1. On suppose que les 3 lettres sont distinctes. Combien peut-on ouvrir de de comptes dont le code :

a) commence par AB ?

b) commence par A ?

c) contient A ?

22

2. On suppose que les 3 lettres ne sont plus nécessairement distinctes. Combien peut-on ouvrir de comptes dont le code
   a) commence par A ?
   b) contient au moins deux A ?
3. On suppose que les trois lettres ne sont pas nécessairement distinctes et qu'il est impossible d'utiliser les chiffres 0, 1, 2, 3, 4 qui sont réservés à des codes spéciaux. Combient peut-on ouvrir de comptes dont le code
   a) commence par A ?
   b) finit par 999 ?
   c) Commence par A et finit par 89 ?

23

Université Nangui Abrogoua

Année : 2012 / 2013

–Licence 2 MIA

TD de Probabilités

Fiche 2

$\boxed{\text{Exercice 1}}$ On lance simultanement 2 dés cubiques et homogènes dont les faces sont numérotées de 1 à 6 puis on relève les numéros portés par les faces supérieures respectives.

Calculer sous forme de fraction irréductible la probabilité de chacun des événements suivants :

a) obtenir 5 puis 2,

b) obtenir 5 et 2,

c) obtenir deux nombres pairs

d) obtenir au moins un nombre impair

e) obtenir deux nombres supérieures ou eagaux à 20.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ Démonter l'égalité suivante :

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C).$$

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ Dans un hôpital, on soigne 400 malades pour trois symptomes A, B et C : 120 malades présentent le symptômes A seulement, 64 le symptômes B seulement, 72 le symptôme C, 72 les symptômes A et B seulement, 20 les symptômes B et C seulement. et 12 les symptômes A et C seulement.

On rencontre un malade de cet hôpiutal au hasard. Determiner la probabilité que ce malade :

a) présente les trois symptômes

b) présente le symptôme A

c) ne présente pas le symptôme B.

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ Une entreprise comporte n travailleurs. On suppose que ces travailleurs sont issus d'une population suffisament importante pour que la probabilité q'un travailleur soit de sexe masculin (ou de sexe féminin) soit égale à $\frac{1}{2}$.

1. Soient les événements A :" l'entreprise emploie au plus un homme" et B : " l'entreprise emploie au moins un homme et ~~une femme~~". au moins une femme.
   Calculer $p(A)$, $p(B)$, et $p(A \cap B)$. Les événements A et B son-ils indépendants ?
2. Soit C l'événement défini par C : ' l'entreprise emploie plus de deux hommes". Calculer n de manière à avoir $p(C) \geq 0, 9$.

24

Exercice 5 Un examen comporte quatres matières. Pour chacune des matières, on appelle "épreuve" un lot de trois sujets tirés au sort parmi 100 sujets possibles. Il s'agit de traiter l'un des sujets au choix.

1. Pour la première matière, combien d'épreuves différentes peut-on proposer ?
2. Un candidat se présente à cette matière en ne connaissant que 50 sujets. Quelle est la probabilité qu'il sache traiter : a) les trois sujets ?

   b) deux sujets ?

   c) Aucun sujet ?

Exercice 6 Dans cet exercice , la séropositivité est liée au VIH/SIDA.

On pourra utiliser les événements suivants :

H "être homme", F "être femme" et S "être séropositif".

La population d'un pays est composée de 48 pour cent d'hommes, 52 pour cent de femmes. 9 pour cent d'hommes sont séropositifs, parmis les femmes, 15 pour cent sont séropositives.

1. Trouver la probabilité p_1 pour qu'un homme soit séropositif.
2. Ca lculer la probabilité p_2 pour qu'une femme soit séropositive.
3. Trouver le taux T de séropositivité de cette population.

Université Nangui Abrogoua

–*Licence 2 MIA*

Année : 2013 / 2014

TD de Probabilités

Fiche 3

Exercice 1 Soit X la variable aléatoire définie par

$p(X=k) = ak(8-k)$ si $k \in \{0,\ 1,\ 2, ..., 8\}$ et $p(X=k)=0$ si $k \notin \{0,\ 1,\ 2, ..., 8\}$.

1. Calculer a.
2. Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de X.

Exercice 2 Soit la fonction de répartition d'une variable aleatoire X définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{2x}{3}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la densité de probabilité de X.
2. Calculer les moments d'ordre n et l'écart type σ de X.
3. Calculer $p(X \in [m-\sigma,\ m+\sigma])$, m étant la moyenne de X.

Exercice 3

1. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Montrez qu' en tout point où elle est continue, f est une densité de probabilité.
b) Déterminez la fonction de répartition de f.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ke^{-|x|}$.
a) Déterminez k pour que g soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
b) Déterminez la fonction de répartition de X.
c) Soit $Y = X^2$. Déterminez la fonction de répartition et la densité de Y.

p **Exercice 4** Lorsqu' un démarchaur en asssurance-vie se présente au domicile d'une personne, on estime qu'il y a une probabilité p que cette personne souscrive au contrat

26

qui lui est proposé. Si N est la variable aléatoire représentant le nombre de visites nécessaires à la souscription de r contrats, ($r \in \mathbb{N}^*$), déterminer la loi de probabilité de N. Cacluer l'espérance et la variance de N.

Exercice 5

Soit $N_0 \subset \mathbb{N}$. On considère les variables aléatoires X et Y dont les lois de probabilités sont les suivantes :

X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(6, \frac{2}{3})$,

Y suit une loi définie par

$$p(Y = n) = \begin{cases} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} & \text{si} \quad n \in N_0 \\ 0 & \text{si} \quad n \notin N_0 \end{cases}$$

1. Donnez les fonctions génératrices de X et Y.
2. A l'aide de ces fonctions génératrices calculer les moments simples d'ordre 1, 2 et 3 de X et Y. En déuire la variance et l'écart type de X.

f **Exercice 6**

Dans une PME sont employés 6 ouvriers et 5 agents administtatifs. Le DG souhaitant prendre l'avis de son personnel interroge 7 personnes choisies au hasard parmi les 11 personnes. Soit X le nombre d'ouvriers interrogés.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Quelle est la loi de probabilité prise par X ?
3. Calculer la probabilité d'interroger 3 ouvriers.

Exercice 7

Dans un village donné, le nombre de personnes qui atteignent 100 ans dans une année civile est une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque centenaire a la même probabilité q de mourir dans l'année.

Quelle es la loi de probabilité du nombre de centenaire atteignant 101 ans ?

27

TD. N° 4. Berte

UNIVERSITE DE COCODY / -UFR – SEG - DEUG II – 2005 - 2006
STATISTIQUE ET PROBABILITES / TRAVAUX DIRIGES Fiche N° 3

N° 08/DT/

Exercice 1 - Utilisation des tables.

a) Soit X une variable aléatoire normale centrée et réduite.
Déterminer α tel que : $P(X > \alpha) = 0,95$.

b) Soit Y une variable aléatoire $N(m, \sigma)$. Déterminer : $P(Y \in [m-\sigma, m+\sigma])$ et $P(Y \in [m-2\sigma, m+2\sigma])$. De plus déterminer β tel que $P(Y \in [m-\beta\sigma, m+\beta\sigma]) = 95\ \%$

Exercice 2 – Soit T une v. a. suivant une loi normale centrée réduite.
Calculer :

$P(T<0)$; $P(T<2,04)$; $P(T<-1,95)$;
$P(0<T<2)$; $P(-1<T<2)$; $P(-3<T<-1)$;
$P(T>2,21)$; $P(T>-2)$; $P(|T| < 2)$; $P(|T| > 1)$
$P(T>2,73 / T>2)$; $P(T<2/T<2,73)$; $P(T<2/T>1)$

Exercice 3 - Lors d'un examen de fin d'études, uniformisé au niveau national, la moyenne obtenue est 500, avec un écart - type de 100. La distribution est sensiblement normale. Quelle est la probabilité pour qu'un étudiant choisi au hasard obtienne une note :

a) Inférieure à 300?
b) Supérieure à 650?
c) comprise entre 500 et 650?

Exercice 4 - Dans une population masculine, la taille est une variable aléatoire normale $X \rightarrow N(172\ cm, 3cm)$. Et dans une population féminine comparable, la taille est une variable aléatoire normale $Y \rightarrow N(166\ cm, 6cm)$.

a) Y - a - t - il plus d'hommes ou de femmes qui mesurent plus de 184 cm?
b) Quelle est la probabilité qu'une femme mesure plus de 184 cm, sachant qu'elle mesure plus de 180 cm?

A.R

Exercice 5 - Une usine fabrique des vis dont 3 % ont des défauts.

a) On prélève 1000 vis au hasard; quelle est la probabilité :
- d'avoir plus de 50 vis défectueuses?
- d'avoir entre 20 et 40 vis défectueuses?

On veut 1950 vis sans défaut. Par prudence, on en prélève 2000 au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir suffisamment de vis en bon état?

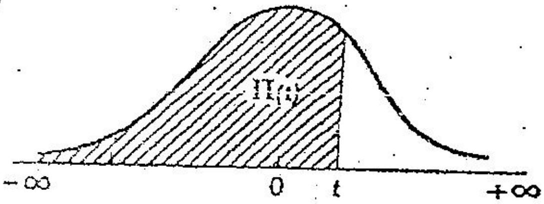
184

28

N° 60/DT/

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTÉGRALE
DE LA LOI NORMALE CENTRÉE, RÉDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = \Pr\{T < t\}.$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Note. — La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = 1,37$ $\quad \Pi(t = 1,37) = 0,914\,7$
pour $t = -1,37$ $\quad \Pi(t = -1,37) = 0,085\,3$

29

Université Nangui Abrogoua

–Licence 2 MIA

Année : 2013 / 2014

TD de Probabilités-Statistique

Fiche 5

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \ \sigma)$. Déterminer les paramètres m et σ sachant que

$$P(X > 12) = 0,8461 \quad \text{et} \quad P(X < 16) = 0,5.$$

Exercice 2 Lors d'un concours radiophonique, on note X le nombre de réponses proposées chaque jour par les auditeurs.
Durant les 10 premiers jours, on a obtenu : 200, 205, 180, 150, 215, 102, 170, 235, 215, 300.
On suppose que X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \ \sigma)$.
Donnez une estimation ponctuelle de m et une estimation ponctuelle de σ.

Exercice 3 Soit X de loi $\mathcal{U}[0, \ a]$ et $(X_1, \ ..., \ X_n)$ un n-échantillon de X. On cherche à estimer a. Soit $\overline{X_n}$ la moyenne empirique de X.

1. Soit $T_n = 2\overline{X_n}$. Montrer que T_n est un estimateur sans biais de a et calculer son risque quadratique.
2. Soit $T'_n = \max(X_1, \ ..., \ X_n)$.
   Donnez la fonction de répartition de X puis déterminez celle de T'_n.
   En déduire une densité de T'_n puis son biais et son risque quadratique.
3. Soit $T''_n = \dfrac{n+1}{n} T'_n$. Déterminez son biais et son risque quadratique.
4. Pour de grandes valeurs de n, quel est le meilleur estimateur de a ?

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire discrète dont la distribution de probabilité est donnée ci-dessous :

$$p(X = 0) = \theta^2, \ \ P(X = 1) = 2\theta(1 - \theta) \quad p(X = 2) = (1 - \theta)^2.$$

On extrait un échantillon de taille 3 de la population et on obtient : $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.
Calculer une estimation de θ en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 5 Dans une population, on définit la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par la densité de probabilité suivante :

$$f(x, \ \theta) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} & \text{si} \quad x \geq 0, \ \ \theta > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

On prélève un échantillon $(X_1, \ X_2, \ \ , X_n)$.

30

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Estimer par la méthode du maximum de vraisemblance le paramètre θ. On notera $\widehat{\theta}(X_n)$ cet estimateur.
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = X^2$.
4. Déduire de la question précédente que l'estimateur est sans biais, convergent ou consistant.

$\boxed{\text{Exercice 6}}$ Soit $(X_1,\ X_2,\ \ ,X_n)$ un echantillon que l'on modelise par une loi uniforme sur $[0,\ \theta]$ où θ est un paramètre inconnu.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ.
2. Est-il biaisé ?
3. Calculer son risque quadratique. Est-il consistant ?

$\boxed{\text{Exercice 7}}$ Soit $(X_1,\ X_2,\ \ ,X_n)$ un echantillon aléatoire simple issue d'une population de densité

$$\forall x \in]0,\ 1[\quad f_\theta(x) = \frac{\theta}{1-\theta} x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}}$$

où $\frac{1}{2} < \theta < 1$. Déterminer un estimateur par maximum de vraisemblance de θ. Est-il unique ?

$\boxed{\text{Exercice 8}}$ Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Construire un estimateur de λ en utilisant le principe du maximum de vraisemblance.
2. Cet estimateur est-il biaisé ? Est-il consisistant ?
3. Calculer son risque quadratique.

31

UNIVERSITE D'ABOBO-ADJAME / SFA 2 – 2007 - 2008/2008-2009

STATISTIQUE ET PROBABILITES / TRAVAUX DIRIGES Fiche N° 5

Exercice 1 – La loi du couple (X, Y) est définie par :

$P(X = i , Y = j) = c.i.j$ pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$
$P(X = i , Y = j) = 0$ si non

a) Calculer la constante c.
b) Calculer $P[1 \leq X \leq 2, Y \leq 2]$; $P[X \geq 2]$, et $P[Y < 2]$
c) Déterminer les lois marginales de X et de Y.

Exercice 2 – Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	-4	2	7
1	1/8	1/4	1/8
5	1/4	1/8	1/8

a) Calculer les lois marginales et X et de Y.
b) Calculer la moyenne de X et celle de Y.
c) Calculer la covariance du couple (X, Y), l'écart – type de X et celui de Y. En déduire la valeur du coefficient de corrélation.

Exercice 3 – La densité de probabilité d'un couple de variables aléatoires continues est définie par :

$f(x, y) = c.x.y$ si $0 < x < 4, 1 < y < 5$
$f(x, y) = 0$ si non

a) Calculer la constante c.
b) Calculer $P[1 < X < 2, 2 < Y < 3]$.
c) Calculer les lois marginales de X et de Y.
d) Déterminer la fonction de répartition du couple (X, Y).
e) Calculer $P [X + Y < 3]$

32

Examen de Proba Stat Année 2003-2004

I) Dans un ensemble de n personnes chaque personne fait appel à p medecins numérotés de 1 à p. Pour tout nombre $i \in \{1, 2, ...\}$ on définit la variable aléatoire X_i par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si aucune personne ne fait appel au medecin N}^\circ i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $S_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$

1) Quelle est la signification concrète de S_p ?

2 a) Calculer l'esperance mathématique de chaque variable X_i

En deduire l'esperance $E(S_p)$ de S_p. 3) On suppose $p = 10$

Pour quelles valeurs de l'entier n le pourcentage de medecins non consultés est-il en moyenne inférieur ou égal à 5 %

II Dans une Kermesse on a organisé sur plusieurs stands des Lotteries identiques chacune comprend 20 billets dont un gagne 100F 2 gagnent 50 F et trois gagnent 20F les autres billets ne gagnent rien.

1) Une personne achète un billet. Soit X la v.a "somme gagnée par cette personne"

a) Etablir la loi de probabilité de X

b) Quelle est la probabilité de l'évènement : "La personne gagne au moins 50 F"

c) Calculer l'espérance et l'écart type

2) Une autre personne a pris son billet à 5 stands différents. Soit Y la v.a : "Nombre de billets non gagnants".

Quelle est la loi de probabilité de Y ?

Calculer l'esperance et l'écart type de Y

33

... Mohamed Hajame 2004-2005
DFA2 - MIA - TCI 1ère Session

Probabilités et Statistique

Durée : 2 heures

I) Le nombre d'œufs pondus par une tortue de mer est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre égal à 100.

a) Si chaque œuf se développe pour donner un petit avec probabilité $\frac{3}{5}$ indépendamment des autres, quelle est la loi exacte pour le nombre de petits?

b) Si chaque petit atteint la mer avec une probabilité $\frac{1}{2}$ indépendamment des autres, quelle est la loi exacte pour le nombre de petits qui atteindront la mer ?

II) Une variable aléatoire X admet pour fonction de répartition la fonction F suivante : $F(x) = \left(1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\right) 1_{\mathbb{R}^+}(x)$, où $\theta > 0$

1°) Donner la densité de probabilité de X. Calculer $E(X)$ et ...

2°) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ.

3°) L'estimateur obtenu est-il sans biais ? Convergent ?

X III) L'éclairage d'une commune est assurée par 2000 lampes dont la durée de vie moyenne est 1000 heures. Les tests réalisés pour obtenir cette espérance de vie ont montré que la durée de vie des lampes était distribuée selon une loi normale avec un écart-type de 200 heures.

Les services d'entretien de la commune ont besoin pour leur gestion de connaître :

a) Le nombre de lampes hors d'usage au bout de 700 ...

b) Le nombre de lampes à remplacer entre la 900ième et la 13...
heure.

c) Le nombre d'heures qui se seront écoulées pour que ... de lampes soient hors d'usage.

34

DOCUMENTS INTERDITS

Université d'Abobo-Adjamé
SFA2
Miage-Mia
SANSINHO

2006-200

1ère Session
Probabilités et Statistique.

Durée : 2 heur

(I) Une classe comporte n élèves. On suppose que ces élèves sont issus d'une population suffisamment importante pour que la probabilité qu'un élève soit de sexe masculin (ou de sexe féminin) soit égale à $1/2$.

a) Soient les évènements A = "La classe comporte au plus un garçon" et B = "La classe comporte au moins un garçon et au moins une fille". Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$. Les évènements A et B sont-ils indépen

b) Soit C l'évènement défini par C = "La classe comporte plus de deux ga Calculer l'entier n de façon à avoir $P(C) \geqslant 0,9$.

(II) La loi du couple aléatoire (X, Y) est définie par :

$$P(X=i\,;Y=j) = \begin{cases} c.i.j & \text{pour } (i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Calculer la constante c

b) Calculer $P(1 \leqslant X \leqslant 2\,; Y \leqslant 2)$; $P(X \geqslant 2)$ et $P(Y < 2)$

c) Déterminer les lois marginales de X et de Y.

(III) 1) On considère les variables aléatoires indépendantes X et Y normales centrées réduites. On pose $S = \sqrt{X^2+Y^2}$. Calculer densité de la loi de S.

2) Soit ϕ une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. On pose : $T = \sin\phi$. Déterminer la densité de la loi de T.

(IV) Une variable aléatoire X admet pour fonction de répartition

$$F(x) = \left[1-(1+x)\,e^{-x}\right] 1_{\mathbb{R}_+^*}(x).$$

1) Déterminer les probabilités afin que X prenne une valeur :

a) inférieure à 1 ; b) comprise entre 2 et 4 ; c) supérieure à 3.

2) Déterminer la densité de probabilité de X.

35

KE BEKJE

Université d'Abomey-Calavi SANSINHO 2007-2008
S.FA

1ère Session

Probabilités et statistiques. Durée : 2h

(I) A l'expérience qui consiste à jeter un dé, on associe la variable aléatoire X définie par :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si le point marqué est 6} \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

a) Quel est le nom de la loi suivie par X ? Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $Var(X)$.

b) On jette à présent 12 dés et on désigne par Y le nombre de "6" obtenus. Quelle est la loi de Y ? Calculer $E(Y)$ et Var

(II) Une variable aléatoire X a pour densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1]. \end{cases}$$

1) Vérifier que f est une densité de probabilité

2) Déterminer la fonction de répartition F de la v.a. X

3) En utilisant cette fonction de répartition, calculer :

$P(X \leq \frac{1}{2})$; $P(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3})$; $P(X \geq \frac{1}{6})$.

4) Calculer l'espérance mathématique de X.

(III) Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon aléatoire tiré d'une v.a. X de loi normale avec, $E(X) = 0$, $Var(X) = \sigma^2$ et $E(X^4) = 3\sigma^4$. On pose $\sigma^2 = \theta$ inconnu.

a) Ecrire la densité de probabilité de X en fonction de θ

b) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ

c) Quelles sont les propriétés de cet estimateur ?

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-E(x)}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}$

36

UNIVERSITE DE COCODY / UFR SCIENCES ECONOMIQUES ET GESTION
DEUG II
EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUE / Session 1 – 2008 - 2009
Durée : 1 heure 30
Documents autorisés : aucun

NB - Le sujet comporte 3 exercices indépendants. Le problème 1 est obligatoire. Le candidat traitera au choix un des Problèmes II ou III

A) Problème 1- Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablettes il décide d'offrir des billets pour un concert de reggae dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 65% permettent de gagner exactement un billet de concert et 35 % exactement deux billets de concert.

On note $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

1°) Un client achète une tablette de chocolat. On considère les événements suivants :
G="le client achète une tablette gagnante";
U = " le client gagne exactement un billet de concert";
D= " le client gagne exactement deux billets de concert"

a) Donner $P(G)$; $P_G(U)$ et $P_G(D)$
b) Quelle est la probabilité de gagner exactement un billet de concert.?
c) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de billets de concert gagnés par le client.
Déterminer la loi de X
Calculer l'espérance mathématique de X

2°) Un autre client achète deux jours de suite une tablette de chocolat.
a) Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucun billet de concert 1
b) Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins un billet de concert 2
c) Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement deux billets de concert ?

B) Traiter au choix un des deux problèmes suivants

II - Soit X une variable aléatoire dont la densité donnée par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x<1 \end{cases}$

1) Déterminer a.
2) Déterminer la fonction de répartition de X,
3) Calculer, le moment d'ordre n; n étant un entier inférieur à3. En déduire la moyenne et l'écart-type de X
4) Donner, grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchébichev, un majorant de la probabilité que X s'écarte de sa moyenne, en valeur absolue, de plus de 2 écarts-types. Faire le calcul et comparer.

III – Un candidat passant un examen est ajourné si sa note est inférieure à 8; passe un oral si sa note est comprise entre 8 et 12, est admis si sa note est supérieure à 12. On suppose que les notes suivent une loi normale de paramètres μ et σ.; et on suppose que $\mu = 9$ et $\sigma = 3$.

a) Calculer la probabilité pour qu'un candidat soit ajourné
b) Calculer la probabilité pour qu'un candidat passe l'oral;
c) Calculer la probabilité pour qu'un candidat soit admis sans oral
d) On considère un échantillon aléatoire de 4 candidats. Quelle est la probabilité que deux de ces candidats soient ajournés ?
e) On considère un échantillon aléatoire de 500 candidats. Quelle est la probabilité pour que le nombre de candidats passant l'oral soit compris entre 284 et 306 ?

Voir tables de lois de probabilité au verso

37

X ©

Université d'Abobo-Adjamé Année 2008-2009

UFA$_2$: MIA ; TCI 1ère Session

Probabilités et Statistique. Durée : 2 heures

(I) Trois hommes et deux femmes occupent au hasard cinq places alignées.

Calculer la probabilité que chaque femme soit entourée de deux hommes.

(II) Dans un lot de 250 pièces, chacune d'elles a la probabilité 0,02 d'être défectueuse. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de pièces défectueuses de ce lot.

1) Donner la loi de probabilité de X, son espérance mathématique, sa variance.

2) En utilisant l'approximation par une loi autre à justifier, calculer la probabilité que dans ce lot, il y ait :

a) Trois pièces défectueuses.

b) Plus de trois pièces défectueuses.

(III) Soit X une variable aléatoire de fonction de densité continue f définie par :

$f(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)$ si $-1 \leq x \leq 1$ et $f(x) = 0$ autrement,

et de fonction de répartition F.

1) Calculer $E(X)$, $Var(X)$ et $F(x)$ pour tout réel x.

2) Calculer les probabilités :

a) $P(X > 0)$

b) $P(X < \frac{1}{2} / X > 0)$

38

U. N. A. 2012-2013

SFA$_2$

Miage

1ère Session

Probabilités - Statistique. Durée: 2 heures

(TCI et MIA)

I) Probabilités

1) On considère la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$

b) Déterminer sa fonction de répartition

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = k e^{-|x|}$

a) Déterminer k pour que g soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire X

b) Déterminer la fonction de répartition G de X

c) Soit $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition Φ de Y ainsi que sa densité $\varphi(y)$.

II) Statistique

Soit un échantillon de taille n $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi sur $\mathbb{R}$ ayant pour densité: $f_\theta(x) = \frac{3}{\theta^3} x^2 \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$,

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu.

1) Vérifier que f_θ est bien une densité de probabilité

2) Montrer que $S = \frac{4}{3n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur sans biais de θ et calculer son risque quadratique noté $R_S(\theta)$

3) Montrer que $T = \frac{3n+1}{3n} \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ est un estimateur sans biais de θ et calculer son risque quadratique noté $R_T(\theta)$.

4) Comparer les estimateurs S et T.

39

Université d'Abobo-Adjamé 2012-2013

SFA - Licence 2. 2ème Session BE [illegible]

ECU 2. Statistique Durée 1h30

(I) Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité [est]

donnée par : $f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{si } x \in]0, \lambda] \\ 0, & \text{si } x \notin]0, \lambda] \end{cases}$

où k est une constante et $\lambda > 0$.

1) Déterminer la constante k pour que f_λ soit une dens[ité]

de probabilité.

2) Soit un échantillon aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ de même lo[i que]

la v.a. X ; k étant connu, montrer que $S = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} X$[...]

est un estimateur sans biais de λ ; et calculer s[on]

risque quadratique $R_S(\lambda)$.

(II) Dans une population P, on définit la variable aléatoi[re]

dont la loi de probabilité est donnée par la densité suivante

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} \cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où $\theta > 0$. On prélève un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$.

1°) Vérifier que f_θ est une densité de probabilité

2) Estimer par la méthode du maximum de vraisembl[ance]

le paramètre θ. On notera $\hat{\theta}(X_n)$ cet estimateur

3) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y[...]

4) Déduire de la question précédente que l'estimateur $\hat{\theta}$[...]

est sans biais

40

Documents interdits

Université d'Abobo-Adjamé 2013-2014

SFA - Licence 2 1ère Session

ECU1 Probabilités Durée 1h30

(I) Dans un hôpital, on soigne 400 malades pour trois symptômes A, B, C : 120 malades présentent le symptôme A seulement, 64 le symptôme B seulement, 72 le symptôme C seulement, 72 les symptômes A et B seulement, 20 les symptômes B et C seulement et 12 les symptômes A et C seulement.

On rencontre un malade de cet hôpital au hasard.

Déterminer la probabilité que ce malade :

a) présente les trois symptômes ; b) le symptôme A ; c) ne présente pas le symptôme B ; d) ne présente pas ni le symptôme A, ni le symptôme B.

(II) $F(x)$ est la fonction de répartition d'une variable X définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{2}{3}x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

a) Déterminer la densité de probabilité de X que l'on notera $f(x)$.

b) Calculer les moments d'ordre $n \in \mathbb{N}$ et l'écart-type σ de X.

c) Calculer les probabilités suivantes :

$P(X \in [m-\sigma\, ;\, m+\sigma])$ et $P(X \in [m-2\sigma\, ;\, m+2\sigma])$, où m désigne la moyenne de X.

41

Documents interdits

Université d'Abobo- Adjamé 2013 - 2014

SFA - Licence 2 1ère Session Durée 1h30

Ecue. Statistiques.

(I) Dans une population P, on définit la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par la densité suivante :

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & si \quad x \geq 0 \\ 0, & si \quad x < 0. \end{cases}$$

où θ est un paramètre réel strictement positif.

On prélève un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1) Vérifier que f_θ est une densité de probabilité.

2) Estimer par la méthode du maximum de vraisemblance le paramètre θ. On notera $\hat{\theta}(X_n)$ cet estimateur.

3) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = X^2$.

4) Déduire de la question précédente que l'estimateur $\hat{\theta}(X_n)$ est sans biais.

(II) Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille n et de loi uniforme sur $[0, \theta]$, où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu.

1) Montrer que $S = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur sans biais de θ.

2) Déterminer le risque quadratique $R_1(\theta)$ associé à l'estimateur S

3) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance M du paramètre θ.

42

Documents interdits

MON UE : UN PASSEPORT

Exercices d'arithmétiques

Une Jeunesse Consciente Et Intellectuelle

UN ETUDIANT,UN DOCUMENT

EDITEURS

BERTE OUSMANE L3

BAKAYOKO AMARA L2

09110313 / 77018403

berteousmane2012@hotmail.fr

12
28
14
168

Arithmétique dans Z

Professeur SANGARE Daouda
Université Nangui Abrogoua, UFR-SFA, Laboratoire de Math. Info

February 19, 2014

Année 2013-2014
Fiche de TD

I Critères de divisibilité

Exercice 1

Soit $N = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + a_3 10^3 + ... + a_r 10^r$ un entier naturel écrit en base 10, où $\forall i = 0, 1, 2, ..., r$, $0 \leq a_i \leq 9$.

Montrer que N est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_r$ est divisible par 3

Exercice 2

Soit $N = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + a_3 10^3 + ... + a_r 10^r$ un entier naturel écrit en base 10, où $\forall i = 0, 1, 2, ..., r$, $0 \leq a_i \leq 9$.

Montrer que N est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_r$ est divisible par 9

Exercice 3

Soit $N = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + a_3 10^3 + ... + a_r 10^r$ un entier naturel écrit en base 10, où $\forall i = 0, 1, 2, ..., r$, $0 \leq a_i \leq 9$.

Montrer que N est divisible par 11 si et seulement si la somme alterné de ses chiffres $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ...$est divisible par 11

Exercice 4

Soit $N = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + a_3 10^3 + ... + a_r 10^r$ un entier naturel écrit en base 10, où $\forall i = 0, 1, 2, ..., r$, $0 \leq a_i \leq 9$.

Soit $n \geq 2$ un entier naturel donné et soient $b_0, b_1, b_2, ..., b_r$ des entiers tels que $\forall i = 0, 1, 2, ..., r$, $b_i \equiv 10^i [n]$

1. Montrer que $N \equiv b_0 a_0 + b_1 a_1 + b_2 a_2 + ... + b_r a_r [n]$
2. En déduire que N est divisible par n si et seulment si $b_0 a_0 + b_1 a_1 + b_2 a_2 + ... + b_r a_r$ est divisible par n.
3. En déduie un critère de divisibilité par 7

48

II Congruences

Exercice 5

1. Résoudre l'équation de congruence

$2x \equiv 3$ [mod 5], $x \in \mathbf{Z}$. On donnera toutes les solutions.

Exercice 6

Résoudre le système de congruences

$$(S)\begin{cases} 2x \equiv 3[\text{mod }5] \\ 3x \equiv 4[\text{mod }5] \end{cases} \quad x \in \mathbf{Z}$$

Exercice 7

Résoudre le système de congruences

$$(S)\begin{cases} x \equiv 4[\text{mod }6] \\ x \equiv 5[\text{mod }10] \end{cases} \quad x \in \mathbf{Z}$$

III Eléments inversibles de $\dfrac{\mathbf{Z}}{n\mathbf{Z}}$

Exercice 8

Soient n un entier naturel non nul, $x \in \mathbf{Z}$, $\overline{x} = x + n\mathbf{Z} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. On suppose que $1 \leq x \leq n-1$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(x, n) = 1$

(ii) $\overline{x} \in U(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$

(iii) $\overline{x}$ engendre le groupe additif $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

IV Le théorème chinois des restes

Exercice 9

1.Soient m et n deux entier premiers entre eux.

Montrer que $\forall\ (a, b) \in \mathbf{Z}^2$, le système de congruences

$$(S)\begin{cases} x \equiv a[m] \\ x \equiv b[n] \end{cases},$$

admet au moins une solution $x_1 \in \mathbf{Z}$.

2. Montrer que $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est naturellemet muni d'une structure d'anneau unitaire.

3. Montrer que le morphisme d'anneaux

$\varphi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ défini par

$\forall\ k \in \mathbf{Z}$, $\varphi(k) = (k + m\mathbf{Z},\ k + n\mathbf{Z})$ induit un isomorphisme

$\overline{\varphi} : \mathbf{Z}/mn\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

4. Soient $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ deux solutions su système (S). Montrer que $k_1 \equiv k_2[mn]$.

5. Montrer que $U(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = U(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \times U(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$

6. Montrer que les groupes $U(\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z})$ et $U(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ sont isomorphes.

Application. Résoudre le système de congruences

$$\begin{cases} x \equiv 3\ [\text{mod }7] \\ x \equiv 4\ [\text{mod }9] \end{cases}$$

44

V L' Indicateur d'Euler

Exercice 10

On note $\varphi(n)$ le cardinal de $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, c'est à dire le nombre d'éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Donc d'après la question 1. ci-dessus, $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers x tels que $1 \leq x \leq n-1$ avec $(x,n) = 1$.

$\varphi(n)$ s'appelle l'indicateur d'Euler de n. On dit aussi que φ est la **fonction indicatrice d'Euler.**

Dans ce qui suit, on se propose de calculer $\varphi(n)$ en fonction des facteurs premiers de n.

1) Montrer que si $(m,n) = 1$, alors $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$

2) Soit p un nombre premier

Calculer $\varphi(p)$

Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\varphi(p^k) = (p-1)p^{k-1} = p^k(1 - \frac{1}{p})$

3) Montrer que si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$, où $p_1, p_2, ..p_r$ sont premiers et où $\alpha_i \geq 1$ $\forall i$,

alors $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_r})$

45

Université d'Abobo-Adjamé
UFR - SFA, Laboratoire de Math et Informatique
Année 2009- 2010

SFA2 UV MATH CONCOURS Durée 3 heures

July 25, 2010

Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 (2 points)
Donner, et le justifier, un critère de divisibilité par 5

Exercice 2 (2 points)
Montrer que dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{15\mathbb{Z}}$, $\overline{13}$ est inversible. Donner son inverse

Exercice 3 (2 points)
Résoudre le système de congruences
$$(S_1)\begin{cases} x \equiv 2[\mathrm{mod}\,6] \\ x \equiv 5[\mathrm{mod}\,8] \end{cases} \quad x \in \mathbb{Z}$$

Exercice 4 (3 points)

Résoudre le système de congruences
$$(S_2)\begin{cases} 3x + 4y \equiv 5\ [\mathrm{mod}\,13] \\ 2x + 5y \equiv 7[\mathrm{mod}\,13] \end{cases} \quad x \in \mathbb{Z}$$

46

Exercice

la Comète A passe tous les 9 ans et a été observée il y a 3ans. la Comète B passe tous les 7ans et a été observée il y a 4 ans. Quelle est la prochaine fois où l'on pourra observer ces 2 Comètes la même an

Exercice 5 (3 points)

Résoudre le système de congruences

$$(S_3)\begin{cases} x \equiv 3 \; [\text{mod } 7] \\ x \equiv 4 \; [\text{mod } 9] \end{cases} \quad x \in \mathbf{Z}$$

Exercice 6 (8 points)

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

Soit $x = \overline{a} = a + n\mathbf{Z}$ un élément de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, où $a \in \mathbf{Z}$ avec $0 \leq a < n$

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(a, n) = 1$

(ii) $\overline{a} \in U(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$

(iii) $\overline{a}$ engendre le groupe additif $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

On note $\varphi(n)$ le cardinal de $U(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, c'est à dire le nombre d'éléments inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Donc d'après la question 1. ci-dessus, $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers x tels que $1 \leq x \leq n-1$ avec $(x, n) = 1$.

$\varphi(n)$ s'appelle **l'indicateur d'Euler de n.** On dit aussi que φ est la **fonction indicatrice d'Euler.**

2. Soient m, n deux entiers naturels tels que $(m, n) = 1$

Montrer que :

a) $m^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$. On pourra considérer le groupe multiplicatif $U(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$

b) En déduire l'inverse de $\overline{m}$ dans l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ en fonction de $\varphi(n)$

EXERCICE

1/ Mq si n est impair alors $n^2 \equiv 1[8]$

2/ Mq de tout nombre pair n, même vérifie $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$

47

55.

Université Nangui Abrogoua
UFR-SFA
Laboratoire de Mathématiques et Informatique

UE MCO Semestre 3

Session de février 2013

Durée globale 3 heures = 1 heure 30 (ECU1) + 1 heure 30 (ECU2)

Les ECU "**Arithmétique dans $\mathbb{Z}$**" et "**Applications de l'Analyse et de l'Algèbre**" doivent être rédigés sur des copies différentes. Il est conseillé au candidat de respecter la durée de 1 heure 30 pour chaque ECU et d'attendre la fin des 3 heures globales avant de rendre ses copies.

ECU2 Applications de l'Analyse et de l'Algèbre

Durée 1 heure 30

Aucun document n'est autorisé

Exercice 4 (4 points)
Soit l'équation différentielle
(H) $x^2(1-x)\,y'' - x(1+x)\,y' + y = 0$
Chercher une solution de (H) sous forme de série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
Donner le rayon de convergence de la série solution et calculer sa somme

X **Exercice 5 (4 points)**

Résoudre le système de congruences
$$\begin{cases} x \equiv 3 \ [\mathrm{mod}\, 5] \\ x \equiv 4 \ [\mathrm{mod}\, 9] \end{cases}, x \in \mathbb{Z}$$

X Exercice 6 (2 points) Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

48

Université Nangui Abrogoua
UFR-SFA
Laboratoire de Mathématiques et Informatique

UE MCO Semestre 3

Durée globale 3 heures = 1 heure 30 (ECU1) + 1 heure 30 (ECU2)

Les ECU "**Arithmétique dans $\mathbb{Z}$**" et "**Applications de l'Analyse et de l'Algèbre**" doivent être rédigés sur des copies différentes. Il est conseillé au candidat de respecter la durée de 1 heure 30 pour chaque ECU et d'attendre la fin des 3 heures globales avant de rendre ses copies.

Aucun document n'est autorisé

ECU1 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Session de février 2013

Durée 1 heure 30

Exercice 1 (6.5 points)

1. Soit p un nombre premier et soit k un entier tel que $1 \leq k \leq p-1$.
Montrer que $\binom{p}{k} \equiv 0[\text{mod } p]$

2. Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout nombre premier p, on a :
$(*)$ $n^p \equiv n$ [mod p]
3. Déduire de 2. que si p ne divise pas n, alors $n^{p-1} \equiv 1$ [mod p]
4. Donner le reste de la division de 10^{158} par 13
5. Montrer que pour tout nombre premier $p \neq 3$, on a $p^2 \equiv 1$ [mod 3]. En déduire que pour tout nombre premier $p \neq 3$, $p^2 + 2$ est un multiple de 3.

Exercice 2 (2 points)

1. Résoudre l'équation de congruence
$3x \equiv 2$ [mod 7], $x \in \mathbb{Z}$. On donnera toutes les solutions.

Exercice 3 (1.5 points)

Soit $N = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + a_3 10^3 + \ldots + a_r 10^r$ un entier naturel écrit en base 10, où $\forall i = 0, 1, 2, \ldots, r$, $0 \leq a_i \leq 9$.

Donner un critère de divisibilité de N par 9. Appliquer ce critère pour vérifier que le nombre 21276 est divisible par 9.

(suite page 2)

49

Université Nangui Abrogoua UFR-SFA
Laboratoire de Mathématiques et Informatique

UE Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Session 1 (2014)
Durée 2 heures

Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 (1.5 points)
Soit $N = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + a_3 10^3 + ... + a_r 10^r$ un entier naturel écrit en base 10, où $\forall i = 0, 1, 2, ..., r$, $0 \leq a_i \leq 9$.
Donner un critère de divisibilité de N par 3. Appliquer ce critère pour vérifier que le nombre 31295 est divisible par 3 ou non.

Exercice 2 (1.5 point). Calculer $\overline{10}^{122}$ [mod 13]

Exercice 3 (3 points). Résoudre le système de congruences
$$(S)\begin{cases} 3x + 4y \equiv 5[\text{mod } 13] \\ 2x + 5y \equiv 7[\text{mod } 13] \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 4 (4 points). Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système de congruences
$$\begin{cases} x \equiv 3 \; [\text{mod } 11] \\ x \equiv 6 \; [\text{mod } 8] \end{cases}$$

Exercice 5 (2 points). Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

50

UNIVERITE NANGUI-ABROGOUA | UFR SFA | LICENCE L 2 | Math

Exo 13

Montrer que , $a^{31}-a$, est divisible par 62 pour tout $a \in \mathbb{Z}$

• Montrer que $a^{n+30}-a^n$ est divisible par 62 pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 14

On considère deux entiers relatifs a et b et p un entier naturel premier,

Montrer que $(a+b)^p \equiv a^p+b^p \mod(p)$

EXo 15

Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $10^{6n+2}+10^{3n+1}+1$ est divisible par 111 quel que soit $n \in \mathbb{N}$ (Indication : $1000 = 9 \times 111 + 1$).

exo16

Démontrer que pour tout entier naturel n, 9 divise $10^n - 1$

Exo 17

1) Soit p un nombre premier impair.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k = 1 \mod(p)$

b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k = 1 \mod(p)$

et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors $2^n = 1 \mod(p)$

c. Soit b un entier tel que $2^b = 1 \mod(p)$

b etant le plus petit entier non nul verifiant cette propriété?

Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n = 1 \mod(p)$, alors b divise n.

2). Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$ - . On prend pour p un diviseur premier de A.

a. Justifier que : $2^q = 1 \mod(p)$.

b. Montrer que p est impair.

c. Soit b tel que $2^b = 1 \mod(p)$. b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété

Montrer, en utilisant 1. que b divise q. En déduire que b = q.

d. Montrer que q divise p -1, puis montrer que $p = 1 \mod(2q)$.

exo18)

résoudre les systèmes suivants

$$1)\begin{cases} x \equiv 3 \mod(11) \\ x \equiv 6 \mod(8) \\ x \equiv -1 \mod(15) \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x \equiv 2 \mod(3) \\ x \equiv 2 \mod(5) \\ x \equiv 0 \mod(4) \end{cases}$$

S1

Un premier phare émet un signal toutes les 15 minutes et un second phare un signal toutes les 28 minutes. On a aperçu le signal du premier à 0 h 02 et celui du second à 0 h 08. A quelle heure au plus tôt les deux signaux coincideront-ils ?

exo20

Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur. Ils projettent de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donnerait au cuisinier 4 pièces.

Dans un naufrage ultérieur, seuls le trésor, six pirates et le cuisinier sont sauvés et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut esperer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

exo 25

Résoudre l'équation

1) $22\,x = 55 \pmod{363}$.

2) $19\,x = 2 \pmod{14}$

3) $\begin{cases} 2x = 3 \pmod 5 \\ 3x = 3 \pmod 2 \\ 3x = 5 \pmod 8 \end{cases}$

Exos 26

On dit qu'un anneau A est un anneau de Boole si, pour tout $x \in A$, on a $x^2 = x$. On ne suppose pas ici a priori que A est commutatif, ni qu'il est unitaire.

(1) verifier que $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z},+)$, est un anneau de Boole.

(2) Soit E un ensemble. On note P(E) l'ensemble des parties de E. On appelle Δ la difference symetrique

$A\Delta B = A \cup B - A \cap B$.

Verifier que $(P(E), \Delta, \cap)$ est un anneau de Boole.

(3) Soit A un anneau de Boole. Montrer que l'on a $x + x = 0$ pour tout $x \in A$.

(4) Montrer que tout anneau de Boole est commutatif.

(5) Soit A un anneau de Boole. Soient x et y des elements de A. Calculer $xy(x + y)$. En deduire qu'un anneau de Boole ayant au moins trois elements ne peut pas être integre.

EXo 27

étant donné un anneau A, on désigne par N(A) l'ensemble des éléments non inversibles de A.

(1) Déterminer N(A) pour $A = \mathbf{Z}$, pour $A = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et pour $A = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.

On dit qu'un anneau A est un anneau local si l'ensemble N(A) est stable pour l'addition, c'est-à-dire si l'on a $a+b \in N(A)$ quels que soient $a \in N(A)$ et $b \in N(A)$.

(2) Montrer que si A est un anneau local, alors N(A) est un idéal.

(3) L'anneau $\mathbf{Z}$ est-il un anneau local ?

(4) Montrer que l'anneau $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ est un anneau local mais que l'anneau $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ n'est pas un anneau local.

(5) Soit A un anneau local. Montrer que N(A) est un idéal maximal de A et ensuite que N(A) est l'unique idéal maximal de A.

(6) On se donne un entier $n \geq 2$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe un nombre premier p et un entier $\alpha \geq 1$ tels que $n = p^\alpha$.

(b) L'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un anneau local.

58

Exo1) Soit a un entier relatif. Montrer que le reste de la division euclidienne de a^2 par 8 vaut 0, 1 ou 4. En déduire qu'aucun entier congru à 7 modulo 8 n'est somme de trois carré d'entiers.

Exo2) à l'aide de l'agorithme d'Euclide, calculer le plus grand diviseur commun de 210 et 66. Que vaut le plus petit multiple commun ?

~~a) Trouver deux entiers u et v tels que 127u + 506v = 1.~~

~~b) En déduire tous les entiers u et v tels que 127u + 506v = 1.~~

Exo3)

a) Trouver deux entiers u et v tels que 127u + 506v = 1.

b) En déduire tous les entiers u et v tels que 127u + 506v = 1.

Exo4) Soit m, n deux entiers et a, b, c, d quatre entiers tels que ad - bc = 1.

a) Trouver deux entiers α et β tels que $m = \alpha(am + bn) + \beta(cm + dn)$.

b) En déduire que les diviseurs communs de am + bn et cm + dn divisent m.

c) Montrer que pgcd(am + bn, cm + dn) = pgcd(m, n).

Exo5) Montrer que 154 et 1271 sont premiers entre eux.

Exo6) [Exemple simple de fonction de chiffrement] Soit S l'ensemble de tous les entiers n vérifiant $0 \leq n \leq 25$. On fixe deux éléments a et b de S et on considère la fonction de S dans S définie pour tout x de S par :

$C_{a,b}(x) = ax + b \pmod{26}$.

a) Montrer que si a n'est pas premier avec 26, la fonction Ca,b n'est pas bijective.

b) Soit a premier à 26. Montrer qu'il existe a' dans S tel que aa' = 1 (mod 26).

c) Montrer que si a est premier à 26, la fonction Ca,b est bijective.

d) Soit a premier à 26, calculer fonction réciproque de Ca,b.

Exo7) Montrer que si n et k sont premiers entre eux, alors n divise $\binom{n}{k}$

8) Calculer la décomposition en facteurs premiers de 550 et 3250. En déduire leurs ppcm et pgcd.

Exo9) Soit a un entier tel que $1 \leq |a| \leq 9$. Soit n un entier naturel.

a) Quels nombres premiers sont susceptibles d'intervenir dans la décomposition en facteurs premiers de $ax10^n$.

b) Soit p un nombre premier supérieur à 8. Montrer que p est premier à tout entier de la forme $ax10^n$.

Exo10) Soit n un entier relatif. Après avoir écrit l'entier $n^4 - 20n^2 + 4$ comme différence de deux carré d'entiers, montrer qu'il n'est pas premier.

$n^4 - 4n^2 + 4 - 16n$
$(n^2-2)^2 - (4n)^2$

Exo11) Soit $n \geq 3$ un entier. Montrer que si $k \in \{2, \ldots, n\}$, l'entier $n! + k$ n'est pas premier. En déduire l'existence de suites arbitrairement longues d'entiers consécutifs non premiers.

54

Exo12)

a) Soit p un nombre premier. Montrer que $\sqrt{p}$ est irrationnel.

b) Soit $n \geq 2$ un entier. On écrit $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$ la décomposition en facteurs premiers de n où $n_1, \ldots, n_k$ sont strictement positifs et on suppose qu'il existe k tel que n_k est impair. Montrer que $\sqrt{n}$ est irrationnel.

c) Quels sont les seuls entiers dont la racine carré est rationnelle ?

MON UE : UN PASSEPORT

Exercices d'algèbre 3

Une Jeunesse
Consciente Et
Intellectuelle

EDITEURS

BERTE OUSMANE L3

BAKAYOKO AMARA L2

09110313 / 77018403

berteousmane2012@hotmail.fr

N ETUDIANT,UN DOCUMENT

UFR SFA | L2 | Fiche de T D N° 1 D'Algèbre 3 | 2013 - 2014

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

Exercice 1

Soit G un groupe et soit n un entier strictement positif qui vérifie l'égalité : $(ab)^n = a^n b^n \; \forall a, b \in G$. Montrer que $H_1 = \{x^n : x \in G\}$ et $H_2 = \{x \in G : x^n = 1_G\}$, où 1_G est l'élément neutre de G, sont des sous-groupes de G. Sont-ils distingués dans G? justifier. Que peut-on déduire pour G et $\{1_G\}$?

Exercice 2

Soient G un groupe. Pour tout couple $(x, y) \in G \times G$, l'élément $xyx^{-1}y^{-1}$ est appelé le commutateur de x et y et un commutateur de G.

1) Montrer que l'inverse d'un commutateur est un commutateur.

2) Montrer que l'ensemble G' des produits des commutateurs de G est un sous-groupe distingué de G (on l'appelle le sous-groupe dérivé de G.)

3) Montrer que G/G' est un groupe abélien.

Exercice 3

Soient G le groupe des matrices complexes inversibles de type $(3, 3)$; G_1 l'ensemble des éléments de G qui sont des matrices scalaires i.e. l'ensemble des matrices αI_3, G_2 l'ensemble des éléments de G qui sont de déterminant 1.

a) Montrer que G_1 et G_2 sont des sous-groupes distingués de G. Sont-ils abéliens ?

b) Montrer que, pour tout $g \in G$, il existe exactement trois couples $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 \,/\, g = g_1g_2 = g_2g_1$.

Exercice 4

Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e, dans lequel on notera x' le symétrique de x.

Soit a un élément de G . On définit une loi T par : $xTy = x * a * y$.

1) Montrer que (G, T) est un groupe.

2) Soit l'application $f_a : G \longrightarrow G \,/\, f_a(x) = a * x$. Montrer que f_a est un isomorphisme de (G, T) sur $(G, *)$ et déterminer f_a^{-1}.

3) Soit $F = \{f_a \,/\, a \in G\}$. Montrer que (F, o) est un groupe.
4) Montrer que : $\varphi : F \longrightarrow G : f_a \mapsto a$ réalise un isomorphisme de (F, o) sur $(G, *)$.
En déduire la structure de (F, o) en fonction de celle de $(G, *)$.

55

BÉ BERTE

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

UFR SFA	L2	Fiche de T D N° 2 D'Algèbre 3	2013 - 2014

Exercice 1

Soit G un groupe multiplicatif non commutatif. On désigne par H l'ensemble des x de G qui commutent avec tous les éléments de G.

1) Prouver que H est un sous-groupe de G appelé centre de G.

2) Pour tout a fixé de G, on considère l'application $f_a : G \longrightarrow G$ définie par : $f_a(x) = a^{-1}xa$.

Montrer que f_a est un automorphisme de G.

3) Montrer que $\forall a, b \in G$, $f_a o f_b = f_{ba}$ et $(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}}$.
En déduire que l'ensemble F des f_a lorsque a parcourt G est un groupe pour la composition des applications.

4) Soit : $\psi : G \longrightarrow F : a \mapsto f_{a^{-1}}$. Montrer que ψ est un homomorphisme de groupes et que les ensembles G/H et $\psi(G)$ sont isomorphes.

Exercice 2

Soient G un groupe d'ordre $n = pq$, où p et q sont premiers, et H un sous-groupe de G. Montrer que l'ensemble $N(H)$ des éléments s de G tels que $s^{-1}Hs = H$, appelé normalisateur de H, est un sous-groupe de G dans lequel H est distingué et que, si H n'est pas un sous-groupe distingué de G, alors $N(H) \neq G$ et réciproquement.

Exercice 3

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On note $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$.

1. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$. En déduire que si H est distingué dans G alors HK est un sous-groupe de G.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $f : H \times K \longrightarrow G$ définie par $\forall h \in H, \forall k \in K : f(h,k) = hk$ soit un morphisme de groupes.
On suppose désormais que f est un morphisme de groupes.

3. Calculer le noyau et l'image de f.

56

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

UFR SFA | L2 | Fiche de T D N° 3 D'Algèbre 3 | 2013 - 2014

Exercice 1 1) Calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 11 \\ 1 & 5 & 11 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \text{ et } \Delta(a,b,c) = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \text{ en le factorisant.}$$

On montrera qu'il vaut $(a+b+c)^3$.

2) Soient $D = \begin{vmatrix} n & & & (3) \\ & n-1 & & \\ & & \ddots & \\ (3) & & & 1 \end{vmatrix}$ et $D(x) = \begin{vmatrix} 2+x & 3 & 4 \\ 3 & 4+x & 5 \\ 4 & 5 & 6+x \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2+x & 3 & 4 \\ 3 & 4+x & 5 \\ 4 & 5 & 6+x \end{vmatrix} =$$

Calculer D et factoriser $D(x)$.

Exercice 2 On considère les déterminants de Vandermonde

$$D(a,b,c) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \qquad D(a,b,c,d) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $D(a,b,c)$

b) Montrer que sans changer la valeur de $D(a,b,c,d)$, on peut remplacer sa dernière ligne par $f(a), f(b), f(c), f(d)$ où f est un polynôme de la forme $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
En choisissant astucieusement f de sorte que la dernière ligne n'ait qu'un seul terme non nul, et en développant, montrer que $D(a,b,c,d) = (d-a)(d-b)(d-c)D(a,b,c)$.

c) En déduire la valeur de $D(a,b,c,d)$. Peut-on généraliser?

Exercice 3 On considère, pour le paramètre réel a le système :

$$(\textstyle\sum_n) \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + \alpha x_3 + x_4 & = & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & & \\ x_{n-2} + \alpha x_{n-1} + x_n & = & 0 \\ x_{n-1} + \alpha x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

Soit $\Delta_n(\alpha)$ le déterminant de $(\sum_n)$.

1) Ecrire la matrice de $(\sum_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$
Exprimer $\Delta_n(\alpha)$ en fonction de $\Delta_{n-1}(\alpha)$ et de $\Delta_{n-2}(\alpha)$.

2) Etablir que si $\Delta_n(\alpha) \neq 0$, en convenant que $\Delta_0(\alpha) = 1$ alors $x_k = (-1)^{k+1}\dfrac{\Delta_{n-k}(\alpha)}{\Delta_n(\alpha)}$ $\forall k \in [1;n]$

3) On suppose que $|\alpha| < 2$ et on pose $\alpha = 2\cos\theta$.
Calculer si possible $\Delta_n(\alpha)$ et x_k pour $n = 4$ et $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Donner alors les solutions de $(\sum_4)$.

57

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

UFR SFA	L2	Fiche de T D N° 4 D'Algèbre 1	2013 - 2014

Exercice 1

Soient E l'espace vectoriel des polynômes en X à coefficients réels de degré ≤ 2 et f l'application de E dans E définie par :

$f(P) = Q \; / \; Q(X) = (X^2 - 1)P'(X) - 2(X + \alpha)P(X)$, où P' est la dérivée de P et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer que f est une application $\mathbb{R}-$linéaire et déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres. En déduire que la matrice associée à f est semblable à une matrice diagonale.

Exercice 2

1) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -10 \\ -10 & 11 & 20 \\ 5 & -4 & -7 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) Sont-elles semblables à des matrices diagonales?

3) Calculer A^n.

Exercice 3

Calculer, à l'aide du Théorème de Hamilton-Cayley, l'inverse de la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 4

Réduire les matrices suivantes sur $\mathbb{C}$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -9 \\ -11 & 3 & 21 \\ 5 & -1 & -8 \end{bmatrix} \text{ et } A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

58

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

UFR SFA | L2 | Fiche de T D N° 5 D'Algèbre 1 | 2012 - 2013

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer les sous-espaces propres de A. Que peut-on conclure?

2. Soit f l'application linéaire de $E = \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée par rapport à la base canonique est A.

a) Determiner une base de $ker(f - 2Id_E)$ et une base de $ker(f - 3Id_E)$.

b) Expliciter une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 2

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ dans la base canonique.

1) Trouver les valeurs propres de A.
2) Montrer que A n'est pas diagonalisable. Est elle trigonalisable?
3) Déterminer les équations de ses sous espaces propres.
4) Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
5) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6) Résoudre le système suivant :

$$(\Sigma) \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 3x_2 - 3x_3 + t \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2e^t \\[2ex] \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 3t \end{cases}$$

58

...de l'Enseignement Supérieur
...de la Recherche Scientifique

...versité d'Abobo - Adjamé

République de Côte d'Ivoire
Union - Discipline - Travail

Abidjan, le ____________

UFR SFA | Examen de 1ère session d'Algèbre 1 SFA 2 | 2007- 2008

Durée 2h30

Exercice 1 (5.5 pts)

Soit G un groupe, A une partie non vide de G. On note $N(A) = \{g \in G; gAg^{-1} = A\}$ et $C(A) = \{g \in G; \forall a \in A; gag^{-1} = a\}$. Montrer que $N(A)$ et $C(A)$ sont des sous-groupes de G et que $C(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$.

Exercice 2 (5.5 pts)

Soit a un nombre réel non nul et $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

1) La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.

2) Montrer que A est semblable, dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, à $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (9 pts)

Soit u l'application linéaire de $E = \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée par rapport à la base canonique est

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1) Montrer que $\lambda = -1$ est une valeur propre de u.

2) Réduire la matrice M.

3) Déterminer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4) Résoudre le système : (Σ) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_3 + 2t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 - t \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$

N.B. Le sujet comporte une page
Aucune machine ou portable n'est autorisée.

60

de l'Enseignement Supérieur
la Recherche Scientifique

rsité d'Abobo - Adjamé

République de Côte d'Ivoire
Union - Discipline - Travail

Abidjan, le ....

UFR SFA | Examen de 1ère session d'Algèbre 1 SFA 2 | 2007- 2008

Durée 2h30

Exercice 1 (5.5 pts)

Soit G un groupe, A une partie non vide de G. On note $N(A) = \{g \in G; gAg^{-1} = A\}$ et $C(A) = \{g \in G; \forall a \in A; gag^{-1} = a\}$. Montrer que $N(A)$ et $C(A)$ sont des sous-groupes de G et que $C(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$.

Exercice 2 (5.5 pts)

Soit a un nombre réel non nul et $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

1) La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.

2) Montrer que A est semblable, dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, à $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (9 pts)

Soit u l'application linéaire de $E = \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée par rapport à la base canonique est

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1) Montrer que $\lambda = -1$ est une valeur propre de u.

2) Réduire la matrice M.

3) Déterminer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4) Résoudre le système : (Σ) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_3 + 2t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 - t \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$

N.B. Le sujet comporte une page
Aucune machine ou portable n'est autorisée.

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

République de Côte d'Ivoire
Union - Discipline - Travail

Université d'Abobo Adjamé

UFR SFA | Examen de 1ère session d'Algèbre 1 SFA 2 | 2008- 2009

Durée 2h30

2 **Exercice 1** (6 pts)

A) Soit G et G' deux groupes. Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe. Montrer que

1) L'image par f d'un sous-groupe distingué de G est un sous groupe distingué de $f(G)$.

2) L'image réciproque par f d'un sous-groupe distingué de G' est un sous groupe distingué de G. Que peut-on dire en particulier?

B) Soient $f \in End_K E$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ r valeurs propres de f 2 à 2 distinctes. Pour tout $i \in [[1, r]]$, on choisit $x_i \in E_{\alpha_i} \setminus \{\vec{0}\}$. Montrer que $(x_1, \cdots, x_r)$ est une famille libre.

Exercice 2 (7 pts)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1) Trouver les valeurs propres de A.

2) Montrer que A n'est pas diagonalisable. Est elle trigonalisable ?

3) Déterminer les équations de ses sous espaces propres.

4) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (7 pts)

Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

1) Réduire la matrice M.

2) Calculer M^n

3) Résoudre le système : (Σ) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 3x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_2 + x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$

N.B. Le sujet comporte une page

Aucune machine ou portable n'est autorisée.

67

ALABI CHRISTOPHE WABINS

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

République de Côte d'Ivoire
Union - Discipline - Travail

Université d'Abobo — Adjamé

UFR SFA

UFR SFA	Examen de 1ère session d'Algèbre I SFA 2	Durée 2h30	2009-2010

Exercice 1 (4 pts)

1) Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ 0 & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

En déduire la valeur de

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

Exercice 2 (6 pts)

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On note $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$.

1. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.
   En déduire que si H est distingué dans G alors HK est un sous-groupe de G.
2. Soit $f : H \times K \to G$ définie par $\forall x \in H, \forall y \in K : f(x,y) = xy$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un morphisme de groupes.
3. On suppose désormais que $\forall x \in H, \forall y \in K : xy = yx$.
   Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 3 (10 pts)

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ -24 & -11 & -12 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et diagonaliser A.

2) Calculer A^n pour tout n.

3) B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$? Justifier.

4) Réduire la matrice B.

5) Résoudre le système suivant :

$$(\Sigma) \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -24x_1 - 11x_2 - 12x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 - t \end{cases}$$

62

UFR SFA	EXAMEN D'ALGEBRE 1 DE 2ème SESSION	SFA 2	Durée:2h 30	2008-2009

(3)

Exercice 1 (4 points)

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

A) Que peut-on dire de l'image par f d'un sous-groupe distingué de G ? Justifier.

B) 1) Que peut-on dire de l'image réciproque par f d'un sous-groupe distingué de G'? Justifier.

2) Y a-t-il un cas particulier?

Exercice 2 (4 points)

1. Calculer le déterminant $\det \begin{pmatrix} n & & & (3) \\ & n-1 & & \\ & & \ddots & \\ (3) & & & 1 \end{pmatrix}$

2. Calculer $D = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et factoriser $D(x) = \det \begin{pmatrix} 2+x & 3 & 4 \\ 3 & 4+x & 5 \\ 4 & 5 & 6+x \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (12 points)

I) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice associée à un endomorphisme f dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f - 2Id_E) \oplus \ker(f - 4Id_E)$.
2. Montrer qu'il existe ~~une~~ AL matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale
3. Déterminer une base de $\ker(f - 2Id_E)$ et une de $\ker(f - 4Id_E)$ et expliciter une matrice P possible pour la question 2.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

II) Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Déterminer les sous espaces propres de B et montrer que B n'est pas diagonalisable.

2) Montrer que B est semblable à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III) Résoudre le système : $(\sum)$ $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -x_1 + 3x_2 + t \end{cases}$

N.B. Le sujet comporte une page, aucune machine ou portable n'est autorisée.

63

UFR SFA | L2 | Examen D'Algèbre 3 DE 1ère session | Durée totale : 3 h | SFA 2 | 2012-2013

UE1 Groupes et déterminant - semestre 3

Exercice 1 (10 points) (4)

A) Soient H et K deux sous-groupes distingués d'un groupe G.
$H \cap K$ est-il toujours un sous-groupe distingué de G? Justifier.

B) Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe. Que peut-on dire de l'image réciproque par f d'un sous-groupe distingué de G'? Justifier. Y a-t-il un cas particulier?

Exercice 2 (10 points) (5)

1. Quels sont les éléments du groupe symétrique sur un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ qui sont éléments du groupe alterné?

2. Le groupe alterné est-il distingué dans le groupe symétrique? Quel est son ordre? Justifier.

3. Calculer le déterminant d'ordre n suivant : $\Delta = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & & & (1) \\ 1 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 & 1 \\ & & & 1 & 3 & 1 \\ (1) & & & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

UE2 Réduction de matrices et applications - semestre 3

Exercice (20 points)

On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2, J^3; en déduire par récurrence J^k pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$.

2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

3. A est-elle diagonalisable? trigonalisable? si oui réduire A.

4. Montrer par deux méthodes que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité $A^n = 3^n I + \left(\frac{5^n - 3^n}{2}\right) J$.

5. Résoudre le système : $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + z \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y + t \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 4z + e^t \end{cases}$

64

UFR SFA | L2 | Examen D'Algèbre 3 DE 1ère session | 2013-2014

UE2 Réduction de matrices et applications - semestre 3

Durée : 1 h 30

Problème (20 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 12 & 6 & 61 \\ 6 & 3 & 30 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 12 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & 30 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 12 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$ Vraie

1) Déterminer les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

2) Réduire la matrice A si possible.

3) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4) Résoudre le système suivant : (Σ) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 - 2x_3 + t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 12x_1 + 6x_2 + 61x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 6x_1 + 3x_2 + 30x_3 - t \end{cases}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 12 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Σ) $\left\{ \begin{array}{l} 12x_1 - x_2 - x_3 \\ x_3 - t \end{array} \right.$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 - 2x_3 + t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 12x_1 - x_2 - x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_3 - t \end{cases}$$

65

MON UE : UN PASSEPORT

Correction d'analyse 3

ne Jeunesse onsciente Et tellectuelle

ETUDIANT, UN DOCUMENT

EDITEURS

BERTE OUSMANE L3

BAKAYOKO AMARA L2

09110313 / 77018403

berteousmane2012@hotmail.fr

Correction

Exercice 1:

1. (i) La fonction $t \to \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0;1[$ donc le problème se pose uniquement en 1.

   (ii) On pose $x \in [0;1[$: $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x = -2\sqrt{1-x}+2$

   (iii) On a donc $\displaystyle\lim_{x\to1}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \lim_{x\to1} -2\sqrt{1-x}+2 = 2$

   (iv) Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ est convergente et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2$.

2. (i) La fonction $t \to \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

   (ii) On pose $x \in [1;+\infty[$: $\displaystyle\int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2(1+t^2)}\right]_1^x = -\frac{1}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}$

   (iii) On a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

   (iv) Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{1}{4}$.

3. (i) La fonction $x \to xe^{-x^2}$ est continue sur $]-\infty;0]$ donc le problème se pose uniquement en $-\infty$.

   (ii) On pose $A \in]-\infty;0]$: $\displaystyle\int_A^0 xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_A^0 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-A^2}$

   (iii) On a donc $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\int_A^0 xe^{-x^2}\,dx = \lim_{A\to-\infty} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-A^2} = -\frac{1}{2}$

   (iv) Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}$.

4. (i) La fonction $t \to 1$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

   (ii) On pose $x \in [0;+\infty[$: $\displaystyle\int_0^x 1\,dt = [t]_0^x = x$

   (iii) On a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x 1\,dt = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

   (iv) Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\,dt$ est divergente.

5. (EML 2004)

   (i) La fonction $t \to \dfrac{1}{3^t}$ est continue sur $[2;+\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

   (ii) On pose $x \in [2;+\infty[$: $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{3^t}\,dt = \int_2^x e^{-t\ln 3}\,dt = \left[-\frac{1}{\ln 3}e^{-t\ln 3}\right]_2^x = -\frac{1}{\ln 3\times 3^x}+\frac{1}{9\ln 3}$

   (iii) On a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{1}{3^t} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\ln 3\times 3^x}+\frac{1}{9\ln 3} = \frac{1}{9\ln 3}$

   (iv) Donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,dt = \frac{1}{9\ln 3}$.

66

6. (ECRICOME 2007)

(i) La fonction $x \to xe^{-x}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

(ii) On pose $A \in [0;+\infty[$, par intégration par parties on a :

$$\int_0^A xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^A + \int_0^A e^{-x}\,dx = -Ae^{-A} + \left[-e^{-x}\right]_0^A = -Ae^{-A} - e^{-A} + 1$$

(iii) On a donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A xe^{-x}\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty} -Ae^{-A} - e^{-A} + 1 = 1$

(iv) Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1$.

Exercice 2:

1. (i) La fonction $x \to \sqrt{\dfrac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

(ii) Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{2x+3}{5x^3+3x^2+7} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{5x^3} = \dfrac{2}{5x^2}$. On a donc $\sqrt{\dfrac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{5}}\dfrac{1}{x}$.

(iii) Or on sait que $\int_1^{+\infty} \sqrt{\dfrac{2}{5}}\dfrac{1}{x}\,dx$ est divergente donc, d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \sqrt{\dfrac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$ est divergente.

(iv) En conclusion, $\int_0^1 \sqrt{\dfrac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$ est convergente (car $x \to \sqrt{\dfrac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}$ est continue sur $[0;1]$) et $\int_1^{+\infty} \sqrt{\dfrac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$ est divergente. Donc $\int_0^{+\infty} \sqrt{\dfrac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$ est divergente.

2. (i) La fonction $x \to \dfrac{x-5}{x^2+4x+4}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

(ii) Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{x-5}{x^2+4x+4} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$.

(iii) Or on sait que $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x}\,dx$ est divergente donc, d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \dfrac{x-5}{x^2+4x+4}\,dx$ est divergente.

(iv) En conclusion, $\int_0^1 \dfrac{x-5}{x^2+4x+4}\,dx$ est convergente (car $x \to \dfrac{x-5}{x^2+4x+4}$ est continue sur $[0;1]$) et $\int_1^{+\infty} \dfrac{x-5}{x^2+4x+4}\,dx$ est divergente. Donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{x-5}{x^2+4x+4}\,dx$ est divergente.

3. (i) La fonction $x \to \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ est continue sur $]0;+\infty[$. Nous avons donc ici deux problèmes, en 0 et en $+\infty$. Nous allons donc étudier la convergence de $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x^2+1}\,dx$ et de $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2+1}\,dx$.

(ii) En 0 : Attention $\dfrac{\ln(x)}{x^2+1}$ n'est pas positive sur $]0;1]$.

- On a $\left|\dfrac{\ln x}{x^2+1}\right| \underset{x\to 0}{\sim} |\ln x| = -\ln x$.

67

• Or $\int_0^1 \ln x \, dx$ est convergente (cf. cours, on sait même la calculer) donc, d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_0^1 \left|\frac{\ln x}{x^2+1}\right| dx$ est convergente et par conséquent $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1} dx$ est convergente.

(iii) En $+\infty$:

• On a $\frac{\ln x}{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^2}$. Or on sait que, au voisinage de $+\infty$, $\ln(x) = o(\sqrt{x})$ donc $\frac{\ln(x)}{x^2} = o\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right) = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

• On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ est convergente, car c'est une intégrale de Riemann et $\frac{3}{2} > 1$ donc, d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ est convergente et par conséquent, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx$ est convergente.

(iv) En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx$ est convergente.

4. (i) La fonction $u \to e^{-u^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

(ii) Or on a, au voisinage de $+\infty$, $e^{-u^2} = o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ car $\lim_{u\to+\infty} u^2 e^{-u^2} = 0$ car d'après le cours $x = o(e^x)$ en $+\infty$.

(iii) Or on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$ est convergente (intégrale de Riemann avec $2 > 1$) donc, d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} e^{-u^2} du$ est convergente.

(iv) En conclusion $\int_0^1 e^{-u^2} du$ est convergente (car $u \to e^{-u^2}$ est continue sur $[0;1]$) et $\int_1^{+\infty} e^{-u^2} du$ est convergente. Donc $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ est convergente.

5. (i) La fonction $x \to \frac{2+\ln x}{x+4}$ est continue sur $]0;+\infty[$. Nous avons donc ici deux problèmes, en 0 et en $+\infty$. Nous allons donc étudier la convergence de $\int_0^1 \frac{2+\ln x}{x+4} dx$ et de $\int_1^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x+4} dx$.

(ii) En 0 :

• On a $\left|\frac{2+\ln x}{x+4}\right| \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{4}|\ln x| = -\frac{1}{4}\ln x$.

• Or $\int_0^1 \ln x \, dx$ est convergente (cf. cours) donc, d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_0^1 \left|\frac{2+\ln x}{x+4}\right| dx$ est convergente et par conséquent $\int_0^1 \frac{2+\ln x}{x+4} dx$ est convergente.

(iii) En $+\infty$:

• On a $\frac{2+\ln x}{x+4} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$.

• Or $\int_1^A \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^A = \frac{(\ln A)^2}{2}$.

68

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\ln x}{x}\,dx = +\infty$, $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx$ est divergente et ainsi, d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{2+\ln x}{x+4}\,dx$ est divergente.

(iv) En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{2+\ln x}{x+4}\,dx$ est divergente.

6. (i) La fonction $t \to \frac{1}{t^2-t}$ est continue sur $]1;2]$ donc le seul problème se pose en 1.

(ii) Au voisinage de 1, $\frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{t(t-1)} \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{t-1}$.

(iii) Or pour tout $1 < x < 2$, $\int_x^2 \frac{1}{t-1}\,dt = -\ln(x-1)$, donc $\lim\limits_{x\to1}\int_x^2\frac{1}{t-1}\,dt = +\infty$. Ainsi $\int_1^2 \frac{1}{t-1}\,dt$ est divergente et donc, d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, l'intégrale $\int_1^2\frac{1}{t^2-t}\,dt$ est divergente.

(iv) En conclusion l'intégrale $\int_1^2\frac{1}{t^2-t}\,dt$ est divergente.

7. (i) La fonction $t \to \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}$ est continue sur $]0;1]$ donc le seul problème se situe en 0.

(ii) Or au voisinage de 0, $\frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}} \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}}$ car $t^3+3t^2+t \underset{t\to0}{\sim} t$.

(iii) De plus comme $\frac{1}{2} < 1$ on sait d'après le cours que $\int_0^1\frac{1}{t^{1/2}}\,dt$ est convergente. Donc, d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}\,dt$ est convergente.

(iv) En conclusion $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}\,dt$ est convergente.

8. (i) La fonction $x \to \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est continue sur $[1;+\infty[$ donc le seul problème se situe en $+\infty$.

(ii) On sait que $\ln(1+X) \underset{X\to0}{\sim} X$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$, on a $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

(iii) Or comme $2 > 1$, d'après le cours, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ est convergente et donc, d'après les critères de convergence sur les fonctions positives, $\int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$ est convergente.

(iv) En conclusion $\int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$ est convergente.

Exercice 3:

1. La fonction f est continue sur $[2;+\infty[$. Le problème se pose donc uniquement en $+\infty$.

On remarque que f est de la forme « $\frac{u'}{u^2}$ » donc on va ici utiliser la méthode du calcul pour trouver la nature de l'intégrale.

Soit $A > 2$: $\int_2^A f(t)\,dt = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^A = -\frac{1}{\ln A}+\frac{1}{\ln 2}$.

On a donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_2^A f(t)\,dt = \frac{1}{\ln 2}$ et donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

69

2. f est dérivable sur $[2;+\infty[$ et $f(t) = \dfrac{-(\ln t)^2 - 2\ln t}{t^2(\ln t)^4} = \dfrac{-\ln t(\ln t + 2)}{t^2(\ln t)^4} = \dfrac{-(\ln t + 2)}{t^2(\ln t)^3}$.

   On voit donc que f est décroissante sur $[2;+\infty[$ et on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$f(2) \searrow 0$

3. On a donc grâce aux questions précédentes que f est une fonction continue, décroissante et positive sur $[2;+\infty[$. Ainsi d'après le théorème de comparaison séries-intégrales, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$, c'est-à-dire que la série est convergente.

4. Il suffit de refaire les mêmes questions avec $g(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$

Exercice 4:

1. On remarque ici que f est de la forme « $u'e^u$ » donc nous allons ici utiliser le calcul pour trouver la nature de l'intégrale.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. La fonction f est continue sur $[n;+\infty[$ donc le seul problème se situe en $+\infty$.

   Soit $A > n$: $\displaystyle\int_n^A f(x)\,dx = \left[-e^{1/x}\right]_n^A = -e^{1/A} + e^{1/n}$

   On a donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_n^A f(x)\,dx = e^{1/n} - 1$ et donc l'intégrale I_n est convergente et $I_n = e^{1/n} - 1$.

2. On sait que $e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ on a $e^{1/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ ce qui signifie que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

3. Nous allons ici utiliser le théorème de comparaison série-intégrale.

   f est bien une fonction continue et positive sur $[1;+\infty[$. De plus comme la fonction $x \to \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[1;+\infty[$ et que la fonction exponentielle est croissante, on a $x \to e^{1/x}$ qui est décroissante sur $[1;+\infty[$. On a aussi $x \to \dfrac{1}{x^2}$ qui est décroissante sur $[1;+\infty[$ donc f est décroissante sur $[1;+\infty[$.

   On a montré que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente donc d'après le théorème de comparaison série-intégrale, la série $\sum\limits_{n\geqslant1} f(n)$ est convergente.

Exercice 5:

1. Déterminer l'ensemble de définition de f signifie qu'il faut trouver les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,dt$ est convergente.

   Quelle que soit la valeur de x, la fonction $t \to \dfrac{t^{-x}}{1+t}$ est continue sur $[1;+\infty[$ donc le seul problème se situe en $+\infty$. Or en $+\infty$, $\dfrac{t^{-x}}{1+t} \sim \dfrac{t^{-x}}{t} = \dfrac{1}{t^{x+1}}$.

70

On voit donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,dt$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}\,dt$ et donc d'après le cours cette intégrale est convergente si et seulement si $x+1>1$ c'est-à-dire $x>0$.
f est donc définie sur $]0;+\infty[$.

2. Soient x et y deux réels strictement positifs et $t \geqslant 1$ (on a donc $\ln(t) \geqslant 0$) :

$$x \leqslant y \Rightarrow -x \geqslant -y \Rightarrow -x\ln(t) \geqslant -y\ln(t) \Rightarrow e^{-x\ln(t)} \geqslant e^{-y\ln(t)} \Rightarrow t^{-x} \geqslant t^{-y} \Rightarrow \frac{t^{-x}}{1+t} \geqslant \frac{t^{-y}}{1+t}$$

On peut donc en déduire que pour tout $A>1$, on a $\displaystyle\int_1^{A} \frac{t^{-x}}{1+t}\,dt \geqslant \int_1^{A} \frac{t^{-y}}{1+t}\,dt$ et donc en passant à la limite quand A tend vers $+\infty$ on obtient $f(x) \geqslant f(y)$.
On a donc montré que si $x \leqslant y$ alors $f(x) \geqslant f(y)$, c'est-à-dire que f est décroissante.

3. On a $f(x)+f(x+1) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}+t^{-x-1}}{1+t}\,dt = \int_1^{+\infty} t^{-x-1}\frac{t+1}{1+t}\,dt = \left[-\frac{1}{x}t^{-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}$.

• On sait que f est un fonction décroissante et minorée par 0 donc elle admet en $+\infty$ un limite finie ℓ. En passant à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente on obtient : $\ell+\ell=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

• On a $\lim\limits_{x\to 0}\,(f(x)+f(x+1)) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)+f(1)$
De plus d'après l'égalité du début de la question $\lim\limits_{x\to 0} f(x)+f(x+1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

71

1

INTEGRALES GENERALISEES

ESSO MODESTE L2

IG

EXO 1

1) $\int_0^{1} \ln x\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$ $(x \in]0;1])$

le problème s'oppose en 0 car $f(x)$ n'est pas définie en 0.

f continue en 0.

trouve au point 0 :

soit $\alpha = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}} \ln x = 0$

donc $\int_0^1 \ln x\,dx$ Converge.

$\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ $(a \in \mathbb{R})$

posons $f(x) = e^{-ax}$, $x \in [0;+\infty[$.

f est continue sur $[0;+\infty[$ donc le problème se trouve en $+\infty$.

soit $t \in [0;+\infty[$

$\varphi(t) = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t e^{-ax}dx$

$\varphi(t) = \begin{cases} [x]_0^t & \text{si } \alpha = 0 \quad (1) \\ [-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}]_0^t & \text{si } \alpha \neq 0 \quad (2) \end{cases}$

1er cas $\alpha = 0$

$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to+\infty} t = +\infty$ dc dans ce cas

$\int^{+\infty} e^{-ax}dx$ diverge.

1

2e cas $\alpha \neq 0$

$\varphi(t) = \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]_0^t = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha}$ | $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha f$

si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{t \to +\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$ | $\int_0 f(x)\,d$

dc ds ce cas $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx$ converge. | st de

si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{t \to +\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha}\right) = -\infty$

ds ce cas $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx$ diverge.

En définitive $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx$ converge ssi $\alpha > 0$.

) soit $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$ et $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x \in [1$

le problème se trouve en $+\infty$.

soit $\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow x^{\frac{3}{2}}f(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}}f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

donc I converge.

) soit $I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ et $f(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2}$

f est continue sur $[0;+\infty[$

Le problème se pose en $+\infty$.

Soit $t \in [0;+\infty[$ et $\varphi_1(t) = \int_0^t f(x)dx = \left[\frac{1}{2}(\arctan\right.$

$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}(\arctan(t))^2$

$\lim \varphi_1(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{2}(\arctan t)^2 = \frac{\pi^2}{8}$ donc I_4 c

5) $\int_0 \sqrt{\tan x}\,dx$; soit $f(x) = \tan x$ $(x \in [0;\frac{\pi}{2}[)$

est continue sur $[0;\frac{\pi}{2}[$ donc le problème est en $\frac{\pi}{2}$.

$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\,dx$ posons $u = \sqrt{\tan x}$

$$du = \frac{(1+\tan^2 x)}{2\sqrt{\tan x}}dx = \frac{1+u^4}{2u}dx$$

$\Rightarrow dx = \frac{2u\,du}{1+u^4}$

$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4}du$ $\left(\frac{2u^2}{1+u^4} \sim \frac{2}{u^2}\right)$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4}du$ converge d'où $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\,dx$ converge.

$\int_0^1 e^{\frac{1}{x}}dx$, soit $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; $x \in]0;1]$

le problème est en 0.

Posons $X = \frac{1}{x}$ et $dX = -\frac{1}{x^2}dx = -X^2 dx$

$x \to 1$ $X \to 1$ et $x \to 0$ $X \to +\infty$

$\int e^{\frac{1}{x}}dx = \int_0^1 -\frac{1}{X^2}e^X dX = \int_1^{+\infty} \frac{1}{X^2}e^X dX$

soit $\alpha = 2$

$\lim_{x \to +\infty} x^2 f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^X = +\infty$ donc $\int_0^1 e^{1/x}dx$ diverge.

7) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}dx$; $f(x) = \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}$, $x \in]0;+\infty[$

f est continue sur $]0;+\infty[$ et le problème est en 0 et en $+\infty$

Considérons les 2 intégrales suivantes:

Si une est divergente alors les 2 sont divergentes.

2

$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ et $\int_1 \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

Etudions les convergences

$\int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}\,dx$; on a : $\left|\cos(\frac{1}{x})\right| \leq 1$ $(x \in]0;1])$

donc $\left|\frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge dc $\int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}$

est absolument convergente.

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}\,dx$; on a : $\frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} > 0$ car $\frac{1}{x} \in]0;1] \subset]0;$

en $+\infty$ $\cos(\frac{1}{x}) \sim 1$

$\Rightarrow \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge donc

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge~~nte~~

<u>Conclusion</u> $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge.

) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{E(x)}}\,dx$; $f(x) = \frac{1}{x^{E(x)}}$; $x \in [1;+\infty[$

f est continue sur $[1;+\infty[$ par morceaux. Dc le problème se pose en $+\infty$.

Pour $x \geq 2$, $E(x) \geq 2$ donc $x^{E(x)} \geq x^2$ d'où $\frac{1}{x^{E(x)}} \leq \frac{1}{x^2}$

or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, donc $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{E(x)}}\,dx$ converge.

Enfin $\int^{+\infty} \frac{1}{x^{E(x)}}\,dx$ converge.

5) $\int_1 \frac{x^{\ln x}}{e^x}dx$ et $f(x) = \frac{x^{\ln x}}{e^x} = \frac{e^{(\ln x)^2}}{e^x} = e^{(\ln x)^2 - x}$ ...

$\in [1;+\infty[$. f est continue sur $[1;+\infty[$ et le problème en $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{(\ln x)^2 - x + 2\ln x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left[\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 - 1 + 2\frac{\ln x}{x}\right]}$

$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$ dc $\int_1^{+\infty} \frac{x^{\ln x}}{e^x}dx$ est convergente.

$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1-x}dx$; $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{1-x}$

est continue sur $]0;1[$ dc le problème se pose en 0 et en 1.

Soit $c = \frac{1}{2}$; on aura les 2 intégrales :

$\int_0^{1/2} \frac{(\ln x)^2}{1-x}dx$ et $\int_{1/2}^1 \frac{(\ln x)^2}{1-x}dx$

On a : $\frac{(\ln x)^2}{1-x} \underset{0}{\sim} (\ln x)^2$

$\lim_{x\to 0} (\ln x)^2 x^{\frac{1}{2}} = \lim_{x\to 0} (x^{\frac{1}{4}}\ln x)^2 = 0$ donc $\int_0^{1/2} \frac{(\ln x)^2}{1-x}dx$ CV.

$\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^2}{1-x} = \lim_{x\to 1} \ln x \frac{\ln x}{1-x} = 0$ donc la fonct° est prolongeable par continuité en 1 par suite $\int_{1/2}^1 \frac{(\ln x)^2}{1-x}dx$ CV

Enfin $\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1-x}dx$ converge.

(3)

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2-1}}dx$, $f(x) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2-1}}$ ($]1;+\infty[$)

est continue sur $]1;+\infty[$ et le problème est en 1 et en $+\infty$

[illegible]ons $\int_1 \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2-1}}dx$ et $\int_2 \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2-1}}dx$

Au voisignage de $\underline{1}$; on a, $\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}$

$$\underset{1}{\sim} \frac{\ln 2}{\sqrt{2(x-1)}}$$

$$= \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

se $\int_1^2 \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2-1}}dx$ converge.

Au voisinage de $+\infty$

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2}$$

d'où $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2-1}}dx$ converge.

<u>Conclusion</u>

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2-1}}dx$ converge.

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{e^x-1}dx$, La fonct° à intégrer est cont

sur $]0;+\infty[$ et le problème se pose en 0 et en $+\infty$.

Considérons : $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\ln x}{e^x-1}dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{e^x-1}dx$.

Au voisinage de 0, on a :

$$\lim_{x\to 0} x^{2/3}\left(\frac{\sqrt{x}\ln x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/6}\ln x}{e^x-1} = 0$$

don $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\ln x}{e^x-1}dx$ converge.

Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\sqrt{x}\ln x}{e^x-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}\ln x}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\frac{\sqrt{x}\ln x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} x^2\frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}\times\frac{\ln x}{x} = 0$$

Donc $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln x}{e^x-1}dx$ converge.

<u>Conclusion</u> $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln x}{e^x-1}dx$ converge.

<u>EXERCICE 2</u>

Soit $f(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$, $x\in]0;1[$

f est continue sur $]0;1[$.

Considérons les 2 intégrales suivantes :

$\int_0^{1/2}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ et $\int_{1/2}^{1}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$

Etudions les convergences :

$\int_0^{1/2}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$; on a $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2} = -1$ donc

la fonct° f est prolongeable par continuité en 0. Par

suite $\int_0^{1/2}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ converge.

$\int_{1/2}^{1}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$; on a $\lim_{\substack{x\to1\\<}}(1-x)^{1/2}\left[\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\right]$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{(1-x)^{1/2}\ln(1-x)+(1-x)^{1/2}\ln(1+x)}{x^2} = 0$$

donc $\int_{1/2}^{1}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ converge.

<u>Conclusion</u>

$\int_0^1\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ converge.

4

* Calculons sa valeur

$I = \int \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ Posons $u = \ln(1-x^2) \rightarrow u' = \frac{-2x}{1-x^2}$

$v' = \frac{1}{x^2} \longrightarrow v = -\frac{1}{x}$

$I = \left[-\frac{\ln(1-x^2)}{x}\right] - \int \frac{1}{x}\frac{2x}{(1-x^2)}dx$

$= -\frac{\ln(1-x^2)}{x} - 2\int \frac{1}{1-x^2}dx = -\frac{\ln(1-x^2)}{x} - \int\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)d$

$= -\frac{\ln(1-x^2)}{x} + \ln(1-x) - \ln(1+x)$

$I = -\frac{\ln(1-x^2)}{x} - \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx = \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to 1}} \int_a^b \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$

$= \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to 1}} \left[-\frac{\ln(1-x^2)}{x} - \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_a^b$

$= \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to 1}} \left[-\frac{\ln(1-b^2)}{b} - \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right) + \frac{\ln(1-a^2)}{a} + \ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\right.$

$= \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to 1}} \left[\left(\frac{b-1}{b}\right)\ln(1-b) - \left(\frac{1}{b}+1\right)\ln(1+b) + \frac{\ln(1-a^2)}{a} + \right.$

$= -2\ln 2.$

2) a) soit $f(x) = \frac{x\ln x}{(1+x^2)^\alpha}$

f est 1 polynôme par continuité sur $[0;+\infty[$ car $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, Le problème se trouve en $+\infty$.

Si $\alpha > 0 \Rightarrow f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^{2\alpha-1}}$

a) $\lim_{x \to +\infty} x f(x) = \lim_{x\to+\infty} x \frac{\ln x}{x^{2\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{2\alpha-\beta-1}}$

Pour $\alpha > 1$. Choisissons β tq $1 < \beta < 2\alpha - 1$.

On a : $\lim_{x\to+\infty} x^\beta f(x) = 0$, De $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha} dx$ CV,

pour $\alpha > 1$.

Pour $0 < \alpha < 1$, Choisissons $1 > \beta > 2\alpha - 1$

On a : $\lim_{x\to+\infty} x^\beta f(x) = +\infty$, Donc $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha} dx$ DV,

pour $0 < \alpha < 1$.

$\alpha \leq 0 \Rightarrow f(x) = (1+x^2)^{-\alpha} x \ln x \underset{+\infty}{\sim} x^{-2\alpha+1} \ln x$

$\lim_{x\to+\infty} x^\beta f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^\beta x^{-2\alpha+1} \ln x$

* pour $\beta = 0$:

$\lim_{x\to+\infty} x^\beta f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{-2\alpha+1} \ln x = +\infty$, Dc $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha} dx$

diverge pour ~~$\beta = 0$~~ $\alpha \leq 0$

Conclusion

$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha} dx$ converge ssi $\alpha > 1$.

b) Calculons I_2 et I_3.

Soit $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha} dx$.

$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$

Posons $u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -u^2 dx$

$$I_2 = \int_0 \frac{-\ln(u)}{u^3\left(\frac{u^2+1}{u^2}\right)^2}du = \int_0 \frac{-u\ln u}{(1+u^2)^2}du$$

$$I_2 = -I_2 \Rightarrow 2I_2 = 0 \Rightarrow \boxed{I_2 = 0}$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}dx$$

Posons $f(x) = \ln x$ et $g'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{(1+x^2)^3}$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x^2)^2}$

$$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}dx = -\frac{\ln x}{4(1+x^2)^2} + \int \frac{1}{4x(1+x^2)^2}dx$$

posons $\frac{1}{x} = u$ pour calculer $\int \frac{1}{x(1+x^2)^2}dx$

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)^2}dx = -\int \frac{u}{u^2\left(\frac{1+u^2}{u^2}\right)^2}du = -\int \frac{u^3}{(1+u^2)^2}du$$

$$= -\int u^2\frac{u}{(1+u^2)^2}du$$

posons $u(u) = u^2 \Rightarrow u'(u) = 2u$

$v'(u) = \frac{1}{2}\frac{2u}{(1+u^2)^2} \Rightarrow v(u) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1+u^2)}$

$$-\int \frac{u^3}{(1+u^2)^2}du = \frac{1}{2}\frac{u^2}{(1+u^2)} - \int \frac{u}{1+u^2}du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u^2}{(1+u^2)} - \frac{1}{2}\ln(1+u^2)$$

En remplaçant u par $\frac{1}{x}$

$$\int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{8}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right.$$

$$\int f(x)dx = -\frac{1}{4}\times\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{8(1+x^2)}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)$$

$$I_3 = \lim_{x\to+\infty}\int f(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{8(1+x^2)}-\frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)-\ln x^2\right]\right)$$

$$I_3 = -\frac{1}{8}+\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{4}\ln x^2\right)$$

$$= -\frac{1}{8}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{4(1+x^2)^3}\left(-(1+x^2)\ln x+(1+x^2)^3\ln x\right)$$

$$= -\frac{1}{8}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{4(1+x^2)^3}\left(-\ln x-x^2\ln x+(1+3x+3x^2+x^3)\ln x\right)$$

$$= -\frac{1}{8}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{4(1+x^2)^3}\left(x^2\ln x+3x\ln x+x^3\ln x\right)$$

$$\boxed{I_3 = -\frac{1}{8}}$$

4) $I_n = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}dx \quad n\in\mathbb{R}^*$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a_1}{(x+1)}+\frac{a_2}{(x+2)} \quad ; \quad a_1 = \left.\frac{\quad}{x+2}\right|_{x=-1}$$

I_n CV ssi $n>1$.

decomposons en element simple

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x+k} \text{ avec } a_k = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)\cdots(x+n)}$$

$x=-k \quad a_k = \frac{1}{(1-k)(2-k)\cdots(n-k)} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(n-k)!}$

$$\int_0^X\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}dx = \int_0^X\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x+k}dx$$

$$= \sum_{1}^{n}\int_0^X\frac{a_k}{x+k}dx = \sum_{1}^{n}\Big[\ln|x+k|\Big]_0^X a_k$$

$$\int_0 \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}dx = \sum_{k=1} a_k\left(\ln(\cancel{x}+k)-\ln(k)\right)$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{n} a_k \ln x + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \ln\left(\cancel{1}+\frac{k}{x}\right)-a_k \ln k\right)\right.$$

$$\text{avec } \sum_{k=1}^{n} a_k = 0$$

$$\frac{x}{(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k x}{x+k}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to+\infty} \frac{a_k x}{x+k}$$

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\text{donc } \int_0^X \frac{1}{(x+1)\cdots(x+n)}dx = \sum_{k=1}^{n} a_k\left(\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)-\ln k\right)$$

$$I_n = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{dx}{(x+1)\cdots(x+n)} = \lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k \ln\left(1+\frac{k}{x}\right)-a_k\right.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} -a_k \ln k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k} \ln k}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

RAS

II). <u>EXO 3</u>

1) $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$

soit $f(x) = \ln(\sin x)$ $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$

Le problème se pose en 0, au voisinage de 0

$\sin x \sim x$. De $\ln(\sin x) \underset{0}{\sim} \ln x$.

$I = \int_0^{\pi/2} \ln x \, dx$ ~~$= [\ ]_0^{\pi/2} = \ldots$~~

donc I converge.

2) Montrons q $J = 2I$ avec $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x \sin x)\,dx$

$J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} [\ln \cos x + \ln \sin x]\,dx$

posons $u = \frac{\pi}{2} - x$; $\cos(\frac{\pi}{2} - u) = \sin u$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln \sin u \, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\frac{\pi}{2} - x))\,dx$

$= I$

$J = \int_0^{\pi/2} \ln \sin u \, du + I. = 2I$

3) Calculons I.

Determinons $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x \sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx$

$= \int_0^{\pi/2} (\ln \sin 2x - \ln 2)\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2$

posons $K = \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx$

posons $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$

7

$K = \int_0 \ln(\sin u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\, du$

Posons $t = \frac{\pi}{2} - u \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} - t$

$K = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\pi/2} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)\frac{dt}{2}$

$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\cos t)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln($

Posons $v = -t \Rightarrow dt = -dv$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\cos t)\, dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\cos(-v))\, dv = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos v)\, dv$

d'où $K = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\, dt$

$= \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\, dt$

Alors $J = I - \frac{\pi}{2}\ln(2) \Leftrightarrow 2I = I - \frac{\pi}{2}\ln(2)$

$\Leftrightarrow \boxed{I = -\frac{\pi}{2}\ln(2)}$

RAS

Ex 04

1) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta} dx$, $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$.

soit $f(x) = \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$; $x \in]0;+\infty[$.

f est continue sur $]0;+\infty[$.

Soit $\phi_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta} dx$ ①

$\phi_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta} dx$ ②

pour $\alpha = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\ln(2)}{x^\beta}$

$\phi_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln 2}{x^\beta} dx$ converge ssi $\beta < 1$.

ϕ_2 converge ssi $\beta > 1$.

I diverge pour $\alpha = 0$, $\forall \beta$.

pour $\alpha > 0 \Rightarrow f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$

ϕ_1 converge ssi $\beta - \alpha < 1$ et $f(x) = \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$

$f(x) = \frac{\ln x^\alpha + \ln\left(\frac{1}{x^\alpha}+1\right)}{x^\beta} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha \ln x}{x^\beta}$

$x^\gamma f(x) = \frac{\alpha \ln x}{x^{\beta-\gamma}} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x^\gamma f(x) = 0$

pour $\beta > 1$, en choisissant $1 < \gamma < \beta$ on a :

ϕ_2 converge.

Pour $\beta \leq 1$ en choisissant $\beta < \gamma \leq 1$ on

$\lim x^\gamma f(x) = +\infty$

8

ϕ_2 converge.

D'où I converge ssi $\alpha > 0$, $\beta - \alpha < 1$ et $\beta > 1$.

pour $\alpha < 0$

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^{\alpha})}{x^{\beta}} = \frac{\ln\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}\right)}{x^{\beta}} \underset{0}{\sim} \frac{-\alpha \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{\beta}}$$

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\alpha \ln x}{x^{\beta}} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} x^{\gamma} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha x^{\gamma} \ln x}{x^{\beta}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \alpha x^{\gamma - \beta} \ln x$$

pour $\beta < 1$ en choisissant $1 > \gamma > \beta$ on a :

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\gamma} f(x) = 0$ et ϕ_1 converge pour $\beta < 1$.

pour $\beta \geq 1$, en choisissant $1 \leq \gamma < \beta$ on a :

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\gamma} f(x) = +\infty$ et ϕ_1 diverge

pour $+\infty \Rightarrow f(x) = \frac{\ln(1+x^{\alpha})}{x^{\beta}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} = \frac{1}{x^{\beta - \alpha}}$

ϕ_2 converge ssi $\beta - \alpha > 1$.

d'où I converge ssi $\alpha < 0$; $\beta < 1$ et $\beta - \alpha > 1$.

<u>Conclusion</u> I converge ssi ($\alpha > 0$; $\beta - \alpha < 1$ et

2) $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}} dx$; $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $f(x) = \frac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$.

Considérons de les intégrales :

$I_1 = \int_0^1 \frac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}} dx$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}} dx$.

pour $\beta = 0$

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{2} = \frac{1}{2x^{-\alpha}}$$

I_1 converge ssi $-\alpha < 1$

I_2 converge ssi $-\alpha > 1$.

dc I ne converge pas.

pour $\beta > 0$

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^\alpha}{1} = x^\alpha$$

I_1 converge ssi $\alpha > -1$, $\beta > 0$

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$$

I_2 converge ssi $\beta - \alpha > 1$ et $\beta > 0$

I converge pour $\beta > 0$, $\beta - \alpha > 1$ et $\alpha > -1$.

pour $\beta < 0$

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^\alpha}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{-\beta}} \underset{0}{\sim} \frac{x^\alpha}{\left(\frac{1}{x}\right)^{-\beta}} \underset{0}{\sim} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$$

I_1 converge ssi $\beta - \alpha < 1$

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^\alpha$$

I_2 converge ssi $\alpha < -1$.

I converge pour $\beta < 0$, $\alpha < -1$ et $\beta - \alpha < 1$

I converge ssi $(\beta < 0,\ \alpha < -1,\ \beta - \alpha < 1)$

$\boxed{I \text{ converge ssi } (\beta > 0,\ \alpha > -1 \text{ et } \beta - \alpha > 1)}$

9

Séries numériques 11)

EXO 4 Déterminons la nature [illegible] de terme général suivant :

$U_n = (-1)^n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ or $\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \times \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n}$

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} e^{-n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \frac{1}{n+1} e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

- $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

$$-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

- $e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-1} e^{\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

$$e^{\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\Rightarrow U_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1} e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{(-1)^n}{n+1} e^{\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$

$$= \frac{(-1)^n}{(n+1)e} + \frac{(-1)^n}{2(n+1)ne} + \frac{(-1)^n}{n(n+1)e}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

10

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

i) la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

et $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_n$ est décroissante.

ii) la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ est absolument convergente

$\left|\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}\right| = \dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$

• ii) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{E}(\frac{1}{n})=0$, il $\exists$ $c>0$ tq $\forall n\in$
$|\mathcal{E}(\frac{1}{n})|\leq c$, donc $\left|\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\mathcal{E}(\frac{1}{n})\right|\leq c\,\frac{1}{n(n+1)}$

or $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ est CV donc $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ converge absolum

Conclusion $\sum\limits_{n\geq 1} U_n$ est convergente comme la somme de trois séries convergentes.

$$U_n=\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}=\frac{(-1)^n}{n\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)}=\frac{\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}}$$

$$=\frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)^{-1}=\frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{(-1)^{2n+1}}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

• $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ série alternée convergente car $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to]{}$ et $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

• $\sum\frac{1}{n^2}$ CV car $2>1$.

$U_n-\frac{1}{n^2}-\frac{(-1)^n}{n}=o\left(\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\left|U_n-\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n^2}\right|\leq c\,\frac{1}{n^2}$

$\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ CV, donc $\sum\left(U_n-\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$ CV. par conséquent

$\sum\limits_{n\geq 1}U_n$ CV.

$u_n = \ln(n)\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\ln n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^n \ln n}{n} - \frac{\ln n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$

$\sum \frac{(-1)^n}{n} \ln n$

Soit $f(x) \frac{\ln x}{x}$ $\forall x \in [1;+\infty[$

$x \in [1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$x \geq e$, $f'(x) \leq 0$, f est $\searrow$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ et $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

décroit pour $n \geq 2$ donc

$\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ Converge.

$\sum \frac{\ln n}{2n^2}$ on a:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{3/2}\ln n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$

donc $\sum \frac{\ln n}{2n^2}$ Converge.

$U_n - \frac{(-1)^n}{n}\ln n + \frac{\ln n}{2n^2} = o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$

$\left|U_n - \frac{(-1)^n \ln n}{n} + \frac{\ln n}{2n^2}\right| \leq C\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$

avec $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ converge

donc $\sum U_n$ Converge.

(11)

$U_n = e^{(-1)^n/n^\alpha} - 1$

• Si $\alpha \leq 0$

$\sum\limits_n U_n$ diverge car $U_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

• Si $\alpha > 0$

$U_n = e^{(-1)^n/n^\alpha} - 1$

$U_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) - 1$

$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$

* on a: $\sum\limits_n \frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge

ssi $2\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}$.

* $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 0$

$U_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} = o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$

$\left|U_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}}\right| \leq C\frac{1}{n^{2\alpha}}$

pour $\alpha > \frac{1}{2}$, $\sum\left(U_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}}\right)$ CV

Donc $\sum\limits_n U_n$ Converge pour $\alpha > \frac{1}{2}$

Pour $\alpha \in]0;\frac{1}{2}]$

$U_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$

$U_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{2\alpha}}$ or pour

$n/\alpha < 1$ $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ diverge.

Donc $\sum_n \left(U_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ diverge. Puisque $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge, alors $\sum_n U_n$ diverge.

<u>Conclusion</u> : $\sum_n U_n$ converge ssi $\alpha > \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow U_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

or $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge et $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

donc $\sum_n U_n$ diverge.

$\Rightarrow U_n = (-1)^n\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = (-1)^n e - (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$= (-1)^n e - (-1)^n e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$

• $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e\, e^{\left[-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}$

• $e^{-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}\right)^2$

$= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$U_n = \frac{e(-1)^n}{2n} - \frac{11e(-1)^n}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$U_n - \frac{e(-1)^n}{2n} + \frac{11e(-1)^n}{24n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ or } \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

et $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ ACV

$$\left|U_n - \frac{e(-1)^n}{2n} + \frac{11e(-1)^n}{24n^2}\right| \leq C.\frac{1}{n^2} \quad \text{comme } \sum \frac{1}{n^2} \text{ CV}$$

alors $\sum_{n\geq 1} U_n$ Converge.

$$\Rightarrow U_n = \sin\sqrt{1+n^2\pi^2} = \sin\left(\sqrt{n^2\pi^2\left(1+\frac{1}{n^2\pi^2}\right)}\right)$$

$$= \sin\left[n\pi\left(1+\frac{1}{n^2\pi^2}\right)^{1/2}\right]$$

- $\left(1+\frac{1}{n^2\pi^2}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2\pi^2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$$U_n = \sin\left[n\pi\left(1+\frac{1}{2\pi^2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right] = \sin\left[n\pi + \frac{1}{2\pi n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

or $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

$$\text{d'où } \sin\left(n\pi + \frac{1}{2\pi n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \cos n\pi \sin\left(\frac{1}{2\pi n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= (-1)^n \sin\left(\frac{1}{2n\pi} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$U_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{2n\pi} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

- $\sin\left(\frac{1}{2\pi n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{2\pi n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$\sum \frac{(-1)^n}{2\pi n}$ semi-CV car il s'agit d'une serie de Riemann alternée.

$$U_n - \frac{(-1)^n}{2\pi n} = o\left(\frac{1}{n^3}\right) \Rightarrow \left|U_n - \frac{(-1)^n}{2\pi n}\right| \leq C.\frac{1}{n^3} \text{ or}$$

$\sum_n \frac{1}{n^3}$ CV donc $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ CV. Donc $\sum U_n$ Converge.

12

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)}}$$

pour $\alpha > 0$

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}\left[1 - \frac{(-1)^n}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)$$

• $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}$ est une série alternée de Riemann, elle converge car $\frac{\alpha}{2} > 0$

• $\sum \frac{1}{n^{3\alpha/2}}$ converge pour $\frac{3\alpha}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{2}{3}$.

soit $W_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{(-1)^n}{2n^{3\alpha/2}}$

$U_n - W_n = o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right) \Rightarrow |U_n - W_n| \leq C . \frac{1}{n^{3\alpha/2}}$

$\sum \frac{1}{n^{3\alpha/2}}$ converge pour $\alpha > \frac{2}{3}$. Donc $\sum (U_n - W_n)$ converge pour $\alpha > \frac{2}{3}$ or $\sum W_n$ converge pour $\alpha >$

Donc $\sum U_n$ converge pour $\alpha > \frac{2}{3}$.

pour $0 < \alpha \leq \frac{2}{3}$

$U_n - \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} = -\frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)$. on a : $U_n - \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \sim$

Comme $\sum \frac{1}{n^{3\alpha/2}}$ diverge pour $0 < \alpha \leq \frac{2}{3}$.

Donc $\cancel{\sum (U_n - W_n)}$ $\sum \left(U_n - \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}\right)$ div pour $0 < \alpha$

Mais $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}$ est CV pour $0 < \alpha \leq \frac{2}{3}$.

$\sum U_n$ diverge pour $0 < \alpha \leq \frac{2}{3}$ (Voir quest² a) E

Pour $\alpha < 0$, lim U_n n'existe pas, donc $\sum U_n$

Conclusion : $\sum U_n$ converge ssi $\alpha > \frac{}{3}$.

EXO5

2) $U_n^2 > 0 \Rightarrow (U_n) > 0$. $\sum_n U_n$ converge donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$, la limite de (U_n) est finie, alors la suite (U_n) converge donc elle est majorée par $C > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n \leq C$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n^2 \leq C U_n$

$\sum_n U_n$ converge donc $\sum_n U_n^2$ converge.

$\frac{U_n}{1+U_n}$. on sait que $U_n > 0 \Leftrightarrow U_n + 1 > 1$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+U_n} < 1$.

$\Rightarrow 0 < \frac{U_n}{1+U_n} < U_n$

Donc $\sum_n U_n$ converge, alors $\sum \frac{U_n}{1+U_n}$ converge.

3) a- on suppose que $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}$

$U_n < V_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} \leq \frac{U_n}{V_n} \leq \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}} \leq \frac{U_0}{V_0}$

$U_n \leq \frac{U_0}{V_0} V_n$.

Donc si $\sum V_n$ converge, alors $\sum_n U_n$ converge.

b- $W_n = \frac{n^{n+1}}{e^n (n+1)!}$. Montrons que $\frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{n+1}{n+2}$

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{(n+1)^{n+2} e^n (n+1)!}{e^{n+1} (n+2)! \, n^{n+1}} = \frac{n+1}{e(n+2)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{n+1}{\cdot} \cdot e^{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

13

Montrons que pour tout $x \geq 0$

$$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

$$\varphi(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$$

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$
$\varphi(x)$	$0 \nearrow +\infty$

$\forall x \geq 0$, $\varphi(x) \geq 0$, c-à

$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

D'où $\ln(1+\frac{1}{n}) \geq \frac{1}{n} -$

$$(n+1)\ln(1+\frac{1}{n}) \geq 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2}$$

$$e^{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})} \geq e\, e^{\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n^2}} \geq e$$

Ainsi $\frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{n+1}{n+2}$

Nature de $\sum W_n$.

posons $U_n = \frac{1}{n+1}$, on a : $\frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{U_{n+1}}{U_n}$

Si $\sum W_n$ convergeait alors d'après 2.a)

$\sum U_n$ converge ce qui est absurde car

$\sum U_n = \sum \frac{1}{n+1}$ est div. Par conséquent $\sum W_n$

3) $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon(\frac{1}{n})$, $\lim_{n\to+\infty}(\varepsilon(\frac{1}{n})) = 0$

posons $V_n = \frac{1}{n^\beta}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\beta} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}$$

$\lim \varepsilon(\frac{1}{n}) =$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} - \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\beta-\alpha}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_2(\frac{1}{n})$$

pour n très grand

• Si $\alpha > 1$ alors en choisissant $\beta > \alpha$, on a : $\beta - \alpha > 0$ et par suite $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}$ comme $\beta > 1$, la (suite) série $\sum V_n = \sum \frac{1}{n^\beta}$ cv, donc d'après la question 2-a) la série $\sum U_n$ CV.

Si $\alpha < 1$ alors en choisissant β tq $\alpha < \beta < 1$, on a : $-\beta + \alpha < 0 \Rightarrow \beta - \alpha > 0$ et par suite $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}$

comme $\beta < 1$, la série $\sum V_n$ diverge, donc d'après 2-a) la série $\sum U_n$ diverge.

<u>Application</u> En arrangeant, on obtient

$$U_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$\text{D'où } \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ici $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, donc $\sum U_n$ diverge.

<u>Suite et série de fonctions</u>

<u>EXO 1</u>

a) vrai

- Soit f_n une suite de fct définie sur I et CV vers f

~~Expion~~ supposons q pour chq n, f_n est croissante

Mq f est une fonction croissante

Soit $x, y \in I$ tg $x \leq y$. $f_n(x) \leq f_n(y)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ car f_n est croissante. $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \leq \lim_{n \to +\infty} f_n(y)$. Donc $f(x) \leq f(y)$. Par conséquent f est croissante.

b) faux

- Considerons la suite de fct° $(f_n)_n$ définie

par : $f_n(x) = \min(x, n) = \begin{cases} x \text{ si } x \leq n \\ n \text{ si } x > n \end{cases}$

$\forall x \in [0; +\infty[$, $0 \leq f_n(x) \leq n$.

Les fct° f_n st toutes bornées.

Soit $x \in [0; +\infty[$. $\exists n \in \mathbb{N} / x \leq n$, donc $f_n(x)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ avec $f(x) = x$

Donc $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} f$ et f n'est pas bornée.

c) Faux

- Soit f_n une suite de fct° définie sur $[0; +$

$f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$ Les fct° f_n sont continue s

$\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{nx}{nx+1} = \begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x = 0 \\ f(x) = 1 \text{ si } x \in]0 \end{cases}$

La fonction f n'est pas continue sur $[0; +\infty[$.

d) Vrai

- Soit f_n une suite de fonction définie sur I

uniformément vers f.

Supposons q f_n est bornée, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N /$

$\forall n \geq N$. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Soit $x \in I$, $f(x) = f(x) - f_N(x) + f_N(x)$

$|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon +$

Exo 2

1) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$

Montrons q f_n est CS : Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} x^{2n} = \begin{cases} 0 \text{ si } x^2<1 \\ 1 \text{ si } x^2 = 1 \\ +\infty \text{ si } x^2>1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } -1<x<1 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x\in \{\ldots \\ 1 \text{ si } x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

f_n est CS sur $\mathbb{R}$ vers $f(x)$ la convergence n'est pas uniforme car f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ alors q f_n sont continues.

2) $\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_n(x) = \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}$, $x \in [0;+\infty[$.

Montrons q f_n est converge simplement (CS)

Soit $x \in]0;+\infty[$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1} = (x^2+1)e^{-x}$

et $f_n(0) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x=0 \\ (x^2+1)e^{-x} \text{ si } x\neq 0 \end{cases}$$ f_n est CS sur $[0;+\infty[$ vers f

. La CV n'est pas uniforme car f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, alors que f_n est continue.

f_n converge simplement sur $[0;+\infty[$ vers $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$

$* \left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1} - (x^2+1)e^{-x}\right| = \left|\frac{e^{-x}(-x^2-1)}{nx+1}\right|$

Considérons la suite $x_n = \frac{1}{n}$

$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{e^{-\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n^2}+1\right)}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.

15

$\sup_{x \in]0;+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|$

$\lim_{n \to]0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \frac{1}{2}$

donc $\sup_{x \in]0;+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$ $(f_n(x))$ n'est pas

3) $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{ne^{+x} + xe^{-x}}{n+x}$

Etudions la convergence simple.

soit $x \in [0;1]$, $f_n(0) = 1$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{ne^{x} + xe^{-x}}{n+x} =$

$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) = e^{x}$ donc f_n est CS sur [0;

f_n est continue sur $[0;1]$

. Etudions la CU

soit $\varphi = |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{ne^{x} + xe^{-x}}{n+x} - e^{x} \right| = \left| \frac{xe^{-x} - x}{n+x} \right.$

$\varphi \leq \frac{xe^{-x} + xe^{x}}{n+x} \leq \frac{1+e}{n}$

$\sup_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1+e}{n}$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1+e}{n} = 0$

donc $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} f$ sur $[0;1]$.

5) $f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in [0; \frac{1}{n}[\\ \frac{n(x-1)}{1-n} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}; 1] \end{cases}$

Etudions la convergence simple (CS)

$= 0$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 0$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(1) = 0$

$]0;1[$, on a : $1 - x > 0$

Soit $\varepsilon>0$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-n} = 0$

donc $\exists N\in\mathbb{N} / n\geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{1-n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{1-x}$

pour $n\geq N$, on a : $f_n(x)-(1-x) = \frac{n(x-1)}{1-n}+x-1 = \frac{x-1}{1-n}$

$|f_n(x)-(1-x)| \leq \left|\frac{1-x}{1-n}\right| \leq \varepsilon$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1-x$

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1-x & \text{si } x\in]0;1] \end{cases}$

f_n est continue alors que f n'est pas continue donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0;1]$.

EXERCICE 3

1) Montrons que (f_n) converge simplement vers f.

$f_{n+1}(t) = \sqrt{t+f_n(t)}$, $f_0(t)=0$.

Soit $t\in[0;+\infty[$. Considérons la fonct° $g_t : [0;+\infty[\to [0;+$

Donc $f_{n+1}(t) = g_t(f_n(t))$

Montrons que la suite $(f_n(t))$ est croissante.

$f_0(t)=0$ $f_1(t)=\sqrt{t}$ on a : $f_0(t)\leq f_1(t)$

Supposons que $f_n(t)\leq f_{n+1}(t)$. on a : $f_n(t)\leq f_{n+1}(t)$

Comme g_t est croissante. Donc $g_t(f_n(t))\leq g_t(f_{n+1}(t))$

$f_{n+1}(t)\leq f_{n+2}(t)$. Donc $(f_n(t))_n$ est croissante.

16

Montrons que $(f_n(t))_n$ est majorée.

Comme g. est croissante, continue, si $(f_n(t))_n$ cv,

converge vers le nbre reel $\ell(t) \geq 0$ tq
$g_t(\ell(t)) = \ell(t)$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$
$\lim_{n \to +\infty} f_n(0) = 0 = \ell(0)$.

Pour $t > 0$ $g_t(\ell(t)) = \ell(t) \Rightarrow \sqrt{t + \ell(t)} = \ell(t)$
$\Rightarrow t + \ell(t) = (\ell(t))^2 \Rightarrow -\ell^2(t) + \ell(t) + t = 0$
$\Delta = 1 + 4t > 0 \Rightarrow \ell(t) = \frac{+1 + \sqrt{1+4t}}{+2} > 0$

Montrons par récurrence q $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \leq \ell(t)$
Pour $n = 0$, $f_0(t) = 0 \leq \ell(t)$
Supposons q $f_n(t) \leq \ell(t)$
$f_n(t) \leq \ell(t) \Rightarrow g_t(f_n(t)) \leq g(\ell(t)) \Rightarrow f_{n+1}(t) \leq \ell(t)$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \leq \ell(t)$. La suite $(f_n(t))$ étant croissante et majorée, elle converge. on a montré q ds ce cas $\lim f_n(t) = f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{1 + \sqrt{1+4t}}{2} & \text{si } t \in]0; +\infty[\end{cases}$

2) on montre par récurrence que f_n st continues, par ailleurs, la limite f n'est pas continue. Donc (f_n) n'est pas ~~majorée~~ convergente uniformément.

3) Appliquons le théorème des accroissements finis entre $f_n(t)$ et $f(t)$ à la fonction g
$\exists c \in [f_n(t), f(t)]$ tq $g_t(f_n(t)) - g_t(f(t)) = g_t'(c)(f_n(t) - f(t))$
$f_{n+1}(t) - f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+c}} |f_n(t) - f(t)|$

$$|f_{n+1}(t) - f(t)| = \frac{1}{g_t'(c)} |f_n(t) - f(t)|$$

$$f_n(t) \le c \le f(t) \Rightarrow g(f_n(t)) \le g_t(c) \le g_t(f(t))$$

$$f_{n+1}(t) \le g_t(c) \le f(t) \Rightarrow \frac{1}{g_t(c)} \le \frac{1}{f'_{n+1}(t)}$$

D'où $$|f_{n+1}(t) - f(t)| \le \frac{|f_n(t) - f(t)|}{2 f_{n+1}(t)}$$

4) Déduisons que la suite (f_n) converge uniformément sur sur $[0;+\infty[$ vers $a>0$

on sait $$|f_{n+1}(t) - f(t)| \le \frac{|f_n(t) - f(t)|}{2 f_{n+2}(t)} \le \frac{f(t) - f_n(t)}{2 f_{n+1}(t)}$$

$$f_n(t) \geq f_1(t) \Rightarrow -f_n(t) \le -f_1(t)$$

$$\Rightarrow f(t) - f_n(t) \le f(t) - f_1(t).$$

EXERCICE 4

1) Montrons q la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Converge S et U sur $[0;+\infty[$

- CS

Soit $x \in [0;+\infty[$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$.

donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f = 0$ sur $[0;+\infty[$.

- CU

Soit $\varphi(x) = \left| f_n(x) - f(x) \right| = \dfrac{x^3}{(1+x^2)^n}$

Etudions $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) = \frac{3x^2(1+x^2)^n - n(2x)(1+x^2)^{n-1} \times x^3}{(1+x^2)^{2n}}$$

$$= \frac{x^2(1+x^2)^n\left[3 - 2nx(1+x^2)^{-1}\right]}{(1+x^2)^{2n}} = \frac{x^2(3-2nx(1+x^2)^{-1})}{(1+x^2)^{2n}}$$

$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow 3 + 3x^2 - 2nx^2 = 0 \Rightarrow 3 + x^2(3-2n) = 0$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{3}{2n-3} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{3}{2n-3}}$

x	0		$\sqrt{\frac{3}{2n-3}}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$		$\nearrow$	$\varphi\left(\sqrt{\frac{3}{2n-3}}\right)$	$\searrow$	

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(\sqrt{\frac{3}{2n-3}}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2n-3}\right)^{3/2}}{\left(1+\frac{3}{2n+3}\right)^{n}} \leq \left(\frac{3}{2n-3}\right)^{3/2}$$

$$\sup_{x\in[0;+\infty[} \varphi(x) \leq \left(\frac{3}{2n-3}\right)^{3/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \text{ Donc } f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} 0$$

2) a) Etudions la convergence simple (CS)

$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$; on a : $f_n(x)$ est uniformément cv

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x f_n(t)\,dt = \int_0^x \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt$.

or $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$, donc ~~$F_n(x)$~~ $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$

d'où $F_n(x)$ converge simplement.

Soit $A > 0$

Montrons $F_n(x) < 0$ sur $[0;A]$

Soit $x\in[0;A]$, F_n est croissante sur $[0;A]$ donc

$\forall n\in[0;A].\ F_n(x) = |F_n(x) - 0| \leq F_n(A)$

$\sup\limits_{x\in[0;A]} |f_n(x) - 0| \leq F_n(A)$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(A) = 0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0;A]} |F_n(x) - 0| = 0$

Donc $F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} 0$ sur $[0;A]$.

b) Calculons $F_n(x)$

$F_n(0) = \int_0^0 f_n(t)\,dt = 0 = f_n(0)$

Montrons que F_n admet une limite finie en $+\infty$.

18

lorsque F_n admet une

$$\lim_{x\to+\infty} F_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt$$

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{t^3}{(1+t^2)^n}\,dt \quad \text{or } f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^3}{t^{2n}} = \frac{1}{t^{2n-3}}$$

Donc $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge, lorsque $n \geq 3$.

EXERCICE 6

$\forall x \geq 0,\ f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^3x^2}$

1) Montrons q $\sum_{n\geq 0} f_n$ CV simplement sur $\mathbb{R}^*$

pour $x=0$, $f_n(0)=0$ d'où $\sum_{n\geq 0} f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} 0$

pour $x\neq 0$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^3x^2} \sim \dfrac{1}{n^3}$ donc $\sum_n f_n$ CVS

car $\sum_n \frac{1}{n^3}$ converge.

Conclusion $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0$

2) Montrons q $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n$

Etudions $\forall x \in]0;+\infty[$, f_n

$\forall x \in]0,+\infty[\,,\ f_n(x) = \dfrac{1+n^3x^2-2x^2n^3}{(1+n^3x^2)^2}$

$f'_n(x)=0 \Rightarrow 1-n^3x^2=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{n^{3/2}}$

x	0		$\frac{1}{n^{3/2}}$		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$		$\nearrow$	$f_n\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$	$\searrow$	

$\sup f_n(x) = f_n\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right) = \dfrac{1}{2n^{3/2}}$

Comme $\sum_n \dfrac{1}{2n^{3/2}}$ CVN. <u>Conclusion</u> les f_n sont continues et $\sum f_n$ CVN, donc somme f est continue

19

Exercice

Soit $k\in\mathbb{N}^*$ et S_k la somme partielle d'ordre k.

On a : $x\in]0;1[$ donc

$$\sum x^n = x\left(\frac{1-x^k}{1-x}\right)$$

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} x^n \ln x = \ln x \sum_{n=1}^{k} x^k$$

$$= \left(\frac{1-x^k}{1-x}\right) x \ln x$$

$$\lim_{k\to+\infty} S_k(x) = \frac{x\ln x}{1-x}$$

si $x=0$ $f_n(0)=0$, dc

$f(0)=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_k(0)=0$

si $x=1$, $f_n(1)=0$ dc

$f(1)=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_k(x)=0$

$\sum f_n(x) \xrightarrow{CS} f(x)$

avec $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in\{0;1\} \\ f(x)=\dfrac{x\ln x}{1-x} & \text{si } x\in]0;1[\end{cases}$

la f n'est pas continue en 1 alors que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0;1]$

donc la convergence n'est ni uniforme ni normale.

3) $f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{x}{n(x+1)}\right)$

$$|f_n(x)| = \ln\left(1+\frac{x}{n(x+1)}\right) \geq 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n(x+1)}\right) = 0$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n(x+1)} = 0$

on a : $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ est ↘.

$\left(\dfrac{x}{n(x+1)}\right)_n$ est décroissante.

car $\dfrac{x}{x+1} \geq 0$

$\left(\ln\left(1+\dfrac{x}{n(x+1)}\right)\right)_n$ est ↘.

donc $\forall x\in[0;+\infty[$, $|f_n(x)|$ est ↘

d'où $\sum_n f_n \xrightarrow{CS} f$ sur $[0;+\infty[$

Convergence uniforme.

$$\forall n, f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n(x+1)}\right)$$

$$= (-1)^n \frac{(-1)^n}{n(x+1)} - \frac{(-1)^n}{2n^2(x+1)^2}$$

$g(x) = \dfrac{(-1)^n x}{n(x+1)}$ donc

20

$|g_n| = \dfrac{x}{n(x+1)} \longrightarrow 0$ et

$\sum(-1)^n$ une série alternée $(a_n)_n$ ...
décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ de +

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k a_k\right| \leq a_{n+1}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k \frac{x}{n(x+1)}\right| \leq \frac{x}{(n+1)(x+1)} \leq \frac{1}{x+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

donc $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} g$

∘ ~~lim~~ $h_n(x) = -\dfrac{(-1)^n x^2}{2n^2(x+1)^2} \Rightarrow |h_n(x)| = \dfrac{x^2}{2n^2(x+1)}$

Comme $\sum\limits_n \frac{1}{2n^2}$ CV normalement donc $\sum h_n$ CV normalement donc uniformément.

$$f_n(x) - g_n(x) + h_n(x) = o\left(\frac{x^2}{n^2(x+1)^2}\right)$$

$$|f_n(x) - g_n(x) + h_n(x)| \leq C\frac{x^2}{n^2(x+1)^2} \leq \frac{C}{n^2} \text{ CU}$$

Com $\sum\limits_n g_n$ CU et $\sum\limits_n h_n$ CU donc $\sum\limits_n f_n$ CU sur

<u>Convergence normale</u>

$$|f_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{x}{n(x+1)}\right)$$

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| \geq f_n(1) = \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2n}$$

$\frac{1}{2}\sum\limits_n \frac{1}{n}$ div, série harmoniq donc $\sum\limits_n f_n$ ne converge normalement sur $[0,+\infty[$.

Exo 7

1) La nature de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{N}^*$

$\forall x \in [0;+\infty[$, $f_n'(x) =$

$f_n'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{n^{1/2}}$ sur $\mathbb{R}^+$

x	0	$\frac{1}{n^{1/2}}$	$+\infty$
f_n'	$+$	0	$-$
f_n	$\nearrow$	$f_n(\frac{1}{\sqrt{n}})$	$\searrow$

$$\sup_{x\geq 0} |f_n(x)| = f(\tfrac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1/\sqrt{n}}{n(1+\frac{n}{n})^2} = \frac{1}{2n^{3/2}}$$

Com $\sum \frac{1}{2n^{3/2}}$ CV, alors $\sum f_n$ CVN, donc uniformément et simplement sur $[0;+\infty[$ vers S. De + $S(0)=0$ car $f_n(0)=0$

2) $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Montrons q. S est de classe C^1 sur $\forall [a,b] \subset]0;+\infty[$

- on remarq les f_n st de classe C^1 sur $[a;b]$
- $\sum f_n$ CVS sur $[a;b]$

Montrons q $\sum f_n'$ CU sur $[a;b]$, on a :

$$f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+x^2 n)^2} = \frac{1}{n(1+nx^2)^2} - \frac{x^2}{(1+nx^2)^2}$$

$$|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n(1+nx^2)^2} + \frac{x^2}{(1+nx^2)^2} \leq \frac{1}{n(1+nx^2)^2} + \frac{b^2}{(1+na^2)^2}$$

$$\leq \frac{1}{\ldots} + \frac{b^2}{\ldots}$$

$\sum_n \frac{1}{a^4 n^3}$ CV et $\sum \frac{1}{n^2 a^4}$ CV. Donc $\sum f'_n$ CN uniformément. <u>Conclusion</u> : S est de classe C^1 sur $[a;b]$. Donc S est aussi de classe sur $]0;+\infty[$.

<u>Expression de $S'(x)$</u>

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-nx}{n(1+nx}$$

b)

Exercice 1

Etudions la nature de la serie $\sum U_n$ [illegible] $= \left(n \sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

a: généralisons $v_n = \left(n \sin\frac{1}{n}\right)^{n^{\alpha}}$

$v_n = e^{n^{\alpha} \ln\left(n \sin\frac{1}{n}\right)} = e^{n^{\alpha}\left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$

$v_n = e^{-\frac{n^{\alpha}}{6n^2} + o\left(\frac{n^{\alpha}}{n^2}\right)}$

$v_n = -\frac{n^{\alpha}}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right) \iff v_n = -\frac{1}{6n^{2-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)$

Pour $\alpha < 1$: $\sum_n -\frac{1}{6n^{2-\alpha}}$ Converge. (Serie de Riemann)

$\left|v_n + \frac{1}{6n^{2-\alpha}}\right| \leq C \cdot \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ or $\sum_n \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ Converge ssi $\alpha < 1$

Alors $\sum_n v_n$ Converge ssi $\alpha < 1$.

Ici $\alpha = 2 > 1$ donc $\sum_n U_n$ Diverge

2) Etudions suivant les valeurs de $a > 0$, la nature de $\sum_n U_n$ avec $U_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + an}$

$\forall a > 0, \forall n$ on a : $an \geq 0 \iff n^4 + an \geq n^4$

$\iff \sqrt{n^4 + an} \geq \sqrt{n^4} \iff -\sqrt{n^4 + an} \leq -\sqrt{n^4}$

$\iff \sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + an} \leq \sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4} \iff U_n \leq v_n$

$\iff v_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

Autrement $U_n = \frac{n(2-a) + 1}{\sqrt{n^4 + 2n + 1} + \sqrt{n^4 + an}} \iff U_n \underset{\infty}{\sim} W_n = \frac{2-a}{n}$

qd $n \to \infty$, $(2-a)\sum_n \frac{1}{n}$ serie harmoniq de Riemann.

donc $\sum_n W_n$ Diverge d'où $\sum_n U_n$ Diverge.

3) soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$, Etudions la nature de $U_n = \frac{n^{\alpha}}{a^n}$

Regle d'Alembert

$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \frac{1}{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} = \frac{1}{a} \cdot e^{\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{a} + \frac{\alpha}{an} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\longrightarrow \frac{1}{a} < 1$ donc $\sum U_n$ est ACV. (22)

Exercice 2

- Déterminons la nature et la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx$. Soit $f(x) = \ln(1+\frac{1}{x^2})$

On a : f est continue sur $]0;+\infty[$, donc $\mathcal{C}_m(]0;+\infty[)$

Donc le problème se pose en 0 et en $+\infty$

Considérons $I = \int_0^1 \ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx$ et $J = \int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx$

Au voisinage de 0 : $\ln(1+\frac{1}{x^2}) \underset{0}{\sim} -2\ln(x)$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx \underset{0}{\sim} -2\int_0^1 \ln x\,dx$

Soit $t \in]0;1]$, $\varphi(t) = \int_t^1 -2\ln x\,dx = -2[x\ln x - x]_t^1$

$\varphi(t) = 2$ donc $\int_0^1 -2\ln x\,dx$ converge. d'où I converge

Au voisinage de $+\infty$ $\ln(1+\frac{1}{x^2}) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$

or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge car $2>1$, d'où J converge.

En conclusion $\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx$ converge.

Calculons sa valeur

Soit $K = \int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx = I+J$

Calculons I

$I = \int_0^1 \ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx$. Soit $t \in]0;1]$, $\varphi(t) = \int_t^1 \ln(1+\frac{1}{x^2})$

$\varphi(t) = \int_t^1 [\ln(1+x^2) - 2\ln x]\,dx = [x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x - 2x\ln x + 2x]_t^1$

$= \ln 2 + 2\arctan 1 - t\ln(1+t^2) - 2\arctan t + 2t\ln t$

donc $I = \lim_{t\to 0} \varphi(t) = \ln 2 + 2\arctan 1 = 2(\frac{\pi}{4}) + \ln 2$

$\boxed{I = \ln 2 + \frac{\pi}{2}}$

Calculons J soit $a \in [1;+\infty[$, $\varphi(a) = \int_1^a \ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx$

$\varphi(a) = [x\ln(1+x^2) + 2\arctan x - 2x\ln x]_1^a$

$= a\ln(\frac{1}{a^2}+1) + 2\arctan a - \ln 2 - \frac{\pi}{2}$ $\boxed{J = \frac{\pi}{2} - \ln 2}$

$J = \lim \varphi(a) = 2(\frac{\pi}{4}) - \ln 2 - \frac{\pi}{2}$

En conclusion $R < \pi$ d'où $\int_0 \ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx = \pi$

) Etudions, suivant les valeurs du réel $\alpha \geq 0$ la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$. Soit $f_\alpha(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha}$, $x \in]0;+\infty[$.
f_α est continue sur $]0;+\infty[$ donc $f_\alpha \in C_m(]0;+\infty[)$ et le problème se pose en 0 et $+\infty$. Considerons $I_1 = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$.

Déterminons la nature I_1 (Au voisinage de 0)

on a: $\frac{\sin x}{x^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$, or $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$ converge ssi $\alpha < 2$

donc $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ converge ssi $\alpha < 2$. d'où I_1 converge ssi $\alpha<$

Determinons la nature de I_2 (Au voisinage de $+\infty$)

$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi ~~$\alpha < 1$~~ $\alpha > 1$

En conclusion $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ diverge.

Exercice 3

$$\sum_n \frac{x^n}{n^2-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Le rayon de converge R de cette série.

Soit $a_n = \frac{1}{n^2-1} \Leftrightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2-1}{n^2+2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Donc $R = \frac{1}{1} = 1$

Exercice 1

Déterminons la nature de l'intégrale suivante :

1) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{(1+\frac{1}{\ln x})}}$. Soit $f(x) = \frac{1}{x^{(1+\frac{1}{\ln x})}}$; $x \in [2;+\infty[$

f est continue sur $[2;+\infty[$, $x \in [2;+\infty[$, donc $f \in \mathcal{C}_m([2;+\infty[)$

le problème se pose en $+\infty$.

on a : $f(x) = \frac{1}{e^{(1+\frac{1}{\ln x})\ln x}} = \frac{1}{e^{\ln x + 1}} = \frac{1}{xe} = \frac{1}{e \cdot x^\alpha}$

$\alpha = 1$ donc $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{(1+\frac{1}{\ln x})}}$ Diverge.

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} dx$. Soit $f(x) = e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R})$, alors le problème se pose en $-\infty$ et en $+\infty$. Considérons $I = \int_{-\infty}^0 e^{-2x} dx$ et $J = \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$.

Déterminons la nature de I

$I = \int_{-\infty}^0 e^{-2x} dx$ soit $t \in]-\infty, 0]$ et $\varphi(t) = \int_t^0 f(x) dx$

$\varphi(t) = [-\frac{1}{2} e^{-2x}]_t^0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t}$ d'où $I = \lim_{t \to -\infty} \varphi(t)$

$I = +\infty$, I Diverge. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} dx$ diverge.

3) $\int_1^{+\infty} e^{-x+\cos x} dx$, soit $f(x) = e^{-x+\cos x}$, $x \in [1;+\infty[$.

f est continue sur $[1;+\infty[$ donc $f \in \mathcal{C}_m([1;+\infty[)$

le problème se pose en $+\infty$, on a : $-1 \leq \cos x \leq +1 \iff$

$e^{-x+1} \leq e^{-x+\cos x} \leq e^{1-x} \iff \int_1^{+\infty} h(x) dx \leq \int_1^{+\infty} f(x) dx \leq \int_1^{+\infty} g(x) dx$

Déterminons la nature $\int^{+\infty} g(x) dx$

$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} e^{1-x} dx$, soit $t \in [1;+\infty[$ et $\varphi(t) = \int_1^t e^{1-x} dx$

$\varphi(t) = 1 - e^{1-t}$ donc $\int^{+\infty} g(x) dx = \lim \varphi(t) = 1$

d'où $\int e$ dx converge.

4) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$, soit $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, $x\in[2;+\infty[$, f est continue sur $[2,+\infty[$. donc $f\in \mathcal{C}_m([2;+\infty[)$, alors le problème se pose en $+\infty$. on a: $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ posons $U=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$ $\Leftrightarrow x=e^{u}$

donc $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{e^u}{ue^u}du=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{du}{u}$ (intégrale Riemann)

d'où $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ diverge.

Exercice 2

1) Mq $\int_0^1 \ln x\,dx$ est convergente, soit $f(x)=\ln x$, $x\in]0;1]$
f est continue sur $]0;1]$ donc $f\in\mathcal{C}_m(]0;1])$. on a:
$\lim_{x\to 0} x^{1/2}f(x)=0$, donc $\int_0^1 \ln x\,dx$ converge.

. Calculons sa valeur:
soit $t\in]0;1]$ et $\varphi(t)=\int_t^1 \ln x\,dx=[x\ln x-x]_t^1=-1+t-t\ln t$

$\int_0^1 \ln x\,dx=\lim_{t\to 0}\varphi(t)=-1$, $\boxed{\int_0^1 \ln x\,dx=-1}$

2) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}dx$ est-elle convergente?
Soit $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}$, $x\in]0;+\infty[$, f est continue sur $]0;+\infty[$
donc $f\in\mathcal{C}_m(]0;+\infty[)$. Donc le problème se pose en 0 et en $+\infty$

. Au voisinage de 0, on a: $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}\underset{0}{\sim}\ln x$ or
$\int_0^1 \ln x\,dx$ converge. Donc $\int_0^1\frac{\ln x}{x^2+1}dx$ converge.

Au voisinage de $+\infty$, on a: $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}\underset{\infty}{\sim}\frac{\ln x}{x^2}$
$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}f(x)=0$, donc $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}dx$ converge.

En Conclusion $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}dx$ Converge.

Exercice 3

1) Montrons que $n \sin\frac{1}{n} > 0$. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\forall x \in]0;\pi[. \sin x > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} < \pi$ donc $\sin\frac{1}{n} > 0 \Leftrightarrow$
$n \sin\frac{1}{n} > 0$.

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$

3) a) $\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \Leftrightarrow n \sin\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

b) $\ln\left(n \sin\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

4) $U_n = \left(n \sin\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} \Leftrightarrow e^{U_n} = e^{n^\alpha \ln\left(n \sin\frac{1}{n}\right)} \Leftrightarrow e^{n^\alpha\left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}$

$\Leftrightarrow e^{U_n} = e^{-\frac{n^\alpha}{6n^2} + o\left(\frac{n^\alpha}{n^3}\right)} = e^{-\frac{1}{6n^{2-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3-\alpha}}\right)}$

$\Leftrightarrow U_n = -\frac{1}{6n^{2-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3-\alpha}}\right)$ or $\sum_n -\frac{1}{6n^{2-\alpha}}$ est une S.R

* Pour $\alpha > 1$, elle diverge.

soit $\omega_n = -\frac{1}{6n^{2-\alpha}}$, $U_n - \omega_n = o\left(\frac{1}{n^{3-\alpha}}\right) \Leftrightarrow$

$|U_n - \omega_n| \leq C . \frac{1}{n^{3-\alpha}}$ or $\sum_n \frac{1}{n^{3-\alpha}}$ diverge ssi $\alpha > 1$

donc $\sum_n (U_n - \omega_n)$ diverge ssi $\alpha > 1$.

* Pour $\alpha = 1$, $\sum_n -\frac{1}{6n^{2-\alpha}}$ diverge et $|U_n - \omega_n| \leq c . \frac{1}{n^{3-\alpha}}$

donc $\sum_n (U_n - \omega_n)$ converge ssi $\alpha = 1$.

* Pour $\alpha < 1$, $\sum_n -\frac{1}{6n^{2-\alpha}}$ converge et $|U_n - \omega_n| \leq c . \frac{1}{n^{3-\alpha}}$

donc $\sum_n (U_n - \omega_n)$ converge ssi $\alpha < 1$.

En conclusion $\sum_n U_n$ converge ssi $\alpha < 1$.

Exercice 4

1) Calculons le rayon de convergence de la serie de ta

$a_n = \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 3$

on a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n-2}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Donc $R = 1$

2) Exprimons sa somme $S(x) = \sum_n U_n(x)$ à l'aide de fonction connues. on a : $U_n(x) = \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$

$$U_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)(n-2)} \; ; \; U_n''(x) = \frac{x^{n-2}}{(n-2)} \; , \; U_n'''(x) = x^{n-3}$$

$$\sum_n U_n'''(x) = \sum_{n\geq 3} x^{n-3} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \; |x| < 1$$

$$\sum_{n\geq 2} U_n''(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)} = -\ln(1-x)$$

$$\sum_{n\geq 1} U_n'(x) = \sum \frac{x^{n-1}}{(n-1)(n-2)} = -\int \ln(1-x)\,dx = (1-x)\ln(1-x) + x$$

$$\sum_n U_n(x) = \int [(1-x)\ln(1-x) + x]\,dx$$

Posons $U' = 1-x \longrightarrow U = -\frac{(1-x)^2}{2}$

$V = \ln(1-x) \longrightarrow V' = -\frac{1}{1-x}$

$$\Rightarrow \sum_n U_n(x) = \left[-\frac{(1-x)^2}{2}\ln(1-x)\right] + \int -\frac{(1-x)^2}{2} \times \frac{1}{1-x}\,dx + \int x\,dx$$

$$\Rightarrow \sum_n U_n(x) = \left[-\frac{(1-x)^2}{2}\ln(1-x)\right] + \left[\frac{1}{2}x^2\right] - \int \frac{1}{2}(1-x)\,dx$$

$$\sum_n U_n(x) = \frac{-(1-x)^2}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{(1-x)^2}{4}$$

Examen 2000-2010 : 1 session

EXERCICE 1

1) $U_n = 2 \; \forall n$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$ et $2 \neq 0$ donc elle di

2) $U_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \; \forall n \geq 1$, $U_n = (-1)^n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$U_n = \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ est une serie alternée de Riemann

$\alpha = 1$, d'où $\sum\limits_n U_n$ converge.

EXERCICE 2

Déterminons la nature de l'integrale G $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4} dx$

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^4}$, $x \in]0;+\infty[$.

f est continue sur $]0;+\infty[$ donc $f \in \mathcal{C}_m(]0;+\infty[)$, le problème se pose en 0 et en $+\infty$. Considérons

$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^4} dx$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4} dx$

Au voisinage de 0 $\left(\frac{\ln x}{1+x^4} \underset{0}{\sim} \ln x\right)$

$I_1 = -1$ d'où I_1 Converge.

Au voisinage de $+\infty$ $\left(\frac{\ln x}{1+x^4} \underset{\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^4}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$, donc I_2 Converge.

En Conclusion $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4} dx$ converge.

ECU I

EXERCICE 1

Etudions la nature de chacunes des intégrale généralisée suivantes: 1) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx$, soit $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

f est continue sur $\mathbb{R}$, donc $f \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R})$, le problème se pose en $-\infty$ et en $+\infty$. Considérons : $I_1 = \int_{-\infty}^{0} e^{-x} dx$ et $I_2 = \int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx$

Etudions I_1 soit $t \in]-\infty; 0[$ et $\varphi(t) = \int_{t}^{0} e^{-x} dx$

$\varphi(t) = [-e^{-x}]_t^0 = e^{-t} - 1$, $\lim\limits_{t \to -\infty} \varphi(t) = +\infty$. De I_1 diverge.

En conclusion $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx$ diverge.

2) $\int_{1}^{+\infty} \left(e^6 - (1+\frac{3}{x})^{2x}\right) dx$, soit $f(x) = e^6 - (1+\frac{3}{x})^{2x}$, $x \geq 1$

f est continue sur $[1; +\infty[$, donc $f \in \mathcal{C}_m([1; +\infty[)$. Alors le problème se pose en $+\infty$, on a : $f(x) = e^6 - e^{2x \ln(1+\frac{3}{x})}$

$\ln(1+\frac{3}{x}) = \frac{3}{x} - \frac{9}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$. $2x \ln(1+\frac{3}{x}) = 6 - \frac{9}{x} + o(\frac{1}{x})$

$e^{2x\ln(1+\frac{3}{x})} = e^{6 - \frac{9}{x} + o(\frac{1}{x})} = e^6\left(1 - \frac{9}{x} + o(\frac{1}{x})\right) = e^6 - \frac{9e^6}{x} + \cdots$

$f(x) = e^6 - e^6 + \frac{9e^6}{x} + o\left(\frac{e^6}{x}\right) = \frac{9e^6}{x} + \cdots$

$\int_{1}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{1}^{+\infty} \left[\frac{9e^6}{x} + o(\frac{e^6}{x})\right] dx$

posons $t \in [1; +\infty[$, $\varphi(t) = \int_{1}^{t} \left[\frac{9e^6}{x} + o(\frac{e^6}{x})\right] dx = [9e^6 \ln x]$

$\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$, donc $\int_{1}^{+\infty} \left[e^6 - (1+\frac{3}{x})^{2x}\right] dx$ diverge.

EXERCICE 2

Etudions la nature $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$, soit $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$; $x > 0$

f est continue sur $]0; +\infty[$, le problème se pose en 0 et en $+\infty$. Au voisinage de 0, on a : $\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim x^{\frac{3}{2}} f(x) = 0$ donc $\int^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ converge.

Au voisinage de $+\infty$ $\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} = x^{3/2}$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ $3/2 > 1$ donc elle est converge.

Calculons sa valeur:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = I_1 + I_2$$

Calculons I_1 posons $U = \sqrt{x} \Leftrightarrow U^2 = x \Leftrightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$f(U) = \frac{1}{U(U^2+1)}$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int_0^1 \frac{2u\,du}{U(U^2+1)} = \int_0^1 \frac{2\,du}{U^2+1} = 2\left[\operatorname{Arctan} U\right]_0^1$$

$I_1 = 2 \operatorname{Arctan} 1 - 2 \operatorname{Arctan} 0$ $\boxed{I_1 = \frac{\pi}{2}}$

Calculons $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$, soit $t \in [1; +\infty[$

$$\varphi_2(t) = \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = 2\int_1^{\sqrt{t}} \frac{du}{1+u^2} = 2\arctan\sqrt{t} - 2\arctan 1$$

$$I_2 = \lim_{t \to +\infty} \varphi_2(t) = \lim_{t \to +\infty} 2\arctan\sqrt{t} - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{I_2 = \frac{\pi}{2}}$ $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \pi}$

EXERCICE 3

Etudions la nature de la série $\sum U_n$ suivante:

1) $U_n = 0$, on a $\lim U_n = 0$, donc $\sum U_n$ converge.

2) $U_n = (-1)^n$ $\forall n$. on a : $\lim U_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$

donc $\sum U_n$ diverge.

3) $U_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \cancel{\frac{(-1)^n}{n}}$ déjà fait. (CV)

EXERCICE 4.

$f_n(x) = \frac{1}{n^x}$, $\forall n \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1) on a : $f_n(0) = 1$ et $\lim f_n(0) = 1$

$\lim f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x>0 \\ +\infty & si\ x<0 \end{cases}$ donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{C.S} f=0$

2) $\forall n \geq 1$ et $a>1$ et $x \geq a$

$n^x \geq n^a \iff \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$, $\sum \frac{1}{n^a}$, on a: serie de Riemann

$a>1$. donc $\sum \frac{1}{n^a}$ converge. $\sum f_n \xrightarrow{CU} f$

ECII II EXERCICE 5

Déterminons le rayon de convergence des séries entières

où $z \in \mathbb{C}$.

1) $\sum_{n\geq} (\sqrt{n})^n z^n$, soit $a_n = (\sqrt{n})^n$, on a $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\boxed{R=0}$

2) $\sum_{n\geq} (\ln n)^n z^n$, soit $a_n = (\ln n)^n$, on a $\sqrt[n]{|\ln n|^n} = \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\boxed{R=0}$

4) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-3)^n}{2n+5} z^{4n+1}$, soit $U_n = \frac{(-3)^n z^{4n+1}}{2n+5}$

$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{-3\, z^{4n+5}(2n+5)}{(2n+7)\, z^{4n+1}}\right| = 3z^4 = l = \sqrt[4]{3}$

$\boxed{R = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}}$

5) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$, soit $a_n = \frac{n^n}{n!}$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot n!}{\cancel{(n+1)} n! \cdot n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e - \frac{e}{2n} + \dots$

$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e$ $\boxed{R = e^{-1}}$

EXERCICE 5

6) $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3} x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Soit $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3} \Leftrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{-n^2} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}$

$= e^{-n^2 \ln(1+\frac{1}{n^2})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$

$\boxed{R = e}$

EXERCICE 6

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1} z^n$, soit $a_n = \frac{1}{2n+1}$

On a : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2n+3} \times \frac{2n+1}{1} = \frac{2n+1}{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ $\boxed{R=1}$

2.a) Sur les cercle d'incertitude, déterminons l'ens des valeurs de z.

• si $|z| = 1$, alors $|U(z)| = \frac{1}{2n+z} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors

$\sum \frac{1}{2n+1} z^n$ diverge si $|z| = 1$.

b) si $z = 1$ elle diverge.

si $z = -1$, alors $\frac{1}{2n+1} z^n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \underset{\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$

$\sum_n \frac{(-1)^n}{2n}$ série harmonique alternée de Riemann

donc $\sum_n \frac{1}{2n+1} z^n$ est semi-convergente. $(z = -1)$

EXAMEN : 2006 - 2007 Session 2

EXERCICE 4

1) Calculons $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$

soit $U_n(x) = \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$

$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+1-1)(n+1-2)} = \frac{1}{n(n+1)(n-1)}$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n(n-1)(n-2)}{n(n+1)(n-1)} = \frac{n-2}{n+1} \underset{n \to +\infty}{=} 1$ $\qquad R = 1$

Exprimons sa somme $S(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} U_n(x)$

$S(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$

on sait que $\frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} + \frac{C}{n-2} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$

$A = \lim_{n \to 0} \frac{1}{(n-1)(n-2)} = \frac{1}{2}$ $\qquad B = \lim_{n \to 1} \frac{1}{n(n-2)} = -1$

$C = \lim_{n \to 2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$

Donc $\frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{\frac{1}{2}}{n-2}$

$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-2}$

posons $n = k+1 \Rightarrow k = 2$

28

$$\frac{1}{2}\sum_{n=3} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{2}\sum_{k=2} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = x + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} \Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - x -$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} = x\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} \quad \text{posons } n = k+2$$

$$x\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = x\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x)$$

$$x\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -x^2 - x\ln(1-x)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-2} = \frac{1}{2}x^2 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2} \quad \text{posons } n = k+3$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{x^2}{2}\left(-\ln(1-x)\right)$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)} = -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + x^2 + x\ln(1-x) - \frac{x^2}{2}\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2 + \left(-\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\right)\ln(1-x)$$

MON UE : UN PASSEPORT

Correction de proba-stat

ne Jeunesse
nsciente Et
tellectuelle

ETUDIANT, UN DOCUMENT

EDITEURS

BERTE OUSMANE L3

BAKAYOKO AMARA L2

09110313 / 77018403

berteousmane2012@hotmail.fr

TD. Proba & STAT

FICHE 1

Exercice 1

1) L'effectif N est :
Désignons par E l'ensemble des chiffres :
$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$
Pour le 1er chiffre nous avons 9 choix car on ne peut pas prendre 0. Les 4 chiffres restants forment un quadriplet de E, mais attention, on peut choisir 0. donc on a : 10^4 choix. $N = 9 \times 10^4 = 9.10^4$

EXERCICE 2

1) Le nombre de resultats possibles :
— Les 3 boules obtenues sont en ordre et une boull ne peut être tiré plus d'une fois. Le nombre de resultat possible est : $N = A_7^3 = 210$.
2) Le nombre de resultat ayant exactement une boule V.
Pour avoir exactement une bV, il nous faut commencer par choisir une bV parmi les 4 on a : A_4^1 choix. on place cette bV on a : C_3^1 dispositions. on choisit en suite 2 R parmi les 3 on a : A_3^2 choix. on dispose en suite les 2b dans les deux places qui restent on a : C_2^2 disposit^{s}.
Soit M le nombre de resultats ayant exactement une bV

29

$M = A_4^1 \times C_3^1 \times A_3^2 \times C_2^2 = \cancel{7}2 = 72$
3) $M' = A_3^3 = 6$ aucune bV. $\boxed{P = N - M' = 204}$

EXERCICE 3

1) Le nombre N de résultats possibles :

- Les 5 boules obtenues sont dans un certain ordre et une boule peut être tirée plusieurs fois ; c-à-d qu'un résultat possible est un 5-uplet de boule prise parmi 12.

$N = 12^5 = 248832.$

2) Le nombre de résultats possibles ayant exactement 2 boules vertes et 2 boules blanches.

Pour avoir un tel résultat :

- on prend deux boules vertes parmi 6 : 6^2

$C_5^2 =$ nombre de position possible

$6^2 \times C_5^2$

- on prend 2 boules blanches parmi 4

$4^2 \times C_3^2$

- on prend une boule orange parmi 2

$2^1 = 2$

on a donc $n = 6^2 \times C_5^2 \times 4^2 \times C_3^2 \times 2$

$$\boxed{n = 34560}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

~~...r avoir le resultat en ...~~

~~6^2 choix on place les ebV ds le 5-uplet on a C_5^2~~

~~...sif et parallem pour les bB et oranges.~~

~~...rend eb/b ds le 3-uplet on a C_3^2 disposit-~~

~~$= 6^2 \times C_5^2 \times C_3^2 \times 4 \times C_1^1 \times 2 = 34560$~~

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

EXO 4

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ et $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ pour $a=b=1$

$\sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n$; $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$

$C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)(n-p-1)!}$ ①

$C_{n-1}^{p} = \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!\,p!} = \frac{(n-1)!}{p(p-1)!(n-p-1)!}$ ②

① + ② $\frac{p(n-1)! + (n-p)(n-1)!}{(n-1-p)!(p-1)!\,p(n-p)}$

$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$

Autre methode

$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = \frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}$

$= \frac{p(n-1)!}{(n-p)!\,p!} + \frac{(n-1)!(n-p)}{(n-p)!\,p!} = \frac{(n-1)!(n-p-p)}{p!\,(n-p)!}$

30

$$= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

soit $x \in E$ alors C_{n-1}^{p} est le nbre de partie de E
P elt ne contenant pas x et C_{n-1}^{p-1} est le nbre de partie
ayant P elt et contenant x or C_n^p est le nbre de p
de E ayant P elt $\Rightarrow C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}$

EXO 5

Remarquons q'il y a 2 cas

1er cas les 2 vehicule st identiq

$N = C_8^4 = 70$

2eme cas
on commence par faire le choix d'1 vehicule p
les 2 : $N = C_8^4 \times C_2^1 \times C_4^4 \times C_1^1 = 140$

EXO6

1) a- on suppose q les 3 lettres st distinctes le c
commence par AB.
pour le choix de la 3° lettre on a 24 choix A_{24}^1

$C = A_{24}^1 \times 10^5 = 24.10^5$

b- $A_{25}^2 \times 10^5 = 6.10^7$

c- le code contient A

$A_{25}^2 \times C_3^1 \times 10^5 = A_1^1 \times C_3^1 \times A_{25}^2 \times C_2^2 \times 10^5 = 18.$

Fiche 2

EXERCICE 1

...oit Ω l'ensemble de l'expérience, les 2 [redacted] sont rélévés dans l'ens $E=\{1,2,3,4,5,6\}$. Une eventualité ...st donc un couple d'élément de E. $\text{card}\,\Omega = 6^2 = 36$

...) « obtenir 5 puis 2 » : $A = \{(5,2)\}$. $P(A) = \frac{1}{36}$

...) « obtenir 5 et 2 » : $B = \{(5,2),(2,5)\}$. $P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

...) « obtenir 2 nombres pairs ». Pour que C se realise, ...es numeros doivent être rélever dans $P = \{2,4,6\}$

...ard $C = 3^2 = 9$. $P(C) = \frac{1}{4}$.

...) D « obtenir au moins un nombre impair »

$\bar{D}$ « obtenir deux nombres paires » : $P(\bar{D}) = \frac{1}{4}$

$P(\bar{D}) = 1 - P(D) \Leftrightarrow P(D) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

2) F « obtenir deux nombres ≥ 20 » : $F = \emptyset$, $P(F) = 0$.

EXERCICE 2

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap B \cup A \cap C$

$= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P((A \cap B) \cap (A \cap C))$

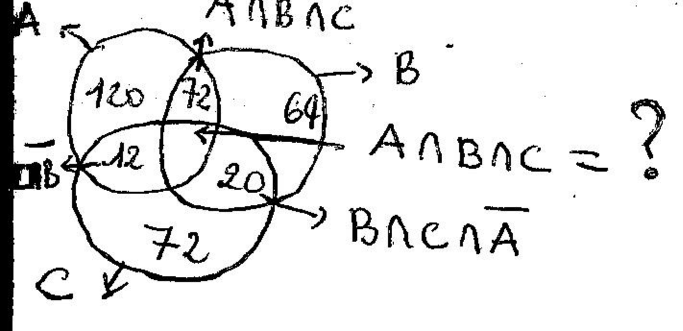
$= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

EXERCICE 3

A $\longrightarrow$ 120 B $\longrightarrow$ 64 C $\longrightarrow$ 72

...et B : 72 B et C : 20 A et C : 12



31

Déterminons la proba que ce malade :

a) présente les trois symptômes.

$Card(A \cap B \cap C) = 400 - (120 + 64 + 72 + 20 + 12) = 40$

$P(A \cap B \cap C) = \frac{40}{400} = \frac{1}{10}$

b) Présente le symptôme A. $Card A = 120 + 72 + 12 + 40$

$Card A = 244$. $P(A) = \frac{244}{400} = \frac{61}{100}$

c) Ceux qui ne presente pas le symptôme B :

$Card \overline{B} = 120 + 12 + 72 = 204$. $P(\overline{B}) = \frac{51}{100}$

TD N°3

EXO 1

$P(X=k) = ak(8-k)$

1) Calculons a.

$$\sum_{k=0}^{8} P(X=k) = \sum_{k=0}^{8} ak(8-k) = a\sum_{k=0}^{8}(8k-k^2) = a\sum_{k=0}^{8} 8k - a\sum_{k=0}^{8} k^2$$

on a : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

donc $\sum_{k=0}^{8} a8k = \frac{8(8+1)}{2} \times 8a = 36 \times 8a = 288a$ et $\sum_{k=0}^{8} ak^2 = a\frac{8(8+1)(2\times 8+1)}{6} = a(204)$

$\sum_{k=0}^{8} P(X=k) = 1 \Rightarrow 288a - 204a = 1 \Rightarrow 84a = 1$

d'où $\boxed{a = \frac{1}{84}}$

2) Calculons $m = E(X)$, $Var(X)$ et $\sigma(X)$.

$\Rightarrow m = \sum_{k=0}^{8} kP(X=k) = \frac{1}{84}(7+24+45+64+75+72+49)$

$\boxed{m = 4}$

$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - m^2$

$* \ E(X^2) = \sum_{k=0}^{8} k^2 P(X=k) = \frac{1}{84}(7+48+135+256+375+432+343)$

$E(X^2) = 19$

$Var(X) = 19 - 4^2 \Rightarrow \boxed{Var(X) = 3}$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{Var(X)} \Rightarrow \boxed{\sigma = \sqrt{3}}$

32

EXO 2

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \ x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{2x}{3}} & si \ x > 0 \end{cases}$$

1) Déterminons la densité de proba de X.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}x} \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

2) Calculons les moments d'ordre n et $\sigma(x)$.

$$\Rightarrow m = E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2}{3} x^n e^{-\frac{2}{3}x}\,dx$$

$$m = \frac{2}{3}\left(\frac{n!}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^n n!$$

$$\Rightarrow \sigma(x) = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}$$

$* \; E(X^2) = \frac{9}{2}$

$* \; E(X) = \frac{3}{2} \Rightarrow [E(X)]^2 = \frac{9}{4}$

$$\sigma(X) = \frac{3}{2}.$$

3) Calculons $p(X \in [m-\sigma; m+\sigma])$

$$p(X \in [m-\sigma; m+\sigma]) = p\left(X \in \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}; \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right]\right)$$

$$p(X \in [0; 3]) = F(3) - F(0) = 1 - e^{-\frac{2 \times 3}{3}} - 0$$

$$p(X \in [m-\sigma; m+\sigma]) = 1 - e^{-2}.$$

EXO 3

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ 0 \text{ si } x > 1. \end{cases}$$

a) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = [\sqrt{x}]_0^1 = 1$ donc f est une densité de probabilité.

b) La fonction de répartition : $F(X)$

$$F(X) = \int_0^X f(x)\,dx = [\sqrt{x}]_0^X = \sqrt{X}$$

2) $g(x) = k e^{-|x|}$

a) Déterminons k pour q g soit une densité de proba

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} K e^{x}\,dx + \int_0^{+\infty} K e^{-x}\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$K\left([e^{x}]_{-\infty}^{0} + [-e^{-x}]_0^{+\infty}\right) = 1 \Rightarrow K(1+1) = 1$$

$\boxed{k = \frac{1}{2}}$

b) Déterminons la fonction de répartition de X

on a $g(x) = G'(x)$.

donc $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{t}\,dt + \int_0^{x} \frac{1}{2} e^{-t}\,dt$

$$\boxed{G(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}}$$

c) $Y = X^2$. Déterminons la fonction de répartition et la densité $\cancel{X}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = P(Y < x) = P(X^2 < x)$

pour $x \in \mathbb{R}_-$, $(X^2 < x) = \emptyset \Rightarrow H(x) = 0$

pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|X|^2 < x \Rightarrow |X| < \sqrt{x} \Rightarrow -\sqrt{x} < X < \sqrt{x}$

$x \in \mathbb{R}_+$, $H(x) = P(-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}) = G(\sqrt{x}) - G(-\sqrt{x})$

* $H(x) = 1 - \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2} - \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2} = 1 - e^{-\sqrt{x}}$

$$H(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{x}} \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

posons : h est la densité de Y

$h(x) = H'(x)$

$$h(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

33

EXO4

Les visites aux personnes st des épreuves de Bernoulli indépendantes N (compte le nbre de visites nécessaire à la réalisat° du succès)

$N \rightsquigarrow BN(r,P)$. loi binomiale négative de paramètres r et p. Ici r = au nbre de contrats souscrit, P = proba de succès.

1) $P(N=k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$ avec $k \geq r$

2) Calculons l'espérance et la Variance de N.

* $E(N) = \dfrac{r}{p}$ et $V(N) = \dfrac{r(1-P)}{p^2}$.

* EXO6

1) Les valeurs prises par X : $X = \{2,3,4,5,6\}$

EX : $2O + 5A = 7 \,/\, 3O + 4A = 7 \,/\, 4O + 3A = 7$
$5O + 2A = 7$ et $6O + 1A = 7$.

2) La V.A de X compte le nbre d'ouvriers interrogés on a une population donnée ds laquelle, on a 2 catégories d'individu : Les ouvriers et les agents administratifs. Donc on a une loi Loi hypergéométrique -

$p(x=k) = \dfrac{C_6^k \times C_5^{7-k}}{C_n^7}$

3) Calculons la proba d'interroger 3 ouvriers.

on a : $k=3$ et $n=11$.

$p(X=3) = \dfrac{100}{330} = \dfrac{10}{33}$.

Proba N°3

EXO7

Déterminons la loi de proba du nbre de centenaire atteignant 101 ans

Soit X la VA. Le nbre de personnes atteignant 100 ans

$X \rightsquigarrow P(\lambda)$

Soit Y la VA qui désigne le nbre de personnes atteignant 101 ans

La proba conditionnelle de Y

La variable d'une loi $B(n,p)$ d'où $B(n, 1-q)$

$P(Y=k / X=n) = C_n^k p^k q^{n-k}$

or $p(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

rappel: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(Y=k / X=n) = \frac{P[Y=k, X=n]}{P[X=n]}$

$P[(Y=k) \cap (X=n)] =$

$P(X=n) \times P(Y=k / X=n)$

$P(Y=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P[(Y=k) \cap (X=n)]$

$= \sum^{+\infty} P(X=n) \times P(Y=k / X=n)$

$P(Y=k) = \sum_{k=n} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \times C_n^k p^k q^{n-k}$

$= \sum \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$

$= \frac{p^k e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k} q^{n-k}}{(n-k)!}$

$= \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$

posons $j = n-k$

qd $n=k$ alors $j=0$ et qd $n \to +\infty$ $j \to +\infty$

$P(Y=k) = \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{j=0} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$

$= \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} e^{\lambda q}$

$P(Y=k) = \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda p}}{k!}$

Donc $Y \rightsquigarrow P(\lambda p)$.

EXO5

1) Donnons les fct° génératrices de X et de Y.

Posons X

$G_X(s) = (ps+q)^n = \left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}\right)^6$

pour Y

34

$$G_Y(s) = \frac{ps}{1-qs} = \frac{\frac{1}{6}s}{1-\frac{5}{6}s}$$

$$= \frac{s}{6(1-\frac{5}{6}s)} = \frac{s}{6-5s}$$

2) Les moments simples d'ordre 1, 2 et 3.

* moment d'ordre 1:

$$E(X) = G'(1)$$

on a: $G'_X(s) = 6 \times \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}\right)^5$

$$= 4\left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}\right)^5$$

$$\boxed{E(X) = 4}$$

* Moment d'ordre 2

$$E(X^2) = G'(1) + G''(1)$$

$\Rightarrow G''(1) = 20 \times \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}\right)^4$

$$E(X^2) = 4 + \frac{40}{3}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^4$$

$$\boxed{E(X^2) = \frac{52}{3}}$$

* Moment d'ordre 3

Formule

$$E(X^3) - 3E(X^2) + 2E(X) = G'''_X(1)$$

donc $E(X^3) = -2E(X) + 3E(X^2) + G'''_X(1)$

$$E(X^3) = -2G'(1) + 3(G'_X(1) + G''_X(1)) + G'''_X(1)$$

$$E(X^3) = 4 + 3\frac{52}{3} + G'''_X(1)$$

Celui est à trouver (G

avec $G_X(s) = \left(\frac{2}{3}s + \right.$

Autre méthode

$$E(X^k) = \sum_{n=0}^{\infty} n^k f_n$$

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n$$

$$G^{(3)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) f_n$$

$$G^{(3)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) f_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n^3 - 3n^2 + 2n) f_n$$

$$= E(X^3) - 3E(X^2) + 2E(X)$$

$$= E(X^3) - 3E(G''(1) + G'(1)) + 2G'(1)$$

$$= E(X^3) - 3G''(1) - G'(1)$$

$$\boxed{E(X^3) = G^{(3)}(1) + 3G''(1) + G'(1)}$$

* En déduisons la Var

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

* En

$$\sigma(X) = \sqrt{E(X^2) - [(E(X)]^2}$$

1) STATISTIQUE I.D

EXO4

$X \rightsquigarrow N(172\text{ cm}, 9\text{ cm})$

$Y \rightsquigarrow N(166\text{ cm}, 36\text{ cm})$

$X \longrightarrow N(m, \sigma^2)$

$T = \frac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow N(0;1)$

a) Proba.

* Pour les hommes

$P(X \geq 184) = 1 - P(X < 184)$

$= 1 - P\left(\frac{X-172}{3} < \frac{184-172}{3}\right)$

~~alors~~ $T = \frac{X-172}{3} \rightsquigarrow N(0,1)$

$P(X \geq 184) = 1 - P(T < 4)$

$= 1 - \Phi(4)$

$= 1 - 0{,}999968$

$= 0{,}000032$

* Pour les femmes.

$P(Y \geq 184) = 1 - P(Y < 184)$

$= 1 - P\left(\frac{Y-166}{6} < \frac{184-166}{6}\right)$

alors $T' = \frac{Y-166}{6} \rightsquigarrow N(0,1)$

$P(Y \geq 184) = 1 - P(T' < 3)$

$= 1 - \Phi(3)$

$= 1 - 0{,}99865$

$P(Y \geq 184) = 0{,}00135$

Conclusion on a :

$P(Y \geq 184) > P(X \geq 184)$

alors, il y a plus de femmes qui mesurent 184 que d'hommes.

b) Ici on a une proba conditionnelle

$P[Y \geq 184 \mid Y \geq 180]$

$= \frac{P[Y \geq 184 \text{ et } Y \geq 180]}{P(Y \geq 180)}$

$= \frac{P(Y \geq 184)}{P(Y \geq 180)}$

• $P(Y \geq 180) = 1 - P[Y < 180)$

$= 1 - P\left(\frac{Y-160}{6} < \frac{180-160}{6}\right)$

alors $T' = \frac{Y-160}{6} \rightsquigarrow N(0,1)$

$P(Y \geq 180) = 1 - P(T' < 2{,}33)$

$= 1 - \Phi(2{,}33)$

$= 1 - 0{,}9901 = 0{,}0099$

35

$P[Y \geq 184 / Y \geq 180]$

$= \frac{0{,}00135}{0{,}0099} = 0{,}1363636364$

EXO5

Ds cette usine lorsq'on prend une vis celle-ci est soit defectueuse ou en bonne etat. soit X la VA qui compte le nbre de vis defectueuses

$X \rightsquigarrow B(n, 3\%)$ où n est le nbre de vis auquel on s'interesse.

Rappel

si $X \rightsquigarrow B(n,p)$ tq:

$n \geq 30$, $p < 0{,}1$, $npq > 5$

$n = 1000$ et $p = 0{,}03 = \frac{3}{100}$

$n \geq 30$, $p < 0{,}1$ et $npq = \frac{30 \times 97}{100}$

$npq > \frac{50}{10}$

. X peut être approché par une loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ plus precisement $\mathcal{N}(30, 29,1)$

a) Proba d'après plus de 50 vis défectueuses.

Ds la pratiq, comme l'approximation faite est ... d'une

loi discrète par une loi Co... nous devons effectuer une correction de continuité (Voir cours de convergence) c'est-à-dire q'à la valeur x_0 d'une variable discrète, nous associons l'intervalle $[x_0-0{,}5, x_0+0{,}5]$ pour la ~~valeur~~ variable continue.

EX: on considere une VA $X \rightsquigarrow B(400; 0{,}5)$. on peut ~~approx~~ approcher X par la loi normale $\mathcal{N}(\underbrace{200}_{m}; \underbrace{100}_{\sigma^2})$

Ainsi, si l'on considère la variable

$Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(200; 100)$

on approchera

$P(X=190) = P(190-0{,}5 \leq Y \leq$ ...

$P(X \leq 210) = P(Y \leq 210+0{,}5)$

$P(110 \leq X \leq 130) =$

$P(110-0{,}5) \leq Y \leq 130+0{,}5)$

2) STATISTIQUE

5. EXOS

* Avoir plus de 50 vis défectueuses

$P(X>50) = 1 - P(X \leq 50)$

$= 1 - P(Y \leq 50+0{,}5)$

$= 1 - P\left(\frac{Y-30}{\sqrt{29{,}1}} \leq \frac{50{,}5-30}{\sqrt{29{,}1}}\right)$

posons $T = \frac{Y-30}{\sqrt{29{,}1}}$ où $T \rightsquigarrow N(0,1)$

$P(X>50) = 1 - P\left(T \leq \frac{20{,}5}{\sqrt{29{,}1}}\right)$

$= 1 - P(T \leq 3{,}8)$

$= 1 - 0{,}999928$

$= 0{,}000072.$

Avoir entre 20 et 40 vis

$P(20 \leq X \leq 40) = P(19{,}5 \leq Y \leq 40{,}5)$

$= P\left(\frac{19{,}5-30}{\sqrt{29{,}1}} \leq \frac{Y-30}{\sqrt{29{,}1}} \leq \frac{40{,}5-30}{\sqrt{29{,}1}}\right)$

$= P\left(\frac{-10{,}5}{\sqrt{29{,}1}} \leq \frac{Y-30}{\sqrt{29{,}1}} \leq \frac{10{,}5}{\sqrt{29{,}1}}\right)$

posons $T = \frac{Y-30}{\sqrt{29{,}1}}$ où $T \rightsquigarrow N(0,1)$

$P(20 \leq X \leq 40) = P(-1{,}9464 \leq T \leq 1{,}9464)$

$P(20 \leq X \leq 40) = \phi(1{,}9464) - \phi(-1{,}9464)$

$= \phi(1{,}9464) - 1 + \phi(1{,}9464)$

$= 2\phi(1{,}9464) - 1.$

Calculons $\phi(1{,}9464)$ par une interpolation linéaire

$\phi(\alpha_1) < \phi(\alpha) < \phi(\alpha_2) \Rightarrow \alpha_1 < \alpha < \alpha_2$

$$\frac{\phi(\alpha)-\phi(\alpha_1)}{\alpha-\alpha_1} = \frac{\phi(\alpha_2)-\phi(\alpha_1)}{\alpha_2-\alpha_1}$$

alors $\phi(1{,}94) \leq \phi(1{,}9464) \leq \phi(1{,}95)$

$0{,}9738 \leq \phi(1{,}9464) \leq 0{,}9744$

$$\frac{\phi(1{,}9464)-\phi(1{,}94)}{1{,}9464-1{,}94} = \frac{0{,}9744-0{,}9738}{1{,}95-1{,}94}$$

$\phi(1{,}9464) = 0{,}974184.$

$P(20 \leq X \leq 40) = 0{,}948368.$

36

N° 5 PROBA_STAT

EXO 1

Determinons m et σ

• $p(X>12) = p\left(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{12-m}{\sigma}\right)$

car $T = \frac{X-m}{\sigma}$ où $T \rightsquigarrow N(0,1)$

$P(X>12) = p\left(T > \frac{12-m}{\sigma}\right)$

$= 0{,}8461 = \phi(1{,}02)$

$\Rightarrow \frac{m-12}{\sigma} = 1{,}02$ (1)

$P(X<16) = p\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{16-m}{\sigma}\right)$

$= p\left(T < \frac{16-m}{\sigma}\right) = 0{,}5 = \phi(0)$

$\Rightarrow \frac{16-m}{\sigma} = 0$ (2) $\Rightarrow m = 16$

(1) $\Rightarrow \frac{m-12}{\sigma} = 1{,}02$

$\Rightarrow \frac{16-12}{\sigma} = 1{,}02$

$\Rightarrow \sigma = \frac{4}{1{,}02} = 3{,}9215$

EXO 2

Donnons une estimat° ponctuelle de m et une estimat° ponctuelle de σ

$m = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i = 197{,}2$

$s'^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X})^2$

$= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i - 197{,}2)^2$

$= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i^2 - 2X_i \times 197{,}2 + (197{,}2)^2\right)$

$= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10} X_i^2 - \frac{2}{9}\sum_{i=1}^{10} 197{,}2\, X_i + \frac{(197{,}2)^2}{9}$

où $s'^2 = \frac{1}{9}\Big[(200-197{,}2)^2 + (205-$ [illegible] $+ (180-197{,}2)^2 + (150-197{,}2)^2 + (215-$ [illegible] $+ (102-197{,}2)^2 + (170-197{,}2)^2 + (235-197{,}2)^2 + (215-197{,}2)^2 + (300-197{,}2)^2\Big]$

$s'^2 = 2780{,}62$

$\sigma = \sqrt{s'^2} = \sqrt{2780{,}62}$

$\sigma = 52{,}73$

EXO 3

$X \rightsquigarrow U[0,a]$

1.) $T_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 2n$

$T_n = 2\overline{X}_n$, $\overline{X}_n$ est estimateur de θ

Donc T_n est un estimateur de a

Montrons q T_n est sans biais

$E(T_n) = 2E(\overline{X}_n) = a$ car $E(\overline{X}_n) = \frac{a}{2}$. Donc T_n est un estimateur sans biais de a.

Calculons son risque quadratique.

Puisq T_n n'est pas biaisé alors son risq quadratiq est = à sa Variance.

$Var(ax) = a^2 Var(x)$

$$Var(T_n) = E(T_n^2) - [E(T_n)]^2$$
$$= Var(2\overline{X}_n)$$
$$= 4 Var(\overline{X}_n)$$
$$= 4 Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$
$$= \frac{4}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$
$$= \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$
$$= \frac{4}{n^2}\left(\frac{na^2}{12}\right) = \frac{a^2}{3n}$$

$$R(0, T_n) = Var(T_n) = \frac{a^2}{3n}.$$

2) Donnons la fonct° de répartition de X.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in]-\infty, a[\\ \frac{x-a}{b-a} & si\ x \in [a,b] \\ 1 & si\ x \in]b; +\infty[\end{cases}$$

Ici
$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{x}{a} & si\ 0 \leq x \leq a \\ 1 & si\ x > a. \end{cases}$$

La fonction de densité de proba est $f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, Ici on a :

$$f(x) = \frac{1}{a} 1_{[0;a]}(x)$$

si $x < 0$, on a $f(x) = 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = 0$$

si $x \in [0; a]$, on a : $f(x) = \frac{1}{a}$

donc, $F(x) = \int_0^x \frac{1}{a}\, dt$
$$= \frac{1}{a}\int_0^x dt$$

37

$$= \frac{1}{a}[t]_0^x = \frac{1}{a}[t]_0^x$$

$$\boxed{F(x) = \frac{x}{a}}$$

si $x > a$ on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{a}\, dt$

$F(x) = \int_0^a \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a}[t]_0^a = 1$

$T'_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

Déterminons la fonct° de répartition de T'_n.

Soit G_n la fonction de répartition de T'_n

Par définition $G_n(x) = P(T'_n < x)$

$$G_n(x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) < x)$$
$$= P[X_1 < x, X_2 < x, \dots, X_n < x]$$
$$= P\left[\bigcap_{i=1}^n (X_i < x)\right]$$
$$= \prod_{i=1}^n P(X_i < x)$$
$$= \prod_{i=1}^n F(x) = (F(x))^n$$

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^n \text{ si } 0 \leq x \leq a \\ 1 \text{ si } x > a. \end{cases}$$

Déterminons en une densité de T'_n. Soit g_n la densité de (répartition) proba de T'_n

$g(x) = G'_n(x)$

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{a^n} n x^{n-1} \text{ si } 0 \leq x \leq \\ 0 \text{ si } x > a. \end{cases}$$

Déterminons son biais son risq quadratiq.

$$E(T'_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{n}{a^n} x^{n-1} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n x^n}{a^n} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{a^n} x^n dx$$
$$= \frac{n}{a^n}\left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^a$$

$E(T'_n) = \frac{na}{n+1} \neq a$ donc T'_n est un estimateur biaisé a.

Désignons par $B(T'_n)$ le bi de T'_n on a:

$$B(T'_n) = E(T'_n) - a$$
$$= \frac{na}{n+1} - a = \frac{-a}{n+1}$$

Calculons son risq quad

$$E(T'^2_n) = \int_0^a \frac{x^2 n x^{n-1}}{a^n} dx$$
$$= \int_0^a n x^{n+1} dx$$

$$(T_n'^2) = \frac{na^2}{n+2}$$

$$(T_n'^2) - (m)^2$$

$$(T'_n) = E\left((T'_n - a)^2\right)$$

$$= Var(T'_n) + (B(T'_n))^2$$

$$V(T'_n) = \frac{na^2}{n+2} - \left(\frac{na}{n+1}\right)^2$$

$$= \frac{na^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$(a, T'_n) = \frac{na^2}{(n+2)(n+1)^2} + \left(\frac{a}{n+1}\right)^2$$

$$= \frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}$$

38

Estimation ponctuelle de l'écart-type de x.

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{150} \times 19486 - (10,0133)^2$$

$$\sigma_e^2 = 29,6464$$

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_e^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{n\sigma_e^2}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{150(29,6464)}{150-1}}$$

Donc $\boxed{\sigma = 5,4631}$

Estimation de m par 1 intervalle de confiance de niveau de 99%

$$I_{0,01} = \left]\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

avec $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,995}$

$$0,9949 < 0,995 < 0,9951$$

$$2,57 < u_{0,995} < 2,58$$

Par interpolat° linéaire

on a : $\frac{0,995 - 0,9949}{0,9951 - 0,9949} = \frac{u_{0,995} - 2,57}{2,58 - 2,57}$

$$\Rightarrow u_{0,995} = 2,575$$

$$I_{0,01} = \left] 10,0133 - 2,575 \cdot \frac{5,4631}{\sqrt{150}} ; 10,0133 + \frac{2,575 \times 5,4631}{\sqrt{150}} \right[$$

$$I_{0,01} =]8,8644 ; 11,1616[$$

Donc m est compris entre 8,8644 et 11,1616 à 99% de niveau de confiance.

5) Determinons la marge d'erreur dans l'estimation de m au risque de 1%.

On sait que :

$$\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m - \bar{x} < u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$|m - \bar{x}| < u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

La marge d'erreur est au risque α%

$$\mathcal{E} = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \text{longueur } I_\alpha$$

Application

$$\mathcal{E} = \frac{11,1616 - 8,8644}{2}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = 1,1486}$$

39

EXO 1

La loi du couple (x, y) est définie par : $p(X=i, Y=j) = C_{ij}$ pour $(i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

$p(X=i, Y=j) = 0$ sinon.

a) Calculons C la constante.

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} C_{ij} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} C_i \left(\sum_{j=1}^{3} j\right) = 1$$

$$C\left(\sum_{i=1}^{3} i\right)\left(\sum_{j=1}^{3} j\right) = 1$$

$$C(1+2+3)(1+2+3) = 1$$

$$\boxed{C = \frac{1}{36}}$$

b) Calculons $P[1 \leq X \leq 2, Y \leq 2]$

$$P[1 \leq X \leq 2; Y \leq 2] = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} C_{ij}$$

$$= C\left(\sum_{i=1}^{2} i\right)\left(\sum_{j=1}^{2} j\right) = C(1+2)(1+2)$$

$$= 9C = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P[X \geq 2] = \sum_{i=2}^{3}\sum_{j=1}^{3} C_{ij}$$

$$P[X \geq 2] = C\left(\sum_{i=2}^{3} i\right)\left(\sum_{j=1}^{3} j\right) = $$

$$= C(2+3)(1+2+3) = 30C$$

$$= \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow P[Y < 2] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{1} C_{ij}$$

$$= C(1+3+2)(1) = 6C$$

$$P[Y < 2] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

c) Dét les lois marginales X et Y

$$P_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{3} C_{ij} = C_i\left(\sum_{j=1}^{3} j\right)$$

$$= \frac{1}{36} i (1+2+3) = \frac{i}{6}$$

$$\begin{cases} P_{i\cdot} = \frac{i}{6} & \text{si } i \in \{1,2,3\} \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$$P_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{3} C_{ij} = C_j\left(\sum_{i=1}^{3} i\right)$$

$$= \frac{j}{36}(1+2+3) = \frac{j}{6}$$

$$\begin{cases} P_{\cdot j} = \frac{j}{6} & \text{si } j \in \{1,2,3\} \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

EXO2

X\Y	-4	2	7	Loi marg de X	$P_{i.}X_i$	$P_{i.}X_i^2$	$\sum_j P_{ij}Y_j$	$X_i\sum_j P_{ij}Y_j$
1	1/8	1/4	1/8	$P_{1.}=1/2$	1/2	1/2	7/8	7/8
5	1/4	1/8	1/8	$P_{5.}=1/2$	5/2	$\frac{25}{2}$	1/8	5/8
Loi marg de Y	$P_{.-4}=3/8$	$P_{.2}=\frac{3}{8}$	$P_{.7}=1/4$	1	3	13	1	$\frac{3}{2}$

$P_{.j}Y_j$	$P_{.j}Y_j^2$	$\sum_i P_{ij}X_i$	$Y_j\sum_i P_{ij}X_i$
/2	6	11/8	-11/2
4	3/2	7/8	7/4
/4	$\frac{49}{4}$	$\frac{3}{4}$	3
	$\frac{79}{4}$	3	$S=\frac{3}{2}$

$= \sum_i P_i X_i = 3$

$(X) = \sum_i P_i X_i^2 - (\overline{X})^2 = 13-9$

$(x) = 4 \Rightarrow \boxed{\sigma(x) = 2}$

$= \sum_j P_j Y_j^2 = 1$

$^2(Y) = \sum_j P_j Y_j^2 - \overline{Y}^2 = \frac{75}{4}$

$ov(x,y) = \sum_i \sum_j x_i y_j P_{ij} - \sum_i P_i x_i \sum_j P_j y_j$

$Cov(x,y) = S - \overline{X}\,\overline{Y}$

$= \frac{3}{2} - 3\times 1 = -\frac{3}{2}$

coefficient de correlat°

$-1 < r < 1$

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-\frac{3}{2}}{2\times\frac{5\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{10}$$

$\boxed{r = -0{,}1732}$

Conclusion; Il y a une mauvaise correlat° entre X et Y. " faible.

4D

EXO 3

$f(x,y) = Cxy$ si $0 < x < 4$
$1 < y < 5$

$f(x,y) = 0$ si non.

a) calculons la constante c.

Comme $f(x,y)$ est une densité de probabilité $\iint_{-\infty\,-\infty}^{+\infty\,+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

$$\int_0^4\int_1^5 Cxy\,dx\,dy = \int_0^4 Cx\left(\int_1^5 y\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^4 Cx\left(\left[\frac{1}{2}y^2\right]_1^5\right)dx = \int_0^4 Cx(12)\,dx$$

$$= 12C\int_0^4 x\,dx = 12C\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$

$$= 96C \Rightarrow 96C = 1$$

$$\boxed{C = \frac{1}{96}}$$

b) Calculons $P[1<x<2; 2<y<3]$

$P[1<x<2; 2<y<3]$

$$= \int_1^2\int_2^3 f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int^2\int^3 Cxy\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{96}\int_1^2 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_2^3 dx$$

$$= \frac{1}{96}\times\frac{5}{2}\int_1^2 x\,dx = \frac{5}{192}\left[\frac{1}{2}x^2\right]$$

$$= \frac{5}{192}\times\frac{3}{2} = \frac{15}{384} = \frac{5}{128}$$

$$P[1<x<2; 2<y<3] = \frac{5}{128}$$

c) Calcul des lois marginales de X et Y.

- La loi marginale de X.

$$P_{.X} = \int_1^5 f(x,y)\,dy = \int_1^5 Cxy\,dy$$

$$= \frac{1}{96}x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_1^5 = \frac{x}{96}\left(\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{12x}{96} = \frac{x}{8}$$

$$\begin{cases} P_{.X} = \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 4 \\ P_{.X} = 0 \text{ si non.} \end{cases}$$

- La loi marginale de Y

$$P_{Y.} = \int_0^4 Cxy\,dx = \int_0^4 cy\,x\,d$$

$$= \frac{y}{96}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \frac{y}{12}$$

$P_{Y.} = \frac{y}{12}$ si $1 < y < 5$

dét la fonct° de répartit°

e(x, y)

$$F(X,Y) = \int_{-\infty}^{X} \int_{-\infty}^{Y} f(x,y)\,dx\,dy$$

Pour $x \leq 0$ ou $y \leq 1$

$F(x,y) = 0$ car $f(x,y) = 0$

Pour $0 < x < 4$ et $1 < Y < 5$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{X}\int_{-\infty}^{Y} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint f(u,v)\,du\,dv$$

$$= \int_{-\infty}^{X}\left(\int_{-\infty}^{1} f(u,v)\,dv + \int_{1}^{Y} f(u,v)\,dv\right) du$$

$$= \int_{-\infty}^{X}\int_{1}^{Y} f(u,v)\,dv\,du$$

$$= \int_{1}^{Y}\left(\int_{-\infty}^{0} f(u,v)\,du + \int_{0}^{X} f(u,v)\,du\right) dv$$

$$= \int_{1}^{Y}\int_{0}^{X} cuv\,du\,dv$$

$$= \int_{1}^{Y} cv\left(\int_{0}^{X} u\,du\right) dv$$

$$= \int_{1}^{Y} cv\left(\frac{1}{2}X^2\right) dv$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{96} X^2 \left[\frac{1}{2}V^2\right]_1^Y$$

$$= \frac{X^2(Y^2-1)}{384}$$

• Pour $0 < x < 4$ et $y \geq 5$

$$F(X,Y) = \int_{-\infty}^{X}\int_{-\infty}^{Y} f(u,v)\,du\,dv$$

$$= \int_{-\infty}^{X}\left(\int_{-\infty}^{Y} f(u,v)\,dv\right) du$$

$$= \int_{-\infty}^{X}\left(\int_{-\infty}^{1} f(u,v)\,dv \cancel{du} + \int_{1}^{X} f(u,v)\,dv + \int_{5}^{Y} f(u,v)\,dv\right) du$$

41

$$= \int_{-\infty}^{X}\left(\int_{1}^{5} f(u,v)\,dv\right) du$$

$$= \int_{1}^{5}\left(\int_{-\infty}^{X} f(u,v)\,dv\right) dv$$

$F(x,y) =$

$$\int_1^5\left(\int_{-\infty}^0 f(x,y)\,du + \int_0^x f(u,v)\,du\right)dv$$

$$= \int_1^5\left(\int_0^x f(u,v)\,du\right)dv$$

$$= \int_1^5\left(\int_0^x cuv\,du\right)dv$$

$$= \int_1^5 cv\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^x dv$$

$$= c\,\frac{x^2}{2}\left[\frac{1}{2}v^2\right]_1^5$$

$$= \frac{x^2}{2\times 96}\left(\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{x^2}{16}$$

• Pour $x \geq 4$ et $1 < y < 5$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u,v)\,dv\,du$$

$$= \int_{-\infty}^x\left(\int_{-\infty}^y f(u,v)\,dv\right)du$$

$$= \int_{-\infty}^x\left(\int_{-\infty}^1 f(u,v)\,dv + \int_1^y f(u,v)\,dv\right)du$$

$$= \int_{-\infty}^x\left(\int_1^y f(u,v)\,dv\right)du$$

$$F(x,y) = \int_1^y\left(\int_{-\infty}^x f(u,v)\,du\right)dv$$

$$= \int_1^y\left(\int_{-\infty}^0 f(u,v)\,du + \int_0^4 f(u,v)\,du\right)$$

$$= \int_1^y\left(\int_0^4 f(u,v)\,du\right)dv$$

$$= \int_1^y \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^4 cv\,dv$$

$$= 8c\left[\frac{1}{2}v^2\right]_1^y = \frac{2\times 4}{96}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{4(y^2-1)\times 2}{2\times 96} = \frac{(y^2-1)\times 2}{48}$$

$$\boxed{F(x,y) = \frac{y^2-1}{24}}$$

* Pour $x \geq 4$ et $y \geq 5$

$F(x,y) = 1$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } \dots \\ \frac{x^2(y^2-1)}{384} \text{ si } \dots \\ \frac{x^2}{16} \text{ si } \dots \\ \frac{y^2-1}{24} \text{ si } \dots \\ 1 \text{ si } \dots \end{cases}$$

[C]alculons $P[X+Y \leq 3]$

$X+Y = 3 \Rightarrow Y = 3-X.$

$$P[X+Y<3] = \int_0^2 \int_1^{3-X} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left(\int_1^{3-x} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 cx \left(\int_1^{3-x} y\,dy \right) dx$$

$$= \frac{1}{96} \int_0^2 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_1^{3-x} dx$$

$$= \frac{1}{96} \int_0^2 x \left(\frac{1}{2}(3-x)^2 - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{96 \times 2} \int_0^2 x \left(3 - 6x + x^2 - 1 \right) dx$$

$$= \frac{1}{192} \int_0^2 x(2 - 6x + x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{192} \left([x^2]_0^2 - 6\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 + \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 \right)$$

$$= \frac{1}{192} \left(4 - 16 + 4 \right)$$

$$= -\frac{1}{24}$$

$$\boxed{P[X+Y<3] = -\frac{1}{24}}$$

42

EXAMEN $1^{ère}$ Session 2004-2005

EXERCICE I

a)

$\lambda = 100$. Soit $X \sim$ le nombre d'œufs pondus par une torture de mer.

Soit $Y \sim$ le nombre de petits.

$$P(Y/X) = \frac{P(Y \cap X)}{P(X)}$$

$$P(Y) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(Y/X) \cdot P(X) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P(Y) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k q^{n-k}$$

$$P(Y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k} q^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$P(Y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^i}{i!}$$

Posons $i = n-k$.

$$P(Y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k e^{\lambda q}}{k!} = \frac{\lambda^k p^k e^{-\lambda p}}{k!} = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}$$

Le paramètre est : $Y \sim P(\lambda p)$ donc une loi poisson. Avec $P = \frac{3}{5}$

b) (La même procedure)

EXAMEN 1^re session 2007-2008

I) a) Le nom de la loi est le schema de Bernouilli.

$E(X) = np = \frac{1}{6}$. $Var(x) = npq = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} . 5 = \frac{5}{36}$

) la loi est la loi binomiale.

$E(Y) = np = \frac{12}{6} = 2$. $Var(x) = npq = 2 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$

) 1) Vérifions

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 6x\,dx - \int_0^1 6x^2\,dx = [3x^2]_0^1 - [2x^3]_0^1 = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Déterminons F.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 6x(1-x)\,dx = \int_0^x 6x(1-x)\,dx$$

$F(x) = x^2(3-2x)$

$$\text{où } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2(3-2x) & \text{si } x \in]0;1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Calculons

$(X \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(3-1) = \frac{1}{2}$

$(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}) = F(\frac{2}{3}) - F(\frac{1}{3}) = \frac{13}{27}$

43

$(X \geq \frac{1}{6}) = 1 - F(\frac{1}{6}) = \frac{25}{27}$

) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 6x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{2}$

(III) a) Écrivons la densité

on a : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\theta}\cdot\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}}$$

b) Calculons l'estimateur du maximum de vraissemblance de θ.

$$L(f(x_i;\theta)) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\ln L(f(x_i;\theta)) = -n\ln\sqrt{2\pi\theta} - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$= -\frac{n}{2}\ln 2\pi\theta - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\frac{d\ln L(f(x_i;\theta))}{d\theta} = -\frac{n(2\pi)}{4\pi\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2n\pi}{4\pi} = \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow \frac{2n\pi}{2\pi} = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$2\theta n\pi = 2\pi \sum x_i^2 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{2\pi n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\boxed{\hat{\theta}(X_n) = \frac{2\pi}{2\pi n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \boxed{\hat{\theta}(X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

EXAMEN 1 Session 2008-2009

(I) Mr BERTE laisse à votre propre reflexion.

(II) Voir (T.D)

(III) 1) Calculons :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4} x\,dx - \int_{-1}^{1} \frac{3}{4} x^3\,dx$$

$$E(X) = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} - \frac{3}{4}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} - \frac{3}{4}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{5} \qquad \boxed{Var(X) = \frac{1}{5}}$$

$$F(x) = \frac{3}{4}\left[x\right]_{-1}^{x} - \frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{x} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}\right)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}\right) \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si non.} \end{cases}$$

2) a) $P(X>0) = 1 - F(0) = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

b) $P(X<\frac{1}{2}/X>0) = \dfrac{P(0<X<\frac{1}{2})}{P(X>0)}$

$$= \frac{F(\frac{1}{2}) - F(0)}{\frac{1}{2}} = \frac{11}{32} / \frac{1}{2} = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}$$

$$\boxed{P(X<\tfrac{1}{2} | X>0) = \frac{11}{16}}$$

44

EXAMEN : 1ère Session : 2012-2013

(I) Voir (T.D)

(II) 1) $f_\theta(x) = \frac{3}{\theta^3} x^2 \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(x)\,dx = \int_0^\theta \frac{3}{\theta^3} x^2\,dx = \frac{3}{\theta^3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^\theta = 1$$

2) $E(S) = \frac{4}{3n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{4}{3n} \times n\, E(X) = \frac{4}{3}E(X)$

Calculons $E(X)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\theta(x)\,dx = \int_0^\theta \frac{3}{\theta^3} x^3\,dx$$

$$= \frac{3}{\theta^3}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^\theta = \frac{3}{4}\theta$$

Donc $E(S) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4}\theta = \theta$

Donc $S = \frac{4}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur sans biais.

- Calculons son risque quadratique noté $R_S(\theta)$

Ici $R_S(\theta) = Var(S)$ car l'estimateur est sans biais.

On sait que : $S = \frac{4}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{4}{3}\overline{X}_n$

$$R_S(\theta) = Var\left(\frac{4}{3}\overline{X}_n\right) = \frac{16}{9} Var(\overline{X}_n)$$

$$= \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{16}{9n^2} \times n\, Var(X)$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{3}{5}\theta^2 - \frac{9}{16}\theta^2 = \left(\frac{3}{5} - \frac{9}{16}\right)\theta^2 = \frac{3}{80}\theta^2$$

$$Var(S) = \frac{16}{9n} \times \frac{3}{80}\theta^2 = \frac{3}{45n}\theta^2 = \frac{\theta^2}{15n}$$

$$\boxed{\text{Donc } R_S(\theta) = \frac{\theta^2}{15n}}$$

) Montrons que $T = \frac{3n+1}{3x} \max_{1\leq i\leq n} X_i$ est un estimateur sans biais.

Déterminons la fonctions de répartition:

$$F(x) = \int_0^x \frac{3}{\theta^3}x^2\,dx = \frac{3}{\theta^3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^x$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{x^3}{\theta^3} & \text{si } x\in[0;\theta] \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a: $T = \frac{3n+1}{3n} \max_{1\leq i\leq n} X_i$

Posons $T'_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i = \max_{1\leq i\leq n}(X_1 \dots X_n)$

45

$$E(T) = \frac{3n+1}{3n} E(T'_n)$$

Déterminons la fonction de répartition de $T'n$

Soit I_n la fonction de répartition de $T'n$

$$I_n(x) = P(T'_n < x) = P(\max(X_1 \dots X_n) < x)$$

$$I_n = P\left[\bigcap_{i=1}^{n}(X_i < x)\right] = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < x)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} F(x) = (F(x))^n$$

$$I_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^{3n} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

Soit J_n la densité de probabilité de T'_n

$$J_n = I'_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3n\frac{x^{3n-1}}{\theta^{3n}} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$E(T'_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{3n}{\theta^{3n}} \cdot x^{3n-1}\,dx$$

$$= \frac{3n}{\theta^{3n}}\left[\frac{1}{3n+1}x^{3n+1}\right]_0^{\theta} = \frac{3n\theta}{3n+1}$$

$$E(T) = \frac{3n+1}{3n} \times \frac{3n\theta}{3n+1} = \theta$$

Donc l'estimateur est sans biais.

. Calculons son risque quadratique.

$$R_T(\theta) = Var(T)$$

$$T_n = \frac{3n+1}{3n} \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

$$Var(T) = \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^2 Var(T'_n)$$

$$E(T_n'^2) = \int_{-\infty} x^2 \frac{3n}{\theta^{3n}} x^{3n-1} dx$$

$$E(T_n'^2) = \frac{3n}{\theta^{3n}} \int_0^\theta x^{3n+1} dx = \frac{3n}{\theta^{3n}} \left[\frac{1}{3n+2} x^{3n+2} \right]_0^\theta$$

$$= \frac{3n}{3n+2} \theta^2$$

nc $Var(T'_n) = \frac{3n}{3n+2}\theta^2 - \frac{9n^2\theta^2}{(3n+1)^2}$

où $R_T(\theta) = \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^2 \left[\frac{3n}{3n+2} - \frac{9n^2}{(3n+1)^2}\right]\theta^2$

$$\boxed{R_T(\theta) = \left[\frac{(3n+1)^2}{3n(3n+2)} - 1\right]\theta^2}$$

) Comparons les estimateurs S et T

EXAMEN : 2ème session : 2012-2013

ECU 2 Statistique

(I) $f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0;\lambda] \\ 0 & \text{si } x \notin]0;\lambda] \end{cases}$

1) Déterminons k.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x)\,dx = 1 \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\lambda x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \left[2\sqrt{x}\right]_0^\lambda = 1$

$\frac{k}{\sqrt{\lambda}}(2\sqrt{\lambda}) = 1 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$

2) Soit un échantillon aléatoire $(X_1 \ldots X_n)$

Calculons $E(S)$.

$E(S) = E\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{3}{n} \times n\,E(X)$

Calculons $E(X)$

$E(X) = \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{k}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\lambda \sqrt{x}\,dx$

$= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^\lambda = \frac{1}{3\sqrt{\lambda}} \lambda^{3/2} = \frac{1}{3}\lambda$

Donc $E(S) = 3 \times \frac{1}{3}\lambda = \lambda \Rightarrow \boxed{E(S) = \lambda}$

D'où S est un estimateur sans biais de λ.

- Calculons son risque quadratique

Ici $R_S(\lambda) = Var(S)$

Calculons $Var(S)$

$$Var(S) = Var\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

$$Var(S) = \frac{9}{n^2} \times n \times Var(X) = \frac{9}{n} Var(X)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^{\lambda} = \frac{1}{5}\lambda^2$$

$$Var(X) = \frac{\lambda^2}{5} - \frac{1}{9}\lambda^2 = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right)\lambda^2$$

$$Var(S) = \frac{9}{n}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right]\lambda^2 = \frac{4}{n}\cdot\frac{1}{5}\lambda^2$$

$$Var(S) = \frac{4}{5n}\lambda^2$$

d'où $\boxed{R_S(\lambda) = \frac{4}{5n}\lambda^2}$

1) 1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f_\theta(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}\,dx$

$= -\left[e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right]_0^{+\infty} = 1$, donc f_θ est une densité de proba.

$$L(f(x_i\theta)) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{2x}{\theta}\right)e^{-\frac{x^2}{\theta}}$$

$$= \left(\frac{2x}{\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\ln L(f(x_i\theta)) = \ln\left(\frac{2x}{\theta}\right)^n e^{...}$$

$$= n\ln 2x - n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

47

$$\frac{\partial \ln L(f(x_i;\theta))}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Rightarrow$$

$$n = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}(X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

EXAMEN $1^{ère}$ Session 2013-2014.

ECU I Voir (T.D)

ECU II

(I) Voir les exercices précédents.

(II) 1) $f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{si } x \in [0,\theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$E(S) = \frac{2}{n} \times n \times E(X) = 2E(X)$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta} x \, dx = \frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\cancel{+\infty}} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\theta}$$

$$E(X) = \frac{\theta}{2}$$

$2 \times \frac{\theta}{2} = \theta$ est un estimateur

[illegible]iais.

EXAMEN . 1ère Session : 2006-2007

(I) et (II) Voir (T.D)

(III) ① Calculons la densité de la loi de $S = \sqrt{X^2+Y^2}$

passage en coordonnée polaire.

Posons $y = r\sin\theta$ et $x = r\cos\theta$

$$J_p(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r > 0$$

$$S = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} = \sqrt{r^2} = r$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta; r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

précédemment nous avions admis que $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$

montrons $I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}dy\right)$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr\,d\theta = I^2 = 2\pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr\,d\theta = 2\pi = 2\pi\int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}}dr$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}}dr = \underline{1} \Rightarrow \int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}}dr = \int_0^{+\infty} s e^{-s^2/2}ds = \underline{1}$$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} p(s)\,ds = 1$ est une densité de proba de S

avec $p(s) = s e^{-\frac{s^2}{2}} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(s)$

48

Déterminons la loi de $T = \sin\phi$

on sait que $T = \sin\phi \Rightarrow dT = \cos\phi \, d\phi \Rightarrow d\phi = \frac{dT}{\cos\phi}$

$$p(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

$$E[f(T)] = E\left(f(\sin\phi)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sin\phi)\, p(\phi)\, d\phi$$

$$E[f(T)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\phi)\, d\phi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin\phi)\frac{1}{\cos\phi}\, dT$$

$$E[f(T)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(T)\frac{1}{\cos\phi}\, dT$$

$$(\sin\phi)^2 + (\cos\phi)^2 = 1 \Longrightarrow \cos\phi = \sqrt{1-(\sin\phi)^2} = \sqrt{1-T^2}$$

$$E[f(T)] = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(T)\frac{1}{\sqrt{1-T^2}}\, dT$$

$$p(T) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-T^2}}\, \mathbb{1}^{(T)}_{]-1;1[}$$

MON UE : UN PASSPORT

Correction d'arithmétiques

e Jeunesse
sciente Et
llectuelle

TUDIANT,UN DOCUMENT

EDITEURS
BERTE OUSMANE L3
BAKAYOKO AMARA L2
09110313 / 77018403
berteousmane2012@hotmail.fr

Correction du T.D

Arithmétique :

ice I

q si N est divisible par 3 ssi la somme de ses chiffres $a_1 + \dots + a_r$ est divisible par 3

divisible par 3 $\Rightarrow N \equiv 0[3]$

sait que $10 \equiv 1[3]$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $10^k \equiv 1[3]$

$a_0 \equiv a_0[3]$

$a_1 10 \equiv a_1[3]$

$a_2 10^2 \equiv a_2[3]$

$- - - -$

$a_r 10^r \equiv a_r[3]$

$= a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_r 10^r \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_r[3]$

où $a_0 + a_1 + a_2 + \dots a_r \equiv 0[3]$

N est divisible par 3 alors somme de ses chiffres est divisible par 3.

réciproquement

... que $a_0 + a_1 + \dots + a_r$ est divisible par 3.

on sait que

$N \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_r[3]$

or $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_r \equiv 0[3]$

donc $N \equiv 0[3]$ c-à-d que N est divisible par 3.

Exercice II

soit $N = a_0 + a_1 10 + \dots + a_r 10^r$ où $\forall i \in [0;r]$, $0 \leq a_i \leq 9$.

. supposons que $N \equiv 0[9]$ et mq la somme de ses chiffres est divisible par 9,

on sait que $10 \equiv 1[9]$

$\forall i \in [0;r]$, $10^i \equiv 1[9]$

$\forall a_i \in [0;9]$; $a_i 10^i \equiv a_i[9]$

donc $\sum_{i=0}^{r} a_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{r} a_i [9]$

or $N = \sum_{i=0}^{r} a_i 10^i \equiv 0[9]$

49

donc $\sum_{i=0}^{r} a_i \equiv 0[9]$

réciproquement

supposons que $\sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0[9]$ et

montrons que $N \equiv 0[9]$

on sait que $N \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i [9]$

or $\sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0[9]$ donc $N \equiv 0[9]$

conclusion : N est divisible par 9 ssi la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exercice n°III

$N = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_n 10^n$

$1 \equiv 1[11] \Rightarrow a_0 \equiv a_0[11]$

$10 \equiv -1[11] \Rightarrow a_1 10 \equiv -a_0[11]$

$10^2 \equiv 1[11] \Rightarrow a_2 10^2 \equiv a_2[11]$

$10^3 \equiv -1[11] \Rightarrow a_3 10^3 \equiv -a_3[11]$

— — — — — — — — —

$10^n \equiv (-1)^n[11] \Rightarrow a_n 10^n \equiv (-1)^n a_n[11]$

$a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_n 10^n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots (-1)^n[11]$.

$N \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n[11]$

si 11 divisible alors $N \equiv 0[11]$

$\Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n$

11 divise $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \dots (-1)^n a$

si 11 divise $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$

alors $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots (-1)^n a_n \equiv$

$\Rightarrow N \equiv 0[11]$

11 divise N.

conclusion :

N est divisible par 11 ssi la so[mme] alternée de ses chiffres est di[visible] par 11.

Ex :

$17513 = 3 + 10 \times 1 + 5 \times 10^2 + 7 \times$

$3 - 1 + 5 - 7 + 1 = 1$ or 1 n'est [pas] divisible 11 de 17513 n'est pa[s] divisible par 11.

Exercice n° IV

1) montrons que $N \equiv b_0a_0 + b_1a_1 + \cdots + a_rb_r [n]$

$\forall i = 0, 1, 2 \ldots, r,$

$b_i \equiv 10^i [n]$

$b_0 \equiv 1 [n]$

$b_1 \equiv 10 [n]$

$b_2 \equiv 10^2 [n]$

$\ldots$

$b_r \equiv 10^r [n]$

$a_0b_0 \equiv a_0 [n]$

$a_1b_1 \equiv a_1 10 [n]$

$a_2b_2 \equiv a_2 10^2 [n]$

$\vdots$

$a_rb_r \equiv a_r 10^r [n]$

donc $N \equiv a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_rb_r [n]$

2) deduisons que N est divisible par n ssi $b_0a_0 + b_1a_1 + \cdots + b_ra_r$ divisible par n

* supposons $N \equiv 0 [n]$

or $N \equiv b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_ra_r$

donc

$b_0a_0 + b_1a_1 + a_2b_2 + \cdots b_ra_r \equiv 0 [n]$

* reciproquement

on soit que

$b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots b_ra_r \equiv 0 [n]$

or

$N \equiv b_0a_0 + b_1a_1 + a_2b_2 + \cdots + b_ra_r [n]$

donc $N \equiv 0 [n]$

Concl: N est divisible par n ssi $b_0a_0 + b_1a_1 + \cdots + b_ra_r$ est divisible par n.

3) deduisons un critère de divisibilité par 7

50

ici $n = 7$.

donc montrons que N est divisible par 7 ssi $b_0a_0 + b_1a_1 + \cdots + b_ra_r$ est divisible par 7.

$\forall i = 0, 1, 2 \ldots r, \ b_i \equiv 10^i [7]$

$1 \equiv 1 [7]$

on peut prendre, $b_1 = 3, \quad 3 \equiv 3 [7]$

$b_2 = 2$, $2 \equiv 2[7]$

$b_3 = -1$, $-1 \equiv -1[7]$

$\forall i$ $b_i \equiv b_1^i [7]$

$b_1 \equiv 10[7]$ or $b_i \equiv 10^i [7]$

donc

$b_i \equiv b_1^i [7]$, $\forall i$

$b_2 \equiv b_1^2 [7]$

$b_3 \equiv b_1^3 [7]$

$\vdots$

$b_n \equiv b_1^n [7]$

$b_{i+1} \equiv b_1^{i+1} [7]$

$\equiv b_1^i \times b_1 [7]$

$b_{i+1} \equiv b_i \times b_1 [7]$, $\forall i$

$b_0 = 1$, $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $b_3 = -1$,
$b_4 = -3$, $b_5 = -2$, $b_6 = 1$, $b_7 = 3$
$b_8 = 2$, $b_9 = -1$, $b_{10} = -3$
$b_{11} = -2$ ...

On remarque la règle suivante

$\forall$ ... les valeurs de

$N \equiv b_0 a_0 + b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_i a_i$

$N \equiv a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 +$
$3a_7 + 2a_8 + \dots\dots [7]$

Exercice n° V

resolvons l'équation de congru

$2x \equiv 3[5]$

les restes possibles de 5 sont:
0, 1, 2, 3, et 4.

tableau de congruence

x	0	1	2	3	4
$2x$	0	2	4	1	3

$x \equiv 0[5] \Rightarrow 2x \equiv 0[5]$
$x \equiv 1[5] \Rightarrow 2x \equiv 2[5]$
$x \equiv 2[5] \Rightarrow 2x \equiv 4[5]$
$x \equiv 3[5] \Rightarrow 2x \equiv 1[5]$
$x \equiv 4[5] \Rightarrow 2x \equiv 3[5]$

d'où
$2x \equiv 3[5] \Rightarrow x \equiv 4[5]$ donc
$x = 4 + 5k$

$S_{\mathbb{Z}} = \{4 + 5k, k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice n° VI

résoudre le système de congruence,

$$\begin{cases} 2x \equiv 3[5] \\ 3x \equiv 4[5] \end{cases} \Rightarrow 2x+3x \equiv 2[5]$$
$$\Rightarrow 5x \equiv 2[5]$$

or $5x \equiv 0[5]$ d'où

$\boxed{S = \phi}$

Exercice n° VII

Résolvons ~~les~~ système

$$\begin{cases} x \equiv 4[6] \\ x \equiv 5[10] \end{cases}$$

on a:
$x \equiv 4[6] \Rightarrow x = 4+6k$ (1)
$x \equiv 5[10] \Rightarrow x = 5+10k'$ (2)

de (1) et (2),

$4+6k = 5+10k'$

$10k'+5-4-6k = 0$

$10k'-6k = -1$

$2(5k'-3k) = -1$

$2(3k-5k') = 1$

57

ce qui est absurde, car 2 n'est pas inversible ds

$\boxed{S_{\mathbb{Z}} = \phi}$

Exercice n° VIII

montrons que les ~~assertion~~ assertions suivante sont équivalentes.

(i)

montrons (i) $x \wedge n = 1$ alors $\bar{x} \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. (ii) $(i \Rightarrow ii)$

on a:
$(x,n) = 1$, d'après le théorème de Bezout, $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2$/

$xu + vn = 1 \Rightarrow xu = 1 - nv$
$\Rightarrow xu \equiv 1[n]$
$\Rightarrow \overline{xu} = \bar{1}$
$\Rightarrow \bar{x}\bar{u} = 1$

$\exists \bar{u} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ donc $\bar{x} \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

montrons $(ii) \Rightarrow (i)$

$\bar{x} \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \Rightarrow \exists \bar{u} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ /

$\bar{u}.\bar{x} = 1 \Rightarrow \overline{xu} = 1$

$xu \equiv 1[n]$

$xu = 1 + kn \quad / k \in \mathbb{Z}$.

$xu - kn = 1$

d'après le theorème de bezout

$(x, n) = 1$

donc $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

. montrons que $(i) \Rightarrow (iii)$

on a:

$(x,n) = 1$, d'après bezout

$\exists (k,k') / kx + k'n = 1$

$kx = 1 - k'n$

$kx = 1 + (-k')n$

$\overline{kx} = \bar{1}$

or $\overline{kx} = k\bar{x} = \bar{1}$

$\forall \bar{y} \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ a-t-on $\bar{y} = k'\bar{x}$?

où $k' \in \mathbb{Z}$.

on a:

$\bar{y} \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

puisque $k\bar{x} = 1$

$\bar{\bar{y}} = \bar{y}$

(iii) $\Rightarrow$ i:

$\bar{x}$ engendre le gpe additi

$\Rightarrow \forall \bar{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} /$

$\bar{y} = k\bar{x}$

$\bar{y} = \overline{kx}$

soit $\bar{y} = 1$ donc $\exists k' \in \mathbb{Z}$ tel

$\bar{1} = k\bar{x}$

$\bar{1} = \overline{kx}$

$k'x \equiv 1 [n]$

$k'x = 1 + k''n$

$k'x - k''n = 1$ d'après bez

$(x, n) = 1$

Exercice n°2

1) montrons que $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}$,

système de congruence

on a:

$$(S) \begin{cases} x \equiv a [m] \\ x \equiv b [n] \end{cases}$$

on a:

$(m,n) = 1$, d'après bezout

$u, v \in \mathbb{Z} \,/\, um + nv = 1$

$x_1 = avn + bum$

$um + bvn = b \Rightarrow bum = b - bvn$

$= avn + b - bvn$

$= b + (a-b)vn$

$x_1 \equiv b[n]$ ①

$aum + anv = a \Rightarrow avn = a - aum$

$= a - aum + bum$

$x_1 = a + (b-a)um$

$x_1 \equiv a[m]$ ②

d'après ① et ② x_1 est solution de (S).

Montrons que $\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ est naturellement muni d'une structure d'anneau.

S2

Soient $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$.

Soit $x \in \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$:

$\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \left\{(\alpha, \beta),\ \alpha \in \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \text{ et } \beta \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right\}$

Soit $y \in \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$.

$y = (\alpha', \beta')$ où $\alpha' \in \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ et $\beta' \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

$x + y = (\alpha + \alpha', \beta + \beta') \ ? \in \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

on a:
$\alpha + \alpha' \in \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ car $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ est un groupe additif. de même $\beta + \beta' \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

Conclusion: l'addition est interne

* Montrons l'addition est commutative.

Soit $x, y \in \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ a-t-on

$x + y = y + x$?

on a:
$x + y = (\alpha + \alpha', \beta + \beta') = (\alpha' + \alpha, \beta' + \beta)$

$x + y = y + x$. car l'addition est commutative dans $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$.

* Montrons que l'addition est associative

soient $x=(\alpha,\beta)$; $y=(\alpha',\beta')$ et $z=(\alpha'',\beta'')$

$x+(y+z) \overset{?}{=} (x+y)+z$

on a;

$$x+(y+z) = x+(\alpha'+\alpha'', \beta'+\beta'')$$
$$=(\alpha+(\alpha'+\alpha''), \beta+(\beta'+\beta'')) \quad (1)$$

$$(x+y)+z = (\alpha+\alpha', \beta+\beta')+(\alpha'',\beta'')$$
$$=((\alpha+\alpha')+\alpha'', (\beta+\beta')+\beta'')$$

comparons (1) et (2)

on a:
(1) = (2) car l'addition est associative dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$

* <u>montrons que l'addition admet un elt neutre</u>

soient $x=(\alpha,\beta)$; $e=(e_1,e_2)$

verifions que $e=(0;0)$ est elt de l'addition

$x+e=(\alpha+0, \beta+0) = (\alpha,\beta)=x$

donc $e=(0,0)$ est l'elt neutre

* <u>mq pour tout elt admet un symétrique par l'addition</u>

soit $x=(\alpha,\beta)$; $x'=(\alpha',\beta')$? a-t-on

$x+x'=e$?

on a:
$$x+x' = (\alpha,\beta)+(\alpha',\beta') = (0;0)$$
$$=(\alpha+\alpha', \beta+\beta') = (0;0)$$

$$\begin{cases}\alpha+\alpha'=0\\ \beta+\beta'=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-\alpha'\\ \beta=-\beta'\end{cases} \text{ car } \mathbb{Z}/n$$

donc $x'=(\alpha',\beta')=(-\alpha;-\beta)=-$

d'où $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un gpe abelien pour l'addition

on pose $x=(\alpha,\beta)$, $y=(\alpha',\beta')$

$xy=(\alpha\alpha', \beta\beta')$

$\alpha\alpha' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ car la loi (*) est interne dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Distributé de la loi (*) par rapport à (+)

Soient $x=(\alpha,\beta)$, $y=(\alpha',\beta')$ et $z=(\alpha'',\beta'')$ a-t-on $x.(y+z) \overset{?}{=} xy+xz$

on a:

$$x(y+z)=(\alpha,\beta)(\alpha'+\alpha'',\beta'+\beta'')$$
$$=(\alpha\alpha'+\alpha\alpha'',\beta\beta'+\beta\beta'')$$
$$=(\alpha\alpha',\beta\beta')+(\alpha\alpha'',\beta\beta'')$$
$$=xy+xz$$

donc elle est distributive par rapport (+)

* Commutativité

$\forall x=(\alpha,\beta)$ et $y=(\alpha',\beta')$ a-t-on $xy=yx$?

on a:

$$xy=(\alpha,\beta)(\alpha',\beta')=(\alpha\alpha',\beta\beta')$$
$$=(\alpha'\alpha,\beta'\beta)=yx$$

* élt neutre pour la multiplication

$\exists e=(e_1,e_2)\in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ / $\forall x=(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$xe=x$?

on a:

$$xe=(\alpha,\beta)(e_1,e_2)=(\alpha e_1,\beta e_2)=$$

$\forall\alpha\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\forall\beta\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

* Associativité pour la (*).

$\forall x=(\alpha,\beta)$, $y=(\alpha',\beta')$ et $z=(\alpha'',\beta'')$ $\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a-t-on

$$x(yz)=(xy)z.$$

conclusion $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau commutatif unitaire

3) montrons que φ est un morphisme d'anneaux

$$\varphi:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ \varphi(k)=(k+m\mathbb{Z},k+n\mathbb{Z})$$

* montrons q φ est un morphisme

soient $k,k'\in\mathbb{Z}^2$

58

$$\varphi(k+k')=\varphi(k)+\varphi(k')$$
$$\varphi(k\times k')=\varphi(k)\times\varphi(k')$$

$\varphi(1) = 1.$

* 1er cas

$\varphi(k+k') = (k+k'+m\mathbb{Z},\ k+k'+n\mathbb{Z})$

$= (\overline{k+k'}[m];\ \overline{k+k'}[n])$

$= (\bar{k}+\bar{k}'[m];\ \bar{k}+\bar{k}'[n])$

$= (\bar{k}[m]+\bar{k}'[m];\ \bar{k}[n]+\bar{k}'[n])$

$= (\bar{k}[m];\ \bar{k}[n]) + (\bar{k}'[m];\ \bar{k}'[n])$

$= (k+m\mathbb{Z},\ k+n\mathbb{Z}) + (k'+m\mathbb{Z},\ k'+n\mathbb{Z})$

d'où $\varphi(k+k') = \varphi(k) + \varphi(k')$.

* 2e cas

$\varphi(k.k') = (k.k'+m\mathbb{Z},\ kk'+n\mathbb{Z})$

$= (\overline{kk'}[m];\ \overline{kk'}[n])$

$= (\bar{k}.\bar{k}'[m],\ \bar{k}.\bar{k}'[n])$

$= (\bar{k}[m].\bar{k}'[m];\ \bar{k}[n].\bar{k}'[n])$

$= (\bar{k}[m].\bar{k}[n]).(\bar{k}'[m].\bar{k}'[n])$

$= (k+m\mathbb{Z},\ k+n\mathbb{Z}).(k'+m\mathbb{Z},\ k'+n\mathbb{Z})$

$\varphi(kk') = \varphi(k).\varphi(k')$.

$\varphi(1) = (1+m\mathbb{Z},\ 1+n\mathbb{Z})$

$= (\bar{1},\bar{1}) = 1$

donc $\varphi(1) = 1$

Conclus: φ est un morphisme d'

montrons que φ est ~~un~~ sur

soit $x \doteq (\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

~~est-il~~ existe t-il u $k \in \mathbb{Z}$/

$\varphi(k) = x$

$\alpha = a + m\mathbb{Z}$ et $\beta = b + n\mathbb{Z}$.

existe-t-il $k \in \mathbb{Z}$/

$(k+m\mathbb{Z};\ k+n\mathbb{Z}) = (a+m\mathbb{Z},$

$\Rightarrow \begin{cases} k+m\mathbb{Z} = a+m\mathbb{Z} \\ k+n\mathbb{Z} = b+n\mathbb{Z} \end{cases}$

$(S)\ \begin{cases} k \equiv a\,[m] \\ k \equiv b\,[n] \end{cases}$ or (S) ad

moins une solution k_1

(Voir Question n° 1)

donc φ est admet au

montrons que le morphisme $k \in \mathbb{Z}, \varphi(k) = (k + m\mathbb{Z}, k + n\mathbb{Z})$ induit un isomorphisme.

$: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

après le théorème d'isomorphisme $\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\varphi$ est isomorphe à $\mathrm{Im}\,\varphi$.

* montrons que $\mathrm{Ker}\varphi \subseteq mn\mathbb{Z}$

a:

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{k \in \mathbb{Z} / \varphi(k) = (\bar{0}, \bar{0})\}$

a:

$(k) = (\bar{0},\bar{0}) \Leftrightarrow (k + m\mathbb{Z}, k + n\mathbb{Z}) = (\bar{0},\bar{0})$

$\Rightarrow \begin{cases} k + m\mathbb{Z} = \bar{0} \\ k + n\mathbb{Z} = \bar{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{k} \equiv \bar{0}[m] \\ \bar{k} \equiv \bar{0}[n] \end{cases}$

a:

$\equiv \bar{0}[m] \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} / k = k'm$

$m | k$.

$\equiv \bar{0}[n] \Rightarrow \exists k'' \in \mathbb{Z} / k = k''n$

$\Rightarrow n | k$

$| k$ car $(m,n) = 1$.

$k_1 \in \mathbb{Z}, \; k = k_1 mn$.

$\mathrm{Ker}\,\psi = \{k_1 mn, \text{ avec } k_1 \in \mathbb{Z}\}$

donc $\mathrm{Ker}\varphi \subseteq mn\mathbb{Z}$.

* montrons que $mn\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$

on a:

$mn\mathbb{Z} = \{kmn, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$

soit $x \in mn\mathbb{Z}$.

montrons que $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$

$x \in mn\mathbb{Z} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = kmn$

~~$\varphi(x) = (n + m\mathbb{Z})$~~

$\varphi(x) = (x + m\mathbb{Z}, x + n\mathbb{Z})$

$\varphi(x) = (kmn + m\mathbb{Z}, kmn + n\mathbb{Z})$

or $km \equiv \bar{0}[m]$ et $kn \equiv \bar{0}[n]$ donc

$\varphi(x) = (\bar{0},\bar{0})$. donc $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.

donc $mn\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$.

donc $\mathrm{Ker}\,\varphi = mn\mathbb{Z}$.

puisque φ est surjectif alors

$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

54

donc

$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ est isomorphe à

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

4) soient k_1 et $k_2 \in \mathbb{Z}$ deux solutions de (S)

$$(S) \begin{cases} x \equiv a[m] \\ x \equiv b[n] \end{cases}$$

k_1 est solution (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 \equiv a[m] \\ k_1 \equiv b[n] \end{cases}$

k_2 est solution (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} k_2 \equiv a[m] \\ k_2 \equiv b[n] \end{cases}$

on a:

$k_1 \equiv k_2[m]$

$k_1 \equiv k_2[n]$

$k_1 \equiv k_2[m] \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / k_1 = k_2 + km$

$k_1 \equiv k_2[n] \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} / k_1 = k_2 + k'n$

$k_1 - k_2 = km = k'n$.

$km = k'n$ or $(m,n) = 1$

$\Rightarrow n | k \Rightarrow \exists k'' / k = k''n$

donc $km = k''mn$

$= k''mn$

$\Rightarrow k_1 = k_2 + k''mn$

$\boxed{k_1 \equiv k_2[nm]}$

. montrons que $U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n$

$U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

* montrons $U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \subset$

U

on a:

$U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{(a,b) \in \mathbb{Z}/m$

$\exists (a',b') \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \,(a'b'$

soit

$(a,b) \in U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ alors

$\exists (a',b') \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} /$

$(a',b')(a,b) = (\bar{1},\bar{1})$

$(a'a, b'b) = (\bar{1},\bar{1})$

$$\begin{cases} a'a = \bar{1} \quad (1) \\ b'b = \bar{1} \quad (2) \end{cases}$$

$a a' = \bar{1} \Rightarrow a \in U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$

$b b' = \bar{1} \Rightarrow b \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

donc $(a, b) \in U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

donc

$U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \subseteq U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

montrons $U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \subseteq U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

on a:

$U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{(a, b)$ où $a \in U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $b \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\}$

soit $(a, b) \in U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

$a \in U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $b \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

$\exists a' \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid a a' = 1$ ①

$\exists b' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid b b' = 1$ ②

donc

$(a', b')(a, b) = (a a', b b') = (\bar{1}, \bar{1})$

d'où $(a, b) \in U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

donc

$U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

b) montrons les groupes $U(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$ et $U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sont isomorphes

montrons si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un isomorphe d'anneaux, alors

$\varphi' = \varphi|_{U(A)} : U(A) \longrightarrow U(B)$,

est un isomorphisme de grpes

on a:

$a \in U(A) \Rightarrow \exists a' \in A \mid a a' = 1$

$\varphi(a a') = \varphi(1) \Rightarrow \varphi(a) \varphi(a') = \varphi(1) = 1$

donc

$\varphi' : U(A) \longrightarrow U(B)$

$a \longmapsto \varphi(a) = \varphi'(a)$

on a: $\varphi(a a') = \varphi(a) \varphi(a')$.

donc φ' est un morphisme de groupes.

JJ

Soit $b \in U(B) \subseteq B$, $\exists! a \in U(A)$ /

$\varphi'(a) = b$

$\varphi : A \longrightarrow B$ est un isomorphe d'anneau. il est surjectif

donc $\exists\, a \in A$; $\varphi(a) = b$

car $b \in U(B)$ alors $a \in U(A)$

$bb' = 1_B$

$\varphi(a)\,\varphi(a') = 1_B = \varphi(1_A)$

$\varphi(a\,a') = \varphi(1_A)$

$aa' = 1_A$.

$a \in U(A)$ donc φ' est surjectif

$\varphi' : U(A) \longrightarrow U(B)$.

Concl : φ' est un isomorphisme de gpes.

Exercice n°10

$\varphi(n) = \text{Card}\left[U\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)\right]$

1) mq si $(m,n) = 1$ alors

on a :

$U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n$

sont isomorphes.

$\varphi(mn) = \text{Card}(U(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}))$

$= \text{Card}\left[U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\right]$

$= \text{Card}(U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})) \times \text{Card}[U(\mathbb{Z}$

donc. $\varphi(mn) = \varphi(m) \times \varphi(n)$.

2) p est un nbre premier -

Calculons $\varphi(P)$

Dans $\{1, 2, \ldots p\}$ il existe u

premier avec p.

$\varphi(P) = P - 1$.

autre méthode

$\varphi(P) = \text{Card}\left(U\left(\mathbb{Z}/P\mathbb{Z}\right)\right)$

$\varphi(P) = P - 1$

- Mq $\forall k \geq 1$, $\varphi(P^k) = (P-1)P^{k-}$ =

on a :

$\varphi(P^k) = \text{Card}\left[U\left(\mathbb{Z}/P^k\mathbb{Z}\right)\right]$

Donc $\{1, 2, \dots, p^k\}$ il y a

exactement p^{k-1} multiple de p :

$p, 2p, 3p \dots p^{k-1} = p^k$

$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)$,

$\forall\, k \geq 1$

mq si $n = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ où les p_i

sont premiers et $\alpha_i \geq 1\ \forall i$

alors $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

on sait que :

$\varphi(p^k) = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ et

$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si $(m, n) = 1$

on a :

$$\varphi(n) = \varphi\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Application

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ $/(m, n) = 1$

montrons $m^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$

deduisons $\overline{m}^{-1}$ est elt de $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$,

on rappelle que si G est un groupe multiplicatif fini d'ordre n

alors $\forall a \in G$, on a $a^n = e$.

appliquer a $G = \underbrace{U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}_{\text{ordre } \varphi(n)}$

$a = \overline{m} \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

$(m, n) = 1$ donc $\overline{m}^{\varphi(n)} = \overline{1}$

$m^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$

$\overline{m}^{\varphi(n)} = \overline{m}\ \overline{m}^{[\varphi(n) - 1]} = \overline{1}$

donc $\overline{m}$ est inversible d'inverse

$\overline{m}^{-1} = \overline{m}^{(\varphi(n) - 1)}$

56

* Application

soit $\overline{a} = a + 15\mathbb{Z}$ où $0 \leq a \leq 15$

on suppose que à inversible de

$\overline{7}$ dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$

determinons $\bar{a}$

$n = 15$; $m = 7$.

$\varphi(15) = \varphi(3 \times 5) = \varphi(3) \times \varphi(5)$.

$= 15\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)$

l'inverse de $\bar{7}$ est donc

$(\bar{7})^{-1} = \bar{7}^{(8-1)} = \bar{7}^{7} [15]$

on a : d'après le théorème chinois $\begin{cases} x \equiv 1 [3] \\ x \equiv 3 [5] \end{cases}$

$x \equiv \overline{13} [15]$

EXAMEN . ARITHMETIQUE 2014

EXERCICE 1 (VOIR TD)

EXERCICE 2

Calculons $\overline{10}^{122}[13]$ revient à calculer le reste de la division de 10^{122} par 13.

on a : $122 = 10 \times 12 + 2$, donc $10^{122} = 10^{12\times 10+2}$

Or $10^{12} \equiv 1\,[13]$ donc $10^{122} \equiv (1[13])^{10} \times 10^{2}$

$10^{122} \equiv 10^{2} \times (1^{10}[13])$

$10^{122} \equiv 100\,[13] \Leftrightarrow 10^{122} \equiv 9\,[13] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{le reste de la} \\ \text{division de} \\ 10^{122} \text{ par } 13 \\ \text{est } 9. \end{array} \right.$

d'où $\overline{10}^{122}[13]$ est $\overline{9}$.

EXERCICE 3

Ds le cas où le modulo est 1er, on a un corps et tout se passe comme ds les corps connus :

$\left\{ \begin{array}{l} 3x+4y \equiv 5 \pmod{13} \\ 2x+5y \equiv 7 \pmod{13} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x+4y \equiv 5\,[13] \\ 7y \equiv 11\,[13] \end{array} \right.$ et on trouve :

$y \equiv 7^{-1} \times 11 \equiv 9\,[13]$ et $x \equiv 3^{-1} \times (5-36) \equiv 3^{-1} \times 8\,[13]$

$x \equiv 9 \times 8 \equiv 7\,[13]$.

Les solutions sont : $\left\{ \begin{array}{l} y = 9+13k \\ x = 7+13k' \end{array} \right.$; $k, k' \in \mathbb{Z}$

EXERCICE 4

Technique de Mr BERTE.

Resumé de techniques de Mr. BERTE

S7

...liquons tous ensemble la technique de BERT...

Resume

Soit $m_1, m_2, \ldots, m_r$ une suite d'entiers positifs 1^ers^ entre eux deux à deux. Alors le système de congru...

$$\begin{cases} x \equiv a_1 [m_1] \\ x \equiv a_2 [m_2] \\ \text{---} \\ x \equiv a_r [m_r] \end{cases}$$

a une solution unique x modulo $M = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_r$:

$x = a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \cdots + a_r M_r y_r$ avec

$M_i = M/m_i \qquad y_i M_i \equiv 1 \pmod{m_i}$

Application avec EXO 4 : 2014

$$\begin{cases} x \equiv 3 [11] \\ x \equiv 6 [8] \end{cases}$$

on a : $M = 88$, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $M_1 = 88/11 = 8$

$M_2 = 88/8 = 11$ et $\begin{cases} y_1 M_1 \equiv 1 [11] \\ y_2 M_2 \equiv 1 [8] \end{cases}$

Trouvons y_1 et y_2 avec $k, k' \in \mathbb{Z}$.

On a : $8y_1 \equiv 1 [11] \Rightarrow 8y_1 = 1 + 11k$
$11 y_2 \equiv 1 [8] \Rightarrow 11 y_2 = 1 + 8k'$ $\Rightarrow \begin{cases} k = (8y_1 - 1)/11 \\ k' = (11y_2 - 1)/8 \end{cases}$

$\Rightarrow y_1 = 7$ et $y_3 = 3$ donc $x = 3 \times 8 \times 7 + 6 \times 11 \times 3$

$x = 366 + 88k \Rightarrow x \equiv 366 [88] \Rightarrow x \equiv 14 [88]$

Donc $x = 14 + 88k$ solution.

EXERCICES

Montrons que l'ens des nombres premiers est infini

Soit P l'ensemble des nombres premiers. Supposons que P soit fini. Soit $k = \text{card} P$.

Supposons que $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Soit $m = 1 + P_1 P_2 \dots P_k$

m admet au moins un diviseur premier p.

$\exists j$ tel que $p = P_j$ donc p divise $P_1 P_2 \cdots P_k$ alors

p divise $m - P_1 P_2 \cdots P_k = 1$; p divise 1 ce qui est absurde.

Par conséquent l'ensemble des nombres premiers est infini.

EXAMEN : 2013

EXERCICE 1

1) On a : $\binom{P}{k} = \frac{P!}{k!(P-k)!} \Leftrightarrow P! = (P-k)!\, k! \binom{P}{k}$

$P! = (1 \times 2 \times 3 \dots \times k)(1 \times 2 \times 3 \dots (P-k))\binom{P}{k}$

Comme P divise un produit de facteur alors P divise l'un de ces termes. Or $1 \leq k \leq P-1$.

Donc P ne divise pas les ~~th~~ termes $(1 \times 2 \times 3 \dots (P-k))$

$1 \times 2 \times 3 \dots k$. Alors p divise $\binom{P}{k}$.

58

2) Méthode de recurrence

- Pour $n = 0 \Rightarrow 0^P \equiv 0 [P]$
- Supposons que la propriété est vraie pour $n \geq 1$

Montrons qu'elle est vraie pour $n+1$ c-à-d

$(n+1)^P \equiv (n+1) [P]$?

$(n+1)^P = \sum_{i=0}^{P} C_P^i n^{P-i} 1^i = C_P^0 n^P + C_P^1 n^{P-1} + \dots + C_P^{P-1} n + C_P^P$

$(n+1)^p = n^p + 1 + C_p^1 n^{p-1} + \dots + C_p^{p-1} n$

$= n^p + 1 + \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i n^{p-i} \cdot 1^i \Rightarrow$

$(n+1)^p - (n^p+1) = \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i n^{p-i} \cdot 1^i$

Comme P divise $\sum_{i=1}^{p-1} C_p^i n^{p-i} 1^i$, alors

P divise $(n+1)^p - (n^p+1) \Rightarrow (n+1)^p - (n^p+1) \equiv 0 [P]$

$\Leftrightarrow (n+1)^p \equiv (n^p+1) [P]$. D'après la supposition, on a

$n^p \equiv n [P] \rightarrow (n+1)^p \equiv (n+1) [P]$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n [P]$

3) Supposons p ne divise pas n.

on a : $n^p - n \equiv 0 [P]$ donc $n(n^{p-1} - 1) \equiv 0 [P]$

comme p ne divise pas n, alors p divise $n^{p-1} - 1$

Donc $n^{p-1} \equiv 1 [P]$

4) on sait que $13 \times 12 + 2 = 158 \Rightarrow 10^{158} = 10^{13 \times 12} \times 10^2$

on a : $10^{13} \equiv 10 [13]$

$10^{12} \equiv 1 [13]$

donc $10^{158} \equiv (1 [13])^{13} \times 10^2$

$10^{158} \equiv 10^2 [13]$

$10^{158} \equiv 9 [13]$. D'où le reste de la divisi[on]

de 10^{158} par 13 est 9.

b) on sait que si $p \neq 3$ alors 3 ne divise pas P.

on a : $p^3 - p \equiv 0[3] \Rightarrow P(P^2-1) \equiv 0[3]$

comme 3 ne divise pas p, alors 3 divise P^2-1

D'où $P^2-1 \equiv 0[3]$

$\Rightarrow P^2 \equiv 1[3]$.

Deduisons

on a : $P^2 \equiv 1[3] \Rightarrow P^2+2 \equiv 3[3] \Rightarrow$

$P^2+2 \equiv 0[3]$

Donc P^2+2 est un multiple de 3.

EXERCICE 2

on a : $3x \equiv 2[7] \Rightarrow 3x = 2+7k ; k \in \mathbb{Z}$

et $x \in \{0, \dots, 6\}$

$k = (3x-2)/7$

pour $x = 3$, on a : $k = 1 \in \mathbb{Z}$

Donc $x \equiv 3[7]$ ou $x = 3+7k ; k \in \mathbb{Z}$.

59

MON UE : UN PASSEPORT

Correction d'algèbre 3

e Jeunesse
nsciente Et
ellectuelle

ETUDIANT,UN DOCUMENT

EDITEURS

BERTE OUSMANE L3

BAKAYOKO AMARA L2

09110313 / 77018403

berteousmane2012@hotmail.fr

T.D ALGEBRE 3

FICHE 1 EXERCICE 1

Soit G un groupe. Soit ~~n~~ un entier strictement positif qui vérifie l'égalité : $(ab)^n = a^n b^n$, $\forall a, b \in G$

On a : $H_1 = \{x^n, x \in G\}$ et $H_2 = \{x \in G, x^n = 1_G\}$

1) Montrons que H_1 est un sous-gpe de G

* $H_1 \subseteq G$ car $x \in G$, $x^n \in G$
* $1_G = 1_G^n \in H_1$ donc $H_1 \neq \emptyset$
* soit $(x, y) \in H_1^2$ a-t-on $xy^{-1} \in H_1$?

On a $x \in H_1$ signifie q $\exists a \in G$, $x = a^n$, $y \in H_1$ signifie q $\exists b \in G$ $y = b^n$ donc $xy^{-1} = a^n b^{-n} = a^n (b^{-1})^n = (ab^{-1})^n$ car $a, b^{-1} \in G$ donc $xy^{-1} = (ab^{-1})^n \in H_1$. D'où H_1 est un sous-groupe de G.

2) Montrons que H_2 est un s-groupe de G.

* $H_2 \subseteq G$ car $\forall x \in G$, $x^n \in G \Rightarrow 1_G \in G$
* $1_G \in G$, $(1_G)^n = 1_G$, donc $1_G \in H_2$ d'où $H_2 \neq \emptyset$
* soit $(x, y) \in H_2^2$, a-t-on $xy^{-1} \in H_2$?

$\begin{cases} x \in H_2 \\ y \in H_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in G \\ y \in G \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x^n = 1_G \\ y^n = 1_G \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^n = 1_G \\ y^{+n} = (y^{-1})^{-n} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x^n = 1_G \\ y^n = (1_G)^{-1} \end{cases}$

$\Rightarrow (xy^{-1})^n = x^n (y^{-1})^n = 1_G (y^{-n}) = 1_G 1_G = 1_G$ donc $xy^{-1} \in H_2$. D'où H_2 est un sous-groupe de G.

60

3) Montrons que H_1 est s-gpe distingué de G

$\forall x \in G$, a-t-on $xH_1x^{-1} \subseteq H_1$?

$\forall z \in xH_1x^{-1}$, $\exists h \in H_1$ tq $z = xhx^{-1}$ donc Mq $z \in H_1$

$h \in H_1 \Rightarrow \exists y \in G$ tq $h = y^n$, donc $z = xhx^{-1} = xy^nx^{-1}$

$z = xyyy \cdots yx^{-1} = xy1_Gy1_Gy \cdots 1_Gyx^{-1} = xyx^{-1}xyx^{-1}xy \cdots x^{-1}xyx^{-1}$

$z = (xyx^{-1})^n \in H_1$, donc $z \in H_1$, $xH_1x^{-1} \subseteq G$ $\boxed{H_1 \triangleleft G}$

[illegible]rons que H_2 est s-groupe distingué de G ($H_2 \lhd G$)

[illegible] $x \in G$, a-t-on $xH_2x^{-1} \subseteq H_2$?

$\forall z \in xH_2x^{-1}$, $\exists h \in H_2$ tq $z = xhx^{-1}$. Montrons que $z \in H_2$

on a $z^n = (xhx^{-1})^n = xhx^{-1} \cdot xhx^{-1} \cdots xhx^{-1} = xh1_G h 1_G \cdots 1_G h x^{-1}$

$z^n = xhh \cdots hx^{-1} = xh^n x^{-1} = x1_G x^{-1} = xx^{-1} = 1_G$, donc $z \in H_2$

alors $xH_2x^{-1} \subseteq H_2$ d'où $\boxed{H_2 \lhd G}$

- Déduisons pour G et $\{1_G\}$

NB: Cas particulier $\forall a, b \in G$, $(ab)^n = a^n b^n$

- pour $n=1$: $\forall a, b \in G$, $(ab)^1 = a^1 b^1 = ab$ alors H_1 et H_2 ~~sont~~ étant des s-gpes distingués de G, on a : $H_1 = G$ et $H_2 = \{1_G\} \Rightarrow G$ et $\{1_G\}$ sont distingués dans G.

EXERCICE 2

1 - Montrons que l'inverse d'un commutateur est un commutateur. $\forall (x,y) \in G \times G$, on a : le commutateur $xyx^{-1}y^{-1}$ est $= [x;y]$. On a : $[x;y]^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = (x^{-1}y^{-1})^{-1} \cdot (xy)^{-1}$

$= (y^{-1})^{-1}(x^{-1})^{-1}(xy)^{-1} = yx(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y;x]$

donc $[x,y]^{-1} = [y;x]$

2) Montrons que $G' \lhd G$ $\quad G' = \{\prod_{i=1}^{n} c_i / c_i$ est un commutateur de G $\forall i \in [1,n]$, $n \in \mathbb{N}^*\}$

Montrons que G' est s-gpe de G

$*$ $G' \subseteq G$?

$\forall x, y \in G$, $xyx^{-1}y^{-1} \in G \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} c_i \in G$ donc $G' \subseteq G$

$*$ $G' \neq \emptyset$ car $1_G \in G'$

$*$ G est-stable ?

$\forall x, y \in G'$, a-t-on $xy \in G'$?

- $x \in G'$, $\exists c_i$ commutateurs de G, avec $i \in [1,n]$, $n \in \mathbb{N}^*$ tq

$x = \prod_{i=1}^{n'} c_i$, on a $xy = \prod_{i=1}^{n} c_i \cdot \prod_{i=1}^{n} c'_i \in G'$ car

$y = c_1 c_2 \cdots c_n \cdot c_1' c_2' \cdots c_n' \in G$, donc G est un ...

Montrons que $G' \triangleleft G$: $\forall x \in G$, a-t-on $xG'x^{-1} \subseteq G'$?

Soit $a \in G'$, on a $xax^{-1} = xax^{-1}a^{-1}a = [x, a].a \in G'$

car $[x, a] \in G'$ et $a \in G'$ et G' est stable. Donc $xG'x^{-1} \subseteq G'$

d'où $G' \triangleleft G$

) Montrons que G/G' est un groupe abelien

Soit $x, y \in G/G'$, $\exists a \in G, b \in G$ tq $x = \bar{a}, \bar{b} = y \Rightarrow \begin{cases} xy = \bar{a}\bar{b} = \overline{ab} \\ yx = \bar{b}\bar{a} = \overline{ba} \end{cases}$

on a : $ab(ba)^{-1} = [a, b] \in G'$. Donc $\overline{ab} = \overline{ba}$, d'où $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$

$\Leftrightarrow yx = xy$ donc G/G' est abelien.

EXERCICE 3

G : groupe des matrices complexes inversible de type $(3,3)$

. $G_1 = \{\alpha I_3, \alpha \in \mathbb{C}^*\}$ et . $G_2 = \{M \in G, \det M = 1\}$

a) Montrons que G_1 et G_2 sont des sous-groupes distingués de G

. Mq G_1 est un s-g de G

$*$ $G_1 \subseteq G$ car $\alpha I_3 \in G$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ donc $\det(\alpha I_3) \neq 0$

$*$ on a : $G_1 \neq \emptyset$ car $I_3 = 1 I_3 \in G_1$

$*$ Soient M et $N \in G_1$ tq $M = \alpha I_3$ et $N = \beta I_3$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$

$N^{-1} = \frac{1}{\det N} \operatorname{Com} t(N)$ or $\det N = \beta^3$. $N^{-1} = \frac{\beta^2}{\beta^3} \cdot I_3 = \frac{1}{\beta} I_3$

donc $MN^{-1} = \alpha I_3 \cdot \frac{1}{\beta} \cdot I_3 = \frac{\alpha}{\beta} I_3$ avec I_3 matrice unitaire.

et $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{C}^*$, donc $MN^{-1} \in G_1$. D'où G_1 est un sg de G.

. Mq $G_1 \triangleleft G$

Soit $M \in G$ et $A \in G_1$, $\exists \alpha \in \mathbb{C}^*$ et $A = \alpha I_3$

$MAM^{-1} = M\alpha I_3 M^{-1} = \alpha M I_3 M^{-1} = \alpha MM^{-1} = \alpha I_3 \in G_1$

donc $MAM^{-1} \in G_1$, d'où $G_1 \triangleleft G$.

Montrons que G_2 est un sous-groupe de G.

67

$*$ $G_2 \subseteq G$ évident

$*$ $G_2 \neq \emptyset$ car $\det I_3 = 1 \neq 0$, $I_3 \in G_2$

$*$ Soient M et $N \in G_2$, $\det M = \det N = 1$ et $\det(MN) = 1$

$MN \in G_2$, $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det M} = 1$, donc $M^{-1} \in G_2$

d'où G_2 est un sous-groupe de G.

Montrons que $G_2 \triangleleft G$ soit $M \in G$ et $A \in G_2 \Rightarrow \det A = 1$

$\det(MAM^{-1}) = \det(M)\det(A)\det(M^{-1}) = \det(M) \cdot 1 \cdot \det(M^{-1})$

$= \det M \cdot \frac{1}{\det M} = 1$. Donc $MAM^{-1} \in G_2$ d'où $\boxed{G_2 \triangleleft G}$

Vérifions si G_1 et G_2 sont abeliens

Soient M et $N \in G_1$ telque $M = \alpha I_3$ et $N = \beta I_3$ avec α, β

on a : $MN = \alpha I_3 \beta I_3 = \alpha\beta I_3 = \beta I_3 \cdot \alpha I_3 = NM$

d'où G_1 est abelien.

Soient H et $M \in G_2$, on a : $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$MH = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ $HM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, on a : $MH \neq HM$

donc G_2 n'est pas abelien.

c) Mq, $\forall g \in G, \exists g_1 \in G_1, \exists g_2 \in G_2$ tq : $g = g_1 g_2 = g_2 g_1$?

$\Delta = \det g = \delta^3$; $\det(\alpha M) = \alpha^3 \det(M)$, $g = \delta(\frac{1}{\delta} g)$

$\det(\frac{1}{\delta} g) = \frac{1}{\delta^3} \det g = 1$, $g = \delta I_3 (\frac{1}{\delta} g) = g_1 g_2$ où $g_1 = \delta I_3$

et $g_2 = \frac{1}{\delta} g$. on a : $g = (\frac{1}{\delta} g)\delta I_3 = g_2 g_1$

δ est une racine cubique de $\det g = \Delta \neq 0$

$z^3 = \Delta$ admet trois racines. $\Delta = z_i^3 = |\Delta| e^{i\theta}$

$z_i = \sqrt[3]{|\Delta| e^{i\theta}} = \sqrt[3]{|\Delta|}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right)}$, $k \in [0, 2]$

$z_1 = \sqrt[3]{|\Delta|} e^{i\theta}$ $\quad z_3 = \sqrt[3]{|\Delta|}\, e^{i\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right)}$

$z_2 = \sqrt[3]{|\Delta|} e^{\frac{\theta + 2\pi}{3}}$

$g_1, g_2 \in \left\{ \left(z_1 I_3 ; \frac{1}{z_1} g\right) ; \left(z_2 I_3 ; \frac{1}{z_2} g\right) ; \left(z_3 I_3 ; \frac{1}{z_3} g\right) \right\}$

EXERCICE 4

1) Mq (G,T) est un groupe : $xTy = x*a*y \in G, \forall x,y$

. Associativité $\forall x,y,z \in G$; $xT(yTz) = (xTy)Tz$?

on a : $xT(yTz) = x*a(y*a*z) = x*a*y*a*z$

$xT(yTz) = (x*a*y)*a*z = (xTy)*a*z = (xTy)Tz$

d'où T est associative.

. Element neutre $xTe' = x*a*e' = x \iff$

$x'*x*a*e' = x'*x \iff e*a*e' = e \iff a'*a*e' = a'*e$

$\iff e' = a'$ Verifions que $e'Tx = x$

on a : $a'Tx = a'*a*x = e*x = x$

donc T admet un element neutre.

symétrisation $\forall x, x'' \in G$, $xTx'' = e'$?

on a : $xTx'' = x*a*x'' = e' \iff x*a*x'' = e'$

$\iff x'*x*a*x'' = x'*a' \iff e*a*x'' = x'*a'$

$\iff a'*a*x'' = a'*x'*a' \iff e*x'' = a'*x'*a'$

$\iff \boxed{x'' = a'*x'*a'}$

donc T admet un symétrique. D'où (G,T) est un groupe.

2) Montrons que f_a est un isomorphisme de (G,T) sur $(G,*)$

$f_a : G \to G$, $x \mapsto a*x$

. Montrons que f_a est un morphisme de (G,T) sur $(G,*)$

on a : $f_a(xTy) = f_a(x*a*y) = a*x*a*y = f_a(x)*f_a(y)$

donc f_a est un morphisme.

62

. f_a est-elle injective ?

$\forall x,y \in G$, $f_a(x) = f_a(y) \iff a*x = a*y$

par ... $x=y$ d'où f_a est injective.

• f_a est-elle surjective $\forall y\in G, \exists ?\, x\in G / f_a(x)=y$

on a : $f_a(x)=y \Leftrightarrow a*x=y \Leftrightarrow a'*a*x=a'*y$

$\Leftrightarrow x=a'*y$

$a'*y$ est le seul antécedent de y par G donc f_a est surje

En conclusion : f_a est isomorphisme de (G,T) sur $(G,*)$.

Déterminons f_a^{-1} $\quad f_a^{-1} : (G,*) \longrightarrow (G,T)$

$x \longmapsto a'*x$

3) Montrons que $(F,\circ)$ est un groupe $\quad F=\{f_a, a\in G\}$

* Associativité

$\forall f_a, f_b, f_c \in F$, on a ; $f_a\circ(f_b\circ f_c)=(f_a\circ f_b)\circ f_c$ car la loi re est associative dans l'ensemble des application.

* Element neutre $\forall f_e, f_a \in F$, $f_a\circ f_e = f_a$, $e\in G$

$(f_a\circ f_e)(x)=f_a(x) \Leftrightarrow f_a(f_e(x))=f_a(x)$

$\Leftrightarrow f_a(f_e(x))=a*(e*x)=a*x=f_a(x)$

donc $f_a\circ f_e=f_a$

Vérifions $f_e\circ f_a=f_a$

on a : $(f_e\circ f_a)(x)=f_e(f_a(x))=f_e(a*x)=e*a*x$

$=a*x=f_a(x)$.

donc f_e est l'élément neutre de la loi rond ds

Symetrique $\forall f_a\in F, \exists f_{a'}\in F / f_a\circ f_{a'}=f_e$?

$(f_a\circ f_{a'})(x)=f_a(f_{a'}(x))=f_a(a'*x)=a*a'*x$

$=e*x=f_e(x)$

donc $f_{a'}$ est le symetrique de la loi rond dans F.

En conclusion : $(F,\circ)$ est un groupe.

$\varphi : (F, \circ) \longrightarrow (G, *)$ φ est-il un isomorphisme

$f_a \longmapsto a$

. Montrons que φ est morphisme de $(F,\circ)$ sur $(G,*)$

1) φ est-elle une application ?

Soit $f_a \in F, \exists b \in G / f_b = f_a$

Montrons que $a = b$

$f_a = f_b \Rightarrow \forall x \in G ; a * x = b * x \Rightarrow \forall x \in G,$

$a * x * x' = b * x * x' \Rightarrow a = b$ donc φ est une application.

2) φ est-il un morphisme de $(F,\circ)$ sur $(G,*)$.

$\forall f_a, f_b \in F$ a-t-on $\varphi(f_a \circ f_b) = \varphi(f_a) \circ \varphi(f_b)$?

On a : $(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = f_a(b * x) = a * b * x$

$= f_{a*b}(x) \ \forall x \in G$

donc $f_a \circ f_b = f_{a*b}$. D'où $\varphi(f_a \circ f_b) = \varphi(f_{a*b})$

$\varphi(f_a \circ f_b) = \varphi(f_{a*b}) = a * b = \varphi(f_a) * \varphi(f_b)$

donc φ est un morphisme de groupes

68

3) Montrons que φ est injective

$\forall f_a, f_b \in F, \varphi(f_a) = \varphi(f_b) \Rightarrow f_a = f_b \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow a * x = b * x \Leftrightarrow f_a(x) = f_b(x), x \in G$ par

regularité $a = b \Leftrightarrow f_a = f_b$. Dc φ est injective.

4) Montrons que φ est surjective $\forall b \in G, \exists f_a \in F$

tel que $\varphi(f_a) = b$.

on a $\varphi(f_a) = b \Leftrightarrow \Rightarrow a = b$ donc $\underline{b}$ a un antécédent qui est f_a d'où φ est surjective.

En conclusion : φ est un isomorphisme de $(F,\circ)$ sur (

FICHE 2 EXERCICE 1

1) Prouvons que H est un sous-groupe de G appelé centre

$H = \{x \in G, \forall y \in G, xy = yx\}$

$* \; H \subseteq G$

$* \; 1_G \in G, \forall y \in G, 1_G y = y = y 1_G$ donc $1_G \in H$.

$*$ Soit $(x,y) \in H^2$. A-t-on $xy^{-1} \in H$?

soit $z \in G$, $zxy^{-1} = xy^{-1}z$?

$zxy^{-1} = xzy^{-1} = x(yz^{-1})^{-1} = x(z^{-1}y)^{-1} = xy^{-1}z \Rightarrow$

$z(xy^{-1}) = (xy^{-1})z$ donc $xy^{-1} \in H$. D'où H est un s-gpe d

2) Montrons f_a est un Automorphisme.

on Considère : $f_a : G \longrightarrow G$ par $f_a(x) = a^{-1}xa$

. Mq f est morphisme de G dans G :

$\forall x,y \in G$, a-t-on $f_a(x,y) = f_a(x) \cdot f_a(y)$?

on a : $f_a(x,y) = a^{-1}xya = a^{-1}x(aa^{-1})ya = (a^{-1}xa)(a^{-1}ya$

$= f_a(x) f_a(y)$ Donc f_a est un morphisme de G

Ainsi f est un endomorphisme.

f_a est-il bijectif?

. Mq f_a est injectif $\forall x,y \in G$, a-t-on $f_a(x) = f_a(y) \overset{?}{\Rightarrow} x$

on a : $f_a(x) = f_a(y) \Leftrightarrow a^{-1}xa = a^{-1}ya \Leftrightarrow a(a^{-1}xa)a^{-1} = a^{-1}(a^{-1}$

$\Leftrightarrow x = y$ donc f_a est injectif.

. Mq f_a est surjectif $\forall y \in G, \exists x \in G \mid f_a(x) = y$

on a : $f(x) = y \Leftrightarrow a^{-1}xa = y \Leftrightarrow a(a^{-1}xa)a^{-1} = aya^{-1}$

$\Rightarrow a\bar{a}^{1}x a\bar{a}^{1} = a y \bar{a}^{1} \Leftrightarrow x = a y a^{-1}$

EXERCICE 2

) Mq $N(H) = \{S \in G,\ S^{-1}HS = H\}$ est un sous-groupe de G

$N(H) \subseteq G$ evident

Element neutre $1_G \in G,\ 1_G^{-1} H 1_G = 1_G H = H$

donc $1_G \in N(H)$. Alors $N(H) \neq \phi$.

Elément symetrique : $\forall x \in N(H)$ a-t-on $x^{-1} \in N(H)$?

$\in N(H) \Leftrightarrow x^{-1}Hx = H$

n a : $x^{-1}Hx = (x^{-1})^{-1}Hx^{-1} = (x^{-1})^{-1}x^{-1}Hx^{-1}x = x x^{-1} H x^{-1} x = H$

donc $x^{-1} \in N(H)$.

* stabilité $\forall x, y \in G$, a-t-on $xy \in N(H)$?

oient $a \in N(H), \exists x \in G / x^{-1}Hx = H$ et $b \in N(H), \exists y \in G / y^{-1}Hy = H$

$y)^{-1} H(xy) = y^{-1}x^{-1}Hxy = y^{-1}Hy = H$.

64

donc $xy \in N(H)$

n conclusion : N(H) est sous-groupe de G.

Mq si H n'est pas distingué ds G alors $N(H) \neq G$.

H n'est pas distingué dans G, alors $\exists$ un elt $x \in G$, telque

$H \neq x^{-1}Hx$

$H \neq Hx \Leftrightarrow x^{-1}xH \neq x^{-1}Hx \Leftrightarrow H \neq x^{-1}Hx$

onc $x \notin N(H)$, d'où $G \notin N(H)$ alors $N(H) \neq G$

Montrons que si $N(H) \neq G$ alors H n'est pas un sous-gpe

distingué de G.

Supposons que $H \triangleleft G$ et montrons que $N(H) = G$.

On a : $H \triangleleft G \Rightarrow \forall S \in G, S^{-1}HS = H \Rightarrow S \in N(H)$

$\subseteq N(H)$ donc $G = N(H)$ absurde. Conclusion $\boxed{H \triangleleft G}$

EXERCICE 3

$HK = \{hk ; h \in H ; k \in K\}$

1) Montrons que HK est un s-g de G ssi $HK = KH$

• on sait que $a \in HK$, comme HK est un sg de G donc $a^{-1} \in HK$.

$a^{-1} \in HK, \exists h \in H, k \in K / a^{-1} = hk \Leftrightarrow a = (hk)^{-1} \Leftrightarrow a = k^{-1}h^{-1}$

Comme $k^{-1} \in K$ et $h^{-1} \in H$, on a : $k^{-1}h^{-1} \in KH$ d'où $a \in KH$

Donc $\boxed{HK \subseteq KH}$ ①

• soit $b \in KH$. on a : $b \in KH, \exists h \in H, k \in K / b = kh \Rightarrow b^{-1} = (kh)^{-1}$

$b^{-1} = h^{-1}k^{-1}$ or $k^{-1} \in K$ et $h^{-1} \in H$ donc $b^{-1} \in HK$ d'où $b \in HK$

par conséquent $\boxed{KH \subseteq HK}$ ②

En conclusion : ① et ② $\Rightarrow HK = KH$, donc HK est sg d

2) $f : H \times K \longrightarrow G$, $(h,k) \longmapsto hk$, f est un morphisme $\Leftrightarrow$

$f(h_1,k_1)(h_2,k_2) = f(h_1,k_1) f(h_2,k_2)$

$\forall (h_1,k_1) \in H \times K, \forall (h_2,k_2) \in H \times K, f(h_1h_2 ; k_1k_2) = f(h_1,k_1) f(h_2$

$\Leftrightarrow h_1h_2 \cdot k_1k_2 = h_1k_1 \cdot h_2k_2 \Leftrightarrow h_2k_1 = k_1h_2 \ \forall h_2 \in H, \forall k_1 \in$

3) $\ker f$?

$\forall (h,k) \in H \times K, (h,k) \in \ker f$ ssi $f(h,k) = 1_G$ ssi $hk = 1_G$

$\Leftrightarrow k = h^{-1} \in H \cap K \Leftrightarrow h = k^{-1} \in H \cap K$

donc $\ker f = \{(a ; a^{-1}) / a \in H \cap K\}$

$\mathrm{Im} f$?

$\mathrm{Im} f = \{hk, h \in H, k \in K\} = HK = KH$ D'après le théorème

d'isomorphisme $\frac{H \times K}{\ker f} \simeq \mathrm{Im} f \Leftrightarrow \boxed{\frac{H \times K}{\ker f} \simeq HK}$

FICHE 3

EXERCICE 1

Calculons les determinants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 11 \\ 1 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 1 \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 28$$

Calculons $\Delta(a,b,c)$

$$\Delta(a,b,c) = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_1' = C_1 - C_3 \\ C_2' = C_2 - C_3 \end{matrix}$$

$$\Delta(a,b,c) = \begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 & 2a \\ 0 & -(a+b+c) & 2b \\ a+b+c & a+b+c & -a-b+c \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_2 + L_1 + L_3$$

$$\Delta(a,b,c) = \begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 & 2a \\ 0 & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\Delta(a,b,c) = (a+b+c)^3}$$

Calculons determinants d'ordre n

$$D = \begin{vmatrix} n & & & (3) \\ & n-1 & & \\ & & \ddots & \\ (3) & & & 1 \end{vmatrix}$$

65

on a :

$$D = \begin{vmatrix} n & 3 & 3 & \cdots & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ 3 & n-1 & 3 & \cdots & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & n-2 & \cdots & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & n-3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & \ddots & & \ddots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & \cdots & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} n & 3-n & 3-n & \cdots & \cdots & 3-n & 3-n \\ 3 & n-1-3 & & & & & 3-3 \\ 3 & 3-3 & \ddots & & & & 3-3 \\ 3 & 3-3 & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 3-3 & 3-3 & 3-3 \\ \vdots & \vdots & & & 3-3 & 2-3 & 3-3 \\ 3 & 3-3 & \cdots & \cdots & 3-3 & 3-3 & 1-3 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} n & 3-n & 3-n & \cdots & 3-n & 3-n & 3-n \\ 3 & n-4 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Effectuons le calcule suivant la colonne $n-2$

on a: $$D = (-1)^{1+(n-2)} (3-n) \begin{vmatrix} 3 & n-4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & n-5 & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 0 & & \ddots & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$D = (-1)^n(-1)^{n-5}(3-n)(n-4)(n-5)\cdots 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n(-1)^{n-5}(3-n)(n-5)(n-5)\cdots 2\times 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{D = 6(n-3)!}$$

EXAMEN : S_1 (2008-2009)

EXERCICE 1

A] Voir la preuve de la proposition 4.5.4 (4.5.4 Proposition) du Cours.

Session 1 (S_1)

EXAMEN : S_1 (2009-2010)

EXERCICE 2 : Voir T.D

Session 2 (2009-2010)

EXERCICE 1

A
B
2
} Voir la preuve de la proposition 4.5.4 du Cours (4.5.4 Proposition)

UE 2 (2012 - 2013)

EXERCICE

1) $J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

• Récurrence J^k

Soit J^k la proposition $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$J^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; $J^5 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

On remarque que $J^2 = 2J$

$J^3 = 2J^2$

$J^4 = 2J^3$

$J^5 = 2J^4$

Montrons alors que $J^n = 2J^{n-1}$

on a la propriété est vraie à l'ordre $n = \{2$

Supposons que J^k est vraie, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

Montrons que J^{k+1} est vraie

on a $J^k = 2J^{k-1} \Rightarrow J^k \cdot J = 2J^{k-1} \cdot J$

$\Rightarrow J^{k+1} = 2J^k$

Donc la proposition est vraie à l'ordre $k+1$

D'où $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\boxed{J^k = 2J^{k-1}}$

TCHONE THIERRY L2 MIA

2) Déterminons a, et b

$$A = aI + bJ \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

Par identification, on a : $\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 4-X & 0 & 1 \\ 0 & 3-X & 0 \\ 1 & 0 & 4-X \end{vmatrix}$$

$$P_A(X) = (3-X)^2(5-X)$$

Les racines propres sont $\begin{cases} \lambda_1 = 3, \ k_1 = 2 \text{ (Double)} \\ \lambda_2 = 5, \ k_2 = 1 \text{ (simple)} \end{cases}$

E_{λ_1} ~~est~~ sous-espace propre associé à λ_1.

Soit $U = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$U \in E_{\lambda_1} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4-3 & 0 & 1 \\ 0 & 3-3 & 0 \\ 1 & 0 & 4-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = (x, y, -x) = (x, 0, -x) + (0, y, 0)$$

$$= x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0)$$

67

Donc $E_{\lambda_1} = \{ \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, 0) ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

E_{λ_2} sous-espace propre associé à λ_2

soit $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$v\in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow Av=5v \Rightarrow \begin{pmatrix}4&0&1\\0&3&0\\1&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4x+z=5x\\3y=5y\\x+4z=5z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=0\\x=z\end{cases}$

$v=(z,0,z)=z(1,0,1)$

Donc $E_{\lambda_2}=\{\gamma(1,0,1),\ \gamma\in\mathbb{R}\}$

on a : $k_1=h_1=2$ et $k_2=h_2=1$ d'où

A est diagonalisable.

Soit la matrice de passage $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

$\det(P)=2$

$Com(P)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ et ${}^tCom(P)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

$D=P^{-1}AP \Rightarrow D=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&1\\0&3&0\\1&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

$\boxed{D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}}$

4) on a : $D=P^{-1}AP \Rightarrow A=PDP^{-1}$

$A^n = PD^nP^{-1}$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 3^n+\frac{1}{2}\cdot 5^n & 0 & -\frac{1}{2}\cdot 3^n+\frac{1}{2}\cdot 5^n \\ 0 & 3^n & 0 \\ -\frac{1}{2}\cdot 3^n+\frac{1}{2}\cdot 5^n & 0 & \frac{1}{2}\cdot 3^n+\frac{1}{2}\cdot 5^n \end{pmatrix}$$

68