Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université Nanguy Abrogoua

République de Côte d'Ivoire
Union-Discipline-Travail

2018-2019

UFR-SFA

LICENCE 1

THEORIE MICROECONOMIQUE

Enseignant : Dr. KAKOU S.

INTRODUCTION GENERALE

Toute communauté est confrontée dans sa vie quotidienne à des difficultés que les économistes résument traditionnellement en trois questions fondamentales :
quels biens et services produire, ?
comment les produire ?
et pour qui les produire?
ces trois questions relève de la rareté des ressources pour la satisfaction des besoins sans cesse illimités. Elles constituent par ailleurs l'objectif de tout système économique.
En répondant à ces questions, l'analyse économique s'efforce d'expliquer la manière selon laquelle la société doit décider afin de rendre compatible les besoins quasi illimités de demander des biens et de service et la capacité d'offre limitée par la rareté des ressources productives. L'analyse économique peut être partagée en deux types d'études économiques : microéconomie et macroéconomie. Mais avant il est important de définir ce qu'est l'économie

I. Définitions

1.1. Qu'est-ce que l'Economique ?

Le terme "économie" provient du grec oikonomia "Economique", mot créé par ARISTOTE à partir de "OIKOS" (la maison) et "NOMOS" (la règle) ; l'économique est l'ensemble des règles de saine gestion d'une maison (plus tard, au début du XVIIème siècle, le français MONTCHRESTIEN inventera le terme "économie politique" pour appliquer cette définition à la gestion du royaume par le souverain) et signifie littéralement "l'art de gérer son domaine ou son foyer". Le développement des activités de production et d'échanges au cours de l'histoire a généré une extension du champs d'application de l'économie de la simple gestion de l'économie du foyer privé elle a peu a peu pénétré la sphère publique et la société dans son ensemble.

D'aucuns définissent la science économique comme l'étude de l'allocation des ressources rares de l'homme pour la réalisation d'objectifs alternatifs. Cette définition est certes correcte mais demande quelques précisions pour que le champ d'application de l'économie soit bien circonscrit. Et si tel n'est pas le cas, on risquerait bien de la confondre à d'autres disciplines telles que la science politique ou la médecine, car le problème d'allocation des ressources revêt un caractère général et se rapporte à l'existence même de l'homme.
L'économie peut être définie comme une discipline des sciences sociales dont l'objet d'étude est l'allocation des ressources rares (ou limitées) de l'homme à la satisfaction de ses besoins multiples et concurrents. Elle s'intéresse essentiellement aux activités de production, de distribution et de consommation des biens ainsi qu'aux institutions, aux cadres réglementaires et à l'environnement facilitant ces activités.
En tant que discipline scientifique, l'économie se propose

1.2. Objets et méthodes de la micro-économie

Au centre de l'analyse microéconomique se trouve la question de l'allocation des ressources rares entre des usages alternatifs dans les économies modernes et le rôle que jouent les prix et les marchés dans ce processus. Cette question couvre une large partie des analyses, qu'elles soient sur l'organisation des marchés, sur les stratégies des agents économique ou sur le rôle des institutions. Une partie non-négligeable des travaux analyse néanmoins la manière dont ces ressources sont créées et le rôle des phénomènes du type l'innovation des entreprises dans cette création. La meilleure compréhension de ces phénomènes que cherche à atteindre l'analyse microéconomique vise aussi à renforcer les capacités de prédiction et de contrôle : les concepts et les causalités que les économistes ont développés dans leur tentative de mieux comprendre les mécanismes économiques ont fourni les bases nécessaires à l'élaboration des politiques en vue d'influencer les résultats de ce processus (comme les politiques industrielles, par exemple). Grâce au développement des techniques de type recherche opérationnelle ou de gestion scientifique, les concepts de la microéconomie ont été utilisés pour aider la prise de décision rationnelle dans les affaires. Les concepts, relativement abstraits, de cette approche ont donc donné lieu à des prolongements et à des applications qui influencent chaque jour le fonctionnement du processus économique.

La microéconomie, comme son préfixe l'indique, cherche à étudier le fonctionnement économique des sociétés à travers les choix économiques des agents et leurs interactions.

II. Les agents (micro)économiques

Les économistes classiques structuraient la société en classes sociales :
travailleurs, propriétaires terriens, industriels, financiers...Les économistes néo-classiques abandonnent cette approche pour lui substituer une approche individualiste où la société est une somme d'agents.

2.1. Qui sont les agents économiques ?

Les agents économiques sont des individus ou regroupement d'individus définis par leur activité économique principale. Les consommateurs achètent ou désirent acheter des biens et services alors que les producteurs produisent ou désirent produire des biens et services. Toutefois, ils sont aussi acheteurs de biens et services pour assurer leur activité de production. Les agents économiques disposent des caractéristiques suivantes :
Un agent est un centre de décision autonome. Si le consommateur est un ménage composé de plusieurs individus, on suppose qu'il ne fait qu'un. Idem pour une entreprise composée de plusieurs salariés. Le centre de décision sera un unique producteur.
Ils sont libres d'agir, c'est-à-dire que les actes de consommation et de production sont intentionnels.
Ils sont égaux en droits.
Ces caractéristiques découlent, en partie, de la place réservée à l'État en microéconomie. Il est le garant des libertés individuelles et des droits de propriété. Autrement dit, l'État fixe les règles du jeu et préexiste, donc, aux activités économiques des agents.

2.2. Les hypothèses sur les croyances des agents

Les agents sont rationnels et utilisent toute l'information dont ils disposent pour faire leurs meilleurs choix. Cette information se résume au système de prix affiché par le commissaire-priseur. En conséquence, les agents ne déterminent que les quantités échangées.
Ils croient que ce qu'ils offrent ou demandent n'influence pas les prix. Ils sont preneurs de prix. C'est-à-dire que les prix sont des paramètres dans ce modèle. Cette hypothèse sera discutée dans la partie sur l'équilibre.
Ils croient qu'ils peuvent acheter ou vendre n'importe quelle quantité.
En d'autres termes, les agents considèrent qu'ils ne seront jamais rationnés ou ne connaitront jamais de problème de débouché. Par conséquent, ils effectuent leurs calculs économiques en considérant que le système de prix est toujours un système de prix d'équilibre

CHAPITRE 1 : PREFERENCES ET UTILITE DU CONSOMMATEUR

I. La théorie des préférences

1.1.Représentation des préférences du consommateur

Quand on lui présente plusieurs paniers de bien, le consommateur pourra les classer, du point de vue de ses goûts, du plus préféré au moins préféré. Ce classement va guider les choix du consommateur. Dans le cadre que nous avons adopté, deux biens sont considérés comme étant distincts dès qu'ils diffèrent du point de vue

– de leurs caractéristiques physiques : le beurre est différent de la margarine ;

– de lieu de disponibilité : un baril de pétrole disponible aujourd'hui à Marseille est différent d'un baril disponible aujourd'hui à Bagdad ;

– de leur date de disponibilité : un baril de pétrole disponible aujourd'hui à Marseille est différent d'un baril qui sera disponible à Marseille dans 100 ans ;

– des circonstances sous lesquels ils sont disponibles : le pétrole disponible en temps de paix est bien différent du pétrole disponible en temps de guerre (cela va de paire en général bien sûr avec une modification de lieu et/ou de date).

A ces différents biens le consommateur va donc accorder une valeur plus ou moins importante (voir le dernier exemple).

Nous allons de nouveau nous limiter à deux biens. Un panier de consommation est donné par un point de l'orthant positif :

$X = (x1, x2) \in R2+$

1.2. Les préférences du consommateur

Les goûts du consommateur impliquent les préférences qu'il aura entre des paniers de consommation. On va alors représenter ces goûts par une relation de préférence établies sur l'ensemble des paniers.

Soient deux paniers X et Y . Le consommateur doit pouvoir les classer du point de vue de la satisfaction qu'ils lui procurent :

$X \succ Y$: il préfère strictement X à Y . Entre les deux paniers, il choisira nécessairement X.
$Y \succ X$: il préfère strictement Y à X . Entre les deux paniers, il choisira nécessairement Y.
$X \sim Y$: il est indifférent entre les deux paniers. Les deux paniers sont équivalents pour lui.
$X \gtrsim Y$: il préfère faiblement X à Y.

Implications logiques entre ces cas :

– Si $X \gtrsim Y$ et $Y \gtrsim X \Rightarrow X \sim Y$: Si parfois il dit préférer faiblement X à Y et parfois Y à X alors il est en fait indifférent entre les deux paniers.

– Si $X \gtrsim Y$ mais non $X \sim Y \Rightarrow X \succ Y$: S'il dit préférer faiblement X à Y mais il est sûr de ne pas être indifférent entre les deux paniers alors il préfère en fait strictement X à Y.

Hypothèses sur les préférences

Les préférences doivent vérifier un certain nombre de propriétés pour refléter des choix relativement bien structurés. Il s'agit d'hypothèses en vue de refléter la cohérence supposée du comportement du consommateur.

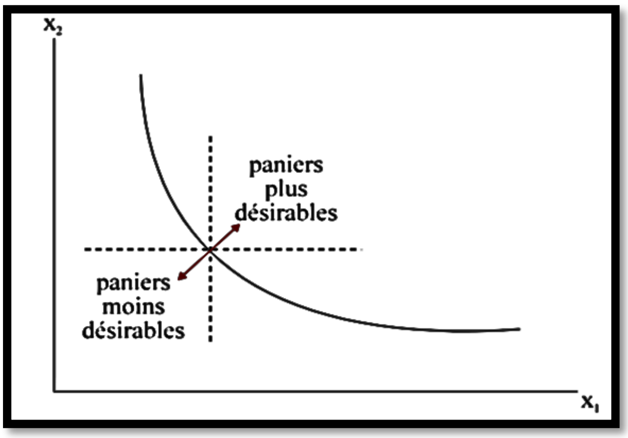
Axiomes du comportement du consommateur :
a) La relation de préférence est une relation complète :
$\forall X, Y$, on a soit $X \succsim Y$, soit $Y \succsim X$, soit $X \sim Y$
le consommateur est capable de clairement classer n'importe quel panier qu'on lui propose.
b) La relation de préférence est réflexive :
$X \succsim X$ car $X \sim X$
quand on lui présente deux fois le même panier, le consommateur est parfaitement capable de d'en rendre compte.
c) La relation de préférence est transitive :
$X \succsim Y$ et $Y \succsim Z \Rightarrow X \succsim Z$

A ces trois principaux axiomes s'ajoutent des axiomes complémentaires. Mais ceux-ci ne caractérisent que les préférences dites normales.

Les préférences "normales"
Les propriétés des préférences normales (la forme généralement supposée en microéconomie).

a) La continuité des préférences.
Cet axiome suppose que la relation de préférence est une relation continue ; en d'autres termes, si Y est strictement préféré Z et si X est un panier suffisamment proche de Y, alors X doit être strictement préféré à Z.

b) la monotonicité : le consommateur préfère toujours un panier qui contient plus de bien à un panier qui en contient moins. Tous les biens sont désirables et aucun point de saturation ne peut apparaître :
$(x1 + \varepsilon, x2) \succ (x1, x2)$, $(x1, x2 + \varepsilon) \succ (x1, x2)$,
$(x1 + \varepsilon, x2 + \varepsilon) \succ (x1, x2)$.
Donc, si $\Delta x1 > 0$,
$(x1 + \Delta x1, x2 + \Delta x2) \sim (x1, x2) \Rightarrow \Delta x2 < 0$. $\Rightarrow \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} < 0$



L'axiome de monotonicité signifie que l'individu préfère toujours une quantité supérieure d'un bien. Cet axiome ne s'applique bien évidemment pas aux biens indésirables à moins de transformer la relation de relation de préférence en une fonction opposée. La monotonicité signifie qu'un consommateur préfère toujours avoir plus. L'axiome complémentaire à la monotonicité est celui de non satiété.
Selon cet axiome, il n'existe pas de point de satiété pour le consommateur, c'est-à-dire qu'il existe toujours un panier qui sera préféré au panier considéré quel que soit le degré de satisfaction de l'individu.

c) la convexité : les paniers intermédiaires sont préférés aux paniers extrêmes.
Cet axiome suppose que l'individu préfère les paniers intermédiaires aux paniers extrêmes. Par exemple, lorsqu'on présente à l'individu un panier M, un panier N et un panier P constitué d'un mélange de M et N, l'individu préféra toujours le panier P à chacun des deux paniers M et N pris individuellement. Cela se traduit mathématiquement par les relations suivantes :
si $M \sim N$ et $\alpha \in [0, 1]$,
$P = \alpha M + (1 - \alpha) N$
$P \gtrsim M \sim N$.
Avec $\alpha \in [0,1]$
Graphiquement : l'ensemble des paniers faiblement préférés est convexe

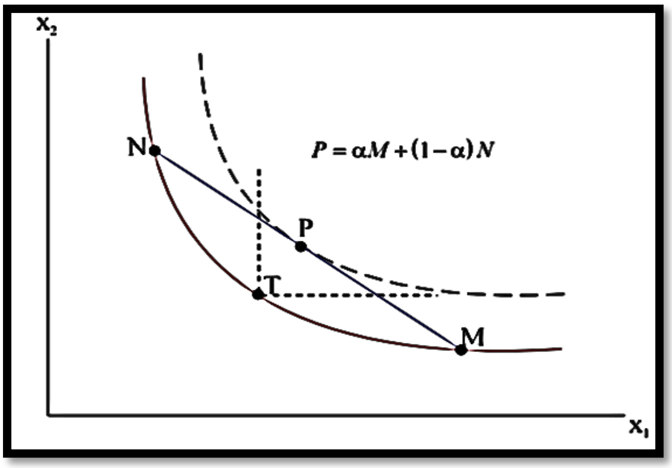


Figure : Les préférences normales sont monotones

II. La fonction d'utilité.

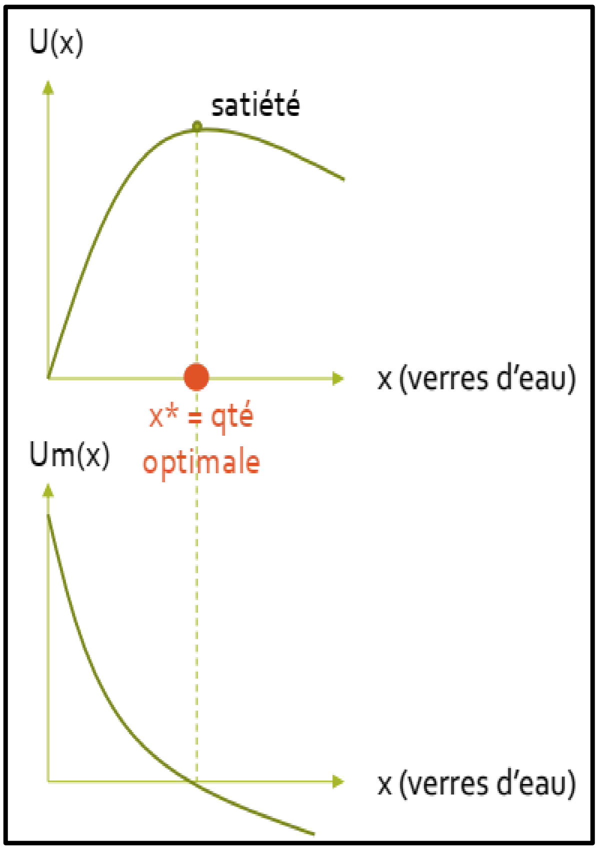
La fonction d'utilité est une fonction numérique qui établit une relation de préférence exprimée par un consommateur à l'égard d'un bien ou d'un panier de biens auquel peut être associé un nombre réel.

2.1. De l'utilité totale à l'utilité marginale.

L'utilité totale U d'un bien d'un bien x mesure la satisfaction globale que l'individu retire de la consommation de ce bien. Le niveau de U dépend de la quantité de x, U est donc « fonction » de x : $U = U(x)$
L'utilité marginale (notée Um) mesure l'évolution de l'utilité totale à la marge c'est-à-dire pour une variation très petite de la quantité de x consommée.
On peut distinguer deux cas de figure.

Utilité marginale d'un bien partiellement divisible	Utilité marginale d'un bien parfaitement divisible
Variation de l'utilité totale induite par une unité supplémentaire de ce bien. Um x = $\frac{\Delta U}{\Delta x}$	Variation de l'utilité totale induite par une variation infiniment petite (infinitésimale) de la quantité consommée. Um = U'(x) ou Um = $\partial U / \partial x$

On considère que l'intensité que l'intensité du besoin que le consommateur cherche à satisfaire décroît au fur et à mesure que la quantité consommée augmente (loi de l'utilité marginale décroissante ou 1ère loi de Gossen).
Autrement dit, la satisfaction éprouvée lors de la consommation de chaque unité supplémentaire va en diminuant. Mais l'utilité totale ne diminue pas pour autant.



Commentaires

Le point S représente le niveau de consommation du bien x pour lequel le consommateur atteint le maximum de son utilité (point de saturation),
en ce point Um = 0

A partir de ce point, l'utilité diminue et l'utilité marginale devient négative. Mais un consommateur rationnel ne devrait pas poursuivre sa consommation au-delà de ce niveau.

D'où l'hypothèse de décroissance de l'utilité marginale,

U'x > 0 et U''x < 0
Conditions définissant l'existence d'un maximum pour la fonction d'utilité totale.

Supposons, par exemple, que l'utilité d'un consommateur soit u(x1, x2) = x1x2. Si x1 = x2 = 2, alors u(x1, x2) = 4. Nous savons alors que la valeur accordée par ce consommateur au complexe de bien (2, 2) est de 4, ce qui ne signifie rien en soi. Cependant, si X'1=X'2 =3 , alors U (X'1, X'2)= 9 , ce qui nous permet de dire que le consommateur préfère le complexe (3, 3) au complexe (2, 2) puisque U(3, 3) = 9 > U(2, 2) = 4

2.2. Utilité cardinale et utilité ordinale.

2.2.1. Utilité cardinale

Les fondateurs de l'analyse marginaliste (Stanley Jevons, Carl Menger, Léon Walras et Francis Edgeworth) supposaient que le consommateur était capable de quantifier précisément le niveau

d'utilité attaché à la consommation d'un bien c'est-à-dire de définir une évaluation cardinale de l'utilité. Dans une telle conception, il est possible d'attribuer une valeur chiffrée à la satisfaction ressentie par un individu suite à la consommation d'un bien.
Dans la théorie de l'utilité cardinale on considère que la valeur de la fonction d'utilité pour une panier mesure la satisfaction que tire le consommateur de ce panier. Dans ce cas si l'on a U (X) = 2U (Y) , (avec U (Y) > 0) alors cela voudrait dire que le consommateur aime deux fois plus X que Y.

2.2.1. Utilité Ordinale

Proposée pour la première fois par Vilfredo Pareto qui juge l'approche cardinale à la fois injustifiée et non nécessaire, l'approche ordinale de l'utilité vise à corriger certaines limites liées à la conception cardinale. Cependant l'approche ordinale n'a pas pour but d'attribuer une valeur chiffrée à l'utilité. Elle se contente de déterminer l'ordre de préférence dans les choix du consommateur sans pour autant raisonner en valeur absolue. Elle permet de classer les paniers en indiquant uniquement l'ordre de préférence des paniers de biens
Ainsi avec une utilité ordinale tout ce que cela implique est : X ≻ Y
Naturellement il est illusoire de vouloir trouver une mesure exacte de la satisfaction des individus. De plus cela n'est pas nécessaire pour étudier les choix des consommateurs. Nous utiliserons par la suite uniquement des fonctions d'utilité ordinales.

Peut-on toujours trouver une fonction pour représenter les préférences ? Oui si elles sont normales : si elles représentent un minimum de cohérence.
Si elles ne sont pas transitives (A ≻ B, B ≻ C et C ≻ A) , on ne peut trouver une fonction pour les représenter car
U (A) > U (B) , U (B) > U (C) ⇒ U (A) > U (C) et non U (C) > U (A) .
A partir d'une fonction d'utilité U (x1, x2) il est aisé de construire les courbes d'indifférences : ces dernières correspondent à tous les paniers qui donnent le même niveau de satisfaction et donc la même valeur d'utilité :
I_X = {Y | U (Y) = U (X) } ou I_{U_O} = {Y | U (Y) = U_O}
avec U (X) = U_O

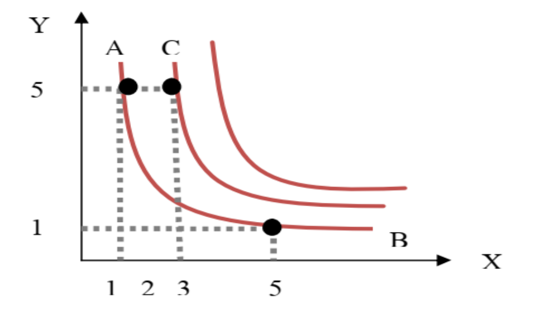
Ce principe de détermination des préférences est complété par un principe de transitivité des préférences (ou de cohérence des choix) :

2.3. Les courbes d'indifférence (ou d'iso-utilité)

a) La fonction d'utilité ordinale associe un nombre indicateur de satisfaction aux diverses quantités de biens (X1, X2, X3, …, Xn) consommés par l'agent rationnel.
U = U (x1, x2,…,xn)
b) On raisonne généralement à partir de deux biens (fonction à deux variables) : U = U (x,y).
Um (x) =$\partial U/\partial x$ =U'x et Um (y) = $\partial U/\partial y$ = U'y
On reprend les hypothèses de positivité et de décroissance de l'utilité marginale
U'x > 0, U''x < 0 et U'y > 0 U''y < 0

2.3.1. Définition

La CI représente l'ensemble des combinaisons de deux biens qui assurent au consommateur un niveau d'utilité identique.

<table>
<tr><th>Présentation graphique</th><th>Commentaires</th></tr>
<tr><td></td><td>L'utilité reste la même lorsqu'on se déplace le long d'une courbe d'indifférence et elle augmente lorsqu'on passe d'une courbe à l'autre vers la droite.

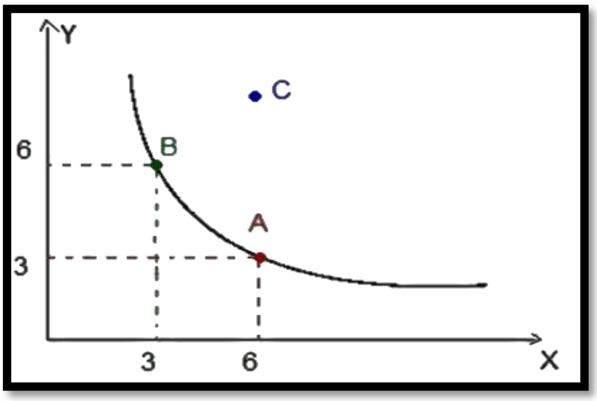
A correspond à 5 y et 1 x ;
B correspond à 1y et 5 x ;
C correspond à 5 y et 3 x donc à un niveau d'utilité supérieur.

L'ensemble des ces courbes constitue une carte d'indifférence et il existe autant de cartes d'indifférence que d'individus.</td></tr>
</table>

2.3.2. Les propriétés des courbes d'indifférence

Elles reflètent en général les hypothèses qui sous-tendent le comportement du consommateur c.a.d les relations de préférence, d'indifférence et la transitivité. A ces hypothèses, il faut ajouter que les biens consommés, doivent satisfaire à l'hypothèse « plus est mieux car tous les biens n'ont pas nécessairement cette propriété.

Propriété 1: Les courbes d'indifférence sont décroissantes.

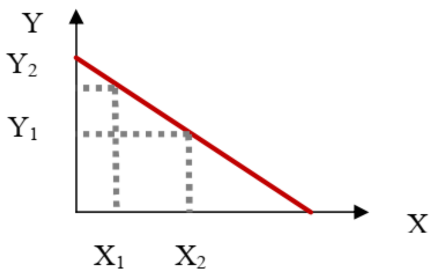


En effet, si la courbe était croissante, elle passerait par des pts qui, comme le point C permettraient d'avoir à la fois + de bien x et + de bien y, or on a vu que ts les pts situés sur une même CI procuraient la même satisfaction. (au pt A on a, certes, + de x mais moins de y qu'en B)

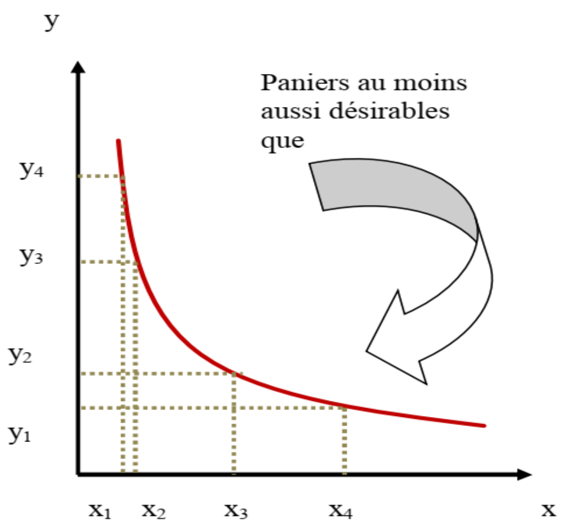
Leur décroissance indique qu'il existe une relation inverse entre X et Y : si X augmente, Y diminue et inversement.

Propriété 2: Les courbes d'indifférence sont convexes

c'est-à-dire qu'elles ne sont pas droites mais courbées vers le bas avec une inclinaison qui diminue de gauche à droite.

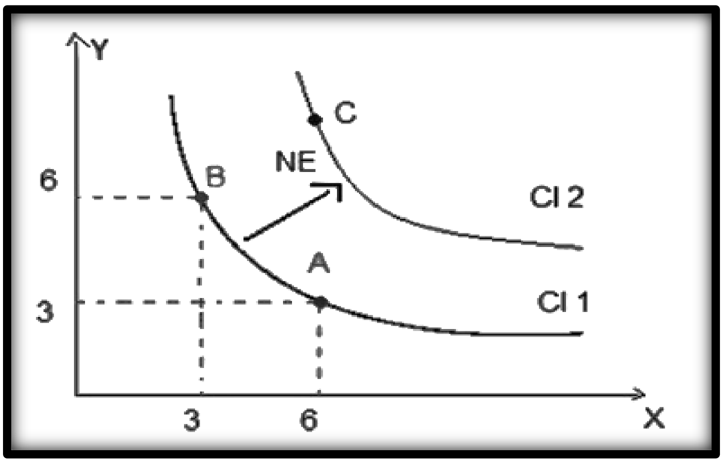
<table>
<tr><th colspan="2">La convexité des courbes d'indifférence</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Sur une droite, une diminution de y d'un montant donné (de y_2 à y_1) suppose une augmentation de x (de x_1 à x_2) d'un même montant afin de maintenir l'utilité constante.

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne change pas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Graphique</th><th>Commentaire</th></tr>
<tr><td>
</td><td>➔ Le long d'une courbe convexe, la diminution de y (de y4 à y3) suppose une augmentation de x (de x1 à x2) plus faible. Car à un niveau élevé de consommation de y est lié une utilité marginale de y (Um y faible) ; et à un niveau de consommation faible de x est lié une utilité marginale de x (Um x) forte (ou croissante).

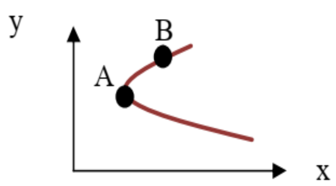
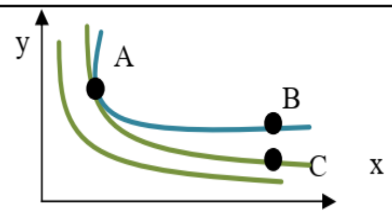
➔ De la même façon, lorsque le niveau de consommation de y est faible, une baisse de y (de y2 à y1) suppose une forte augmentation de x (de x3 à x4).
Y est rare donc son utilité marginale augmente, se séparer du bien y (de y2 à y1) dont l'utilité marginale est croissante entraîne une baisse de l'utilité totale. Seule une quantité croissante de x pourra maintenir la satisfaction inchangée d'autant que x étant de plus en plus abondant son utilité marginale décroît.</td></tr>
</table>

Propriété 3: Plus la courbe d'indifférence s'éloigne de son point d'origine, plus la satisfaction de l'agent est importante.



L'utilité est plus grande sur les courbes situées dans la zone Nord-Est (et donc + faible pour les courbes situées dans la zone Sud-Ouest)
Ainsi U (CI 2) ≻ U (CI 1)

Propriété 4 : Les courbes d'indifférence ne se croisent pas.

Les courbes d'indifférence ne peuvent être croissantes.	Les courbes d'indifférence ne peuvent se couper.
 le point B qui traduit un niveau d'utilité plus important que A est nécessairement situé sur une courbe d'indifférence plus élevée.	 Compte tenu de la définition des courbes d'indifférence, A et B procurent un même niveau d'utilité tout comme A et C. Or B assure un niveau d'utilité plus grand que C donc l'intersection des deux courbes est impossible. Le principe de transitivité des choix n'est pas respecté.

CI b coupe CIc alors U(B)>U(C)
Or U(A)=U(B) ET
U(A)=U(C)
Par transitivité U(B)=U(C)

Propriété 5: Le taux marginal de substitution est décroissant le long d'une courbe d'indifférence convexe.

Propriété 6: Lorsque l'agent a un goût pour la diversité, au point de consommation optimale le taux marginal de substitution est égal au rapport des prix des deux biens.

2.4. Le taux marginal de substitution (TMS).

Le taux marginal de substitution entre deux biens x et y (le TMS de y à x) est égal à la quantité de bien y qui est nécessaire pour compenser la perte d'utilité consécutive à une diminution d'une unité de la consommation de x.

<u>Le TMS fonctionne ds les 2 sens :</u> (1ère = + utilisée)

***Le TMS du bien *y* au bien *x* (noté « TMS *y* – *x* ») est la qté de bien *y* qui doit être substituée à la perte d'une unité de bien *x* pour maintenir l'utilité inchangée. (ds ce cas x < 0 et y >0)**

***Le TMS du bien *x* au bien *y* (noté « TMS *x* – *y* ») est la qté de bien *x* qui doit être substituée à la perte d'une unité de bien y pour maintenir l'utilité inchangée. (ds ce cas x >0 et y< 0)**

La valeur du TMS permet d'évaluer la préférence relative dont peut faire preuve le consommateur à l'égard de l'un ou l'autre des biens.
Le TMS renvoie donc aux variations relatives de y et de x que l'on appréhende graphiquement et algébriquement à partir de la pente et de la dérivée

Enoncé des propriétés

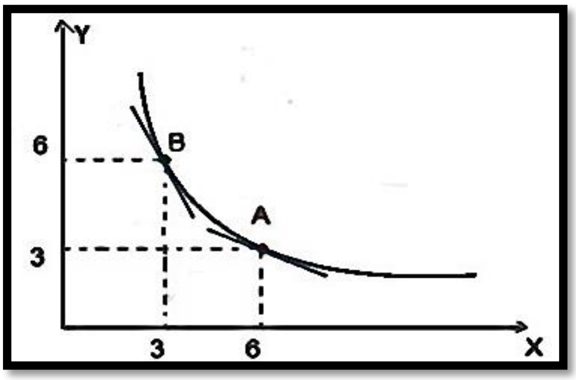
1° : le long d'une courbe d'indifférence le TMSy/x est décroissant. Cette décroissance garantit la convexité des courbes d'indifférence.

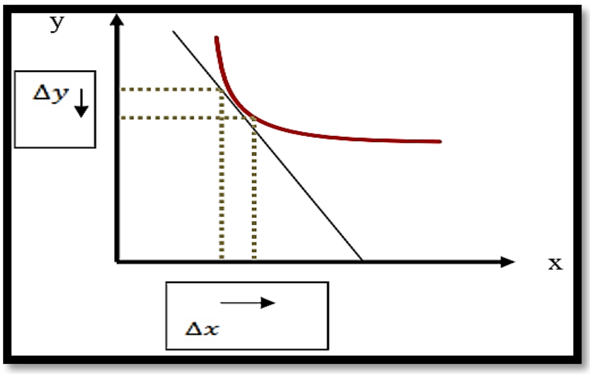
2° : le corollaire de cette propriété est que : convexité des courbes d'indifférence et maximisation de l'utilité (condition du second ordre) sont un seul et même problème. C'est l'équation du TMS qui permet de le résoudre.

La pente d'une droite se mesure à partir du rapport$\frac{\Delta Y}{\Delta X}$. La pente d'une droite est constante (le rapport $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$est identique en tout point de la droite.

En revanche, sur une courbe la pente change en chaque point. La pente en un point sur une courbe est la dérivée de y par rapport à x ($\frac{\partial Y}{\partial X}$ => on mesure la variation de Y pour une variation infiniment petite de x, lorsque x tend vers 0).

Plus rigoureusement, la dérivée est la pente de la droite tangente en ce point.





Pour de petites variations, le TMS peut être assimilé à la pente de la tangente :

TMSy/x = $-\frac{\Delta Y}{\Delta X}$avec Δy < 0 et Δ > 0.

Le long d'une courbe convexe, la pente diminue.

Le taux marginal de substitution varie donc en chaque point et il est décroissant le long de la courbe d'indifférence. On le mesure par la dérivée de Y par rapport à X, c'est-à-dire la pente en un point de la courbe d'indifférence.

Cette pente – et par conséquent le TMS – est négative et décroissante en valeur absolue. Cependant, en économie dire que le taux d'échange entre deux biens est égal à un nombre négatif n'a pas grand sens. Aussi, définit-on le TMS avec un signe négatif placé devant de sorte que le taux exprimé soit toujours positif (Le signe « - « est de nature conventionnelle).- $\partial Y/\partial X$

Exemple : TMS = 2 indique qu'au point de la courbe d'indifférence où le calcul a été fait, une augmentation marginale de X (X tend vers 0) nécessite une diminution de 2 de la quantité consommée de Y si l'on veut conserver l'utilité inchangée.

Approche mathématique dans le cas où l'on suppose les biens infiniment divisibles et la fonction d'utilité continue et dérivable.

Les biens X et Y sont infiniment divisibles et la fonction d'utilité est continue et dérivable.
La fonction d'utilité est : U = U (x,y)

On raisonne sur des accroissements infiniment petits des quantités consommées.
Logiquement, la variation des quantités consommées de x et de y vont entraîner une variation de l'utilité totale.
Cette variation de l'utilité totale est le produit de :

- la variation de la quantité de x et de la modification de l'utilité qui en résulte (c'est-à-dire la variation de l'utilité marginale du bien x) ;
- la variation de la quantité de y et de la modification de l'utilité qui en résulte (c'est-à-dire la variation de l'utilité marginale de x).

Si on utilise une notation différentielle, on écrit alors

- ∂U la modification de l'utilité totale de U ;
- ∂x la variation de la quantité consommée de x ;
- ∂y la variation de la quantité consommée de y ;

Les utilités marginales des biens x et y sont les dérivées partielles de U par rapport à x et par rapport à y soit

- U'x
- U'y

Donc les variations de l'utilité provoquées par les variations des quantités x et y s'écrit :

$$\partial U = U'x\,\partial x + U'y\,\partial y$$

Or, une courbe d'indifférence se définit par la condition $\partial U = 0$
puisque l'utilité est constante sur toute la courbe et que par conséquent la variation d'utilité est nulle.

$\partial U = 0 = U'x\,\partial x + U'y\,\partial y \Rightarrow U'x\,\partial x = -U'y\,\partial y \Rightarrow U'x / U'y = -\partial y / \partial x$

- $\partial y / \partial x$ est le TMS de y par rapport à x qui est aussi égal au rapport des utilités marginales de x et de y (les dérivées partielles de U par rapport à x et par rapport à y).

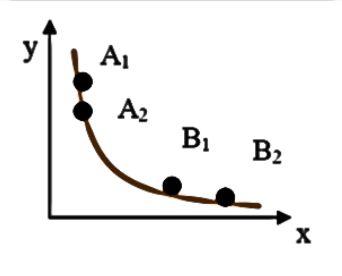
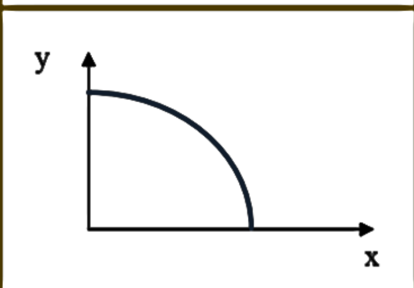
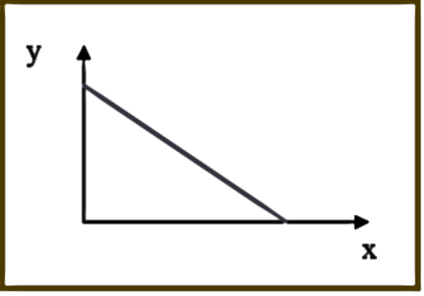
$TMS_{y/x}$ = - (variation de la quantité de y) / (variation de la quantité de x)

TMS y/x = U'x / U'y

2.5. Une typologie des biens et des fonctions d'utilité.

La courbe d'indifférence n'est pas forcément décroissante mais seule sa partie décroissante a un intérêt économique. En effet, dans un monde de rareté (où la consommation d'un bien coûte), le consommateur rationnel doit faire des choix, procéder à des arbitrages sur la seule portion décroissante de la courbe d'indifférence.

a) **Les formes possibles des courbes d'indifférence peuvent revêtir plusieurs allures**.

a) convexité	b) concavité	c) linéarité
		

Il apparaît plus « normal » ou plus « raisonnable » de supposer que la difficulté de substitution s'accroît davantage lorsqu'on passe du point B1 au point B2 (1er graphe) que lorsqu'on passe du point A1 au point A2.

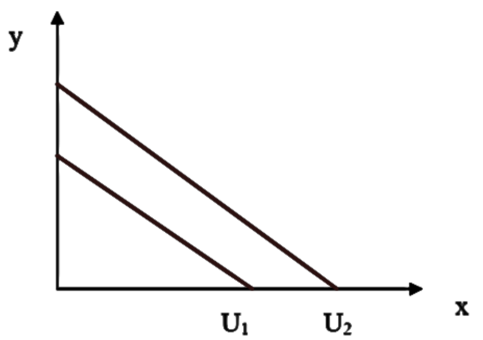
Cette hypothèse de difficulté croissante de substitution (1er graphe) est plus logique que l'hypothèse de constance (3e graphe) ou que l'hypothèse de décroissance (2e graphe). Pour conserver le même niveau d'utilité, on doit abandonner une forte quantité de y (qui ne procure qu'un supplément limité d'utilité) et acquérir une petite quantité de x (qui va apporter un supplément d'utilité plus élevé).

On en déduit que le taux marginal de substitution diminue au fur et à mesure que se poursuit la substitution. L'hypothèse de décroissance du TMS est équivalente à l'hypothèse de convexité des courbes d'indifférence.

b) Nature des biens et forme des Courbes d'indifférence

Les formes possibles des courbes d'indifférence peuvent varier selon les biens qui font l'objet des arbitrages (toutefois, on raisonne généralement en considérant que x et y représentent des paniers de biens).

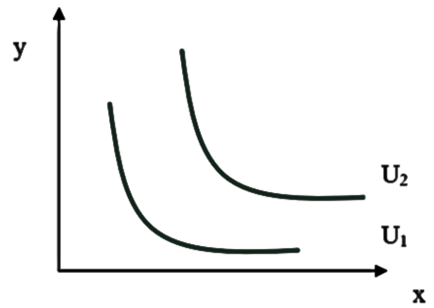
Substituabilité parfaite.



Le TMS est constant. Y et X sont deux biens identiques (2 marques d'essence, de farine, de poudre pour machine à laver…la publicité cherche à différencier ces biens objectivement identiques pour empêcher qu'ils ne deviennent de parfaits substituts).

fonction d'utilité faiblement ou imparfaitement substituable $u(x, y) = ax + by$

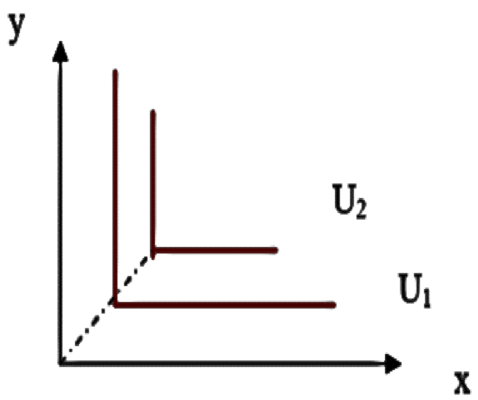
Substituabilité imparfaite.



Le TMS est décroissant.
Si l'axiome convexité des préférences est respectée, les courbes d'indifférence issues d'une même fonction d'utilité ne peuvent pas être tangentes ; en d'autre termes deux courbes d'indifférence ne se coupent pas
Exemples : thé et café, pâtes et riz, etc. …

fonction d'utilité faiblement ou imparfaitement substituable $u(x, y) = aX^{\alpha}Y^{\beta}$

complémentarité stricte



complémentarité stricte entre les deux biens, l'augmentation de la quantité de l'un des deux laisse inchangée l'utilité du consommateur.
Deux biens X et Y sont complémentaires dans un processus de consommation si l'on ne peut pas consommer l'un sans l'autre et cela, dans des proportions fixes.

Lorsque les biens sont complémentaires, la forme générale de la fonction d'utilité est la suivante : U(X, Y) = min (X/a ; Y/b)

Exemple : Soit u(X, Y) = min(X ; 12Y) où X et Y représentent deux biens parfaitement complémentaires. A titre illustratif, on peut, par exemple, supposer un consommateur qui, pour faire une tasse de thé a besoin d'un sachet de thé et de 2 morceaux de sucre. Le sachet de thé et le morceau de sucre apparaissent alors comme des biens complémentaires. La fonction d'utilité de ce consommateur peut donc être traduite par la fonction ci-dessus. En effet, si le consommateur dispose de 3 sachets de thé et 10 morceaux de sucre, il ne peut boire que 3 tasse de thé puisqu'une tasse de thé nécessité 1 sachet de thé et 2 morceaux de sucre. Il lui restera alors 4 morceaux de sucre inutilisés. En revanche, s'il dispose de 10 morceaux de sucre et 10 sachets de thé, il ne peut boire que 5 tasses de thé puisque la quantité de sucre ne lui permet pas.

L'une des implications de la fonction d'utilité des biens complémentaires est que le niveau d'utilité maximal atteint dépendra en priorité du bien moins abondant (bien techniquement en faible quantité). Pour connaitre le bien en quantité faible, on divise les quantités disponibles de chaque bien par son coefficient technique que sont a et b dans l'équation (5).

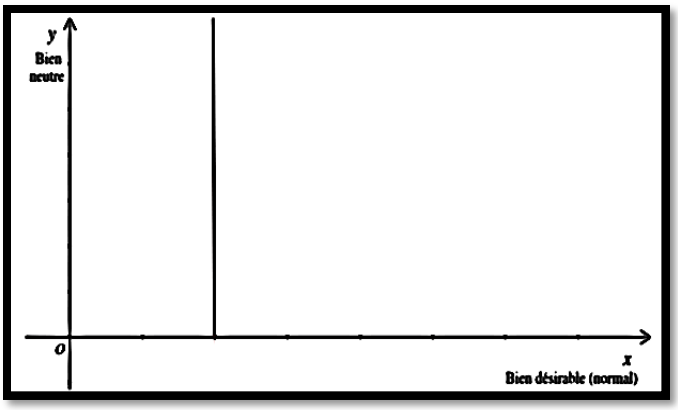
En reprenant l'exemple précédent et en réécrivant la fonction $u(x, y)$ sous la forme générale, on obtient:

Biens neutres

Les Δ de Y ne provoquent ni utilité ni désutilité. Quelle que soit la quantité de, l'utilité reste la même, indifférence à l'égard de Y, Y considéré comme non désiré

Un bien est neutre aux yeux d'un consommateur si la quantité disponible de ce bien n'influence aucunement son niveau de satisfaction. C'est un bien auquel le consommateur est insensible. Par exemple, prenons le cas d'un non-voyant qui se présente à un spectacle artistique composé de chants et de chorégraphie. En considérant les chants comme le bien x et la chorégraphie comme le bien y, on peut dire cet individu est insensible au bien y puisque quelle que soit la qualité des pas de danses et des ballets déroulés dans ce spectacle , cela n'aura aucune incidence sur son utilité car il ne perçoit rien. La satisfaction de cet individu dépendra uniquement des différentes chansons qu'il entendra.

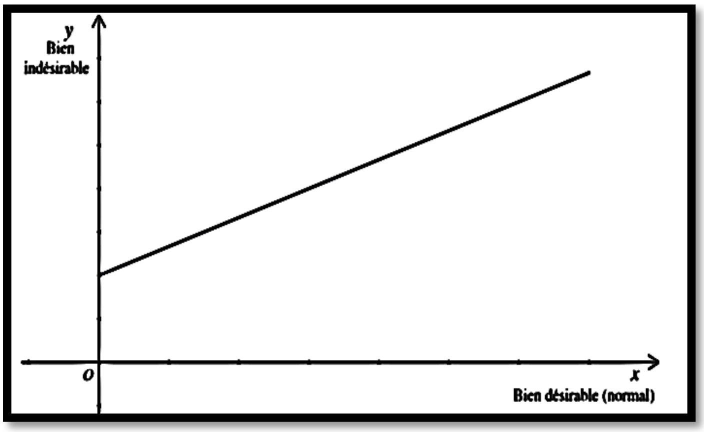
Ainsi, la chorégraphie apparaitra comme un bien neutre alors que la chanson sera le bien désirable (normal).



bien indésirable

c'est un bien qui exerce une influence négative sur l'utilité du consommateur mais qu'il doit pourtant consommer s'il veut profiter d'un autrebien (qui est lui normal, désirable). Par exemple, la pollution (atmosphérique et sonore) peut être considérée comme des biens indésirables pour un individu qui s'installe au milieu d'un centre urbain pour y vivre. En effet, pour profiter pleinement de son cadre de vie (accès à plusieurs facilités), l'individu doit aussi consommer plus de bruits et d'air pollué.

La courbe d'indifférence d'un tel consommateur aura une allure croissante. En effet, s'il veut prolonger son séjour dans le centre urbain, il va nécessairement augmenter sa consommation de pollution. Et inversement s'il limite son séjour en milieu urbain, il diminue aussi sa consommation de pollution



Exercices de synthèse du chapitre.

Exercice 1 : Soit un consommateur auquel on présente cinq paniers de biens. Les relations de préférence de consommateur sont telles que : $P1 \succ P3$; $P5 \succ P4$; $P5 \prec P3$; $P4 \sim P2$; $P1 \prec P5$; $P5 \sim P2$. Ce consommateur peut-il être considéré comme rationnel ?

Exercice 2 : Soient quatre consommateurs dont les préférences sont représentées par les fonctions d'utilité suivantes :
$U1\ (x; y) = 3x + 5y$
$U2\ (x; y) = x + ln y$
$U_3(x;y) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}$
$U_4(x;y) = 2\min(\frac{1}{3}x + 2y)$

- a) Identifier la nature de chacune des fonctions d'utilité compte tenu de la typologie des biens. - b) Exprimer et représenter les courbes d'indifférence lorsque chacun de ces consommateurs se fixe un niveau d'utilité égal à 4. - c) Calculer (si possible), les taux marginaux de substitution du bien y au bien x aux points $x = 2$ et au point $x = 3$

Exercice 3: Soit un consommateur ayant une préférence pour les mélanges plutôt que les paniers extrêmes. Donner une fonction d'utilité qu'on peut potentiellement attribuer à ce consommateur. Calculez le $TMSy/x$ pour ce consommateur au point (x=3 ; y=5). Interprétez ce résultat.

Résolutions
Exercice 1 : En effet, les préférences de ce consommateur ne respectent pas l'hypothèse de transitivité (axiome 3 sur les préférences). Le consommateur dit préférer le panier 1 au panier 3 lequel est, à son tour, moins préféré au panier 5. Cette situation est incohérente avec le fait de préférer moins le panier 1 au panier 5. D'autre part, le consommateur dit préférer le panier 5 au panier 4 mais se dit indifférent entre le panier 4 et le panier 2. Dans ce cas, il apparaît illogique qu'il se dise indifférent entre le panier 5 et le panier 2. Compte tenu donc du non respecte de l'axiome de transitivité, les préférences de ce consommateur peuvent être considérées comme non rationnelles.

Exercice 2
Consommateur 1 : $U1(x; y) = 3x + 5y$

Nature de la fonction d'utilité

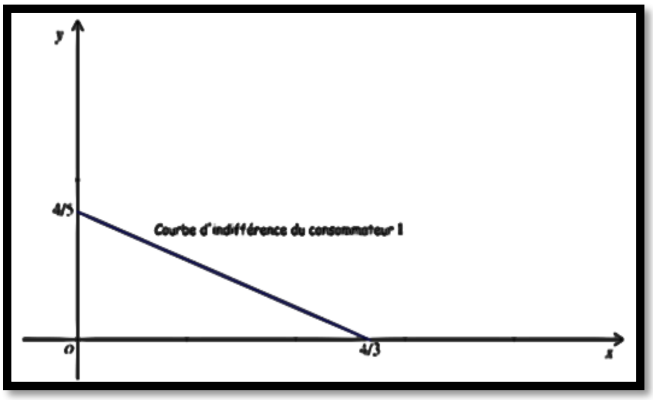
La fonction d'utilité pour ce consommateur est de la forme $ax + by$ où $a = 3$ et $b = 5$. Cette fonction exprime donc une fonction d'utilité des biens parfaitement substituables.

Expression de la courbe d'indifférence et représentation graphique

La courbe d'indifférence pour un niveau d'utilité égal à 4 se détermine en posant l'équation $U1(x; y) = 4$ et en tirant y.

Ainsi en posant $3x + 5y = 4$, on obtient $y = 4/5 - 3/5x$. Cette équation représente celle d'une droite de pente – 3/5

. C'est donc une fonction décroissante (voir figure cidessous).



Calcul du TMS aux points x=2et x=3

On peut calculer le TMS soit en utilisant l'expression de la courbe d'indifférence soit en utilisant la fonction d'utilité.

En utilisant la courbe d'indifférence, le TMS se calcule par la formule suivante :

$TMS_{y/x} = -\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial y}{\partial x}$. Dans ce cas sachant que $= \frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$, alors $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{3}{5}$. Ainsi :

$$TMS_{y/x} = -\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

En utilisant la fonction d'utilité, le TMS se calcule comme le rapport des utilités marginales um_x et um_y qui sont respectivement les dérivées premières de la fonction d'utilité par rapport à x et par rapport à y. Ainsi :

$$TMS_{y/x} = \frac{um_x}{um_y} = \frac{\left(\frac{\partial U_1(x;y)}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial U_1(x;y)}{\partial y}\right)} = \frac{3}{5}$$

Propriété: Pour les biens parfaitement substituables, le TMS est constant et égal à l'opposé de la pente de la courbe d'indifférence et cela quelles que soient les quantités des biens x et y appartenant à la courbe d'indifférence. Ainsi $TMS_{y/x} = -\frac{a}{b}$ $\forall (x; y) \in C$. Ce chiffre représente ce taux auquel la substitution parfaite entre x et y est pleinement assurée.

Ainsi, pour le consommateur 1, le TMS entre le bien y et le bien x reste $\frac{3}{5}$ aussi bien aux points x=2 et qu'au point x=3.

CHAPITRE II. LA THEORIE DU COMPORTEMENT DUCONSOMMATEUR ET CHOIX OPTIMAL

INTRODUCTION

Les préférences variant d'une personne à une autre, les biens étant onéreux et les individus n'ayant pas le même niveau de revenu, la théorie suggère qu'un consommateur rationnel est celui qui, dans son ensemble budgétaire ou ensemble de consommation, arrive à identifier et à consommer le panier de biens lui procurant le maximum de satisfaction.
Le consommateur rationnel cherche à retirer le maximum d'utilité des ressources dont il dispose. Il effectue donc ses dépenses dans les limites de son budget.

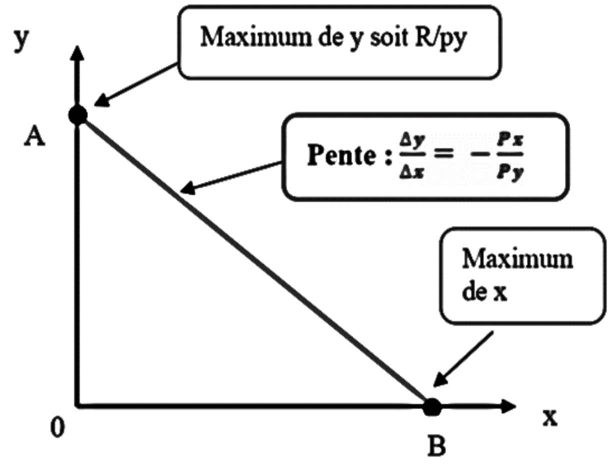
I. budget.

Le budget du consommateur est la somme monétaire maximale dont il dispose pour réaliser ses dépenses.
R $=\sum_{i=1}^{n} P_i X_i$ avec Xi≥ 0
Dans tout ce qui suit : P_1= Px et P_2=Py
On appelle R, le montant des ressources du consommateur et on suppose qu'il dépense la totalité de son revenu au cours de la période considérée pour acheter un panier de biens Xi aux prix Pi
Par exemple s'il dispose de 100€ pour l'achat de deux biens dont les prix sont respectivement p1=2 et p2 =5, sa contrainte s'écrit : R = (2×25) + (5×10) = 100. S'il choisit de ne consommer que du bien x, sa dépense totale sera de D= 4×25 = 100, ou que du bien y : D = 5×20= 100.

1.1.La contrainte budgétaire

Considérant la ressource disponible R, la contrainte est telle que R ne peut excéder la dépense totale, dans l'hypothèse de rationalité du consommateur, Il est vrai qu'un autre type de contrainte peut s'imposer à lui, telle que la rareté des biens qu'il souhaite acquérir. Ainsi donc le choix doit correspondre au principe de la maximisation de l'utilité sous contrainte.
On ne considérera ici que la contrainte de budget.
Considérons le panier Ω=(X, Y), (P1 et P2) les Prix des deux biens, R : Revenu, montant total que le consommateur peut dépenser.
On appelle Contrainte budgétaire la relation XP1+YP2≤R
Lorsque la contrainte est saturée c'est à dire que les dépenses épuisent effectivement tout le revenu, alors XP1+YP2=R
En se limitant à deux biens, la contrainte budgétaire est représentée par une droite, appelée droite de budget.
$Y=\frac{R}{P_2}-\frac{P_1}{P_2}X$
Cette équation décrit comment évolue la consommation de Y en fonction de celle de X. Le rythme auquel la consommation de Y diminue quand X augmente (la pente de la droite) dépend du prix relatif des deux biens (c'est-à-dire du rapport P_1/ P_2). Plus X est cher par rapport à Y et plus Y diminuera rapidement (plus la pente de la droite est forte en valeur absolue)

La droite budgétaire est la représentation graphique de l'ensemble des combinaisons x-y qu'un individu peut acheter avec un revenu donné.

Présentation graphique	Commentaires
 **Le domaine du choix du consommateur** correspond au triangle OAB.	R = Px. X + Py. Y R – Px. X = Py. Y On divise par Py (R / Py) – (Px. X / Py) = Py. Y / Py Y = R / Py - Px / py .X Expression de la forme y = ax + b Dont la pente est a = - Px / Py

Compte tenu de sa contrainte budgétaire, l'agent économique ne peut que choisir les combinaisons des biens X et Y contenues dans l'espace du budget représenté par le triangle OAB. Toutes les combinaisons optimales sont situées tout au long de la droite de budget.
$X = \frac{R}{P_1}$, $Y = \frac{R}{P_2}$

1.2.Les déplacements de la droite de budget : variation du revenu et des prix.

- **Variation du revenu**

Si le revenu augmente (ceteris paribus), la droite de budget se déplace vers le haut parallèlement à elle-même à droite si R ↗ ou à gauche si R ↘

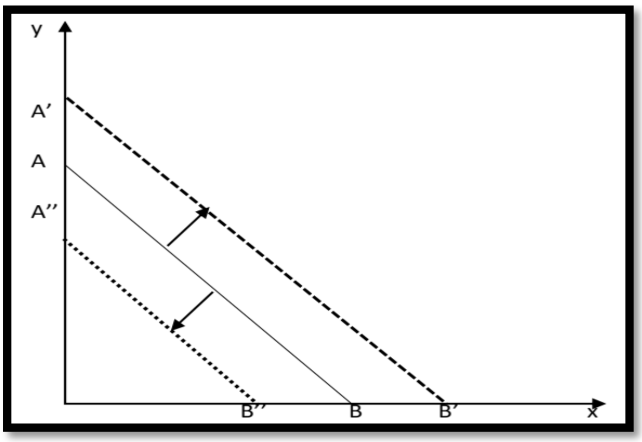


Fig Effet de la variation du revenu

- **Effet de la variation des prix**

Une variation proportionnelle de tous les prix est donc équivalente à une variation dans la même proportion du revenu. Elle est représentée sur la figure par le déplacement de la droite de budget de A'B' à AB

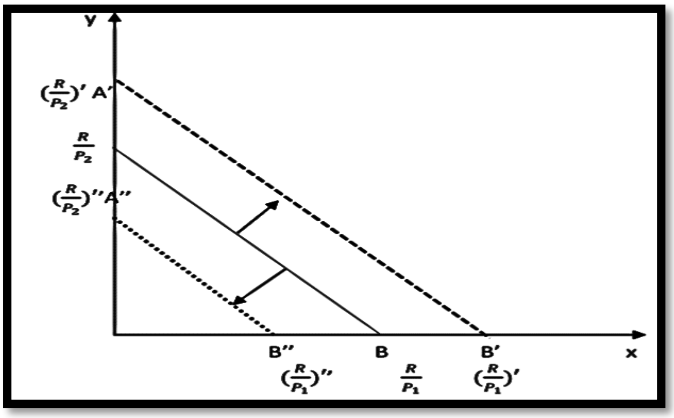


Fig variation équiproportionnelle des prix, ou du revenu.

Une baisse équiproportionnelle de P1 et P2 entraine une augmentation de Y et X correspondant à la droite de budget (A', B') dont les qté Y et X max sont respectivement $(\frac{R}{P_2})$' et $(\frac{R}{P_1})'$ aux points A' et B'.
La droite (A'', B'') correspond à un déplacement de la droite du budget initial du fait de l'augmentation équiproportionnelle des prix P1 et P2

Variation en sens inverse des prix P1 et P2
Si le prix du bien X augmente, toutes choses étant égales par ailleurs , la pente augmente en valeur absolue (droite plus raide) et la droite de budget passe toujours par le point A entrainant une baisse de qté de de X avec X'= $\frac{R}{P_1'}$
En revanche si le prix de Y diminue, (cetéris aribus) la droite de budget passe par le point B et la qté Y correspondant à Y'=$\frac{R}{P_2'}$

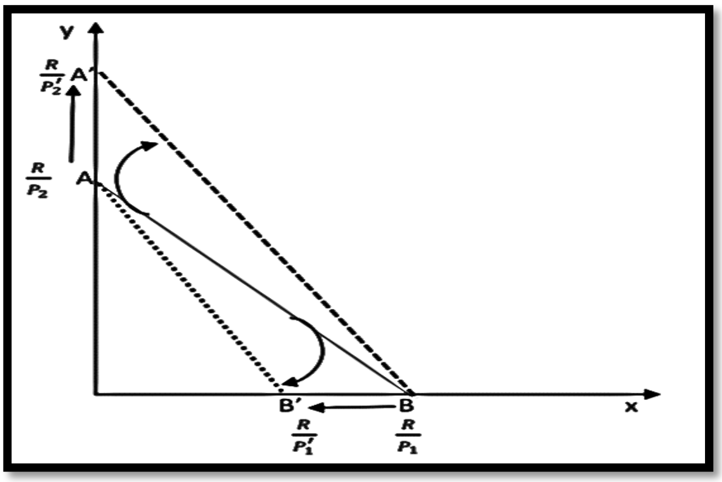


Fig Effet de la variation des prix

II. Choix optimal : détermination de l'équilibre du consommateur

Après avoir introduit la représentation des contraintes du consommateur et celle de ses préférences, considérons maintenant le problème du choix du consommateur. Il doit choisir le panier qu'il préfère à tous les autres parmi les paniers qu'il peut acheter avec son revenu.

Le consommateur est dit en équilibre, compte tenu de la contrainte imposée par son revenu et les prix des biens, quand il tire de ses dépenses une utilité (ou satisfaction) totale maximale. En d'autres termes, un consommateur en équilibre, quand étant donné, sa contrainte budgétaire, il atteint la courbe d'équivalence la plus élevée possible.
Les conditions et hypothèses relatives aux courbes d'indifférence et de rationalité étant vérifiées, on peut résoudre le problème de maximisation de l'utilité qui conduit à l'équilibre du consommateur.

La maximisation sous contrainte : La recherche de l'optimum du consommateur consiste à déterminer les quantités maximales de biens, X* et Y*, qui maximisent l'utilité sous contrainte budgétaire. Mathématiquement, il s'agit de trouver un extremum sous contrainte qui se formule ainsi : Maximiser $U = U(X,Y)$ Sous contrainte : $R = P1 .X + P2 . Y$ Où R, P1 et P2 sont des constantes.
Ce système peut être généralisé à n biens.

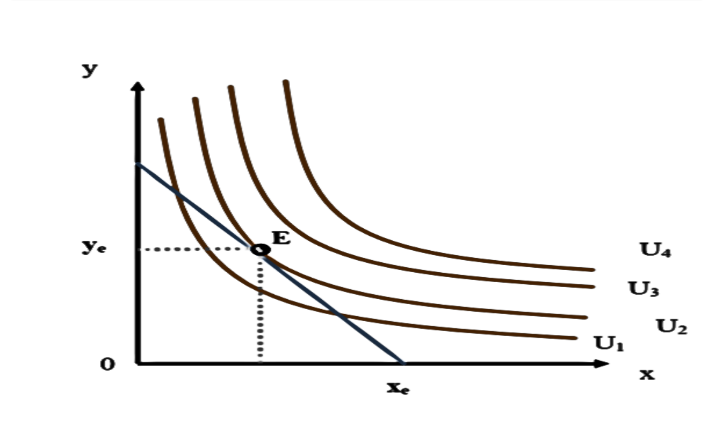
Il existe en général, trois méthodes de résolution du problème de maximisation du consommateur :

- La méthode géométrique
- La méthode de substitution
- la méthode du multiplicateur de Lagrange

2.1. La méthode géométrique

Le consommateur cherche le maximum de satisfaction. Il doit choisir le panier qui se trouve sur la courbe d'indifférence la plus élevée et qu'il est possible de l'acquérir compte tenu de son revenu (respecter la contrainte budgétaire). Pour cela, il doit identifier la combinaison possible, placée sur sa droite budgétaire, qui représente le niveau de satisfaction la plus élevé. Cette combinaison est celle qui se situe sur la courbe d'indifférence la plus élevée.

Graphiquement, il apparaît sur le point de la droite de budget qui atteint la courbe d'indifférence la plus élevée. Autrement dit, la combinaison optimale est définie par le point où une courbe d'indifférence est tangente à la droite budgétaire (le point E).



En ce point de tangence entre la courbe d'indifférence et la droite budgétaire, la pente de la courbe d'indifférence (dy / dx) et celle de la droite budgétaire (- Px / Py) sont confondues.

Le point E indique d'une part que U2 est le maximum d'utilité que le consommateur peut atteindre et nous signale d'autre part quelle est la structure de al consommation (coordonnées Y_e et X_e).

Vérifiant que le point E est la combinaison maximale :
□ Supposons que le consommateur choisit le panier A.
Ce panier respecte la contrainte budgétaire puisqu'il est situé sur la droite budgétaire mais il se situe sur une courbe d'indifférence plus proche de l'origine et moins élevée que celle de E.

Le point A utilise le même revenu que E mais rapporte moins de satisfaction. Donc le consommateur rationnel rejette A et préfère avoir E E = (X* , Y*)

 Supposons que le consommateur choisit B. Ce point est-il optimum ?

Ce point donne une satisfaction meilleure que le point E mais ce niveau de vie dépasse le revenu du consommateur.

Le panier B se trouve sur une courbe d'indifférence plus élevée mais il est irréalisable.

Donc le point E de tangence entre la droite du budget et une courbe d'indifférence est le point optimal. Tout point différent de E sur la droite du budget n'est pas optimal, car l'utilité du consommateur pourrait améliorer compte tenu de son revenu

Au point E, le consommateur maximise son utilité en demandant les quantités (X*,Y*). Le point E est le point optimum. On dit aussi qu'il est le point d'équilibre du consommateur.

Sur ce point, la pente de la courbe d'indifférence (dY/dX) et celle de la droite budgétaire (-Px/Py) sont confondues.

Au point d'équilibre, on a donc :

Pente de la droite du budget	=	Pente de la courbe d'indifférence
- Px/Py	=	dY/dX

La pente de la droite de budget représente le taux auquel le consommateur peut échanger du bien X contre du bien Y dans son panier. Ce taux est constant.

La pente de la courbe d'indifférence représente le taux auquel le consommateur peut substituer du bien Y au bien X sans changer son utilité. Ce taux est variable. Il dépend de la quantité de (X,Y) possédée par le consommateur. C'est le TMS.

A l'équilibre le taux auquel le consommateur est prêt à substituer du bien Y pour du bien X, est égal au taux auquel le marché lui permet d'effectuer cette substitution.

En dehors de l'équilibre, les deux taux diffèrent

Donc par définition le TMS= -dY/dX alors TMS = Px/Py

Ce résultat est compatible avec celui de la théorie de l'utilité marginale. En effet au point d'équilibre du consommateur E, on a :

TMS = UmX/UmY = Px/Py alors UmX/Px = UmY/Py

On retrouve la loi d'égalisation des utilités marginales pondérées par les prix. Cette relation correspond à l'idée que la satisfaction du consommateur est maximale lorsque la dernière unité monétaire consacrée à l'achat de chacun des biens lui procure le même supplément d'utilité.

En effet, si l'affectation de la dernière unité monétaire suppose le choix entre 2 achats d'utilités différentes, le consommateur rationnel privilégie le bien dont l'utilité est supérieure. Donc l'utilité est maximale lorsqu'aucune opportunité n'est laissée inexploitée.

2. 2. La méthode de substitution

Le problème qui est posé est celui de la maximisation d'une fonction d'utilité sous contrainte budgétaire.

Il s'agit de trouver X* et Y* qui maximise U = U (X , Y) (1)

Sous contrainte R = Px.X + Py.Y (2)

Il est possible de transformer un problème de maximisation d'une fonction sous contrainte en un problème de maximisation d'une fonction sans contrainte en procédant ainsi :

A partir de l'équation de la contrainte budgétaire (2), on obtient Y qu'on remplace dans U. On exprime ainsi U, (1) en fonction de X seulement. On dérive U par rapport à X pour obtenir le point maximal :

- A partir de la contrainte budgétaire : (R = Px X + Py Y), on extrait Y en fonction de X :

Y = -Px/Py . X + R/Py

- Puis on remplace la valeur de Y dans la fonction d'utilité :

U = U (X , -Px/Py. X + R/Py) = U (X, f(X))

Cette fonction dépend d'une seule variable X

- On cherche le maximum de la fonction d'utilité obtenue en annulant la dérivée totale de U par rapport à X :

On annule la dérivée totale de U par rapport à X : dU/dX = 0 ⇒ E (X* , Y*)

Le point d'équilibre ou l'extremum, E vérifie les conditions suivantes

si $\frac{d^2U}{dX^2} = U''(X) > 0$ E (X* , Y*) est un minimum

si $\frac{d^2U}{dX^2} = U''(X) < 0$ E (X* , Y*) est un maximum

Application

On suppose que la fonction d'utilité d'un individu est de la forme : U = X Y
Avec R=400, Px=4, Py=10
Travail demandé : Calculer, selon les deux méthodes, les quantités de biens X et Y demandées par l'individu rationnel. ? Quel sera l'indice de satisfaction correspondant à celle de la demande optimale ?

Déterminez l'optimum du consommateur en utilisant 3 méthodes différentes (les deux méthodes analytiques et la méthode graphique).

Un agent rationnel maximise sa satisfaction tout en respectant les contraintes qui pèsent sur lui (R, Px, et Py des donnés)

*** *Méthode de substitution : application***

Système à Maximiser U = X Y (1)

Sous contrainte 100 = 4.X + 10Y (2)
- On tire Y de (2) : 100=4X+10Y→ Y = 40 – 2/5 X C'est l'équation de la CB
- On remplace Y dans U , U = XY = X (40-2/5X) ⟶U = 40X-2/5X^2

La FU ainsi obtenue dépend d'une seule variable X. On peut calculer le maximum (une équation à 1 inconnu)

La condition nécessaire pour que la satisfaction admette un maximum est que la dérivée première puisse s'annuler. La condition suffisante, est que la dérivée seconde soit négative.

dU/dX = 40 – 4/5 X = 0, ⟹ X = 50

La fonction admet un extremum pour X=50.

$\frac{d^2U}{dX^2}$= -4/5 < 0 Cet extremum est un maximum car la dérivée second est négative.

- Les variables X et Y sont liées par la contrainte budgétaire (CB). Pour calculer Y, on remplace la valeur de X dans l'équation de la CB (2)

Y=40-2/5X = 40-2/5.5 ⟹Y = 20
- Le panier E qui maximisera la satisfaction de l'individu est E (X=50 , Y=20)
- E donne le maximum de satisfaction. On remplace la valeur de X et Y dans U.

U=XY=50x20.= 1000

U=1000 est l'indice de satisfaction correspondant à la courbe d'indifférence la plus élevée possible compte tenu du revenu et des prix.

2.3. La méthode du multiplicateur de Lagrange

Les multiplicateurs de Lagrange sont une méthode qui permet de transformer un problème d'extremum sous contrainte (ou lié) en un extremum sans contrainte (libre).

Soit une fonction F(x1,x2) à maximiser sous la contrainte G(x1,x2).

Il est possible de former une nouvelle fonction en posant la contrainte égale à 0, de la multiplier par λ, constante indéterminée appelée multiplicateur de Lagrange, et en ajoutant (ou la retranchant) à la fonction initiale. On forma ainsi la fonction de Lagrange :

£ (x1,x2, λ) = F(x1, x2) + λ G (x1, x2) = 0

ou plus simplement £ = F(x1, x2) + λ G (x1, x2)

La fonction objective à maximiser F(x1, x2) n'est modifiée par l'ajout de λ G (x1, x2) puisque La contrainte est supposée nulle. Dés lors, la maximisation F(x1, x2) est obtenue en annulant les dérivées partielles de premier ordre de £ par rapport à x1, x2 et λ puis en résolvant pour x1, x2 et λ :

∂£/∂x1 = F1 + λ.G1 = 0

∂£/∂x2 = F2 + λ.G2 = 0

∂£/∂λ = G(x1 + x2) = 0

où F1 et F2 sont respectivement les dérivées partielles de F par rapport à x1 et x2. La résolution de ces trois équations simultanées fournit les valeurs de x1 et x2 qui maximisent la fonction objectif F sous la contrainte G(x1,x2) = 0

2.3.1. Méthode de Lagrange pour deux biens

Le problème est une maximisation sous contrainte :

$$U = U(X,Y)$$

Sous contrainte R = Px.X +Py.Y

Ce qui nous permet d'écrire une nouvelle fonction, en posant la contrainte budgétaire égale à zéro, en la multipliant ensuite par □, multiplicateur de Lagrange, et en l'ajoutant enfin à la fonction initiale. On obtient alors une nouvelle fonction dit («fonction de Lagrange».

Poser la contrainte budgétaire comme étant égale à zéro revient à écrire : Px X +PyY = R

La fonction de Lagrange, £, est alors égale à :

$£ = U(X,Y) + \lambda(Px.X+Py.Y) – R)$

Cette fonction admet un extremum si d£ = 0, la différentielle totale nulle, cad si les dérivées partielles par rapport aux variables X, Y et λ sont nulles.

L'annulation des dérivées partielles est une opération appelée « recherche des conditions de première ordre » ou « recherche des conditions d'optimum »

L'extremum sera un maximum si $d^2£ <0$, la différentielle totale seconde de Lagrange, est une forme quadratique définie négative. La recherche du signe de $d^2£$ est une opération appelée recherche des conditions du deuxième ordre.

La fonction Lagrange est donc maximale lorsque les dérivées partielles de chacune de ses variables s'annulent, conditions dites de premier ordre. Nous aurons alors :

$\partial£/\partial X = \partial U/\partial X + \lambda.Px = 0$

$\partial£/\partial Y = \partial U/\partial Y + \lambda.PY = 0$

$\partial£/\partial\lambda = Px.X+Py.Y – R= 0$

On obtient un système de 3 équations à 3 inconnus.

Le système peut s'écrire ainsi :

$$\lambda = \frac{\partial U/\partial X}{Px} = \frac{\partial U/\partial Y}{Py} \Longrightarrow \frac{Um\ (X)}{Px} = \frac{Um\ (Y)}{PY}$$

Dans le cas de deux biens X et Y, nous aurons alors à vérifier les conditions d'équilibre suivantes

$$\frac{\partial U/\partial X}{Px} = \frac{\partial U/\partial Y}{Py} \Longrightarrow \frac{\partial U/\partial X}{\partial U/\partial Y} = \frac{Px}{Py} = TMS$$

Et Px.X+Py.Y – R

2.3.2. Le multiplicateur de Lagrange λ : Interprétation

On peut démontrer que le multiplicateur de Lagrange, noté λ représente l'utilité marginale du revenu. L'utilité marginale du revenu se définit comme la variation d'utilité générée par la variation du budget de consommation, et se note dU/dR.

L'expression du revenu est donnée par la contrainte de budget : $R = Px.X + Py.Y$

Donc la variation du revenu s'écrit $dR = dPx.X + Px.dX + dPy.Y + Py.dY$

soit, si on considère les prix comme donnés : $dR = Px.dX + Py.dY$

Les variations des quantités dX et dY sont déterminées par les conditions d'équilibre du consommateur, soit notamment (d'après la condition du premier ordre):

$\partial U/\partial X = \lambda.Px$

$\partial U/\partial Y = \lambda.Py$

de Sorte que les prix se réécrivent :

$Px = \partial U/\partial X \ . \ 1/\lambda$

$Py = \partial U/\partial Y \ . \ 1/\lambda$

Donc la variation du revenu se réécrit

$dR = \partial U/\partial X \ . \ 1/\lambda \ . \ dX + \partial U/\partial Y \ . \ 1/\lambda \ . \ dY = 1/\lambda \ (\partial U/\partial X \ ..dX + \partial U/\partial Y \ . \ dY)$

soit encore, puisque le terme entre parenthèses n'est autre que la différentielle dU de la fonction d'utilité :

$dR = 1/\lambda \ . \ dU$ d'où en définitive $dU/dR = \lambda$

Ainsi, le multiplicateur de Lagrange λ est égal à l'utilité marginale du revenu, c'est-à-dire à la variation de l'utilité du consommateur susceptible d'être entraînée par une variation d'une unité de son revenu, à prix des deux biens donnés.

Méthode de Lagrange *APPLICATION*

On écrit le Lagrangien:

£ = U (x,y) + λ(R – x Px – y Py) soit £ = x.y + λ(400 – 4x – 10y)

On annule les dérivées partielles par rapport à x, y et λ:

£'x = y - 4λ= 0 soit λ= 1 /4 y

£'y = x - 10λ= 0 soit λ= 1/10x

£'λ= 400 – 4x – 10y = 0 soit 400 = 4x + 10 y

On déduit des deux premières équations :

1 /4 y = 1/10x => y = 4/10 x = 2/5 x (et x = 5/2 y)

On remplace dans la troisième :

4x +10 (2/5 x) = 400

4x + 4x = 400

x = 50

Donc 400 = 200 + 10 y => y = 20 et λ= 5.

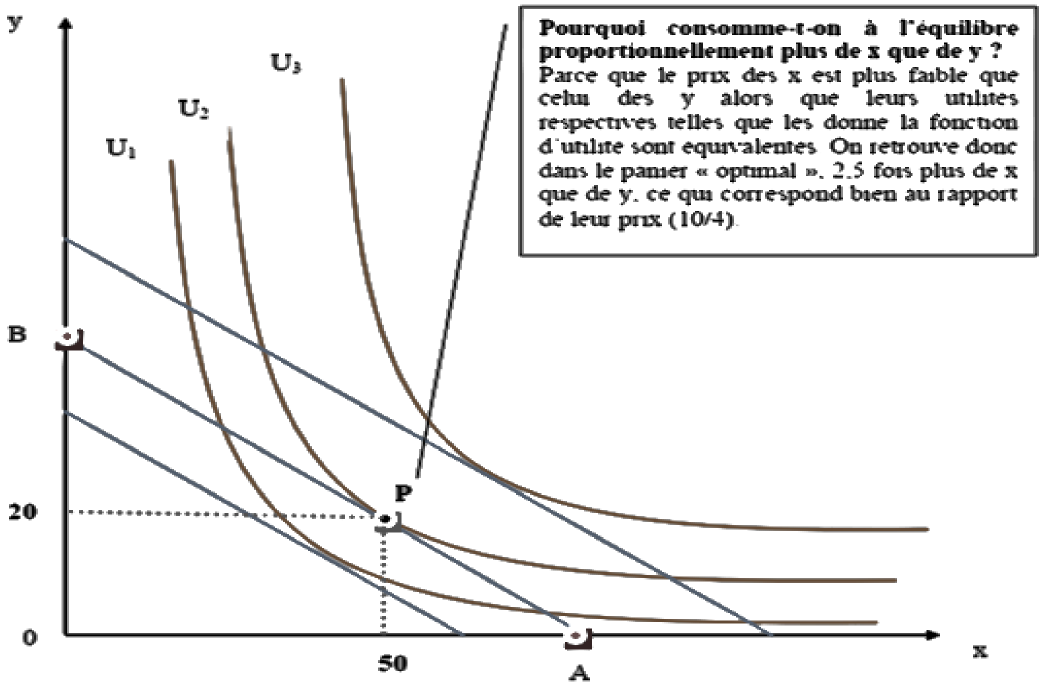
50 unités du bien x et 20 unités du bien y sont les quantités qui maximisent son utilité.

La détermination graphique de l'optimum du consommateur.

La fonction d'utilité du consommateur peut être représentée par une série de courbes d'indifférence et l'équation de budget (ou de prix) peut être exprimée graphiquement par une droite de budget (ou de prix). La combinaison de ces deux instruments permet de déterminer l'optimum du consommateur.

U = x. y et R = 4 x + 10 y

Px = 4 ; Py = 10 ; R = 400.



Le consommateur rationnel qui désire maximiser son utilité avec un revenu limité doit trouver la courbe d'indifférence la plus élevée ayant au moins un point commun avec la droite de budget correspondant au niveau de son revenu.

Dans l'exemple considéré (avec R = 400), le maximum d'utilité est atteint au point P auquel la droite de budget BA est tangente à la courbe d'indifférence U2. Tout autre point de la droite BA correspond à un degré d'utilité moindre.

2.2.3. Méthode de Lagrange pour n biens

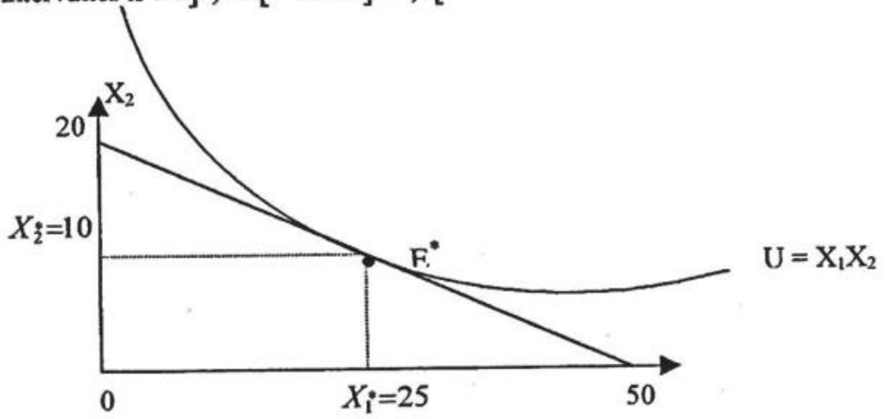
Soit U une fonction d'utilité à maximiser sous la contrainte budgétaire R. On sait d'autre part que l'intégralité des ressources dont on dispose est destinée à la consommation de n biens X. Nous aurons alors : U = U(X1, X2, …, Xn) et R = P1X1+P2X2+…+PnXn Ce qui nous permet d'écrire une nouvelle fonction, en posant la contrainte budgétaire égale à zéro, en la multipliant ensuite par λ, multiplicateur de Lagrange, et en l'ajoutant enfin à la fonction initiale. On obtient alors une nouvelle fonction dit(«fonction de Lagrange». Poser la contrainte budgétaire comme étant égale à zéro revient à écrire : (P1X1+P2X2+…+PnXn) – R La fonction de Lagrange, £, est alors égale à £ = U(X1, X2, …, Xn) + λ (P1X1+P2X2+…+PnXn – R) Cette fonction est maximale lorsque les dérivées partielles de chacune de ses variables s'annulent, conditions dites de premier ordre. Nous aurons alors

$$\begin{cases} \partial £/\partial X1 = \partial U/\partial X1 + \lambda.P1 = 0 \Longrightarrow Um1=\lambda.P1 \\ \partial £/\partial X2 = \partial U/\partial X2 + \lambda.P2 = 0 \Longrightarrow Um2=\lambda.P2 \\ \ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \partial £/\partial Xn = \partial U/\partial Xn + \lambda.Pn = 0 \Longrightarrow UmN=\lambda.PN \\ \partial £/\partial \lambda = (X1.P1+X2.P2+\ldots+Xn.Pn) - R = 0 \Longrightarrow X1P1 + X2P2 + \ldots + XnPn = R \end{cases}$$

Soit encore : $\frac{\partial U/\partial X_1}{P1} = \frac{\partial U/\partial X_2}{P2} = \ldots = \frac{\partial U/\partial X_n}{Pn}$

Les conditions suffisantes et nécessaires pour une maximisation/minimisation sous contrainte nécessitent que le Déterminant Hessien Bordé (D) formé des dérivées partielles de $2^{ème}$ ordre de L(.) soit positif/négatif

La fonction U= X_1X_2 (où k= X_1X_2)est un ensemble d'hyperboles équilatères définies dans les intervalles x $x\in]0,+\infty[$ et $x\in]-\infty,0[$



-Les coordonnées du point d'équilibre (E*) sont les valeurs des demandes pour des prix et un revenu correspondant à la droite de budget (X_2=20-2/5X1).A ce point d'équilibre, la pente de la droite de budget doit être égale à la pente de la courbe d'indifférence.

(3) la détermination de l'équil.du consommateur par la méthode du multiplicateur de Lagrance (λ)
Cette méthode permet d'obtenir les mêmes résultats que les méthodes précédentes. Le paramètre (λ) s'interprète comme l'utilité marginale d'un franc supplémentaire dépensé sur les biens de consommation : c'est donc l'utilité marginale du revenu. Avec la fonction d'utilité $U = U(X_1, X_2)$ et la contrainte budgétaire ($R = P_1X_1 + P_2X_2$), on forme une nouvelle fonction appelée Fonction – objectif : $L(X_1, X_2, \lambda)$ et le programme de maximisation (Programme primal ou marshallien) se pose comme suit :

$$\begin{cases} \text{Max. } U = U(X_1, X_2) \\ \text{s.c. } \quad R = P_1X_1 + P_2X_2 \end{cases}$$

.et on forme le Lagrangien (L) :
$L(X_1, X_2, \lambda) = U(X_1, X_2) + \lambda[R - P_1X_1 - P_2X_2]$.
- ensuite on calcule et on annule les dérivées partielles de 1[er] ordre par rapport à X1, X2, et λ : ce sont les conditions nécessaires de 1[er] ordre (CIO)

CI[e] O

$$(A) \quad \begin{cases} (1) : \dfrac{\partial L}{\partial X_1} = Um_1 - \lambda P_1 = 0 \Rightarrow Um_1 = \lambda P_1 \\ (2) : \dfrac{\partial L}{\partial X_2} = Um_2 - \lambda P_2 = 0 \Rightarrow Um_2 = \lambda P_2 \\ (3) : \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = R - P_1X_1 - P_2X_2 = 0 \Rightarrow R = P_1X_1 + P_2X_2 \end{cases}$$

- Les CI[e] O représentent les conditions nécessaires pour une Maximisation / Minimisation. Elles sont obtenues en résolvant les deux 1[ères] équations du système (A) ;

soit : $\dfrac{(1)}{(2)} \Rightarrow \dfrac{Um_1}{Um_2} = \dfrac{P_1}{P_2}$ (4)

- les conditions suffisantes pour une Maximisation / Minimisation sous contrainte nécessitent que le Déterminant Hessien Bordé (D) formé des dérivées partielles de 2[e] ordre de L(.) soit positif / négatif.

$$D = \begin{vmatrix} L_{1,1} ; L_{1,2} ; L_{1,\lambda} \\ L_{2,1} ; L_{2,2} ; L_{1,\lambda} \\ L_{\lambda,1} ; L_{\lambda,2} ; L_{\lambda}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{1,1} ; U_{1,2} & -P_1 \\ U_{2,1} ; U_{2,2} & -P_2 \\ -P_2; \quad P_2 & 0 \end{vmatrix}$$

- pour calculer la valeur du déterminant (D), on peut entre autres, utiliser la METHODE DE SARRUS

$$D = \begin{vmatrix} U_{1,1} ; U_{1,2} -P_1 ; U_{1,1} ; U_{1,2} \\ U_{2,1} ; U_{2,2} - P_2 \quad U_{2,1} ; U_{2,2} \\ -P_1 ; \ -P_2 \quad 0 \quad -P_1 ; \ -P_2 \end{vmatrix} = (P_1P_2U_{1,2} + P_1P_2U_{2,1}) - (P_1^2U_{2,2} + P_2^2U_{1,1})$$

$$D = P_1P_2U_{1,2} + P_1P_2U_{2,1} - P_1^2U_{2,2} - P_2^2U_{1,1} = 2\,P_1P_2U_{1,2} - P_1^2U_{2,2} - P_2^2U_{1,1})$$

- Le système (A) contient trois équations à trois inconnues (X_1, X_2, λ). Si les troisèquations sont indépendantes, on peut trouver les inconnues X_1, X_2 et λ en fonction des paramètres P_1, P_2 et R.
- en considérant les expressions (3) et (4) ci-dessus, on a un système à deux équations et deux inconnues (X_1, X_2) avec P_1, P_2 et R comme paramètres ;
- puisque $D \neq 0$ on peut obtenir les fonctions de demande X_1 et X_2 en fonction des paramètres P_1, P_2 et R comme suit :

$$\left.\begin{array}{l} X_1^* = X_1(P_1, P_2, R) \\ \\ X_2^* = X_2(P_1, P_2, R) \end{array}\right\} \quad \text{Fonctions de demande ordinaires (Marshalliennes)}$$

En remplaçant ces fonctions de demande dans la fonction d'utilité initiale ($U = U(X_1, X_2)$), on obtient une nouvelle fonction d'utilité appelée Fonction d'utilité indirecte ; soit :
$U^*(P_1,P_2,R) = U[X_1(P_1,P_2,R) ; X_2(P_1, P_2,R)]$
U*( ) est fonction des paramètres (P_1,P_2,R).Elle donne la valeur maximale de l'utilité pour toutes les valeurs données de P_1, P_2 et R. C'est aussi la fonction d'utilité de référence.

a) Autres interprétations du MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE (λ) :

A partir des CI°O ; on peut déterminer (λ) comme suit :

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ L_1 = U_{m1} - \lambda P_1 = 0 \Rightarrow U_{m1} = \lambda P_1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{U_{m1}}{R} \\ \\ (2)\ L_2 = U_{m2} - \lambda P_2 = 0 \Rightarrow U_{m2} = \lambda P_2 \Rightarrow \lambda = \dfrac{U_{m2}}{P_2} \end{array}\right\} \quad \boxed{\lambda^* = \frac{U_{m1}}{R} = \frac{U_{m2}}{P_2}}$$

ceci signifie que dans un programme de maximisation liée, l'U_m par franc dépensé est la même pour les deux biens X_1 et X_2.
- En multipliant les expressions (1) et (2) par X_1^* et X_2^* respectivement et en les additionnant, on obtient une autre expression de (λ) :

$$\left.\begin{array}{l} X_1^*U_{m1} - X_1^*\,\lambda^*P_1 = 0 \\ \\ X_2^*U_{m2} - X_2^*\,\lambda^*P_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow X_1^*U_{m1} + X_2^*U_{m2} = \lambda^*\underbrace{(P_1X_1^* + P_2X_1^*)}_{R}$$

d'où $\boxed{\lambda^* = \dfrac{X_1^*U_{m1} + X_2^*U_{m2}}{R}}$

- dans ce cas, λ^* indique que le taux de variation de l'utilité par rapport au revenu est le même à chaque marge et à toutes les marges simultanément.

b / Application : Détermination et propriétés des fonctions de demandes ordinaires (ou marshalléennes)

b1 : détermination des fonctions de demandes ordinaires (ou marshalléennes)

La détermination de l'équilibre du consommateur par la méthode du multiplicateur de LAGRANGE (λ) permet – entre autres – de déterminer les fonctions de demandes ordinaires (marshalléennes) ou tout simplement « les courbes de demande » Elles indiquent la quantité de biens que le consommateur achètera en fonction des prix et de son revenu.

Ex :soit la fonction d'utilité $U = U(X_1, X_2) = X_1X_2$ et l'équation de la droite de budget :
$R = P_1X_1 + P_2X_2$

$$\begin{cases} \text{Max. } U = X_1X_2 \\ \text{s. c. } \quad R = P_1X_1 - P_2X_2 \end{cases}$$

$L(\,) = X_1X_2 + \lambda[R - P_1X_1 - P_2X_2]$

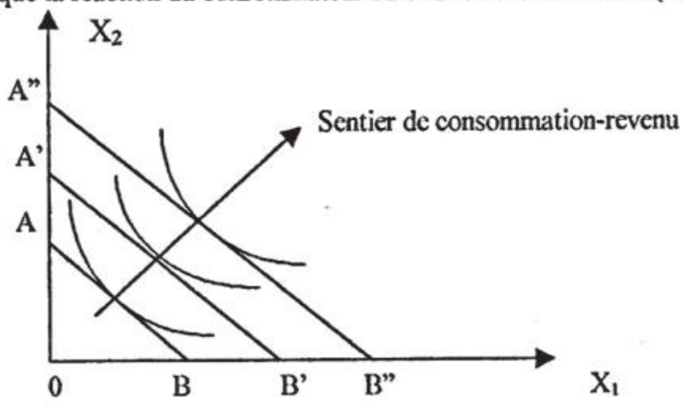
CI^e O

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \dfrac{\delta L}{\delta X_1} = X_2 - \lambda P_1 = 0 \Rightarrow X_2 = \lambda P_1 \\[2em] (2)\ \dfrac{\delta L}{\delta X_2} = X_1 - \lambda P_2 = 0 \Rightarrow X_1 = \lambda P_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{X_2}{X_1} = \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow P_1X_1 = P_2X_2\ (4)$$

$$(3)\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = R - P_1X_1 - P_2X_2 = 0$$

- la condition de tangence (4) $\Rightarrow P_1X_1 = P_2X_2 \Rightarrow$ la dépense effectuée sur le bien X1 est identique à celle effectuée sur le bien X_2. Dans ce cas particulier, les courbes de demande sont à élasticité – prix unitaire i. e. isoélastiques

A partir de la condition de tangence (4) $P_1X_1 = P_2X_2$ on obtient l'équation de la courbe de consommation – revenu i. e. $X1 = \frac{P_2}{P_1}X_2$ ou $X_2 = \frac{P_1}{P_2}X_1$: la droite représentative de cette équation indique la réaction du consommateur aux variations du revenu (les prix restant constants).



- les fonctions de demande sont obtenues en substituant l'expression (4) dans l'expression de la contrainte budgétaire (4).

$P_1X_1 = P_2X_2$

$R = P_1X_1 + P_1X_1 \Rightarrow 2\ P_1X_1 = R \Rightarrow \boxed{X_1^* = \frac{R}{2P_1}}$ fonction de demande du bien X_1

$R = P_2X_2 + P_2X_2 \Rightarrow 2\ P_2X_2 = R \Rightarrow \boxed{X_2^* = \frac{R}{2P_2}}$ fonction de demande du bien X_2

Application numérique :

$R = 100$ $\qquad X_1^* = \frac{100}{2(2)} = 25$

$P_1 = 2$ alors :

$P_2 = 5$ $\qquad X_2^* = \frac{100}{2(5)} = 10$

-Vérification des conditions suffisantes par un maximum / minimum

$$D = \begin{vmatrix} U_{1,1} ; U_{1,2} ; -P_1 \\ U_{2,1} ; U_{2,2} ; -P_2 \\ -P_1 ; -P_2 ; 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -P_1 \\ 1 & 0 & -P_2 \\ -P1 & -P2 & 0 \end{vmatrix} = 2 P_1P_2 > 0$$

$$\frac{\delta^2 L}{\delta X_1^2} = 0 \; ; \; \frac{\delta^2 L}{\delta_2^2} = 0 \; ; \; \frac{\delta^2 L}{\delta X_1 \delta X_2} = \frac{\delta^2 L}{\delta X_2 \delta X_1} = 1.$$

=> $D = 2P_1P_2 > 0$ => le déterminant Hessien Bordé étant positif, la condition suffisante pour un maximum est satisfaite ; les quantités $X_1^*=25$ et $X_2^*=10$ maximisent donc l'utilité du consommateur.

b_2 : Propriétés des fonctions de demande : on distingue 2 propriétés fondamentales :
-1ère propriété : dans une fonction de demande, une seule combinaison de biens, correspond à une distribution donnée de prix et du revenu. Pour les biens normaux, les quantités demandées augmentent avec le revenu et le prix de l'autre biens, et diminuent avec son propre prix ; d'où :

$$\frac{\delta X_1}{\delta P_1} < 0 \; ; \; \frac{\delta X_1}{\delta P_2} > 0 \; ; \; \frac{\delta X_1}{\delta R} > 0$$

$$\frac{\delta X_2}{\delta P_1} > 0 \; ; \; \frac{\delta X_2}{\delta P_2} < 0 \; ; \; \frac{\delta X_2}{\delta R} > 0$$

-2ère Propriété : les fonctions de demande sont généralement homogènes de degré zéro par rapport aux prix et au revenu. Donc si tous les prix et le revenu subissent des variations de même pourcentage, la quantité demandée reste inchangée.

Exemple : soit k : une constante positive :
- la contrainte budgétaire devient : $kR = \kappa P_1X_1 + \kappa P_2X_2$
- la fonction lagrangienne s'écrit alors : $L(\cdot) = U(X_1, X_2) + \lambda[\kappa R - \kappa P_1X_1 - \kappa P_2X_2]$

les CIeO : deviennent :

(1) : $\frac{\delta L}{\delta X_1} = U_{m1} - \kappa\lambda P_1 = 0$

(2) : $\frac{\delta L}{\delta X_2} = U_{m2} - \kappa\lambda P_2 = 0$

(3) : $\frac{\delta L}{\delta \lambda} = \kappa(R - P_1X_1 - P_2X_2) = 0.$

- puisque $\kappa \neq 0$; on peut écrire : $R - P_1X_1 - P_2X_2 = 0$
- des deux premières équations on obtient $\frac{U_{m1}}{U_{m2}} = \frac{P_1}{P_2}$

Ces résultats sont identiques à ceux obtenus du système d'équations (A) du programme lagrangien. Donc, les fonctions de demande pour la combinaison (prix, revenu) : κR, κP_1 et κP_2 sont identiques à celles obtenues de la combinaison R, P_1 et P_2.
De même, les conditions de 2e ordre ne sont pas modifiées par la prise en compte de la constante positive (κ).

- Interprétation économique : le degré d'homogénéité zéro d'une fonction de demande signifie que le consommateur ne se comportera pas comme s'il était plus riche (ou plus pauvre) en termes de revenu réel si son revenu nominal (R) et les prix augmentent dans les mêmes proportions. En effet, une augmentation du revenu monétaire (R) est désirable pour le consommateur (toutes choses égales par ailleurs), mais son bénéfice est illusoire si les prix se modifient dans les mêmes proportions. Donc de telles augmentations laissent le comportement du consommateur inchangé : il n'est donc pas victime de l'illusion monétaire.

Conclusion

Le programme du consommateur Conceptuellement, le programme du consommateur se définit comme un cadre dans lequel les objectifs du consommateur sont mis en relation avec ses contraintes afin de déterminer les choix optimaux. De façon simple, on dira que le programme permet d'associer les fins aux moyens. Le programme du consommateur peut se présenter sous deux formes différentes. Dans la première, le consommateur cherche à obtenir le maximum d'utilité compte du revenu qu'il dispose et des prix des biens. Dans la seconde approche, le consommateur cherche à minimiser sa dépense en se fixant un niveau d'utilité donné. Le premier type de programme est aussi appelé programme primal du consommateur (ou programme Marshallien) alors que le second type de programme est qualifié de programme dual (ou programme Hicksien). Dans l'approche Marshallienne, on dira que la fin justifie les moyens alors que dans l'approche Hicksienne, ce sont plutôt les moyens qui justifient la fin. Bien que n'étant pas obtenues dans les mêmes logiques, les solutions du programme primal sont (rigoureusement) les mêmes que celles du programme dual dans la mesure où le consommateur est supposé dépenser tout son revenu R. Les sections ci-dessous fournissent les détails sur ces deux approches de formulation du programme du consommateur.

Le programme primal (approche Marshallienne)

Dans l'approche Marshallienne, le consommateur cherche à maximiser son utilité sous sa contrainte budgétaire en choisissant le panier de biens qu'il préfère dans son ensemble budgétaire. En prenant le cas de deux biens x et y, le programme du consommateur se formule comme suit :

$$\begin{cases} Max\ U(x,y) \\ s.c:\ \ p_x x + p_y y = R \end{cases}$$

Où $U(x,\ y)$ est la fonction d'utilité (dépendant des quantités du bien x et y). px et py représente les prix des biens x et y. R représente le revenu disponible du consommateur. Ce programme est constitué de deux parties : $Max\ \ U(x,\ \ y)$ qui représente la fonction objective du consommateur et $pxx + pyy = R$ qui représente la contrainte budgétaire. L'association de ces deux parties forme donc le programme primal du consommateur.

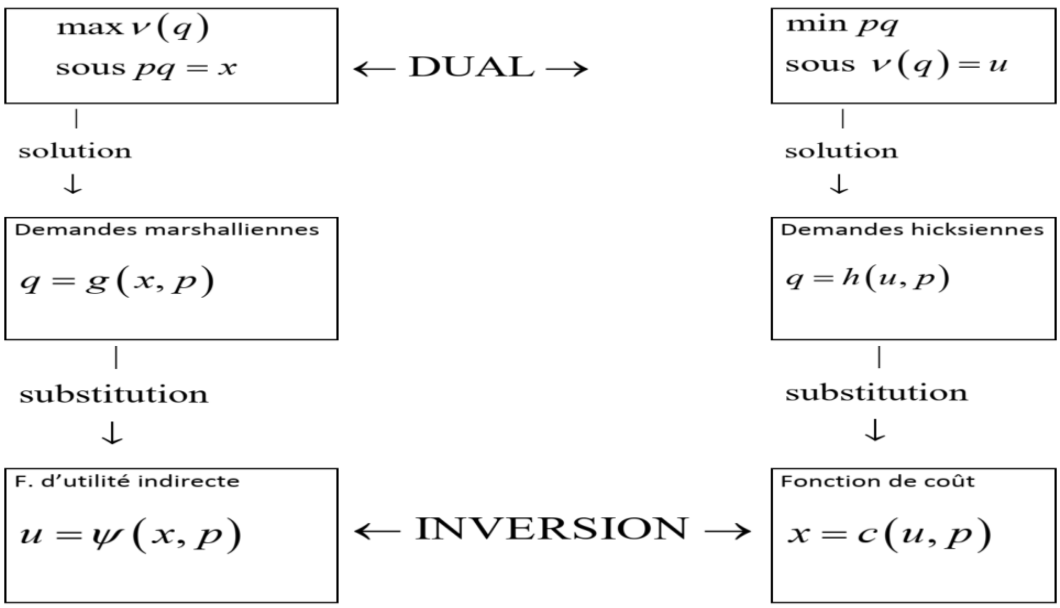
3.1.2. Le programme dual (approche Hicksienne)

Dans l'approche Hicksienne, le consommateur se fixe un certain niveau d'utilité et cherche alors minimiser le niveau de dépense en choisissant le panier de biens lui permettant d'atteindre le niveau d'utilité souhaité. Cette approche est qualifiée de programme dual qui peut se formuler comme suit :

$$\begin{cases} Min\ \ p_x x + p_y y \\ s.c: \quad U(x, y) \ = \ U_0 \end{cases}$$

Où $U(x, y)$ est la fonction d'utilité (dépendant des quantités du bien x et y). $U0$ est le niveau souhaité d'utilité ; px et py représente les prix des biens x et y. Tout comme pour le programme primal, le programme dual est aussi constitué de deux parties : $Min\ pxx + pyy$ qui représente la fonction objective et $U(x, y) = U0$ qui représente la contrainte technique. Mais contrairement au programme primal, la fonction objective est définie en fonction de la droite budgétaire alors que la contrainte est définie en fonction de la fonction d'utilité.

Application de la dualité : le schéma logique de détermination des fonctions de demande.



III. La Dynamique de l'environnement économique et l'équilibre du consommateur

Les modifications relatives aux variations de prix et de revenu affectent l'équilibre du consommateur

Application

Soit la fonction d'utilité suivante : $X^{3/4}Y^{1/4}$ et une contrainte budgétaire : R = Px X + Py Y

Questions :

1) Déterminer l'expression des fonctions de demande rationnelle de X et de Y

2) Etudier la forme des fonctions de demande obtenues

Réponse :

1) Les fonctions de demande rationnelles des biens X et Y sont obtenues à partir des conditions du premier ordre. Elles donnent les quantités optimales demandées pour chaque prix et chaque valeur de revenu .On peut écrire :

£ = $X^{3/4}Y^{1/4}$ + λ (R - Px.X - Py.Y)

Condition de premier ordre :

∂£/∂X = 3/4 $(Y/X)_{1/4}$ - λ. Px = 0 (1)

∂£/∂Y = 1/4 $(Y/X)_{3/4}$ - λ. Py = 0 (2)

∂£/∂λ = R – Px X – Py Y = 0 (3)

En résolvant le système on aura :

3Y/X = Px/Py⟹ ***X = (3 Y Py) / Px***

Y=XPx/3Py

X et Y représentent les fonctions de la courbe de consommation revenu

En remplaçant X par son expression dans (3) on aura :

R = Px (3 Y Py / Px) + Py Y⟹ ***Yd = R / 4Py C'est la fonction de demande de Y***

Puisque X = (3 Y Py) / Px ⟹ ***Xd = 3R / 4Px C'est la fonction de demande de X***

2) Les fonctions de demande de X et de Y sont des fonctions à 2 variables R et P. La demande d'un bien dépend du revenu de l'individu et du prix du bien.

L'analyse de la forme des fonctions de demande consiste à voir l'évolution de la fonction en ne retenant qu'une seule variable (l'autre est supposé constant)

*** Si les prix sont constants**

Si Py = $\overline{P}$y = Cte Y= R/4Py et dY/dR = 1 / 4 $\overline{P}$y > 0

Px = $\overline{P}$x = Cte X= 3R/4Px et dX/dR = 3 / 4 $\overline{P}$x > 0

Dans les deux cas, si le prix du bien ne change pas, la demande varie dans le même sens que le revenu.

Y= R/4$\overline{P}$y et X= 3R/4$\overline{P}$x sont les courbes d'Engel

***Si le revenu est constant**

R = $\overline{R}$ = Cte

Y= $\overline{R/4}$Py avec dY/dPy = - $\overline{R}$ / 4 P^2y < 0 et d^2Y/dP^2y = $\overline{R}$ / 2 P^3y > 0

X= $\overline{3R}$/4Px avec dX/dPx = - $\overline{3R}$ / 4 P^2x < 0 et d^2X/dP^2x = 3$\overline{R}$ / 2 P^3x > 0

dY/dPy <0 et dX/dPx < 0 ⟹ La demande individuelle du bien en fonction de son prix est décroissante

d^2Y/dP^2y >0 et d^2X/dP^2x >0 ⟹ La demande individuelle du bien en fonction de son prix est convexe par rapport à l'origine

3.1.Courbe d'Engel- Courbe consommation-revenu- Courbe de consommation-prix.

3.1.1. La courbe de consommation-revenu

La courbe revenu-consommation est la liaison entre la variation du revenu et les quantités consommées, les prix des biens étant constants.

La courbe de consommation-revenu est le lieu des combinaisons de consommation d'équilibre, lorsque le budget de consommation varie.

Elle se distingue de la courbe d'Engel en ce qu'elle identifie l'impact des variations du revenu sur l'ensemble du panier de consommation, et non sur la demande d'un bien donné. La courbe de consommation-revenu s'établit à partir de la carte d'indifférence.

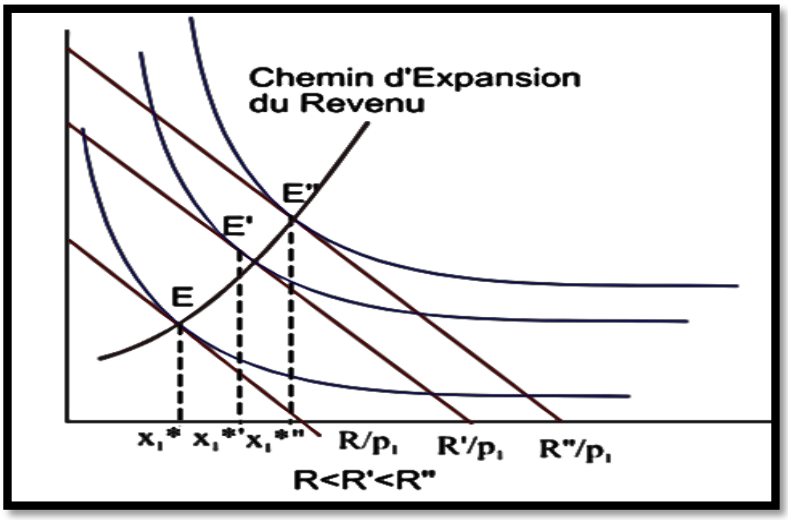


Fig Courbe de consommation-revenu

Remarque La courbe revenu-consommation est l'ensemble des points 'optimum de consommation lorsque seul le revenu varie.

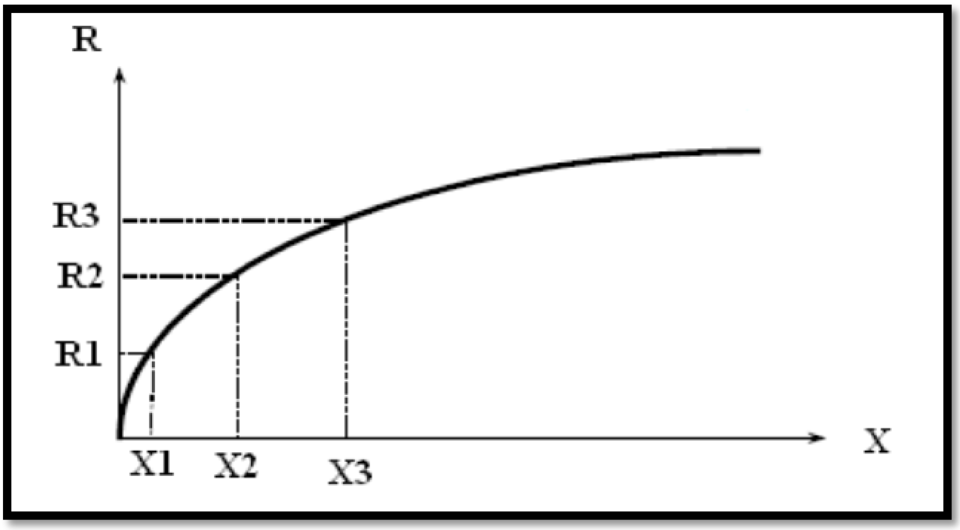
3.1.2. Courbe d'Engel

La courbe d'Engel, issue des travaux du statisticien Allemand Ernst ENGEL (1821-1896), peut être tracée à partir de la courbe revenu-consommation.

La courbe d'Engel pour un bien est une relation entre le revenu du consommateur et les quantités consommées de ce bien, toutes choses égales par ailleurs.

La courbe d'Engel d'un bien i représente la variation de demande du bien qui résulte d'une variation du budget du consommateur, à partir d'une situation d'équilibre.

Pour déterminer l'équation de la courbe de demande d'ENGEL du bien X, il suffit de remplacer dans la fonction de demande de ce bien les prix unitaires PX et Py par leur valeur : X = f(R, Px, Py) avec Px et Py fixés.

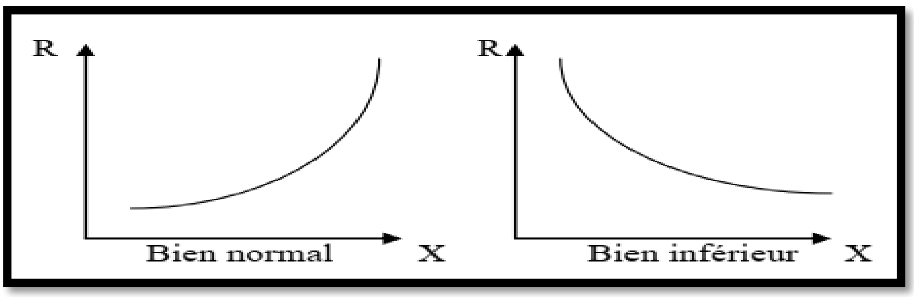


Le chemin d'expansion du revenu et la Courbe d'Engel

La courbe d'Engel nous donne le lieu géométrique des quantités optimales du consommateur qui varient quand on modifie le revenu.

Si le bien 1 est un bien normal alors la courbe d'Engel est croissante. Si les deux biens sont normaux alors le chemin d'expansion du revenu (CER) est croissant.

En fait, la courbe d'Engel est croissante lorsque le bien est normal, et décroissante lorsque le bien est inférieur.

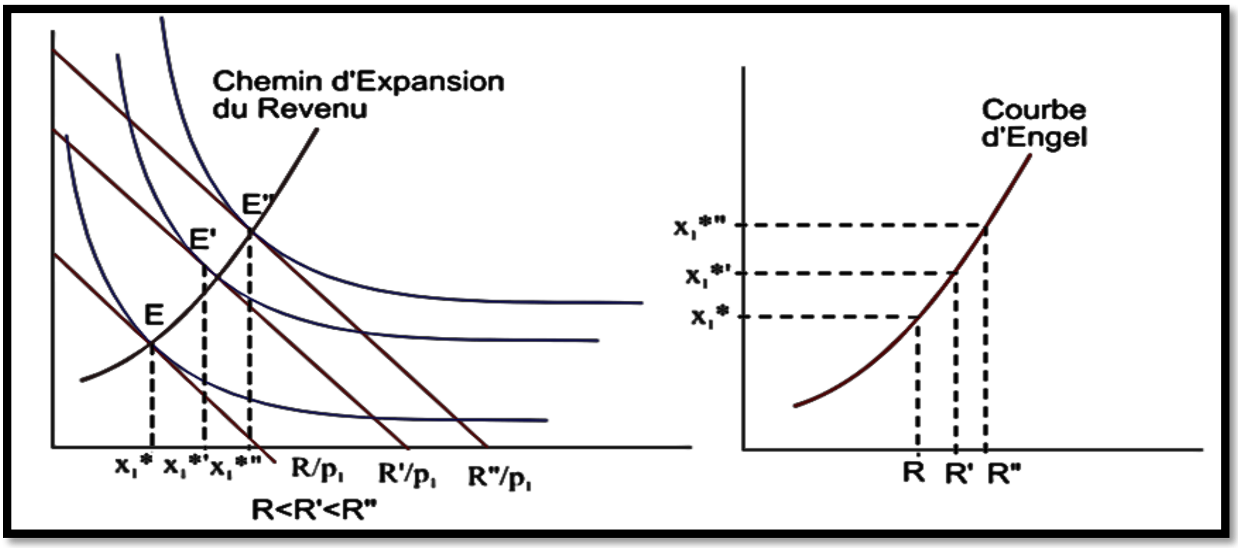


C'est en utilisant des données en valeur qu'Engel, à la suite de ses études sur les budgets de famille, énonça quelques grands principes connus aujourd'hui sous le nom de lois d'Engel. Les trois principales d'entre elles sont :

- la part des dépenses d'alimentation diminue avec l'accroissement du revenu
- la part des dépenses d'habillement et de logement est constante
- la part des dépenses sur les autres biens augmente avec l'accroissement du revenu.

- **Relation CCR et CE**

La construction de la courbe est effectuée sans difficulté. Mais, la courbe d'ENGEL d'un bien peut être déduite de la courbe de consommation-revenu relative à ce bien. Donc, la courbe d'ENGEL du bien X sera construite en reportant, pour chaque point d'équilibre de la courbe de consommation-revenu, la quantité consommée du bien X et le montant du revenu. Cette courbe se présente comme suite :



3.1.3. Courbe-Prix-consommation

La courbe de consommation-prix montre comment la consommation d'un bien varie pour un individu, lorsque le prix de ce bien varie (toutes choses égales par ailleurs).

La courbe prix-consommation est la liaison entre la variation du prix d'un bien et les quantités consommées de ce bien, le revenu et le prix des autres biens étant constants.

La courbe de consommation-prix représente l'ensemble des points optimum de consommation lorsque seul le prix varie.

Cet exemple montre un cas particulier d'une fonction de demande linéaire. Ce qui explique que la fonction de demande est représentée par une droite et non par une courbe.

Sachant que l'équation d'une droite est de la forme $Y = a X + b$

 a représente la pente $a = \Delta Y/\Delta X$

 b est une constante, elle représente le niveau minimum de Y et est indépendante de X

Par analogie l'équation de droite du bien X s'écrit : $X = a Px + b$

Application
Soit la fonction d'utilité U = (Y-1) X
Déterminer la courbe consommation-revenu et la courbe consommation-prix

1)la courbe consommation-revenu
La courbe consommation-revenu est le lieu des points représentatifs de combinaisons optimales de X et Y lorsque les prix sont constant mais que le budget varie
La condition d'optimalité :
$Umx / Umy = Px / Py \Longrightarrow (Y-1) / X = Px/Py \Longrightarrow$ $\mathbf{Y = (Px/Py) X + 1}$
La courbe de consommation-revenu dans le cas présent est une droite

2) La courbe consommation-prix
* La courbe consommation-prix de X est le lieu des points représentatifs de combinaisons optimales de X lorsque le revenu et le prix de Y sont constants (R et Py sont constants) mais que le prix de X varie (Px varie).

Par définition les conditions d'équilibre sont :

- **(1)** $Umx / Umy= Px / Py \Longrightarrow \quad (Y-1) / X = Px / Py \Longrightarrow Y = (Px/Py).X + 1$

- **(2)** $R = Px X + Py Y \qquad R = Px X + Py [(Px/Py) X - 1]$

$$\mathbf{Xd = (R - Py) / 2Px}$$

La demande de X varie en fonction de Px (Py et R sont constants). Cette équation Xd représente la courbe de la consommation-prix de X

* La courbe consommation-prix de Y est le lieu des points représentatifs de combinaisons optimales de Y lorsque le prix de X et le revenu sont constants (Px et R constants) mais que le prix de X varie (Px varie)

On remplace X obtenue dans Y $\Longrightarrow Y = (Px/Py). [(R+Py) / 2Px] - 1$
$\Longrightarrow Y = (R + Py) /PY$

Cette équation représente la courbe de la consommation-prix de Y

Les relations de X et Y ainsi obtenus ne sont en fait que la fonction de demande de X et celle de Y.

Effets d'une variation du revenu et effets d'une variation de prix
De façon générale la variation du prix d'un bien ou la variation du revenu entraine une variation de la demande de ce bien. Toutefois il est important d'indiquer que le sens de la varaition dépend de la nature du bien. Ainsi on distingue différents types de biens :
Les biens normaux
Les biens supérieurs
Les biens inférieurs
Les biens GIFFEN

Définitions
Un bien supérieur (bien normal) est un bien dont la quantité demandée varie dans le même sens que le revenu réel. Ainsi une augmentation du revenu entraine une hausse ou une hausse plus que proportionnelle de la quantité demandé . $\frac{\delta Q_x}{\delta R} \geq 0$

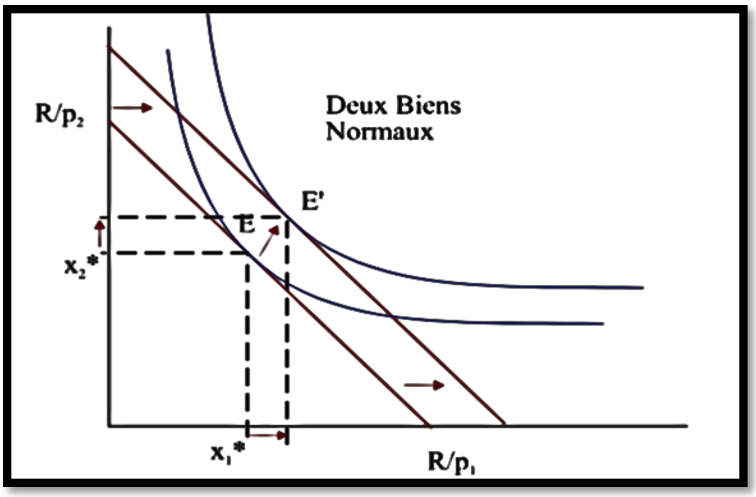


illustration d'un bien normal

Un bien inférieur est un bien dont la quantité demandée et le revenu réel varient en sens opposés Ainsi une augmentation du revenu entraine une baisse de la quantité demandé . $\frac{\delta Q_x}{\delta R} < 0$

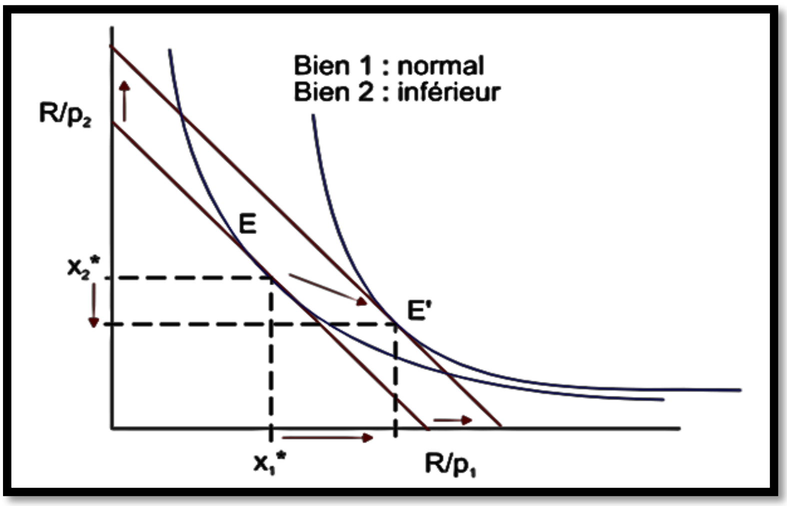


Fig illustration d'un bien inférieur

Un bien GIFFEN est un bien dont la demande varie dans le même sens que le prix $\frac{\delta Q_x}{\delta Pi} > 0$

3.2. Présentation du mécanisme l'effet de substitution et de l'effet du revenu pour un bien normal

On décompose en deux mécanismes distincts le processus au terme duquel la variation du prix d'un bien entraîne une variation de la demande de ce bien. C'est l'effet prix.
Effet prix. La modification des choix d'un agent économique à la suite de la variation du prix d'un bien. Il résulte de la variation totale de la quantité demandée lorsque le consommateur se déplace de son point d'équilibre initial E1 à un autre point d'équilibre E2 Celui-ci se décompose **en un effet substitution** et en **un effet revenu.**

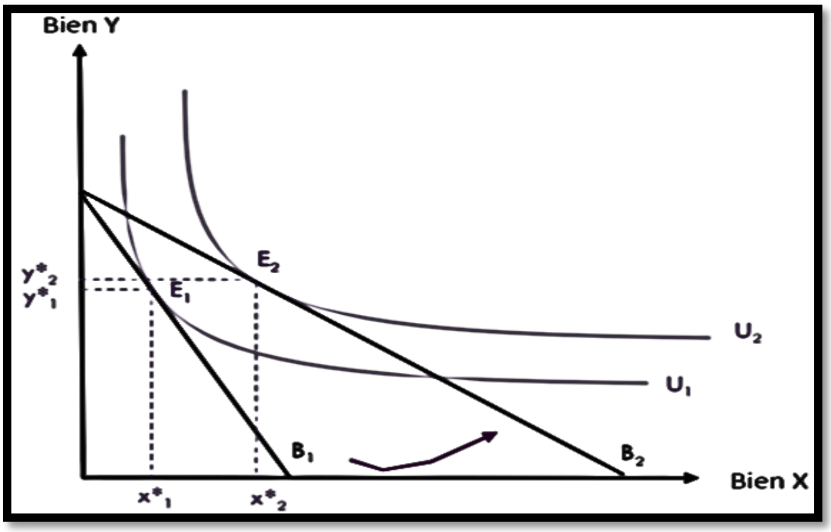


Fig illustration Effet prix ou effet total dans le cas d'un bien normal E1→E2

3.2.1. L'effet de substitution

se traduit par la baisse de la demande de certains biens lorsque leurs prix augmentent et par la hausse de la demande d'autres quand les prix baissent. L'Effet de substitution résulte d'un réaménagement des achats du consommateur suite à une modification des prix relatifs.
La baisse de Px incite le consommateur à substituer du bien X au bien Y. C'est l'effet de substitution.
L'effet de substitution mesure la variation de la consommation d'un bien quand le prix relatif de ce bien (son prix par rapport aux autres prix) change alors que le revenu demeure constant.

3.2.2. L'effet revenu

la variation (hausse ou baisse) du prix d'un bien entraine une variation (baisse ou hausse, respectivement) de pouvoir d'achat, Ainsi meme si le revenu monétaire ou nominal R n'a pas varié, le revenu réel R/P augmente si le prix d'un des biens diminue et diminue si le prix P augmente.
Donc l'effet revenu est égale à la variation de la demande résultant exclusivement de la variation du revenu réel. (tous les autres prix et le revenu monétaires restant constants)

3.3. Effets de substitution et reveu selon Hicks

Considérons une situation d'équilibre initial représentée par le point E (voir le graphe ci-dessus) avec un budget R. une baisse du prix du bien X conduit à un nouvel équilibre au point E1 avec un budget R1 qui devient supérieur à R. Pour mettre en évidence l'effet de substitution et l'effet revenu entre E et E1, la méthode de HICKS considère que le revenu réel reste constant si l'on peut obtenir le même niveau de satisfaction. Pour cela on mène une parallèle à la nouvelle ligne de budget et tangente à la courbe d'indifférence initiale ; on obtient le point E' avec un budget R', ainsi en se déplaçant de E à E', on garde le même niveau de satisfaction et HICKS estime que le budget réel R' est équivalent à R.

Par conséquent le passage de E à E' matérialise l'effet de substitution et le passage de E' à E1 l'effet de revenu.

En d'autres termes, la baisse du prix de X incite le consommateur à substituer du bien X au bien Y. Mais la baisse du prix de X pour un revenu nominal inchangé, conduit à une augmentation du pouvoir d'achat. Le consommateur pourra acheter plus de X mais aussi plus de Y. C'est l'effet revenu.

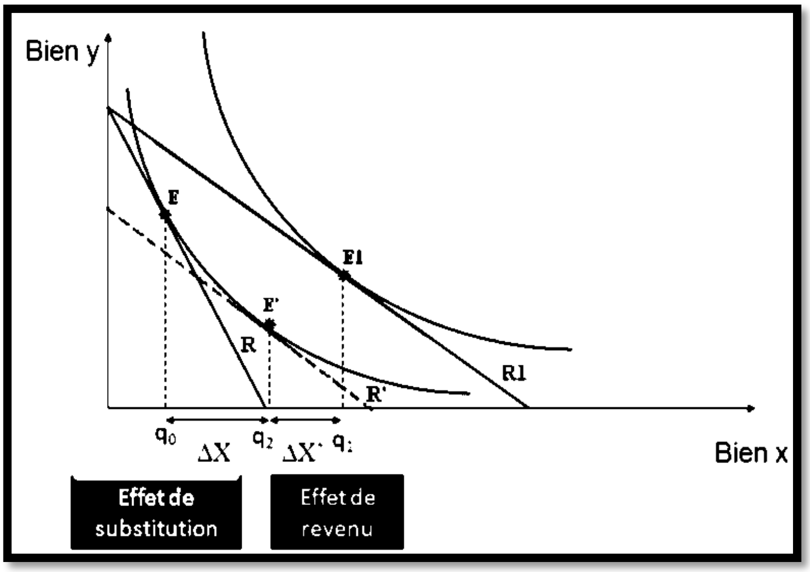


Fig Effets de substitution et reveu selon Hicks

L'effet total de la variation de prix est donné par le passage de la combinaison d'équilibre initiale E à la nouvelle combinaison d'équilibre E1

- en termes de bien X, l'effet total est donc égal à l'augmentation (X1-Xo)
- en termes de bien Y, l'effet total est égal à la diminution (Yo-Y1)

S'il n'y avait strictement eu que l'effet de la substitution à utilité constante, la nouvelle combinaison d'équilibre aurait été E, correspondant à une demande X1 de bien X, et Y1 de bien Y:

Il apparaît donc que l'effet total résulte bien d'un double mécanisme :

- l'effet de substitution, mesuré par l'écart (X2-X0)
- et l'effet de revenu, mesuré par l'écart (X1-X2)

3.4. Effets de substitution et reveu selon Slutsky

Soit Le point E d'équilibre initial, on suppose que le prix du bien X diminue Px ↘, la droite de budget R devient R1, le point d'équilibre passe à E1 avec une courbe d'indifférence plus élevée U3.

Selon SLUTSKY, l'agent économique reçoit un revenu supplémentaire ΔR représenté par la droite R' parallèle à R1, et passant par le point d'équilibre initial E. le budget R' permet au consommateur de garder le panier de consommation initial au point E mais au nouveau prix P'x . Avec, le budget R', le point d'équilibre n'est plus E mais plutôt E' obtenu par la tangence entre R' est la nouvelle courbe d'indifférence U2. C'est l'effet de substitution (E⟶ E')=(qo⟶q2)

En effet quand le prix du bien X varie, (△Px< 0), le consommateur devra dépenser (R+△R) pour acheter le meme panier de biens qu'au paravant aux nouveaux prix (P1+dPx ,Py), ces variations compensées de revenu et de prix permettent au Ceur de passer du point E au point E' (Effet de sub) et de E' à E1 effet de revenu

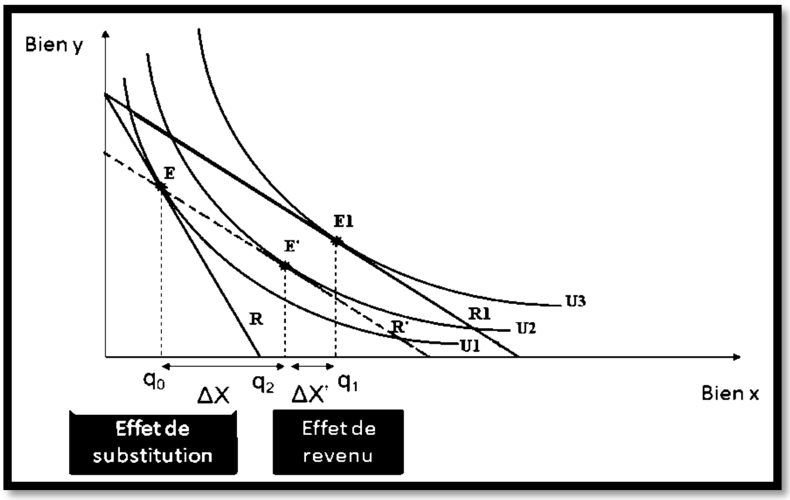


Fig : Effets de substitution et revenu selon Slutsky

(E⟶E1)=(E⟶E')+(E'⟶E1)

$$\underbrace{(q1-q0)}_{\text{Effet Total}} = \underbrace{(q2-q0)}_{\text{Effet Subst}} + \underbrace{(q1-q2)}_{\text{Effet Revenu}}$$

2. Application

Soit la fonction d'utilité suivante : U = X (Y-1) avec Px=Py=1 et R=3

- ***Calculer l'équilibre du consommateur?***
- ***Calculer le nouvelle équilibre si Py=2 ?***
- ***Décomposer le passage de la situation initiale à la situation finale en distinguant l'effet de substitution et l'effet de revenu.***

1) situation initiale

Système : $\begin{cases} U = X\,(Y-1) \\ 3 = X + Y \end{cases}$

Les conditions d'équilibre par définition

$$\begin{cases} TMS = (\partial U/\partial X) \;/\; (\partial U/\partial Y) \;=\; Px/Py \\ R = Px\,X + Py.\,Y \end{cases} \qquad \begin{cases} (Y-1)\,/\,X \;=\; 1 \\ 3 = X + Y \end{cases}$$

L'équilibre initial du consommateur se situe en $\boxed{\text{Eo(Xo=1, Y=2) et Uo=1}}$

2) <u>situation finale</u>

le nouveau système : $\begin{cases} (Y-1)\,/\,X = 1/2 \\ 3 = X + 2\,Y \end{cases} \longrightarrow \boxed{\text{E2 = (X2=1/2 , Y2=5/4) et U2}}$

3) situation intermédiaire

On considère une situation intermédiaire qui correspond aux choix qui auraient été faits par le consommateur avec le nouveau système de prix (Px=1 et Py=2) si celui-ci avait perçu une « variation compensatrice de revenu » permettant de se maintenir au même niveau de satisfaction initial.

Les 2 conditions de la situation intermédiaire sont :

$$\begin{cases} TMS = ½ \\ U=Uo \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (Y-1)/X = 1/2 \\ X(Y-1)=1 \end{cases}$$

L'équilibre intermédiaire se situe à $\boxed{E1\ (X1=2^{1/2},\ Y1=1+2^{-1/2})}$

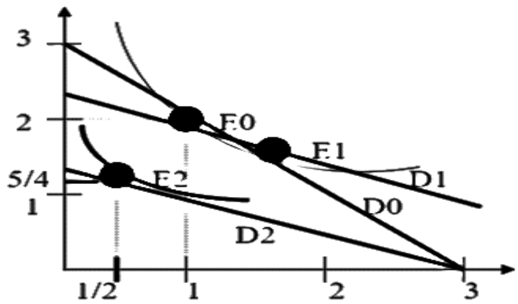
L'effet de substitution correspond au passage de la situation initiale à la situation intermédiaire et l'effet revenu au passage de la situation intermédiaire à la situation finale.

- ES : en terme de X : $\Delta X = X_1 - X_0 = 2^{1/2} - 1 > 0$
  en terme de Y : $\Delta Y = Y_1 - Yo = 2^{-1/2} - 1 < 0$
- ER en terme de X : $\Delta X = X_2 - X_1 = ½ - 2^{1/2} < 0$
  en terme de Y : $\Delta Y = Y_2 - Y_1 = ¼ - 2^{-1/2} < 0$

L'effet de substitution réduit la consommation de Y dont le prix a augmenté et augmente la consommation de X qui est devenu relativement plus avantageux. Comme les biens X et Y sont normaux, la hausse de Py réduit la consommation de ces biens par l'effet de revenu.

Pour le bien Y les effets de substitution et de revenu se cumulent et la consommation diminue. Pour le bien X, l'effet de revenu l'emporte sur l'effet de substitution et la consommation diminue : il n'y pas de substituabilité brute de X à Y.

Analyse graphique :



Les droites D0 et D2 correspondent à la contrainte budgétaire du consommateur respectivement dans la situation initiale et dans la situation finale

Les points E0 et E2 correspondent aux choix optimaux dans ces deux situations. Le point E1correspond à la situation intermédiaire : il est situé sur la courbe d'indifférence initiale (celle qui passe par E0), en un point où la pente est égale au nouveau rapport des prix Px/Py = ½ càd à la pente de la droite D1.

Pour garder le même niveau de satisfaction, le consommateur devrait bénéficier d'une variation compensatrice du revenu.

On reste sur la courbe d'indifférence initiale et en même temps on tient compte de la variation des rapport des prix :

$$Px\ .X1 + P'y\ Y1 = (1).2^{1/2} + 2\,(1+2^{-1/2}) = 2\,(1+2^{-1/2})$$

La variation compensatrice du revenu est : $\Delta R = 2\,(1+2^{-1/2}) - 3 \approx 1,83$

Le paradoxe de Giffen.

Dans le cas général, la hausse d'un prix du bien x provoque un effet revenu et un effet de substitution qui se renforcent l'un l'autre et entraînent une baisse de la consommation de x (il y a à la fois baisse du pouvoir d'achat et recherche de substituts).

Cependant, dans certains cas la hausse du prix d'un bien x engendre un effet de substitution qui devrait inciter à réduire la consommation de x mais la baisse du pouvoir d'achat qui en découle conduit au contraire à augmenter la consommation de x faute de ne pouvoir trouver d'autres biens semblables à un meilleur prix. L'effet revenu joue ici en sens inverse de l'effet de substitution.
Cette relation est notamment observée dans le cas des biens inférieurs de première nécessité occupant une part importante du budget d'une population à faible revenu.

Paradoxe de GIFFEN : Hausse prix de x => hausse de la demande de x.

CHAPITRE III. LA THEORIE DE LA DEMANDE ET ELASTICITE

Introduction

La demande d'un bien quelconque dépend de l'influence de plusieurs variables par lesquelles le revenu et les prix unitaires du bien et des autres biens constituent les variables privilégiées.

La fonction de demande d'un bien formalise la relation entre la quantité de ce bien demandée par le consommateur rationnel et les variables déterminantes.

La fonction de demande d'un bien explique la quantité du bien recherchée par le consommateur par un ensemble de variables. Il s'agit de la fonction de demande individuelle relative à un consommateur. La demande individuelle doit être distinguée de la demande de l'ensemble des consommateurs ou de la demande adressée à une entreprise.

La demande que formule un individu pour un bien dépend de nombreux éléments tels que le revenu dont dispose le consommateur, le prix unitaire de bien, les prix unitaires des autres biens et les caractéristiques de l'environnement économique et social.

Pour déterminer la fonction de demande, on suppose que le consommateur est rationnel en cherchant le maximum de satisfaction résultant de ses choix, la quantité obtenue de cette fonction est donc optimale.

L'analyse de la fonction de la demande fait appel à un certain nombre d'hypothèses qui sont :

- Le consommateur est rationnel ;
- Les biens sont parfaitement divisibles et homogènes ;
- Le consommateur est parfaitement informé sur les biens disponibles sur le marché et sur les prix ;

I. La fonction de demande

On définit la demande ou la fonction de demande comme étant une relation fonctionnelle entre des prix et des quantités toutes choses étant égales par ailleurs.

$Xd = fx (Px , Py , \bar{R})$

1.1. La demande individuelle

Considérons une économie composée de n consommateurs, notés i = 1, … ,n

Donc La demande x de bien 1 par un consommateur i est :$X_1^i = (P_{1,}P_2, R^i)$

On suppose les consommateurs identiques , la demande totale pour le bien 1 est :

$$\boldsymbol{X_1(P_{1,}P_2, R^1, \dots, R^2) = \sum_{i=1}^{n} x_1^i(P_{1,}P_2, R^i)}$$

Chaque fonction est propre à chaque individu car elle dépend de ses goûts

La fonction de demande exprime la relation entre variation des prix et des revenus d'une part, et variation de la demande d'autre part, lorsque le consommateur se maintient à l'équilibre.

Sous sa forme la plus générale, la fonction de demande f s'écrit

Xi = f (p1, p2, …, pn, R, C)

- Xi représente la demande du bien i à l'équilibre
- les p1 à pn représentent les prix des n biens de l'ensemble des biens, dont pi, le prix du bien i
- R, le budget de consommation.
- C peut désigner les autres paramètres non économiques qui influencent la consommation

Ainsi formulée, f prend le nom de fonction de demande généralisée du bien i, ou encore de Fonction de demande rationnelle

1.2.Propriété : la fonction de demande

La fonction de demande est une fonction homogène de degré zéro

Lorsque, à partir de la situation d'équilibre, tous les prix et le budget varient du même pourcentage. la quantité de bien i demandée par le consommateur ne varie pas et reste égale à xi

En effet. à l'équilibre initial.

Σpixi = R.

À supposer une variation de pourcentage t, la nouvelle situation d'équilibre est telle que

$$\sum_{i=1}^{n} (1+t)\, p_i x'_i = (1+t)R \Longrightarrow (1+t) \sum_{i=1}^{n} p_i x'_i = (1+t)R \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i x'_i = R$$

Par conséquent. en comparant l'équilibre initial et l'équilibre final, on voit que : xi = x'.

On conclut que la fonction de demande d'un bien par rapport au prix et au budget est une fonction homogène de degré O. En d'autres termes, la fonction de demande est telle. que lorsque les prix et les revenus varient dans la même proportion, les quantités demandées n'en sont pas affectées..

Autrement si R, Px et Py sont multipliés par le même coefficient, la droite de budget reste inchangée et par conséquent le point d'équilibre reste le même

II. Les déterminants de la demande

D'après l'analyse sur l'équilibre du consommateur, il apparaît que la quantité demandée de chaque bien dépend en général en plus des préférences des individus :
du budget de l'individu -du prix du bien X -des prix des autres biens Yi -les préférences et les gouts -les facteurs sociologiques

2.1.Le prix du bien/service lui-même (Px)

Le prix est l'expression monétaire de la valeur d'échange d'une unité d'un bien ou service. C'est la quantité de monnaie que l'on doit donner en échange d'une unité d'un bien ou d'un service. Il traduit l'équilibre qui existe entre la quantité demandée et offerte d'un bien sur le marché. La demande d'un bien est une fonction décroissante du prix.
Une augmentation du prix du bien, entraine généralement une diminution de la quantité demandée du bien/service considéré. A l'inverse, une baisse du prix provoque un accroissement de la quantité demandée.

2.2.Le revenu de l'individu

Le revenu d'un agent économique est l'ensemble des droits sur les ressources disponibles qui lui sont attribuées au cours d'une période donnée sans prélèvement sur son patrimoine
La réaction de l'individu à une variation de son revenu dépend de la nature de bien/service considéré. Généralement, pour la plupart des biens, une augmentation du revenu provoque un accroissement de la quantité demandée. Alors, pour chaque niveau de prix, la quantité demandée sera accrue. Dans ce cas, on parle alors de bien normal.
Dans certain cas particuliers, une hausse de revenu peut susciter une diminution de la quantité demandée. On parle, dans ce cas, de bien inférieur.

2.3.Le prix des autres biens

Cet effet dépendra du caractère complémentaire ou substituable du bien dont le prix varie.
 Les biens substituables : se sont des biens qui permettent de satisfaire le même besoin sans être pour autant parfaitement homogènes. Dans ce cas, si le prix d'un bien « Y » substituable augmente, la quantité demandé du bien « X » augmente.
 Les biens complémentaires : il s'agit de bien qu'il faut
consommer ensemble pour satisfaire un besoin déterminé. Dans ce cas, si le prix d'un bien «X»

complémentaire à « Y » augmente, la quantité demandée du bien « Y » diminue. Par exemple : café et sucre.

2.4.Goût et préférences individuelles

Un changement des goûts en faveur d'un bien signifiera qu'à chaque niveau de prix, la demande de ce bien sera plus importante qu'auparavant.

Les préférences individuelles peuvent être influencées par la mode, la publicité ou des informations transmises par les médiats notamment.

2.3. La loi de la demande

La loi de la demande énonce que la quantité demandée d'un bien est une fonction inverse (ou décroissante) du prix de ce bien. Ainsi :

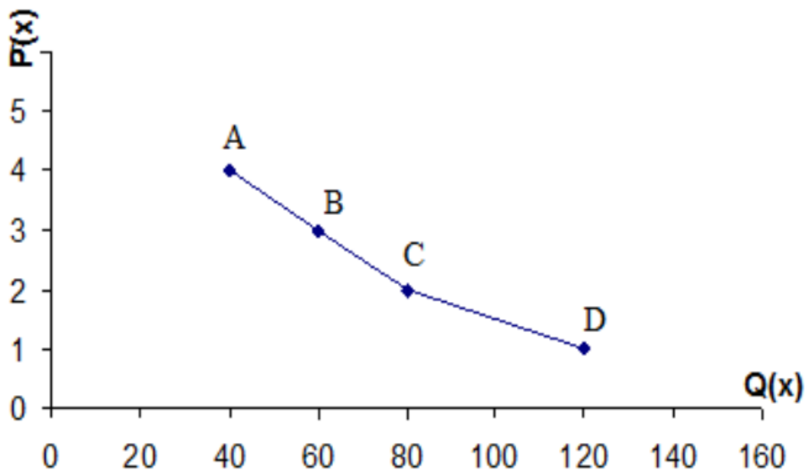
Q (x) = f (Px) avec f' (P) < 0

Exemple :

Quantités demandées du bien X (Qx)	Prix unitaire du bien X (P(x))	Points sur la Courbe
40	4	A
60	3	B
80	2	C
120	1	D

Représentation graphique :

Si Q(x) = f (Px), on a cependant pris l'habitude depuis A.MARSHAL de représenter graphiquement la fonction en portant les quantités en abscisses et les prix en ordonnées.



Il existe des situations où cette loi ne fonctionne pas:

 L'effet Veblen: pour les biens supérieurs ou de luxe (si le prix diminue, la quantité diminue).

 L'effet Giffen: pour les biens inférieurs que l'on consomme par économie et que l'on délaisse lorsque le revenu augmente.

 Les réactions spéculatives: lorsque les prix augmentent, les consommateurs peuvent anticiper une poursuite de la hausse et accroître de ce fait leur demande.

III. La notion d'élasticité

La notion d'élasticité traduit la sensibilité d'une variable suite à la variation d'une autre grandeur.

3.1. L'élasticité prix de la demande

La notion d'élasticité de la demande par rapport au prix a été élaborée par les économistes pour décrire et mesurer l'influence du prix de vente d'un produit sur le volume de ses ventes.

L'intérêt de l'utilisation de cette méthode en marketing est de savoir jusqu'à quel niveau on peut augmenter le prix d'un bien sans que la baisse de la demande ne soit trop préjudiciable pour l'entreprise

Ainsi l'élasticité prix de la demande d'un bien est le rapport entre la variation relative de la demande d'un bien et la variation relative du prix de ce bien.

Ce rapport est généralement négatif car lorsque le prix et la demande varient en sens inverse ie quand le prix augmente, la quantité demandée diminue et réciproquement. (Q= Quantité, P =Prix)

$$e_{Q/P} = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} = \frac{\Delta Q}{Q} \times \frac{P}{\Delta P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{P}{Q}\,.\,;$$

Avec: $\Delta Q = Q_t - Q_{t-1}$; $\Delta P = P_t - P_{t-1}$; $Q = Q_{t-1}$; $P = P_{t-1}$

Ou $e_{Q/P} = \frac{dQ}{dP} \times \frac{P}{Q}$

Les principaux cas d'élasticité prix

$|\, e_{Q/P} \,| > 1$ demande Elastique

$|\, e_{Q/P} \,| = \infty$ demande Parfaitement élastique

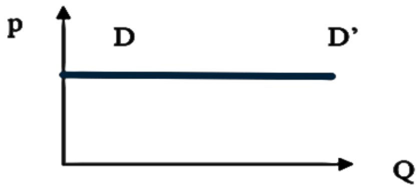
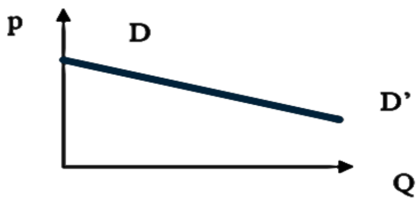
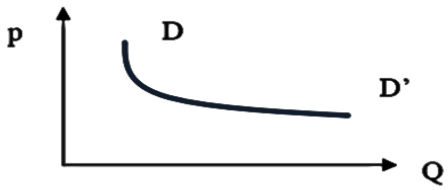
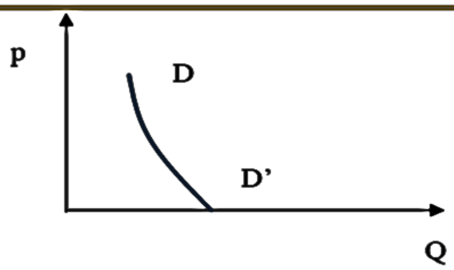
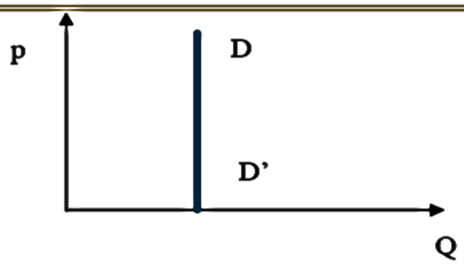
$|\, e_{Q/P} \,| = 1$ demande à élasticité Unitaire

$| e_{Q/P} | < 1$ demande Inélastique

$| e_{Q/P} | = 0$ demande Parfaitement inélastique

Lorsque $| e_{Q/P} | > 0$, une augmentation de prix conduit à une augmentation de la demande

On distingue généralement cinq principaux types d'élasticité de la demande par rapport au prix.

<table>
<tr><td>
</td><td>Une demande est parfaitement élastique lorsqu'une variation infinitésimale du prix provoque une variation infiniment grande de la quantité demandée.
Dans ce cas l'élasticité est infinie : $e_{D/p} = -\infty$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Une demande est élastique lorsqu'à une variation donnée du prix correspond une variation finie mais plus que proportionnelle de la quantité demandée.
$-\infty < e_{D/p} < -1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Une demande est d'élasticité unitaire lorsqu'une modification du prix entraîne une modification proportionnelle de la quantité demandée (la valeur absolue de $e_{D/p} = 1$).</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Une demande est inélastique lorsqu'à la variation du prix correspond une modification moins que proportionnelle de la quantité demandée.
$-1 < e_{D/p} < 0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Une élasticité est parfaitement inélastique lorsqu'un changement du prix ne provoque aucune modification de la quantité demandée ; la demande est totalement insensible aux variations du prix.
$e_{D/p} = 0$</td></tr>
</table>

3.2. L'Elasticité prix croisés

Elle se définit comme le rapport entre le pourcentage de variation de la quantité demandée de bien A et le pourcentage de variation du prix d'un bien B. En d'autres termes, elle est donnée par:

$$e_{Q_a/P_b} = \frac{\Delta Q_a/Q_a}{\Delta P_b/P_b} = \frac{\Delta Q_a}{Q_a} \times \frac{P_b}{\Delta P_b} = \frac{\Delta Q_a}{\Delta P_b} \times \frac{P_b}{Q_a}$$

Le signe de l'élasticité croisée peut être positif ou négatif selon que les quantités et les prix varient dans le même sens ou dans les sens opposés.

- L'élasticité est positive lorsque le prix d'un bien Y ayant augmenté, la quantité demandée du bien X augmente. C'est le cas des biens substituables (café-thé, beurre margarine ; etc.)
- L'élasticité est négative lorsque le prix de Y ayant augmenté par exemple, la quantité demandée de X baisse. C'est le cas des biens complémentaires (thé-sucre, voiture essence ; etc.)

3.3. L'élasticité d'arc

L'élasticité d'arc mesure le coefficient pour une portion de la courbe de demande. Soit à déterminer l'élasticité d'arc entre les points A et B de l'exemple précédent.

$e_{Q/P} = \frac{dQ}{dP} \times \frac{P}{Q}$ Avec P et Q la moyenne des prix et des quantités

Elasticité revenu de la demande

L'élasticité de la demande par rapport au revenu définie le rapport de la variation relative de la demande d'un bien a la variation relative du revenu.
Comme tous les biens n'ont pas la même élasticité-revenu, l'augmentation du revenu change la structure de la consommation.

$$e_{Q/R} = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta R/R} = \frac{\Delta Q}{Q} \times \frac{R}{\Delta R} = \frac{\Delta Q}{\Delta R} \times \frac{R}{Q}$$

En fonction de la valeur de on peut distinguer trois catégories de biens
Si $e_{Q/R}$<0, le bien est dit inférieur ou de première nécessité la demande d'un consommateur en ce bien diminue quand son revenu augmente.
Si 0< $e_{Q/R}$<1, le bien est qualifie de bien normal. la demande en ce bien augmente dans une proportion positive mais inférieure à 1

Si . Si . >1, un bien de luxe ; la demande d'un consommateur en ce bien augmente de façon plus rapide que son revenu. >1, un bien de luxe ; la demande d'un consommateur en ce bien augmente de façon plus rapide que son revenu.

La portée pratique de l'élasticité de la demande : les recettes de l'entreprise
On doit souligner qu'en principe les services commerciaux des entreprises sont attentifs au comportement de la demande, face aux variations de prix (donc à l'élasticité de la demande).

L'élasticité de la demande influence évidemment les recettes de l'entreprise.

3.4. - La demande et les recettes
la recette totale se définit comme le produit des quantités vendues par le prix de ces quantités : R.T = P.Q
Si l'on considère que la firme s'intéresse à la quantité qu'elle pourra vendre à chaque prix possible sur le marché, on peut écrire R.T = f (Q)
La fonction de demande étant de type Q= f (p), on peut la mettre sous la forme
P = f (Q), et en déduire la fonction de R.T.

Exemple :

Soit la fonction de demande : Q = -4P+12

$\Longrightarrow$ **P = (-Q/4) + 3**

La R.T = P.Q = ((-Q/4) + 3) Q = (-Q²/4) + (3Q)

la recette moyenne
La recette moyenne ou unitaire correspond à la recette par unité vendue. Elle est égale à : RM=$\frac{RT}{Q} = \frac{PQ}{Q}$= P
Elle correspond à l'équation de demande qui, dans notre cas, est P = (-Q/4) +3 = R.M
la recette marginale
Elle est définie comme le supplément de recette dû à l'accroissement des unités vendues. Mathématiquement, elle correspond à la dérivée première de la recette totale, par rapport aux quantités.
Dans notre exemple : R.m = (R.T)' = (-Q/2) +3

La relation recette-élasticité de la demande
RT=P(Q).Q
Rm=P+QdP/dQ
$$= P(1+\frac{Q}{P}\frac{dP}{dQ})$$
$$= P(1+ \frac{1}{e})$$
$\frac{Q}{P}\frac{dP}{dQ}$ ***correspond à l'inverse de l'élasticité***
Il existe un lien entre l'évolution des recettes et l'évolution de l'élasticité-prix le long de la courbe de demande.
Lorsque l'élasticité-prix de la demande est supérieure à 1, la recette totale est croissante ; la Rm décroît mais reste positive.

 Lorsque l'élasticité est égale à 1, la R.T est maximum, et la R.m est nulle.
 Lorsque l'élasticité est comprise entre 0 et 1, la R.T est décroissante et la R.m est négative.

Application 1

Un consommateur achéte 2 biens X et Y. Son revenu disponible (Rd) varie de mois en mois. On a pu observer en 6 occasions les quantités consommées de X alors que Px, Py, Rd changeaient.

	Quantité de X	Prix de X	Prix de Y	Revenu disponible
Observation 1	20	10	15	320
Observation 2	20	11	16	320
Observation 3	20	16	16	330
Observation 4	22	10	16	320
Observation 5	16	13	17	330
Observation 6	22	16	16	340

Questions :
 Définir et calculer l'élasticité-prix et l'élasticité revenu du bien X
 Définir et donner l'élasticité-croisé de X par rapport à Y ?

Réponses :

L'élasticité-prix mesure la sensibilité des variations de quantités demandées par rapport au prix, toutes choses égales par ailleurs. L'élasticité-prix de Y mesure la sensibilité des variations de X aux variations de prix de Y.
Enfin l'élasticité revenu mesure la sensibilité des variations de X aux variations du revenu, toutes choses égales par ailleurs

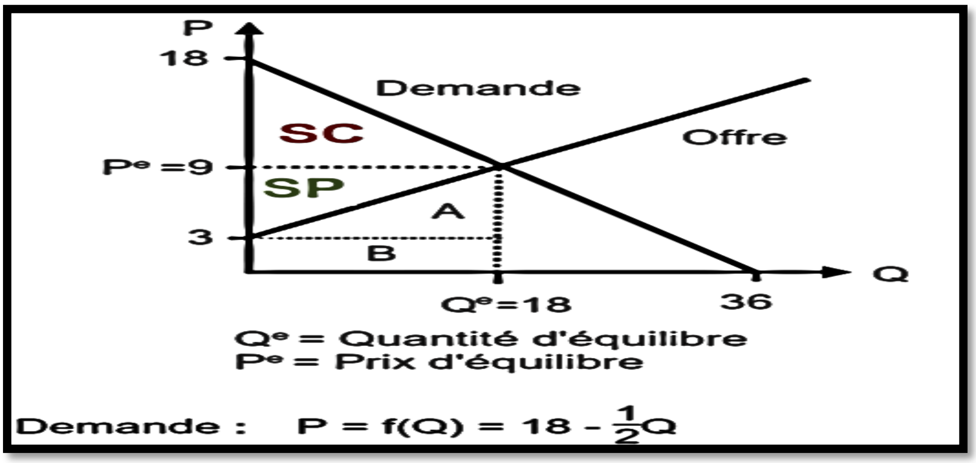
Ainsi pour calculer les 3 élasticités, il faudra choisir avec soin les couples d'observations de telle façon que la variation de la quantité de X soit expliquée par la variation d'une seule des 3 variables.
Ainsi pour calculer l'élasticité-prix, on utilisera les observations 2 et 4. Pour calculer l'élasticitérevenu, on utilisera les observations 3 et 6. Enfin dans le cas de l'élasticité croisée, les observations 1 et 4 seront retenues.
Les valeurs des élasticités sont obtenues ici en utilisant la formule de l'élasticité sur un arc.
ep = (ΔX/ΔP) (P2+P4)/(X2+X4) = (2/-1) (21/42) = - 1
eR = (ΔX/ΔR) (R3+R6)/X3+X6 = (2/100) 6700/42 = 3,19
ec = (ΔX/ΔPy) (P1y+P4y)/X1+X4 = (2/1) (31/42) = 1,48 >0
On constate que l'élasticité croisée est positive.
Quand Py augmente, La quantité de X augmente. Ceci implique que X et Y sont substituables.

IV. Le surplus du consommateur

Le surplus du consommateur est une extension de la théorie de la demande, car il montre que les consommateurs peuvent bénéficier d'un gain d'utilité s'ils sont disposés à payer plus cher que le prix du marché.

4.1.Définition
Le surplus du consommateur est la différence entre ce qu'on est disposé à payer (le consentement à payer) et ce qu'on paie effectivement (dépense effective pour acquérir le bien) pour une quantité donnée d'un bien.
Surplus = consentement à payer – dépense effective

4.2. Les déterminants du consentement à payer
- les bénéfices retirés de l'acquisition et de la consommation du bien
- le revenu du consommateur
- La disponibilité d'autres biens et services



Exemple

$$\textbf{SC} = \frac{(18 - 9) * 18}{2} = \textbf{81}$$

Exercice n° 1
Soit la fonction d'utilité: U = (XY) / (X+2Y) où X et Y désignent les quantités consommées de X et Y Etudier les propriétés de la courbe d'indifférence correspondant à un niveau d'utilité C> 0 (C est une constante) puis faite la représentation graphique.
Exercice n°2
Un consommateur a pour fonction d'utilité : U = $2X^2Y$
où X et Y représentent les quantités de biens X et Y consommées.
1) Supposons que R=150, Px=10 et Py= 20
a) Déterminez les expressions de la Courbe consommation-revenu. Interpréter
b) Déterminez l'expression de la courbe d'Engel pour X et pour Y
c) Calculez l'élasticité revenu de la demande du bien X. Interpréter

2) On suppose que Px varie, P'x = 5, Py et R restant constants
a) Suite à ce changement, mettez en évidence l'effet de substitution et l'effet de revenu pour les biens X et Y, en utilisant la méthode de Hicks
b) Déterminez l'expression de la courbe Consommation-prix, puis exprimer l'équation de la fonction de demande du bien X en fonction du prix ;
c) Donnez l'élasticité–prix et l'élasticité-prix croisée de la demande du bien X. Interprétez.

a) R = 150, Px=10, Py=20

❖ à l'équilibre on a :

$TMS = (\partial U/\partial X) / (\partial U/\partial Y) = Px / Py \Longrightarrow 4XY / 2X^2 = 2Y/X = =1/2 \Longrightarrow$ CCR : $\boxed{Y=X/4}$

CCR = c'est l'ensemble des points représentatifs des combinaisons optimales de X et Y lorsque, les prix des biens restent constants, le budget du consommateur varie.

La particularité de cette CCR : c'est une droite passant par l'origine et de pente ¼

❖ Courbe d'Engel : C'est la courbe de demande individuelle d'un bien en fonction du revenu

Les conditions d'équilibre :

- $TMS = (\partial U/\partial X) / (\partial U/\partial Y) = Px / Py \Longrightarrow 2Y/X = =Px/Py \Longrightarrow \boxed{Y = (Px/2Py)\ X}$
- $R = Px.X + Py.Y \quad 2R = 3Px.X \Longrightarrow \boxed{X^d = 2R / 3Px}$ c'est la fonction de demande de X

La courbe d'Engel est la fonction de demande du bien X en fonction du revenu (les prix sont constants), Px = 10 $\boxed{X^d = 1/15 . R}$

Equation de la demande du bien Y en fonction de R (courbe d'Engel)

$Y = (Px/2Py).X \Longrightarrow \boxed{Y^d = R/3Py}$ c'est la fonction de demande de Y

Courbe d'Engel : est la fonction de demande quand les prix sont constants $Yd=R/\overline{3P}y$

Si Py = 20 $\boxed{Y^d = 1/60. R}$

Particularité : les fonctions de demande individuelles ne dépendent que du revenu et du prix du bien considéré et sont fonctions décroissantes du prix du bien considéré.

❖ $e_{X/R} = dX/dR . R/X = 2/3Px . R/(2R/3Px) = 1$

Si le revenu augmente de 1% la quantité consommée du bien X augmente de 1%

$e_{X/R} > 0 \Longrightarrow$ le bien X est un bien normal

b) * ES et ER pour $U = 2X^2Y$ quand P'x=5

Situation initiale :

A l'équilibre : $\begin{cases} * \quad TMS = \partial U/\partial Y = Px/Py \Longrightarrow \boxed{Y = X/4} \\ * \quad R = Px.X + Py.Y \Longrightarrow 150 = 10X+20\,(X/4) \quad \boxed{X_0=10\ ;\ Y_0=2{,}5\ ;\ U_0=500} \end{cases}$

Situation finale P'x = 5:

A l'équilibre : $\begin{cases} * \quad TMS = \partial U/\partial Y = P'x/Py \Longrightarrow \boxed{Y = X/8} \\ * \quad R = P'x.X + Py.Y \Longrightarrow 150 = 5X+20\,(X/8) \quad \boxed{X_2=20\ ;\ Y_2=2{,}5\ ;\ U_2=2000} \end{cases}$

Situation intermédiaire :

A l'équilibre : $\begin{cases} * \quad TMS = \partial U/\partial Y = P'x/Py \Longrightarrow \boxed{Y = X/8} \\ * \quad 2X^2\,Y = U_0 \Longrightarrow 500 = U = 2X^2\,(X/8) \quad \boxed{X_1=12{,}6\ ;\ Y_1=1{,}57\ ;\ U_0=500} \end{cases}$

ES : En terme de X : $\Delta X = X_1\text{-}X_0 = 12{,}6 - 10 = +\,2{,}6$
En terme de Y : $\Delta Y = Y_1 - Y_0 = 1{,}57 - 2{,}5 = -\,0{,}93$

ER : En terme de X : $\Delta X = X_2\text{-}X_1 = 20 - 12{,}6 = +\,7{,}4$
En terme de Y : $\Delta Y = Y_2 - Y_1 = 2{,}5 - 1{,}57 = +\,0{,}93$

ET : En terme de X : $\Delta X = X_2\text{-}X_0 = 20 - 10 = +\,10$ ou $ES + ER = +2{,}6 + 7{,}4 = 10$
En terme de Y : $\Delta Y = Y_2 - Y_0 = 2{,}5 - 2{,}5 = 0$ ou $ES + ER = -0{,}93 + 0{,}93 = 0$

❖ La courbe consommation-prix (CCP) est le lieu géométrique des points lorsque le prix d'un bien varie, le prix de l'autre bien ainsi que le revenu restent constants.

A l'équilibre :

$\begin{cases} * \ TMS = Px/Py \Longrightarrow Y = Px/2Py.X\ ;\ Py \text{ une constante } =20\ ;\ Px \text{ varie} \Longrightarrow \boxed{Y = (Px/40).X} \\ * \ R = Px.X + Py.Y \Longrightarrow 150 = Px.X + 20\,Y = Px.X + 20\,((Px/40).X) \Longrightarrow \boxed{Y = 5/2} \end{cases}$

La CCP est une droite horizontale (la quantité optimale de Y ne dépend pas de PX)

Equation de la demande du bien X $\Longrightarrow$ $\boxed{X^d = 2R/3Px}$

Courbe de demande du bien X en fonction de son prix est une fonction décroissante.

❖ $e_{X/Px} = dX/dP_x \,.\, P_x/X = -\,100/P^2x \,.\, Px/(100/Px) = -\,1$

La quantité demandée en bien X varie proportionnellement à celle du prix de ce bien

$e_{X/Py} = dX/dP_y \,.\, P_y/X = 0$;La quantité demandée en bien X ne dépend pas du prix du bien Y

CHAPITRE IV : ANALYSE DE L'EQUILIBRE DE L'OFFRE ET DE LA DEMANDE SUR UN MARCHE

Introduction

En microéconomie, l'offre et la demande est un modèle économique de détermination des prix dans un marché. Ce modèle postule que, toutes choses étant égales par ailleurs, dans un marché concurrentiel, le prix unitaire d'un bien ou d'un autre élément négocié comme de la main-d'œuvre ou des actifs financiers, varie jusqu'au moment où la quantité demandée (au prix courant) sera égale à la quantité fournie (au prix courant), résultant à un équilibre économique entre prix et quantité négociée.

Si la théorie de l'offre et de la demande recouvre pour Roger Guesnerie une intuition ancienne, sa formalisation débute en 1838 lorsqu'Augustin Cournot introduit la courbe de la demande. Plus tard, Alfred Marshall introduit une courbe de l'offre représentant l'offre en fonction des prix. Dans le cadre de la théorie de l'équilibre partiel entre l'offre et la demande, à l'intersection de ces deux courbes se trouvent le prix et la demande d'équilibre. L'intérêt du modèle de l'offre et de la demande est qu'il permet, hors du formalisme complexe de l'équilibre général, d'appréhender de façon intuitive les mécanismes à l'œuvre dans la décision d'allocation des ressources en économie de marché.

La courbe d'offre

Pour un bien normal donné si il existe une relation inverse entre le prix et la demande Cad quand P ↗, Q (P)↘ et vis versa, dans le cas de l'offre, le prix et cette derniere varie dans le meme sens cad O(P) ↗ si P↗ et inversement. Les fonction de demande et d'offre sont $\boxed{Q_O = \sum_{j=1}^{n} p_{oj} = f(p)}$ données par :

$$Q_D = \sum_{i=1}^{n} p_{di} = f(p)$$

Prix et quantités d'équilibre sur un marché

L'équilibre de marché que nous cherchons est noté : **E(p*,q*), avec p* et q* (> 0)** avec p et q, respectivement le prix et la quantité qui satisfont offreurs et demandeurs.

La méthode : L'égalité entre l'offre et la demande

Le prix d'équilibre du marché est la solution mathématique en p, de l'équation Qd ≡ Qo. On écrit soit : à l'équilibre Qd = Qo ou pour signifier réalisée l'égalité à l'équilibre.

L'équilibre partiel est un équilibre entre des quantités globales, au sens où l'on raisonne à partir de fonctions AGREGEES d'offre et de demande, et non plus sur les fonctions individuelles (consommateur i, producteur j).Ces fonctions sont obtenues par addition de fonctions individuelles. A l'équilibre Qo=Qd⟹ il en résulte le prix P* et la quantité Q* qui sont les conditions du marché

Cette solution existe puisque par définition : $dQd/dp < 0$ et $dQo/dp > 0$. Le prix d'équilibre (p*) est donc le point d'intersection des courbes d'offre et de demande . En remplaçant sa valeur dans la fonction d'offre ou dans celle de demande, on obtient les quantités d'équilibre correspondantes (q*), soit : graphiquement

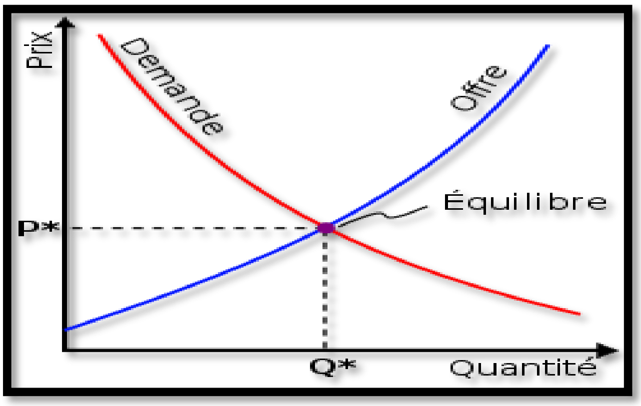


Fig équilibre sur le marché

Exemple : Soit les fonctions de demande et d'offre, linéaire :

$Qd = -2p + 10$, définie positive pour $p \leq 5$,

$Qo = 3p - 2$, positive pour $p \geq 2/3$

On détermine d'abord les fonctions inverses :

Prix d'offre : $Po = 1/3Q + 2/3$

Prix de demande : $Pd = -1/2Q + 5$

On représente le graphique de l'équilibre pour obtenir, dans le plan (p,0,p) une solution géométrique (non suffisante) .

On utilise alors les 4 fonctions, puisque les deux premières donnent

- l'abscisse à l'origine de Qd = 10 pour p=0

- l'ordonnée à l'origine : Po = 2/3 pour q=0, et Pd = 5 pour q=0.

Equilibre de l'offre et de la demande pour :

$Q_d = -2p + 10$

$Q_o = 3p - 2$