Alexander Gewirtz

Mathématiques Supérieures

Cours – tome 2

edp sciences

Dans la même collection

Éléments d'analyse réelle, 2e édition
Jean-Étienne Rombaldi
2019, ISBN : 978-2-7598-2339-0

Thèmes pour l'agrégation de mathématiques, 2e édition
Jean-Étienne Rombaldi
2019, ISBN : 978-2-7598-2340-6

Analyse matricielle – Cours et exercices résolus, 2e édition
Jean-Étienne Rombaldi
2019, ISBN : 978-2-7598-2341-3

Mathématiques Supérieures – Cours, tome 1
Alexander Gewirtz
2023, ISBN : 978-2-7598-2787-9

Imprimé en France

ISBN (papier) : 978-2-7598-2789-3 - ISBN (ebook) : 978-2-7598-2790-9

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© EDP Sciences, 2023

Préface et remerciements

Cet ouvrage est inspiré des cours de mathématiques proposés aux élèves-ingénieurs de l'Institut franco-chinois de l'énergie nucléaire (IFCEN), situé sur le campus de l'université Sun Yat-sen à Zhuhai, dans la province du Guangdong en Chine du Sud.

Les contenus mathématiques qui sont abordés à l'IFCEN correspondent quasiment au programme des classes préparatoires en France. Le programme de mathématiques de l'IFCEN a été conçu sous la direction de MM. Jacques Moisan et Charles Torossian, inspecteurs généraux de l'Éducation nationale, et adapté aux besoins des élèves-ingénieurs de l'IFCEN. Il est donc possible que quelques chapitres de ce livre ne soient pas étudiés en CPGE en France. Inversement, certains chapitres traditionnellement étudiés en France n'y sont pas abordés ou le sont de façon moins approfondie.

Dans le souci de rendre plus actif le lecteur pendant son apprentissage, de nombreuses questions et exercices d'applications sont posés dans le corps du texte, permettant de vérifier la maîtrise des formules et des concepts nouvellement acquis. Par ailleurs, les démonstrations, très complètes et détaillées, permettent au lecteur de bien suivre et de mieux comprendre à la fois la démonstration et ses idées. De plus, celui-ci peut faire le point sur son apprentissage grâce à de nombreux bilans méthodologiques. Une large sélection d'exercices (de difficulté variable) est proposée à la fin de chaque chapitre, permettant ainsi de pratiquer ce qui a été appris et proposant parfois une ouverture sur des sujets plus avancés. Enfin, certaines démonstrations de théorèmes admis et certains compléments figurent en annexe de certains chapitres pour les lecteurs qui souhaiteraient approfondir leurs connaissances mathématiques.

Les livres de cette collection sont en constante évolution, grâce aux remarques et aux suggestions des élèves et des professeurs de l'institut. J'ai plaisir à mentionner mes collègues les docteurs Alexis Gryson et Cheng Sirui, pour la relecture minutieuse des manuscrits. La collection n'aurait pas pu voir le jour sans les encouragements et le soutien constant des deux directeurs de l'institut : professeur Wang Biao et M. Jean-Marie Bourgeois-Demersay. Qu'ils en soient tous ici remerciés !

Un grand merci à mon épouse et mes enfants pour leur soutien constant !

Enfin, je remercie à titre personnel François Boisson sans lequel je ne serais jamais devenu professeur de mathématiques.

Alexander Gewirtz

Table des matières

Chapitre 1 Dérivation et développements limités **8**
1.1 Nombre dérivé en un point . . . 9
1.1.1 Définition . . . 9
1.1.2 Interprétations graphique et cinématique . . . 11
1.1.3 Développement limité d'ordre 1 . . . 12
1.2 Fonction dérivée . . . 13
1.2.1 Définition . . . 13
1.2.2 Opérations sur les fonctions dérivables . . . 14
1.2.3 Dérivée d'une bijection réciproque . . . 21
1.2.4 Dérivées successives et formule de Leibniz . . . 22
1.3 Étude globale des fonctions dérivables à valeurs réelles . . . 28
1.3.1 Caractérisation des extrema locaux . . . 28
1.3.2 Théorème de Rolle . . . 29
1.3.3 Égalité et inégalité des accroissements finis . . . 35
1.3.4 Application aux variations d'une fonction . . . 39
1.3.5 Applications aux suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 42
1.3.6 Théorème de prolongement . . . 43
1.4 Définition et propriétés des développements limités . . . 47
1.5 Opérations sur les développements limités . . . 50
1.5.1 Somme et produit . . . 50
1.5.2 Inverse . . . 51
1.5.3 Intégration et dérivation d'un DL . . . 53
1.6 Formules de Taylor . . . 55
1.6.1 Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange . . . 55
1.6.2 Formule de Taylor-Young . . . 57
1.6.3 Formule (ou égalité) de Taylor-Lagrange . . . 58
1.6.4 Application aux fonctions usuelles . . . 60
1.7 Applications des développements limités . . . 63
1.7.1 Étude des limites ou recherche d'équivalent . . . 63
1.7.2 Étude de position d'une courbe par rapport à sa tangente . . . 65
1.7.3 Développement asymptotique et étude de position par rapport à une asymptote . . . 65
1.7.4 Recherche d'extremum . . . 66
1.7.5 Nature d'un point stationnaire d'une courbe paramétrée . . . 67
1.8 Exercices . . . 68

Chapitre 2 Espaces vectoriels de dimension finie **77**
2.1 Familles de vecteurs . . . 78
2.1.1 Famille libre . . . 78
2.1.2 Famille génératrice . . . 86
2.1.3 Base d'un espace vectoriel . . . 88
2.1.4 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base . . . 92
2.2 Dimension d'un espace vectoriel . . . 96
2.2.1 Définition et exemples . . . 96
2.2.2 Théorèmes de la dimension et de la base incomplète . . . 96
2.2.3 Dimension d'un espace vectoriel et caractérisation des bases . . . 101
2.3 Propriétés de la dimension . . . 107
2.3.1 Dimensions d'un produit cartésien et d'une somme directe . . . 107
2.3.2 Dimension d'un sous-espace vectoriel . . . 109
2.3.3 Dimension d'une somme de deux espaces . . . 111
2.3.4 Caractérisation des sommes directes et des sous-espaces supplémentaires par les bases . . . 114
2.3.5 Rang d'une famille de vecteurs . . . 115
2.4 Théorème du rang . . . 117
2.4.1 Définition du rang d'une application linéaire . . . 117
2.4.2 Théorème du rang . . . 119
2.4.3 Caractérisation des isomorphismes et des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ . . . 122
2.5 Exercices . . . 124
2.6 Annexe . . . 129
2.6.1 Démonstration du théorème fondamental de la théorie de la dimension . . . 129

Chapitre 3 Matrices **131**
3.1 Définition d'une matrice . . . 132
3.2 Opérations sur les matrices . . . 133
3.2.1 Structure d'espace vectoriel . . . 133
3.2.2 Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . . . 134
3.2.3 Produit matriciel . . . 136
3.2.4 Transposition . . . 139
3.3 Matrices carrées . . . 140
3.3.1 Algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . . . 140
3.3.2 Matrices carrées inversibles et groupe $GL_n(\mathbb{K})$ . . . 142
3.3.3 Sous-ensembles remarquables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . . . 145
3.3.3.a Matrices diagonales . . . 145
3.3.3.b Matrices triangulaires . . . 147
3.3.3.c Matrices symétriques et antisymétriques . . . 150
3.4 Matrices et applications linéaires . . . 151
3.4.1 Définition de la matrice d'une application linéaire relativement à deux bases 151
3.4.2 Propriétés élémentaires des matrices d'applications linéaires . . . 155
3.4.3 Isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . . . 157
3.4.4 Cas des formes linéaires : équations cartésiennes d'un hyperplan . . . 161
3.5 Matrice d'un endomorphisme . . . 162
3.5.1 Définition et isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . . . 162

3.5.2 Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base . . . 168
3.5.3 Matrice de passage et changements de bases . . . 169
3.6 Rang d'une matrice et opérations élémentaires . . . 173
3.6.1 Définition du rang d'une matrice et première caractérisation . . . 173
3.6.2 Opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) . . . 176
3.6.3 Méthode du pivot de Gauss pour déterminer le rang d'une matrice (ou l'inverse d'une matrice) . . . 182
3.7 Matrices équivalentes, matrices semblables et trace d'une matrice carrée . . . 191
3.7.1 Matrices équivalentes . . . 191
3.7.2 Matrices semblables . . . 192
3.7.3 Trace d'une matrice carrée et trace d'un endomorphisme . . . 193
3.8 Exercices . . . 196

Chapitre 4 Intégration des fonctions d'une variable réelle 203
4.1 Intégration sur un segment d'une fonction en escalier . . . 204
4.1.1 Fonction en escalier . . . 204
4.1.2 Intégrale sur un segment d'une fonction en escalier . . . 207
4.1.3 Propriétés de l'intégrale . . . 209
4.1.3.a Linéarité . . . 209
4.1.3.b Monotonie . . . 210
4.1.3.c Relation de Chasles . . . 211
4.2 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux . . . 211
4.2.1 Fonctions continues par morceaux et approximation uniforme par des fonctions en escalier . . . 211
4.2.2 Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux . . . 214
4.2.3 Extension aux fonctions à valeurs complexes . . . 216
4.2.4 Linéarité, monotonie et relation de Chasles . . . 216
4.2.5 Valeur moyenne et inégalité de la moyenne . . . 222
4.2.6 Cas des fonctions continues : produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et inégalité de Cauchy-Schwarz . . . 224
4.3 Approximation de l'intégrale . . . 227
4.3.1 Sommes de Riemann . . . 227
4.3.2 Méthode des rectangles pour approcher une intégrale . . . 231
4.3.3 Méthodes des trapèzes . . . 233
4.4 Intégration et dérivation . . . 238
4.4.1 Primitive d'une fonction continue . . . 238
4.4.2 Fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque . . . 239
4.4.3 Intégrale de la borne supérieure et théorème fondamental . . . 240
4.5 Calcul d'intégrales et de primitives . . . 243
4.5.1 Intégration par parties . . . 243
4.5.2 Changement de variable . . . 244
4.5.3 Cas des fonctions rationnelles . . . 246
4.5.4 Fonctions rationnelles en sinus et cosinus . . . 250
4.5.5 Autres exemples . . . 254
4.6 Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque . . . 255
4.6.1 Définition de la convergence d'une intégrale généralisée . . . 255

4.6.2 Propriétés élémentaires . . . 260
4.6.3 Cas particulier des fonctions positives . . . 262
4.6.4 Intégrales de référence . . . 264
4.6.5 Critères de convergence pour les fonctions positives . . . 267
4.6.6 Parties réelles et imaginaires, absolue convergence et lien avec la convergence 270
4.6.7 Bilan sur les méthodes . . . 273
4.6.8 Extension aux fonctions continues sur un intervalle sauf en un nombre fini de points . . . 281
4.7 Exercices . . . 283
4.8 Annexe . . . 290
4.8.1 Démonstration du théorème d'approximation . . . 290
4.8.2 Compléments sur les sommes de Riemann . . . 292

Chapitre 5 Séries numériques **294**
5.1 Généralités sur les séries . . . 295
5.1.1 Définitions et vocabulaire des séries . . . 295
5.1.2 Convergence, divergence, divergence grossière et convergence absolue . . . 296
5.1.3 Opérations sur les séries convergentes . . . 299
5.2 Séries à termes positifs . . . 300
5.2.1 Convergence, divergence et comparaison des termes généraux . . . 300
5.2.2 Comparaison série-intégrale . . . 304
5.2.3 Séries positives de référence . . . 312
5.2.4 Critère de d'Alembert . . . 314
5.3 Séries réelles . . . 317
5.3.1 Séries absolument convergentes et semi-convergentes . . . 317
5.3.2 Critère spécial pour les séries alternées . . . 318
5.3.3 Séries et sommes réelles de référence . . . 322
5.3.4 Bilan des méthodes d'étude des séries réelles . . . 325
5.4 Séries complexes . . . 329
5.4.1 Séries absolument convergentes et semi-convergentes . . . 329
5.4.2 Séries complexes de référence . . . 330
5.5 Familles sommables et théorèmes de Fubini . . . 331
5.5.1 Notion de dénombrabilité . . . 331
5.5.2 Familles sommables de nombres réels positifs . . . 337
5.5.3 Séries doubles à termes positifs . . . 341
5.5.4 Familles sommables de nombres complexes . . . 347
5.5.5 Séries doubles complexes . . . 351
5.6 Exercices . . . 361
5.7 Annexe . . . 366
5.7.1 Transformation d'Abel et critère pour les séries trigonométriques . . . 366
5.7.2 Théorème d'associativité pour les familles sommables . . . 371

Chapitre 6 Probabilités discrètes **375**
6.1 Notion de tribu et définition d'une probabilité . . . 376
6.2 Mesure de probabilité conditionnelle et formule des probabilités totales . . . 383
6.3 Variable aléatoire réelle et loi de probabilité . . . 385

6.4 Indépendance d'événements ou de variables aléatoires . . . 388
6.5 Définition d'une probabilité discrète . . . 390
6.6 Variables aléatoires discrètes . . . 392
6.7 Espérance, variance et moments . . . 396
6.8 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev . . . 404
6.9 Sommes de variables aléatoires discrètes usuelles et indépendantes . . . 405
6.10 Calculs d'espérance ou de variance pour des variables aléatoires indépendantes . 407
6.11 Exercices . . . 409

Chapitre 7 Fonctions convexes 413
7.1 Fonctions convexes . . . 414
7.1.1 Définition et interprétation graphique . . . 414
7.1.2 Caractérisation de la convexité par la pente des cordes . . . 416
7.1.3 Caractérisation de la convexité lorsque f est dérivable . . . 418
7.1.4 Régularité des fonctions convexes . . . 420
7.2 Inégalités de convexité . . . 421
7.2.1 Inégalité généralisée de convexité . . . 421
7.2.2 Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique . . . 423
7.3 Exercices . . . 424

Chapitre 8 Déterminants et systèmes linéaires 425
8.1 Définition du déterminant . . . 426
8.1.1 Formes n-linéaires, formes alternées et antisymétriques . . . 426
8.1.2 Caractérisation des formes n-linéaires alternées et dimension de l'espace $\Lambda_n(E)$ . . . 429
8.1.3 Définition du déterminant dans une base $\mathcal{B}$ et propriétés élémentaires . . . 431
8.1.4 Caractérisation des bases de E par le déterminant . . . 432
8.2 Déterminant d'un endomorphisme . . . 433
8.2.1 Définition . . . 433
8.2.2 Propriétés du déterminant et caractérisation des isomorphismes . . . 435
8.3 Déterminant d'une matrice carrée . . . 436
8.3.1 Définition et propriétés « simples » . . . 436
8.3.2 Développement par rapport à une ligne ou une colonne . . . 439
8.3.3 Opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes . . . 440
8.3.4 Cas particulier : cas des matrices triangulaires . . . 441
8.3.5 Lien avec le déterminant de l'application linéaire associée et conséquences 442
8.4 Systèmes d'équations linéaires . . . 444
8.4.1 Définitions et structure des solutions . . . 444
8.4.2 Rang d'un système linéaire et dimension de l'espace homogène associé . . . 445
8.4.3 Cas des systèmes de Cramer et formules de Cramer . . . 445
8.4.4 Méthode du pivot de Gauss pour résoudre un système . . . 449
8.5 Exercices . . . 453

Chapitre 9 Espaces euclidiens 456
9.1 Produit scalaire . . . 457
9.1.1 Définition d'un produit scalaire et exemples . . . 457

9.1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz, norme euclidienne et distance associée . . . 461
9.1.3 Propriétés remarquables . . . 463
9.2 Orthogonalité . . . 464
9.2.1 Définitions . . . 464
9.2.2 Propriétés des familles orthogonales . . . 467
9.3 Espaces euclidiens . . . 469
9.3.1 Définition . . . 469
9.3.2 Orthogonal d'une partie et existence de bases orthonormées . . . 469
9.3.3 Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales . . . 473
9.3.4 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt . . . 477
9.3.5 Isomorphisme naturel entre E et son dual . . . 480
9.4 Automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien . . . 481
9.4.1 Définition et exemples . . . 481
9.4.2 Caractérisations des automorphismes orthogonaux . . . 483
9.4.3 Matrices orthogonales . . . 485
9.5 Automorphismes orthogonaux du plan et étude des groupes $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$ . . . 491
9.5.1 Étude des groupes $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$ . . . 491
9.5.2 Rotations du plan . . . 493
9.5.3 Réflexions et décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions . 494
9.6 Automorphismes orthogonaux de l'espace et étude du groupe $O_3(\mathbb{R})$ . . . 497
9.6.1 Étude théorique . . . 497
9.6.2 Étude pratique . . . 504
9.7 Exercices . . . 506

Chapitre 1

Dérivation et développements limités

Prérequis : dans tout ce chapitre, les notions suivantes sont supposées connues :

- espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels et applications linéaires ;
- anneaux, algèbres et morphismes d'algèbres ;
- limite d'une fonction d'une variable réelle ;
- opérations sur les limites ;
- image continue d'un segment ;
- petits o, grands O, fonctions équivalentes ;
- calcul pratique de développements limités (pas de théorie) ;
- fonctions usuelles et leurs dérivées ;
- polynômes ;
- intégration par parties (calcul pratique).

Aucune connaissance spécifique sur la dérivation n'est supposée connue.

1.1 Nombre dérivé en un point

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle réel non vide et non réduit à un point (c'est-à-dire d'intérieur non vide).

1.1.1 Définition

Définition 1.1.1.1 Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable au point a (ou en a) si la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a. On note alors :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Remarques :

- *on peut étendre la notion aux fonctions à valeurs complexes. On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en $a \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. On note alors $f'(a)$ cette limite. Ici, on n'a pas besoin de préciser « limite finie » puisque pour une fonction à valeurs complexes, il n'y a pas de notion de limite infinie ;*
- *on peut aussi remarquer que l'écriture $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'est pas nécessaire et on peut simplement écrire, comme dans la définition ci-dessus, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ puisque la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est définie sur $I \setminus \{a\}$ et n'est donc pas définie au point a ;*
- *enfin, on peut remarquer que f est dérivable en a si et seulement si $h \longmapsto f(a+h)$ est dérivable en 0, c'est-à-dire si et seulement si $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite (finie) en 0. Dans ce cas, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Dans la pratique, c'est souvent cette forme qu'on utilise.*

Définition 1.1.1.2 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

(i) Si $a \neq \inf I$, on dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe (et est finie si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On note alors $f'_g(a)$ cette limite.

(ii) Si $a \neq \sup I$, on dit que f est dérivable à droite en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe (et est finie si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On note alors $f'_d(a)$ cette limite.

Proposition 1.1.1.3 *Lorsque $a \in \overset{\circ}{I}$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.*

Preuve :

Ceci découle directement des propriétés des limites à droite et à gauche d'une fonction donnée. ⊠

Exemple 1.1.1.4 Les fonctions constantes sont dérivables en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.1.1.5 La fonction inverse est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}^\star$. En effet, pour $a \in \mathbb{R}^\star$ et h assez proche de 0 et non nul :

$$\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)} \quad \text{et donc} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = -\frac{1}{a^2}$$

Ce qui prouve que la fonction inverse est dérivable en a et que son nombre dérivé au point a est $-\dfrac{1}{a^2}$.

Exemple 1.1.1.6 La fonction valeur absolue est dérivable à droite et à gauche en 0, mais n'est pas dérivable en 0. En effet,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x| - |0|}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x| - |0|}{x} = -1$$

Exemple 1.1.1.7 La racine carrée n'est pas dérivable en 0 puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x} = +\infty$.

Exemple 1.1.1.8 La fonction $x \longmapsto \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas dérivable en 0 puisque $x \longmapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0.

Proposition 1.1.1.9 *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors f est dérivable en a si et seulement si $\Re e(f)$ et $\Im m(f)$ le sont. De plus, on a alors :*

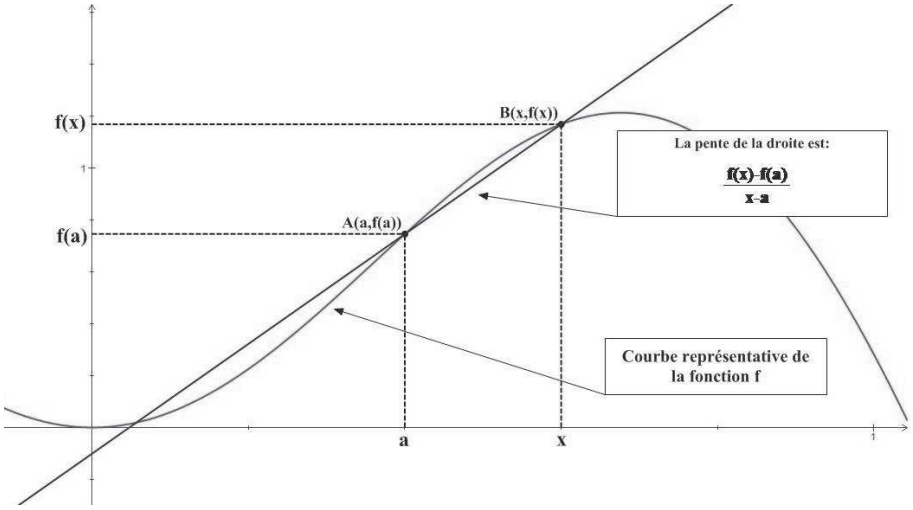
$$f'(a) = (\Re e(f))'(a) + i(\Im m(f))'(a)$$

Preuve :

C'est une conséquence directe des propriétés des limites des fonctions à valeurs complexes. ⊠

1.1.2 Interprétations graphique et cinématique

Interprétation graphique : lorsque f est dérivable en a, le nombre dérivée en a est la limite des taux d'accroissement.



Définition 1.1.2.1 Si f est dérivable en $a \in I$, la droite d'équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ est alors appelée la tangente à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$.

Exercice 1.1.2.2 Montrer que si f est dérivable en a, alors la tangente en $(a, f(a))$ est « la meilleure approximation affine de f » au voisinage de a, c'est-à-dire :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ ,\ \exists V \in \mathcal{V}(a)\ ,\ \forall x \in I \cap V\ ,\ |f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)| \leqslant |f(x) - \alpha x - \beta|$$

Exercice 1.1.2.3 (Plus difficile)

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si $|a| \leqslant |a+\varepsilon|$ et $|a| \leqslant |a-\varepsilon|$, alors $|a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
2. Montrer que si f est continue en a et f admet une meilleure approximation affine, alors f est dérivable en a. Quelle est alors cette meilleure approximation affine ?
3. Montrer que si f admet une meilleure approximation affine en a, alors f est continue au point a.
4. En déduire que f admet une meilleure approximation affine en a si et seulement si f est dérivable en a. Quelle est alors la meilleure approximation affine ?

Interprétation cinématique :

— le taux d'accroissement correspond à la vitesse moyenne sur $[a, x]$;
— le nombre dérivé en a correspond à la vitesse instantanée en a.

1.1.3 Développement limité d'ordre 1

Proposition 1.1.3.1 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou bien $\mathbb{C}$) et $a \in I$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f est dérivable en a et $f'(a) = \lambda$;

(ii) $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \lambda(x-a) + o(x-a)$.

La seconde forme est appelée le développement limité d'ordre 1 de f en a.

Preuve :

• Montrons $(i) \Longrightarrow (ii)$.

Posons pour $x \in I$, $\varphi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. Puisque f est dérivable en a, on a :

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$$

De plus, $\varphi(a) = 0$. Par conséquent, $\varphi(x) \underset{x\to a}{=} o(x-a)$.

• Montrons $(ii) \Longrightarrow (i)$.

Dans ce sens là, il n'y a aucun problème. En effet, s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \lambda(x-a) + o(x-a)$, alors pour x proche de a et $x \neq a$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{=} \lambda + o(1)$$

Par suite, $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = \lambda$.

⊠

Remarques :

- *en clair, la proposition dit que f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a (et que dans ce cas, son développement limité à l'ordre 1 en a est donnée par l'approximation de la tangente). On verra dans la suite du cours que cette propriété ne se généralise pas pour un ordre $n \geqslant 2$;*
- *on écrit aussi souvent le DL (développement limité) à l'ordre 1 en a de f sous la forme : $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + hf'(a) + o(h)$.*

Proposition 1.1.3.2 *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Preuve :

En effet, si f est dérivable en a, alors d'après la proposition précédente,

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

Or, $\lim\limits_{x\to a} (f'(a)(x-a) + o(x-a)) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ et f est continue en a. ⊠

⚠ **Attention :** la réciproque est fausse. Donner un contre-exemple.

1.2 Fonction dérivée

1.2.1 Définition

Définition 1.2.1.1 On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) est dérivable sur (l'intervalle) I si f est dérivable en tout point $a \in I$. Dans ce cas, on définit la fonction dérivée de f, notée f', par :

$$\begin{array}{rccc} f' & : & I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & a & \longmapsto & f'(a) \end{array}$$

Notations :

- pour la dérivée d'une fonction, on utilise aussi les notations suivantes :

$$f' = D(f) = Df = \dot{f} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

  En particulier, en physique, on utilise souvent la notation $\dot{f}$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ pour la dérivée par rapport au temps « t ». En mathématiques, on évitera cette notation puisque d'une part, le $\mathrm{d}f$ et $\mathrm{d}x$ ne sont pas des objets bien définis (pour le moment) et d'autre part, c'est une notation qui fait intervenir le « x » qui est le nom de la variable et n'est pas intrinsèque. Ce problème de notations sera revue dans le cours de calcul différentiel (cours de mathématiques spéciales 1) ;

- pour le nombre dérivée de f au point a, on note aussi : $f'(a) = D(f)(a) = \dot{f}(a) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Exemple 1.2.1.2 Si f est une fonction constante (définie sur $\mathbb{R}$), alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 0$ (fonction nulle).

Exemple 1.2.1.3 Dans le premier paragraphe, on a montré que si $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et $f' : x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$.

Remarque : *on peut retrouver que les fonctions usuelles que vous avez déjà étudiées sont dérivables et calculer leur dérivée. Je vous laisse refaire les preuves en exercice.*

1.2.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 1.2.2.1 *La dérivation est linéaire, c'est-à-dire si f et g sont dérivables en a (respectivement sur I), alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a (respectivement sur I) et on a :*

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$

Preuve :

Ceci découle directement de la linéarité de l'opérateur limite.

⊠

Proposition 1.2.2.2 *Si f, g sont dérivables en a (respectivement sur I), alors $f \times g$ est dérivable en a (respectivement sur I) et on a :*

$$(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$$

Preuve :

Puisque f et g sont dérivables en a, elles admettent un développement limité à l'ordre 1 en a et :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + f'(a)h + o(h) \quad \text{et} \quad g(a+h) \underset{h\to 0}{=} g(a) + g'(a)h + o(h)$$

En faisant le produit, et en tenant compte des règles de calculs pour les o, on obtient :

$$(f \times g)(a+h) \underset{h\to 0}{=} (f \times g)(a) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))h + o(h)$$

Ce qui prouve que $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Il s'ensuit que $f \times g$ est dérivable en a et $(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$.

⊠

Corollaire 1.2.2.3 *L'ensemble $A = \{f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \ / \ f$ est dérivable en $a\}$ est une sous $\mathbb{K}$-algèbre de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. De plus, l'application $f \longmapsto f'(a)$ est une application linéaire.*

⚠ **Attention :** $f \longmapsto f'(a)$ n'est pas un morphisme d'algèbres.

⚠ **Attention :** les théorèmes précédents montrent que la somme ou le produit de fonctions dérivables est dérivable. En revanche, ils ne disent rien sur les opérations entre fonctions non dérivables.

Exercice 1.2.2.4 Donner un exemple de fonctions f et g telles que :

1. f et g ne sont pas dérivables en 0 mais $f \times g$ l'est ;
2. f est dérivable en 0, g n'est pas dérivable en 0 et $f \times g$ est dérivable en 0 ;
3. f est dérivable en 0, g n'est pas dérivable en 0 et $f \times g$ n'est pas dérivable en 0 ;
4. f et g ne sont pas dérivables en 0 mais $f + g$ l'est.

Exercice 1.2.2.5 Peut-on trouver f dérivable, g non dérivable telles que $f + g$ est dérivable ?

Proposition 1.2.2.6 *Soient* $n \in \mathbb{N}^\star$, $\varphi_n : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ *et* $\varphi_0 : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}$.

Alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, φ_n *est dérivable sur* I *et* $\varphi_n' = n\varphi_{n-1}$.

Preuve :

On procède par récurrence en remarquant que pour $n = 1$, on a déjà vu le résultat et que pour tout entier n, $\varphi_{n+1} = \varphi_1 \times \varphi_n$. Les détails sont laissés en exercice. ⊠

Exercice 1.2.2.7 Proposer une démonstration directe en utilisant la formule de Bernoulli [1].

Corollaire 1.2.2.8 *Si* $P \in \mathbb{K}[X]$, *alors* $\widetilde{P'} = \widetilde{D(P)}$, *c'est-à-dire que la fonction polynômiale associée à* P' *est la dérivée au sens des fonctions de la fonction polynômiale associée à* P.

Proposition 1.2.2.9 *Soient* $f : I \longrightarrow J$ *et* $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$ *deux fonctions,* $a \in I$ *et* $b = f(a)$. *Si* f *est dérivable en* a *et si* g *est dérivable en* b, *alors* $g \circ f$ *est dérivable en* a *et on a :*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$$

Remarque : *dans la pratique, on écrit plutôt* $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$ *mais on verra dans le cours de calcul différentiel (cours de mathématiques spéciales 1) que ce n'est pas logique.*

1. dans un anneau, si a et b commutent, alors pour $n \in \mathbb{N}$, $b^{n+1} - a^{n+1} = (b - a) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

Preuve :

On pose alors pour $y \in J$:

$$u(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} & \text{si } y \neq b \\ g'(b) & \text{si } y = b \end{cases}$$

Puisque g est dérivable en b, la fonction u est continue en b. On a alors pour tout $x \in I$ et $x \neq a$,

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = u(f(x)) \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

De plus, puisque f est dérivable en a, f est continue en a. Par produit et composition de limites, on a donc :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \left(\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} \right) = u(f(a)) \times f'(a) = g'(b) \times f(a)$$

⊠

Exercice 1.2.2.10 Proposer une autre démonstration en utilisant les développements limités.

Remarque : *pour le théorème de composition, on a supposé que $f : I \longrightarrow J$ où I et J sont deux intervalles réels. C'est tout simplement parce que si f est à valeurs complexes, alors g est une fonction d'une variable complexe et ce type de fonction n'est pas étudié ici. Vous reverrez cela dans le cours d'analyse complexe (cours de mathématiques spéciales 2).*

⚠ **Attention :** de même qu'avant, le théorème affirme qu'une composition de fonctions dérivables est dérivable ! Il ne dit rien sur la composée de fonctions non dérivables !

Exercice 1.2.2.11 Donner un exemple de fonctions f et g telles que :

1. $f(0) = 0$, f est dérivable en 0, g n'est pas dérivable en 0 mais $g \circ f$ est dérivable en 0 ;
2. $f(0) = 0$, f est dérivable en 0, g n'est pas dérivable en 0 et $g \circ f$ n'est pas dérivable en 0 ;
3. $f(0) = 0$, f n'est pas dérivable en 0, g est dérivable en 0 et $g \circ f$ est dérivable en 0 ;
4. $f(0) = 0$, f n'est dérivable en 0, g est dérivable en 0 et $g \circ f$ n'est pas dérivable en 0 ;
5. $f(0) = 0$, f et g ne sont pas dérivables en 0 mais $g \circ f$ est dérivable en 0.

Corollaire 1.2.2.12 *Si f est dérivable en a et si $f(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en a et :*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$

Preuve :

• Si f est à valeurs réelles, c'est une conséquence directe de la proposition précédente en introduisant $g : x \longmapsto \frac{1}{x}$.

• Traitons le cas général (c'est-à-dire f à valeurs réelles ou complexes) en utilisant les développements limités à l'ordre 1.
Tout d'abord, puisque f est dérivable en a, f est *a fortiori* continue en a et puisque $f(a) \neq 0$, $\frac{1}{f}$ est donc bien définie au voisinage de a.

Ensuite, puisque f est dérivable en a, f admet un développement limité à l'ordre 1 en a donné par :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + hf'(a) + o(h)$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{f}(a+h) &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{f(a)} \times \frac{1}{1 + \dfrac{f'(a)}{f(a)}h + o(h)} \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{f(a)} \times \left(1 - \frac{f'(a)}{f(a)}h + o(h)\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{f(a)} - \frac{f'(a)}{f(a)^2}h + o(h)\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\frac{1}{f}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\dfrac{f'(a)}{f(a)^2}$. ⊠

Remarque : *il y a ici une arnaque car on a utilisé de développement limité* $\frac{1}{1-z} = 1 + z + o(z)$ *pour* z *un nombre complexe ! Cela dit, ce n'est pas très difficle car pour* $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ *:*

$$\left|\frac{1}{1-z} - (1+z)\right| = \frac{|z^2|}{|1-z|} \leqslant \frac{|z|^2}{1-|z|} \leqslant 2|z|^2$$

Corollaire 1.2.2.13 *Si f et g sont dérivables en a (respectivement sur I) et si $g(a) \neq 0$ (respectivement g ne s'annule pas sur I), alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a (respectivement sur I) et on a :*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Preuve :

On remarque que lorsque cela a un sens, $\frac{f}{g} = \frac{1}{g} \times f$ et il suffit alors d'appliquer la proposition sur l'inverse d'une fonction dérivable puis celle sur le produit de deux fonctions dérivables. ⊠

On rappelle ici les dérivées des fonctions usuelles. Les démonstrations ont probablement déjà été vues auparavant. Pour les plus « puristes » d'entre vous :

- les définitions et démonstrations formelles (et non géométriques) pour sinus, cosinus (et exponentielle) seront rigoureusement traitées dans le cours sur les séries de fonctions (cours de mathématiques spéciales 1) ;
- pour ln, une preuve sera donnée dans le chapitre 5 : c'est le théorème fondamental de l'analyse qui garantit l'existence de primitive pour une fonction continue sur un intervalle ;
- enfin, pour les fonctions réciproques, ce sera une conséquence du paragraphe suivant.

Expression de la fonction	Expression de sa dérivée	Intervalle de validité
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^\star$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \exp(x)$	$f'(x) = \exp(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$

Expression de la fonction	Expression de sa dérivée	Intervalle de validité
$f(x) = \mathrm{ch}\,(x)$	$f'(x) = \mathrm{sh}\,(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{sh}\,(x)$	$f'(x) = \mathrm{ch}\,(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{th}\,(x)$	$f'(x) = 1 - \mathrm{th}^{\,2}(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \coth(x)$	$f'(x) = 1 - \coth^{\,2}(x) = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^{\,2}(x)}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$f(x) = \arcsin(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{Argch}\,(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1, +\infty[$
$f(x) = \mathrm{Argsh}\,(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{Argth}\,(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$	$]-1, 1[$
$f(x) = e^{ix}$	$f'(x) = ie^{ix}$	$\mathbb{R}$

Le tableau suivant rappelle enfin les principales formules de dérivation.

Fonction	Dérivée	Conditions
$f + kg$	$f' + kg'$	$k \in \mathbb{K}$
$f \times g$	$f'g + fg'$	
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$	g ne s'annule pas sur I
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$	$f : I \longrightarrow J$ dérivable g dérivable sur J
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ et dérivable sur l'intervalle I
$\exp(u)$	$u' \exp(u)$	
$\ln \lvert u \rvert$	$\dfrac{u'}{u}$	u garde un signe constant sur I (ou u ne s'annule pas sur I)
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$ et $u > 0$
u^v	$\left(v' \ln(u) + \dfrac{vu'}{u}\right) u^v$	$u > 0$ sur l'intervalle I

Bien qu'à ce stade, vous devriez maîtriser les calculs de dérivées, voici quelques exercices qui vous permettront de vous en assurer...

Exercice 1.2.2.14 Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en justifiant au préalable l'intervalle sur lequel la fonction est dérivable. Si besoin, faire une étude de la dérivabilité aux points « remarquables ».

1. $x \longmapsto (x^2+x+1)e^{-x}$;
2. $x \longmapsto \ln|\ln(x)|$;
3. $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\cos(x)+2}$;
4. $x \longmapsto \arcsin(\frac{2x}{1+x^2})$;
5. $x \longmapsto |\sin(x)|^{\cos(x)}$.

1.2.3 Dérivée d'une bijection réciproque

Proposition 1.2.3.1 *Soit $f : I \longrightarrow J$ continue et bijective, $a \in I$ et $b = f(a)$. Alors :*

(i) Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

(ii) Si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$, alors $\lim\limits_{\substack{y\to b\\ y\neq b}} \left|\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}\right| = +\infty$.

En particulier, f^{-1} n'est pas dérivable en b mais sa courbe représentative admet une tangente verticale.

(iii) Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| = +\infty$, alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = 0$.

En particulier, si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Preuve :

Pour $y \in J$ et $y \neq b$:

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(b))} = \frac{f^{-1}(y)-a}{f(f^{-1}(y))-f(a)}$$

Or f est continue en a donc f^{-1} l'est en b et $\lim\limits_{y\to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$.
Le résultat est alors obtenu par composition de limites. ⊠

1.2.4 Dérivées successives et formule de Leibniz

Définition 1.2.4.1 Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et n un entier, $n \geqslant 2$. On dit que f est n fois dérivable sur I si f est $n-1$ fois dérivable sur I et si $f^{(n-1)}$, la dérivée $(n-1)$-ième de f, est dérivable sur I.
Lorsqu'elle est définie, on note $f^{(n)}$, ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ ou encore $D^n f$ la dérivée n-ième de f.

Remarques :

- *en clair, f est 2 fois dérivable sur I si f est dérivable sur I et si f' est dérivable sur I. On note alors f'' la dérivée seconde de f ;*
- *f est trois fois dérivable sur I si f'' est définie sur I (c'est-à-dire f est deux fois dérivable sur I) et si f'' est dérivable sur I ;*
- *dans la pratique, on note avec des « primes » ($'$) les dérivées jusqu'à l'ordre 2. Au delà, on note comme dans la définition. Autrement dit, on écrit f' et f'' plutôt que $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$, mais on écrit $f^{(3)}$ plutôt que f''' ;*
- *par convention, $f^{(0)} = f$;*
- *la notion de fonction n fois dérivable sur I est donc définie par récurrence. On peut remarquer que cette définition est équivalente à f est dérivable sur I et f' est $n-1$ fois dérivable sur I.*

Définition 1.2.4.2 Soit f une fonction de I dans $\mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On note $\mathcal{D}^n(I)$ l'ensemble des fonctions n-fois dérivables sur I.
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et on note $f \in \mathcal{C}^n(I)$, si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I)$.

Remarque : *en particulier, comme toute fonction dérivable sur I est continue sur I, on a :*

$$\mathcal{C}^0(I) \supsetneq \mathcal{D}^1(I) \supsetneq \mathcal{C}^1(I) \supsetneq \mathcal{D}^2(I) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{D}^n(I) \supsetneq \mathcal{C}^n(I) \supsetneq \mathcal{D}^{n+1}(I) \supsetneq \cdots \mathcal{C}^\infty(I)$$

Exemple 1.2.4.3 La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En effet, on sait que exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$. On montre alors par récurrence immédiate que exp est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout entier n.

Exemple 1.2.4.4 Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.2.4.5 La valeur absolue est dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathcal{D}^1(\mathbb{R})$ (puisqu'elle est continue mais non dérivable en 0).

Exemple 1.2.4.6 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Puisque sinus est bornée, $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} O(x^2)$ Or, $f(0) = 0$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} O(x^2) = o(x)$. Ce qui prouve que f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, c'est-à-dire f est dérivable en 0 et de plus $f'(0) = 0$ (puisque le coefficient en « x » dans le DL est nul).

Mais pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Le premier terme dans l'expression de f' tend vers 0 quand x tend vers 0 mais le second n'a pas de limite (puisque cosinus n'a pas de limite en $\pm\infty$). Il s'ensuit que f' n'est pas continue en 0.

⚠ **Attention :** dans l'exemple précédent, on a montré que :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Le « 0 » dans $f'(0) = 0$ n'est pas obtenu en dérivant le « 0 » de $f(0) = 0$!! Cela n'a aucun sens de dériver un nombre ! C'est une fonction que l'on dérive ! Ce 0 est obtenu en faisant le calcul et en prouvant que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

⚠ **Attention :** l'exemple précédent montre qu'on a une inclusion stricte $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$! Une fonction dérivable n'est pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$!

Remarque : *dans l'exemple précédent, en prenant $n-1$ fois une primitive de f (qui existe puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ - voir le chapitre d'intégration), on obtient une fonction dans $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$. On verra en exercice une construction directe d'une telle fonction.*

La notion de dérivée est une notion locale (autrement dit, être dérivable sur I tout entier signifie être dérivable en tout point). Il est donc logique de donner une description « locale » de la dérivabilité n fois, même si dans la pratique on utilise la forme globale (c'est-à-dire sur l'intervalle de définition).

Définition 1.2.4.7 Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, n un entier naturel ($n \geqslant 2$) et $a \in I$. On dit que f est n fois dérivable en a si f est $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de a et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a. On pose alors $(f^{(n-1)})'(a) = f^{(n)}(a)$.

Remarque : *cette définition peut sembler plus compliquée mais ce qu'il faut retenir c'est que pour étudier la dérivabilité de $f^{(n-1)}$ en a, cela suppose que cette fonction est définie sur un voisinage de a et on retrouve donc les hypothèses de cette définition.*

Exercice 1.2.4.8 Montrer que la fonction g définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ est deux fois dérivable en 0 mais qu'elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1.2.4.9 *Soit $n \geqslant 1$.*

(i) Les ensembles $\mathcal{D}^n(I)$, $\mathcal{C}^n(I)$ et $\mathcal{C}^\infty(I)$ sont des $\mathbb{K}$-algèbres.

(ii) Si $f \in \mathcal{D}^n(I)$ (respectivement $f \in \mathcal{C}^n(I)$, respectivement $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$) et si f ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{D}^n(I)$ (respectivement $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}^n(I)$, respectivement $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}^\infty(I)$).

(iii) Si $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$ sont $\mathcal{D}^n$ (respectivement $\mathcal{C}^n$, respectivement $\mathcal{C}^\infty$), alors $g \circ f$ est $\mathcal{D}^n$ (respectivement $\mathcal{C}^n$, respectivement $\mathcal{C}^\infty$).

Remarque : *concrètement, la somme, le produit, la composée, le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est encore une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.*

Preuve :

• Montrons (i) par récurrence sur $n \geqslant 1$.

Initialisation :

Pour $n = 1$, on a déjà vu le résultat (voir les propositions 1.2.2.1 et 1.2.2.2).

Hérédité :

On suppose que la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$ et on montre qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soient $f, g \in \mathcal{D}^{n+1}(I)$ (respectivement $\mathcal{C}^{n+1}(I)$) et $\lambda \in \mathbb{K}$.

∗ Il est clair que la fonction constante égale à 1 appartient à $\mathcal{D}^{n+1}$.

∗ Puisque $\mathcal{D}^{n+1} \subset \mathcal{D}^1$, f et g sont dérivables sur I. Par suite, $\lambda f + g$ et $f \times g$ ont dérivables sur I et :

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g' \quad \text{et} \quad (f \times g)' = f'g + fg'$$

Or, par définition $f', g' \in \mathcal{D}^n(I)$ et $f, g \in \mathcal{D}^{n+1}(I) \subset \mathcal{D}^n(I)$. De plus, par hypothèse de récurrence, $\mathcal{D}^n(I)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Il s'ensuit que :

$$(\lambda f + g)' \in \mathcal{D}^n(I) \quad \text{et} \quad (f \times g)' \in \mathcal{D}^n(I)$$

c'est-à-dire $(\lambda f + g) \in \mathcal{D}^{n+1}(I)$ et $f \times g \in \mathcal{D}^{n+1}(I)$.

Ce qui prouve que $\mathcal{D}^{n+1}(I)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{D}^n(I)$ et achève la récurrence.
On procède de la même manière pour les propriétés (ii) et (iii).

⊠

Remarques :

- *bien entendu, on dispose d'une version « locale » de cette proposition. Si $a \in I$ est fixé, alors l'ensemble des applications n fois dérivable en a (avec $n \geqslant 1$) est une algèbre. La démonstration est laissée en exercice ;*
- *on peut remarquer que l'opérateur D de dérivation est linéaire donc D^n l'est aussi. Il s'ensuit que si $f \in \mathcal{D}^n(I)$, $g \in \mathcal{D}^n(I)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors : $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$;*
- *en revanche, attention, en général, $(f \times g)^{(n)} \neq f^{(n)} \times g^{(n)}$. On va voir juste après comment calculer explicitement cette dérivée n-ième d'un produit.*

Théorème 1.2.4.10 (Formule de Leibniz) *Soient f et g deux fonctions $\mathcal{D}^n$ sur I. Alors $f \times g \in \mathcal{D}^n(I)$ et on a :*

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

Preuve :

À nouveau, on démontre cette propriété par récurrence.

Initialisation :

Pour $n = 0$, il n'y a rien à prouver car pour toutes applications f et g, $(f \times g)^{(0)} = f \times g = f^{(0)} \times g^{(0)}$.

Hérédité :

On suppose que la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ et on montre qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soient f et g deux fonctions $\mathcal{D}^{n+1}$ sur I. Puisque $n+1 \geqslant 1$, f et g sont dérivables sur I. Par conséquent, $f \times g$ est dérivable sur I et : $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.

Or, $f' \in \mathcal{D}^n(I), g' \in \mathcal{D}^n(I)$ et $f, g \in \mathcal{D}^{n+1}(I) \subset \mathcal{D}^n(I)$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a alors $f' \times g \in \mathcal{D}^n(I)$, $f \times g' \in \mathcal{D}^n(I)$ et :

$$\begin{aligned}(f' \times g)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f')^{(k)} \times g^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}\end{aligned}$$

De même,

$$(f \times g')^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}$$

On en déduit donc que $(f \times g)' \in \mathcal{D}^n(I)$ et :

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= (f'g)^{(n)} + (fg')^{(n)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g^{(0)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n+1}{0} = 1$. Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$ et achève la récurrence. ⊠

Remarque : *vous reverrez dans le cours de mathématiques spéciales* 1 *que cette formule s'applique pour n'importe quel opérateur bilinéaire* $\times$*. Remarquez également que pour* $n = 1$*, on a déjà vu que cela marchait pour le produit vectoriel ou le déterminant. Autrement dit, si* f *et* g *sont dérivables à valeurs dans* $\mathbb{R}^3$*, alors* $f \wedge g$ *est dérivable et* $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$ *(exercice : le revérifier).*

Exemple 1.2.4.11 Calculons pour $n \in \mathbb{N}^\star$ la dérivée n-ième de $u : x \longmapsto (x^2 + 3x - 1)e^{-x}$.

Tout d'abord, on peut remarquer que cela a un sens puisque $x \longmapsto (x^2 + 3x - 1)e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions qui le sont). On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 1$ et $g(x) = e^{-x}$. On a alors d'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ u^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \binom{n}{0} f^{(0}(x) g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f'(x) g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} f''(x) g^{(n-2)}(x) \\ &= (x^2 + 3x - 1) \times (-1)^n e^{-x} + n(2x + 3) \times (-1)^{n-1} e^{-x} \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 \times (-1)^{n-2} e^{-x} \\ &= (-1)^n (x^2 + (3 - 2n)x + n^2 - 4n - 1) e^{-x}\end{aligned}$$

Remarque : *il n'est pas toujours efficace d'appliquer « bêtement » sans réfléchir la formule de Leibniz. Par exemple, pour* $n \in \mathbb{N}^\star$*, pour dériver* n *fois* $u : x \longmapsto \sin(x)e^x$*, on obtient une expression compliquée en appliquant la formule de Leibniz, alors qu'en remarquant que pour* $x \in \mathbb{R}$*,* $u(x) = \Im m(e^{(i+1)x})$*, on peut calculer la dérivée* n*-ième bien plus efficacement.*

Exercice 1.2.4.12 Calculer la dérivée n-ième de $P : x \mapsto x^n(1+x)^n$ de deux façons différentes. En identifiant le coefficient dominant de $P^{(n)}$, déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exemple 1.2.4.13 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$. Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ car c'est le produit de deux fonctions qui le sont. On note $u : x \longmapsto \ln(x)$ et $v : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x > 0$:

$$v^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad \text{et} \quad u^{(n+1)}(x) = v^{(n)}(x)$$

Il s'ensuit que si $n \in \mathbb{N}^\star$, alors :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left(\ln(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$$

Proposition 1.2.4.14 *Soient $n \geqslant 1$ et $f : I \longrightarrow J$ une bijection. On suppose que :*

(i) f est de classe $\mathcal{D}^n$ (respectivement $\mathcal{C}^n$) sur I ;

(ii) $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$.

Alors f^{-1}, la bijection réciproque de f, est de classe $\mathcal{D}^n$ (respectivement $\mathcal{C}^n$) sur J.

Preuve :

On démontre le résultat par récurrence sur $n \geqslant 1$.

Initialisation :

Pour $n = 1$, c'est le théorème de dérivabilité de la bijection réciproque (proposition 1.2.3.1). Si on rajoute $\mathcal{C}^1$, il n'y a qu'à rajouter que f' est alors continue et ne s'annule pas, f^{-1} est également continue donc $\dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est continue, c'est-à-dire $(f^{-1})'$ est continue sur J.

Hérédité :

On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$ et on montre qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soit f une bijection de I dans J, de classe $\mathcal{D}^{n+1}$ (respectivement $\mathcal{C}^{n+1}$) et telle que f' ne s'annule pas sur I. Puisque $\mathcal{D}^{n+1} \subset \mathcal{D}^1$, la propriété au rang 1 assure que f^{-1} est dérivable sur J et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(J)$ (respectivement $\mathcal{C}^n$) et de plus, $f' \in \mathcal{D}^n(I)$ (respectivement $\mathcal{C}^n$). Par conséquent, $f' \circ f^{-1}$ est $\mathcal{D}^n$ sur J (respectivement $\mathcal{C}^n$) et ne s'annule pas par hypothèse. Il s'ensuit que $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{D}^n$ sur J (respectivement $\mathcal{C}^n$), c'est-à-dire $f^{-1} \in \mathcal{D}^{n+1}(J)$ (respectivement $\mathcal{C}^{n+1}(J)$). Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$ et achève la récurrence.

⊠

1.3 Étude globale des fonctions dérivables à valeurs réelles

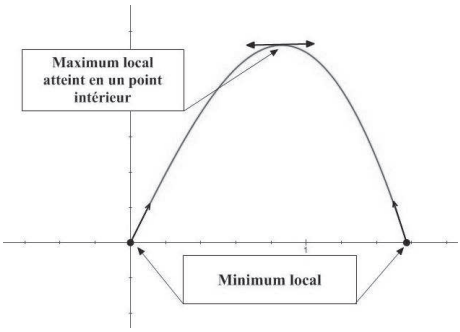
1.3.1 Caractérisation des extrema locaux

Proposition 1.3.1.1 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f admet un extremum local en a avec $a \in \overset{\circ}{I}$ et que f dérivable en a. Alors :*

$$f'(a) = 0$$

Preuve :

Tout d'abord, on peut comprendre ce résultat graphiquement.



Montrons à présent le résultat.

• Tout d'abord, quitte à travailler avec $-f$, on peut toujours supposer que f admet un maximum local en $a \in \overset{\circ}{I}$.

• Par définition, il existe un voisinage ouvert V de A tel que $f(a)$ est le maximum de f sur $I \cap V$. De plus, puisque $a \in \overset{\circ}{I}$, il existe $\alpha > 0$ tel que $]a - \alpha, a + \alpha[\subset I \cap V$. On a alors :

- pour tout $x \in]a, a + \alpha[$, $f(x) \leqslant f(a)$ et donc $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$. En passant à la limite quand x tend vers a (licite puisque f est dérivable en a), on obtient : $f'(a) \leqslant 0$;
- pour tout $x \in]a - \alpha, a[$, $f(x) \leqslant f(a)$ et $x - a < 0$. Par suite, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$. À nouveau, en passant à la limite, on obtient $f'(a) \geqslant 0$.

Ce qui prouve que $f'(a) = 0$. ⊠

⚠ **Attention :** d'abord, n'oubliez pas la condition importante $a \in \overset{\circ}{I}$! Dans l'exemple ci-dessus, la fonction f admet deux minima locaux en $a = 0$ et $a = \frac{\pi}{2}$ mais pourtant la dérivée en ces points n'est pas nulle parce que ce sont des bornes de l'intervalle !

Remarque : *lorsque $a = \inf I$ et f admet un extremum local en a, en reprenant la démonstration précédente, on peut seulement montrer que $f'(a) \geqslant 0$ (si f admet un minimum local en a) et $f'(a) \leqslant 0$ (si f admet un maximum local en a), et inversement lorsque $a = \sup I$.*

⚠ **Attention :** la réciproque est très fausse ! $f'(a) = 0$ ne veut absolument pas dire que f admet un extremum local en a. Par exemple, $f : x \longmapsto x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais $f(0) = 0$ n'est ni un maximum, ni un minimum de f sur tout intervalle $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$.

Remarques :

- *on dit souvent que la propriété précédente est la recherche de condition nécessaire d'ordre 1 pour l'existence d'un extremum ;*
- *on verra un peu plus loin (après les formules de Taylor et les développements limités) les conditions suffisantes d'ordre 2 (que vous avez certainement déjà utilisées en physique). En un point intérieur a tel que $f'(a) = 0$, si $f''(a) > 0$ (respectivement $f''(a) < 0$), alors f admet un minimum (respectivement maximum) local en a ;*
- *un point intérieur a tel que $f'(a) = 0$ est aussi appelé un point critique de f. Si de plus f n'a pas d'extremum en a, on dit aussi que a est un point selle (ou col) de f. Mais ce vocabulaire est plutôt consacré aux fonctions de plusieurs variables ;*
- *enfin, notez que la proposition n'a aucun sens si f est à valeurs complexes car dans ce cas, la notion de minimum (ou de maximum) local n'a aucun sens.*

1.3.2 Théorème de Rolle

Théorème 1.3.2.1 (Rolle) *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $a < b$ (deux réels). On suppose que :*

(i) f est continue sur le segment $[a, b]$ à valeurs réelles ;

(ii) f est dérivable sur $]a, b[$;

(iii) $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

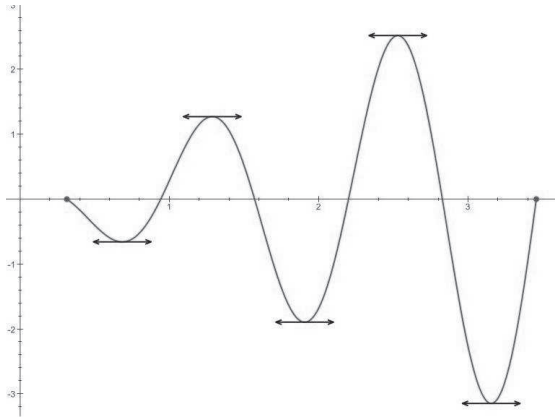
Remarques importantes :

- *le théorème de Rolle, tout comme le théorème des valeurs intermédiaires, est absolument fondamental ! C'est le deuxième théorème qu'on a vu qui garantit l'existence d'un nombre vérifiant une certaine propriété sans pour autant savoir le calculer ou le déterminer !*
- *Attention aux hypothèses ! On suppose f continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (et bien entendu $f(a) = f(b)$). Vous devez donc écrire ces hypothèses précises pour appliquer le théorème de Rolle.*

- *Remarquez que le théorème de Rolle assure l'existence d'au moins un $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$! Il ne dit absolument pas qu'il est unique !*
- *Enfin, attention, ce théorème est faux si f est à valeurs complexes ! C'est pour cela qu'on insiste dans la première hypothèse sur « à valeurs réelles ». Par exemple, $f : x \longmapsto e^{ix}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$ et $f(0) = f(2\pi) = 1$. Pourtant, pour tout réel $x \in]0, 2\pi[$, $f'(x) = ie^{ix} \neq 0$!*

Preuve :

Graphiquement, le résultat est assez simple à comprendre :



L'idée de la preuve est très simple : on montre que f admet alors nécessairement un extremum local (en fait global) qui est atteint en un point $c \in]a,b[$.

• Dans un premier temps, f est continue sur le segment (non vide) $[a,b]$. Par conséquent, f est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$. On pose alors $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

• Dans un second temps, on distingue deux cas :

∗ Si $m = M$, alors f est constante sur $[a,b]$ et par suite $f' = 0$ sur $]a,b[$ et tout $c \in]a,b[$ convient.

∗ Si $m \neq M$ (et donc $m < M$), il existe $c \in [a,b]$ et $c' \in [a,b]$ tels que $m = f(c)$ et $M = f(c')$.
Puisque $f(a) = f(b)$ et $m \neq M$, alors soit $c \in]a,b[$, soit $c' \in]a,b[$. Quitte à échanger les noms, on peut supposer que $c \in]a,b[$.
Alors, f admet un extremum global (*a fortiori* local) en $c \in]a,b[$ (c est donc à l'intérieur de $[a,b]$) et f est dérivable en c. Par conséquent, $f'(c) = 0$.

⊠

Exemple 1.3.2.2 Soient $0 < a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, à valeurs réelles vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Montrons qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(c)}{c} = f'(c)$. Pour cela, on considère la fonction $g : x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$. Alors g est continue sur $[a, b]$ (puisque $0 \notin [a, b]$) à valeurs réelles, dérivable sur $]a, b[$ et $g(a) = g(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $cf'(c) - f(c) = 0$, soit encore $\frac{f(c)}{c} = f'(c)$.

Exercice 1.3.2.3 Montrer que dans l'exercice précédent, si $a = 0$ et $f'(0) = 0$, alors le résultat reste vrai. Est-ce encore valable si on suppose seulement $a = 0$ et f dérivable en 0 ?

► Méthode :

Lorsqu'on veut prouver l'existence d'un réel c vérifiant une propriété pour une fonction f, on peut :

1. regarder s'il s'agit d'appliquer le théorème de continuité sur un segment (autrement dit l'existence d'un minimum et d'un maximum pour la fonction) ou le théorème des valeurs intermédiaires ;
2. essayer de voir s'il s'agit d'appliquer le théorème de Rolle (c'est souvent le cas dès qu'il y a une dérivée (au moins première qui intervient)). Dans ce cas, pour trouver « la » fonction à laquelle on applique le théorème, on intègre l'égalité demandée par rapport à la variable « c » ;
3. appliquer le théorème de Rolle généralisé ou le théorème de Taylor-Lagrange (voir les paragraphes suivants). Dans ce cas, on trouve une fonction « g » à qui on applique le théorème soit en intégrant par rapport à « c » (souvent compliqué) soit en transformant le « a » ou le « b » en une variable.

Remarque : *c'est par cette méthode qu'on trouve « la fonction g » dans l'exemple précédent. En effet, $\frac{f(c)}{c} = f'(c)$ est équivalent à $\frac{cf'(c)-f(c)}{c^2} = 0$ et en intégrant par rapport à c, une primitive de $c \longmapsto \frac{cf'(c)-f(c)}{c^2}$ est $c \longmapsto \frac{f(c)}{c}$.*

Exercice 1.3.2.4 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]0, 1[)$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c)f'(c) = \frac{1}{2}$.

Exercice 1.3.2.5 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$.

1. On suppose que P est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$. Montrer que P' est aussi scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.
2. On suppose que P est scindé dans $\mathbb{R}$. P' est-il scindé dans $\mathbb{R}$?

Remarque : *on peut généraliser le théorème de Rolle. Pour cela, il faut définir, comme pour les polynômes, la notion « multiplicité d'une racine ». Petite différence de vocabulaire, pour une fonction, on ne parle pas de racine mais de zéro.*

Définition 1.3.2.6 Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On dit que :

- a est un zéro de la fonction f d'ordre supérieur ou égal à n si :
  (i) f est $(n-1)$ fois dérivable en a ;
  (ii) pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f^{(k)}(a) = 0$
- a est un zéro de f d'ordre n (exactement) si :
  (i) f est n fois dérivable en a ;
  (ii) $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f^{(k)}(a) = 0$;
  (iii) $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Remarques :

- *on constate que dans cette définition, on retrouve la caractérisation de la multiplicité d'une racine d'un polynôme à la différence près que pour une fonction, on ne peut pas garantir l'existence des dérivées successives en a (contrairement aux polynômes) et c'est pour cela qu'on impose l'existence dans la définition ;*
- *autrement dit, si P est un polynôme alors a est une racine de P de multiplicité au moins n si et seulement si a est un zéro d'ordre au moins n pour la fonction $\tilde{P}$;*
- *cette définition se généralise aussi aux fonctions d'une variable complexe mais cela sera étudié dans le cours de mathématiques spéciales 2.*

Exemple 1.3.2.7 Les zéros de la fonction sinus sont les $k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) et ce sont tous des zéros simples (c'est-à-dire de multiplicité 1) car $\sin'(k\pi) = \cos(k\pi) \neq 0$.

Exemple 1.3.2.8 La fonction $f : x \longmapsto \tan(x) - x$ admet 0 pour zéro et sa multiplicité est 3 car $f(0) = 0$, $f'(0) = \tan'(0) - 1 = \tan^2(0) = 0$, $f''(0) = 2\tan'(0)\tan(0) = 0$ mais $f^{(3)}(0) = 2 \neq 0$.

Exemple 1.3.2.9 On montrera en exercice que la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. 0 est donc un zéro de la fonction f et ce zéro est de multiplicité infinie (bien que f ne soit pas identiquement nulle).

Remarques :

- *par convention, si $f(a) \neq 0$, on dit que a est un zéro de multiplicité nulle ;*
- *je vous laisse vérifier que si f est dérivable et si a est un zéro de f de multiplicité au moins n (respectivement exactement n) avec $n \geqslant 1$, alors a est un zéro de f' de multiplicité au moins $n-1$ (respectivement exactement $n-1$).*

Théorème 1.3.2.10 (Généralisation du théorème de Rolle) *Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle d'intérieur non vide et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :*

(i) $f \in \mathcal{C}^n(I)$;

(ii) $f \in \mathcal{D}^{n+1}(\overset{\circ}{I})$;

(iii) f *s'annule au moins* $n+2$ *fois (en comptant les multiplicités).*

Alors $f^{(n+1)}$ *s'annule au moins une fois et plus exactement :*

- *soit* f *a un unique zéro d'ordre au moins* $n+2$: $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n+1)}(a) = 0$;
- *soit* $f^{(n+1)}$ *s'annule au moins une fois sur* $\overset{\circ}{I}$ *(se produit lorsque* f *s'annule en au moins deux points distincts).*

Remarques :

- *en fait, compte tenu des hypothèses du théorème, il n'y a qu'une seule conclusion qui est* $f^{(n+1)}$ *s'annule au moins une fois dans l'intérieur de* I*. Ceci étant dit, la version donnée tient compte du fait que les bornes fermées de l'intervalle peuvent aussi être des zéros avec multiplicité. En clair, si* $f \in \mathcal{D}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$ *et si* f *a au moins* $n+2$ *zéros avec multiplicité et au moins deux zéros distincts, alors* $f^{(n+1)}$ *s'annule au moins une fois dans* $]a,b[$;
- *en général, on aura des fonctions de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *et on n'aura pas besoin de distinguer* $\mathcal{C}^n$ *et* $\mathcal{D}^{n+1}$;
- *la démonstration est très importante. C'est une méthode que vous serez amené à reproduire dans de nombreuses situations.*

Preuve :

On procède par récurrence sur n.

Initialisation :

Pour $n = 0$, on suppose que f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Il y a alors deux cas :

- soit f admet un unique zéro au moins double et le résultat est acquis ;
- ou bien f s'annule en au moins deux points $a < b$. Dans ce cas, il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à f sur $[a,b] \subset I$ et on conclut qu'il existe $c \in]a,b[\subset \overset{\circ}{I}$ tel que $f'(c) = 0$.

Ce qui prouve que la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ et on montre qu'elle est vraie au rang $n+1$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1} \cap \mathcal{D}^{n+2}$ s'annulant $n+3$ fois au moins sur I.
Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ des zéros distincts de f (avec $p \in \mathbb{N}^\star$) où pour $i \in [\![1, p]\!]$, a_i est un zéro de multiplicité au moins m_i, avec $m_i \geqslant 1$ et tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} m_i \geqslant n+3$$

On a alors deux cas :

- si $p = 1$, f a donc un zéro de multiplicité au moins $n+3$;
- sinon $p \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$.
  La fonction f est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$, dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$ et $f(a_k) = 0 = f(a_{k+1})$. D'après le théorème de Rolle, il existe alors un zéro b_k de f' dans l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$.

On en déduit que f' possède :

$*$ les a_i pour zéros, de multiplicité $m_i - 1$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$;

$*$ les b_i pour zéros, de multiplicité au moins 1, pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$;

Ces nombres réels étant deux à deux distincts, on conclut que f' possède au moins

$$\sum_{i=1}^{p}(m_i - 1) \quad + \quad (p-1) \geqslant n+2 \text{ zéros comptés avec multiplicité}$$

Et de plus, au moins deux d'entre eux sont distincts. On applique alors l'hypothèse de récurrence à f' qui est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et aussi $\mathcal{D}^{n+1}$ sur $\overset{\circ}{I}$. Il existe $c \in \overset{\circ}{I}$ tel que $(f')^{(n+1)}(c) = 0$, c'est-à-dire $f^{(n+2)}(c) = 0$.

Ce qui prouve que la propriété est vraie au rang $n+1$ et achève la démonstration par récurrence. ⊠

Exemple 1.3.2.11 Soit f une fonction trois fois dérivable sur $[a, b]$. Montrons qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\left(f'(b) + f'(a)\right) - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c)$$

La méthode ici est assez classique. On transforme « a » ou « b » en une variable (en fait dans cet exemple, les rôles de a et b sont symétriques donc le choix de l'un ou l'autre n'est pas important) et on applique le théorème de Rolle (ou Rolle généralisé) en remplaçant le terme inconnu $f^{(3)}(c)$ par une constante λ que l'on fixera ultérieurement (de sorte que la nouvelle fonction ait le « bon nombre » de zéros).
On pose pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in [a, b] \ , \ g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}\left(f'(x) + f'(a)\right) + \frac{\lambda}{12}(x-a)^3$$

Puisque f est trois fois dérivable sur $[a,b]$, g est deux fois dérivable sur $[a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}(f'(x)-f'(a)) - \frac{x-a}{2}f''(x) + \frac{\lambda}{4}(x-a)^2 \\ g''(x) &= -\frac{x-a}{2}f^{(3)}(x) + \frac{\lambda}{2}(x-a) \\ &= -\frac{x-a}{2}\left(f^{(3)}(x) - \lambda\right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, il est clair que $g(a) = 0$ et d'après le calcul précédent, $g'(a) = 0$ (et $g''(a) = 0$ mais on n'en tient pas compte car on cherche un zéro de g'' dans l'intervalle ouvert $]a,b[$). On choisit alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g(b) = 0$ (ce qui est possible car $b - a \neq 0$). Pour un tel choix de λ, on a alors :

- $g \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^2(]a,b[)$;
- g possède au moins 3 zéros (comptés avec multiplicités) dont 2 sont distincts.

D'après le théorème de Rolle généralisé, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g''(c) = 0$. On a alors $f^{(3)}(c) - \lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda = f^{(3)}(c)$.
Il reste alors à remplacer sachant que cette valeur de λ a été choisie de sorte que $g(b) = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} 0 &= g(b) \\ &= f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}\left(f'(b)+f'(a)\right) + \frac{\lambda}{12}(b-a)^3 \\ &= f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}\left(f'(b)+f'(a)\right) + \frac{f^{(3)}(c)}{12}(b-a)^3 \end{aligned}$$

D'où l'existence de $c \in]a,b[$ tel que $f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\left(f'(b)+f'(a)\right) - \frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(c)$.

Remarque : *la méthode utilisée dans cet exemple est importante (et était mentionnée dans le point méthode). On va l'appliquer à plusieurs reprises dans la suite.*

1.3.3 Égalité et inégalité des accroissements finis

Théorème 1.3.3.1 (Égalité des accroissements finis) *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles et dérivable sur $]a,b[$. Alors :*

$$\exists c \in]a,b[\ ,\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Interprétation graphique : *il y a au moins une tangente parallèle à la corde reliant les points $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$.*

Interprétation cinématique : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *est la vitesse moyenne sur* $[a,b]$. *Il y a donc au moins un instant* c *où la vitesse instantanée* $f'(c)$ *est égale à la vitesse moyenne.*

Preuve :

On applique la méthode décrite dans le point méthode. Si le « c » est la variable, on intègre entre « a et x » ce qui donne la fonction g définie par :

$$\forall x \in [a,b] \ , \ g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

La fonction g est continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, à valeurs réelles. De plus, $g(a) = 0$ et le calcul direct donne $g(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

⊠

Remarque : *on pouvait aussi, comme dans le point méthode, remplacer* $f'(c)$ *par une constante* λ *et utiliser « b » comme variable. Dans ce cas, on aurait posé :*

$$\forall x \in [a,b] \ , \ h(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x-a)$$

On choisit alors λ *de façon à ce que* $h(b) = 0$ *(pour pouvoir appliquer le théorème de Rolle) et on conclut alors de la même façon. Remarquez qu'ici le raisonnement est identique car on retrouve* $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *et donc* $g = h$.

Corollaire 1.3.3.2 *Soit* f *continue sur* $[a,b]$, *dérivable sur* $]a,b[$ *et à valeurs réelles.*

(i) On suppose qu'il existe deux réels m *et* M *tels que :* $\forall x \in]a,b[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$. *Alors :*

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

(ii) On suppose qu'il existe $k \in [0,+\infty[$ *tel que* $\forall x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leqslant k$. *Alors* f *est* k*-lipschitzienne et en particulier :*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a| \quad \textbf{\textit{(inégalité des accroissements finis)}}$$

Preuve :

C'est une conséquence directe de l'égalité des accroissements finis. En effet, avec les hypothèses du corollaire, on peut appliquer l'égalité des accroissements finis à f et il existe $c \in]a,b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Si on suppose (i), $f'(c) \in [m,M]$ et $b-a > 0$ donc :

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

⊠

Remarque : *si on suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors le résultat est beaucoup plus « simple » car il s'agit simplement de la propriété de croissance de l'intégrale. En effet, on a alors :*

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x$$

Mais l'inégalité des accroissements finis est beaucoup plus forte car les hypothèses sur f sont bien plus faibles !

Exercice 1.3.3.3 Montrer que si f est continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles, dérivable sur $]a,b[$ et si f' ne s'annule pas, alors f est injective.

Exercice 1.3.3.4 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que :

$$f \text{ est lipschitzienne sur } I \iff f' \text{ est bornée sur } I$$

Corollaire 1.3.3.5 *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors f est lipschitzienne sur $[a,b]$.*

Preuve :

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors f' est continue sur le segment $[a,b]$. Par conséquent, f' est bornée sur $[a,b]$. D'où le résultat, en appliquant le (ii) de la proposition précédente. ⊠

Exercice 1.3.3.6 Il y a une petite arnaque dans la preuve (et l'énoncé du corollaire) : laquelle et pourquoi ce n'est pas grave ? Indication : lire la proposition suivante...

⚠ **Attention :** ce corollaire est très faux si on ne se place pas sur un segment ! Par exemple, la fonction carré est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas du tout lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

⚠ **Attention :** le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis sont **faux dans $\mathbb{C}$** . Par exemple, si on considère $f : x \longmapsto e^{ix}$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $f(0) = f(2\pi) = 1$ et pourtant il n'existe aucun réel c tel que $f'(c) = 0$ ou tel que $f(2\pi) - f(0) = (2\pi - 0)f'(c)$.

Dans le cours sur les limites et la continuité, on a vu que les théorèmes d'existence sont faux pour les fonctions à valeurs complexes mais qu'en revanche, les inégalités en valeur absolue se prolongent aux fonctions à valeurs complexes. Ceci est donc aussi valable pour les théorèmes concernant les dérivées. En particulier, on a l'inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes (ce qui explique pourquoi le dernier corollaire est valable pour f à valeurs réelles ou complexes).

Théorème 1.3.3.7 (Inégalité des accroissements finis dans $\mathbb{C}$) *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe un réel $K \geqslant 0$ tel que $|f'| \leqslant K$ sur $]a,b[$. Alors :*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant K|b-a|$$

Preuve :

Si $f(a) = f(b)$, alors l'inégalité est évidente. Sinon $f(b) - f(a) \neq 0$ et on choisit $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de $f(b) - f(a)$. Alors, par définition d'un argument, $f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|e^{i\theta}$ et on considère donc la fonction g définie sur $[a,b]$ par :

$$\forall x \in [a,b] \ , \ g(x) = \Re e\left(e^{-i\theta} f(x)\right)$$

De cette façon, $|f(b) - f(a)| = (f(b) - f(a))e^{-i\theta}$ et en prenant la partie réelle, on obtient :

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \Re e\left(f(b)e^{-i\theta} - f(a)e^{-i\theta}\right) \\ &= \Re e\left(f(b)e^{-i\theta}\right) - \Re e\left(f(a)e^{-i\theta}\right) \\ &= g(b) - g(a) \end{aligned}$$

La fonction g est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et à valeurs réelles. De plus,

$$\forall x \in]a,b[\ , \ |g'(x)| = |\Re e(e^{-i\theta} f'(x))| \leqslant |e^{-i\theta} f'(x)| = |f'(x)| \leqslant K$$

D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à g :

$$|g(b) - g(a)| \leqslant K(b-a) \quad \text{c'est-à-dire} \quad |f(b) - f(a)| \leqslant K(b-a)$$

⊠

Remarque : *dans cette preuve, il n'est pas nécessaire de distinguer le cas $f(b) - f(a) = 0$. Si $z \in \mathbb{C}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ (même si $z = 0$) mais on ne peut pas dire que c'est un argument de z lorsque $z = 0$ (par convention, 0 n'a pas d'argument).*

Exemple 1.3.3.8 Soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ tels que $\Re e(z) \leqslant 0$ et $\Re e(z') \leqslant 0$. Montrons que :

$$|\exp(z) - \exp(z')| \leqslant |z - z'|$$

Ici, le « piège » est de poser $f(z) = \exp(z)$ car dans de cas, f est une fonction d'une variable complexe et ce type de fonction n'a pas encore été étudié. Pour contourner le problème, on va étudier cette fonction sur le segment $[z,z']$, ce qui permet d'introduire une fonction d'une variable réelle $t \in [0,1]$. On pose :

$$\forall t \in [0,1] \ , \ g(t) = \exp(z + t(z' - z))$$

g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ (et à valeurs complexes), *a fortiori* elle est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. De plus, pour tout $t \in]0,1[$:

$$|g'(t)| = |(z'-z)g(t)| = |z'-z| \times e^{\Re e(z)+t(\Re e(z')-\Re e(z))} \leqslant |z'-z|$$

(la dernière inégalité provenant du fait que $]-\infty,0]$ (qui est un intervalle) est une partie convexe de $\mathbb{R}$ et donc $t\Re e(z') + (1-t)\Re e(z) \leqslant 0$). D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|g(1)-g(0)| \leqslant |z'-z| \times (1-0) \quad \text{c'est-à-dire} \quad |\exp(z') - \exp(z)| \leqslant |z'-z|$$

Remarque : *cette méthode, à savoir d'étudier la fonction de départ sur un « segment » permettant ainsi d'introduire une fonction d'une variable réelle $t \in [0,1]$, est très importante. Cette « technique » sera utilisée régulièrement pour les fonctions de plusieurs variables (calcul différentiel) ou d'une variable complexe (ou d'une variable « vectorielle »).*

1.3.4 Application aux variations d'une fonction

Dans ce paragraphe, on va énoncer une propriété que vous connaissez depuis longtemps et que vous avez certainement appliquée de nombreuses fois. Mais pour votre plus grand plaisir, on va *enfin* la démontrer.

Proposition 1.3.4.1 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I (I est un intervalle d'intérieur non vide). Alors :*

(i) f est croissante sur $I \iff \forall x \in I\ ,\ f'(x) \geqslant 0$;

(ii) f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I\ ,\ f'(x) \leqslant 0$;

(iii) f est constante sur $I \iff \forall x \in I\ ,\ f'(x) = 0$;

(iv) f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ et $\{x \in I\ ,\ f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle non trivial ;

(v) f est strictement décroissante sur I si et seulement si $f' \leqslant 0$ et $\{x \in I\ ,\ f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle non trivial.

⚠ **Attention :** remarquez bien que la stricte monotonie ne suppose pas du tout que f' ne s'annule pas (pensez par exemple à $f : x \longmapsto x^3$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant $f'(0) = 0$) ! Le théorème affirme que la croissance stricte équivaut à $f' > 0$ sauf en un ensemble de points qui est d'intérieur vide, c'est-à-dire qui ne contient aucun intervalle.

⚠ **Attention :** une erreur grave et fréquente est la suivante : « si $f'(a) > 0$, alors f est croissante au voisinage de a ». Cette propriété est fausse si on ne suppose pas f de classe $\mathcal{C}^1$.

En effet, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f' est continue. On peut alors conclure que $f'(x) > 0$ pour tout x proche de a, ce qui entraîne que f est strictement croissante au voisinage de a.
En revanche, sans cette hypothèse, c'est faux. Par exemple, considérons f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{\pi} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = x\cos(\frac{1}{x}) + \frac{1}{\pi} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\pi} + O(x)$. Par suite, f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{\pi} > 0$. En revanche, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n\pi}\right) - f\left(\frac{1}{(n+1)\pi}\right) &= \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} + \frac{1}{n\pi^2} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2\pi^2} - \frac{1}{(n+1)\pi^2} \\ &= \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n\pi^2}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) \\ &= \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2(-1)^n + 1}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\left(f\left(\frac{1}{n\pi}\right) - f\left(\frac{1}{(n+1)\pi}\right)\right)$ n'est pas de signe constant et permet de conclure que f n'est pas croissante (ou décroissante) au voisinage de 0 (puisque la suite $(\frac{1}{n\pi})$ converge vers 0). N'oubliez pas de préciser l'hypothèse « f est de classe $\mathcal{C}^1$ » si vous souhaitez utiliser ce résultat !

Preuve de la proposition :

- Montrons (i).
  - $*$ Montrons $\Longrightarrow$
    On suppose que f est croissante sur I. Soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,
    $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$$
    Or, f est dérivable en a donc en passant à limite quand x tend vers a (limite à gauche si $a = \min I$ et limite à droite si $a = \max I$), on obtient $f'(a) \geqslant 0$.
    Ce qui prouve que $f' \geqslant 0$.
  - $*$ Montrons $\Longleftarrow$
    On suppose que $f' \geqslant 0$ sur I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, $[a,b] \subset I$. Par suite, f est continue sur $[a,b]$ (et à valeurs réelles) et dérivable sur $]a,b[$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$. Or, $b-a > 0$ et $f'(c) \geqslant 0$. Par conséquent, $f(a) \leqslant f(b)$ et f est croissante sur I.
- (ii) se déduit de (i) en considérant $-f$.

• (iii) est une conséquence directe de (i) et (ii) car f est constante sur I si et seulement si elle est croissante et décroissante sur I.

• Montrons (iv)

∗ Montrons $\Longrightarrow$

Si f est strictement croissante sur I, alors pour commencer, f est croissante sur I. D'après (i), on a alors $f' \geqslant 0$ sur I. On raisonne alors par l'absurde : si $E = \{x \in I \ , \ f'(x) = 0\}$ contient l'intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors f est continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$, donc d'après (iii), f est constante sur $[a, b]$. Ce qui contredit $f(a) < f(b)$.

∗ $\Longleftarrow$

On suppose que $f' \geqslant 0$ sur I et que $E = \{x \in I \ , \ f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle non trivial. Alors, d'une part, $f' \geqslant 0$ donc f est croissante d'après (i). Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Si $f(a) = f(b)$, alors f est constante sur $[a, b]$ et f' est nulle sur $]a, b[$ ce qui est absurde. Par suite, $f(a) \neq f(b)$ et donc f est bien strictement croissante.

• (v) se déduit de (iv) en considérant $-f$.

⊠

Remarque : *bien entendu, cette proposition est ce qu'on applique dans la pratique pour étudier les variations d'une fonction (ou pour établir certaines inégalités).*

Exemple 1.3.4.2 La fonction $f : x \longmapsto x - \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 1 - \cos(x)$. On en déduit donc que $f' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et que f' ne s'annule qu'aux points $2n\pi$ (avec $n \in \mathbb{Z}$). Par conséquent, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque : *notez bien que dans l'exemple précédent, f' s'annule en une infinité de points ! Cela n'empêche pas f d'être strictement croissante.*

On peut terminer avec un corollaire bien moins précis que la proposition mais qui est suffisant dans la majeure partie des cas pratiques.

Corollaire 1.3.4.3 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I. On suppose que $f' \geqslant 0$ sur I et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points. Alors f est strictement croissante sur I.*

Remarque : *en mathématiques, des inégalités strictes sont toujours plus « délicates » à justifier. En général, si l'inégalité large suffit, alors on s'en contente (par exemple pour appliquer le théorème de la limite monotone, ou le théorème des gendarmes ou etc.). Pour les inégalités strictes, il est parfois plus facile d'appliquer une égalité des accroissements finis (ou la formule d'égalité de Taylor-Lagrange - voir paragraphes suivants).*

1.3.5 Applications aux suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Proposition 1.3.5.1 *Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle qu'il existe $k \in [0,1[$ vérifiant :*

$$\forall x \in]a,b[\ ,\ |f'(x)| \leqslant k$$

Alors :

(i) f est k-contractante ;

(ii) l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ dans $[a,b]$;

(iii) la suite (u_n) définie par $u_0 \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ. Plus précisément, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|$$

Preuve :

• La propriété (i) a déjà été démontrée (corollaire 1.3.3.2).

• Montrons (ii).
Pour cela, on pose pour $x \in [a,b]$, $g(x) = f(x) - x$. Alors g est dérivable sur $]a,b[$ et pour tout $x \in]a,b[$, $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$. Par suite, g est strictement décroissante sur $[a,b]$. De plus, $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. On en déduit donc que l'équation $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ dans $[a,b]$.

• Montrons enfin (iii).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme dans l'énoncé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k|u_n - \ell|$$

(d'après (i), f est k-lipschitzienne). On montre alors par récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|$$

⊠

Remarques :

- *vous reverrez d'autres méthodes d'étude (et de recherche de développement asymptotique) de suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ dans le cours avancé sur les séries (cours de mathématiques spéciales 1) ;*
- *je vous laisse démontrer que le résultat reste vrai si on remplace $[a,b]$ par $\mathbb{R}$ tout entier.*

Exercice 1.3.5.2 Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = 3 + \frac{1}{4}\sin(u_n)$$

1.3.6 Théorème de prolongement

Proposition 1.3.6.1 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, dérivable sur $]a,b]$. On suppose que f' admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers a. Alors f est dérivable en a, $f'(a)=\ell$.*

Preuve :

• Tout d'abord, quitte à considérer la fonction g définie pour $x\in[a,b]$ par $g(x)=f(x)-\ell(x-a)$, on peut supposer que $\ell=0$.

• Montrons alors que f est dérivable en a et que $f'(a)=0$.
Soit $\varepsilon>0$. Par définition de la limite, il existe $\alpha>0$ tel que :

$$\forall c\in\,]a,a+\alpha[\ ,\ |f'(c)|\leqslant\varepsilon$$

Soit $x\in\,]a,a+\alpha[$. f étant continue sur $[a,x]$, dérivable sur $]a,x[$ et $|f'|\leqslant\varepsilon$ sur $]a,x[$, on a d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(x)-f(a)|\leqslant\varepsilon|x-a| \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|\leqslant\varepsilon$$

Ce qui prouve que f est dérivable en a et $f'(a)=0$.

⊠

Corollaire 1.3.6.2 *Si $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})\cap\mathcal{C}^1(]a,b])$ et si f' admet une limite (finie) ℓ en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $f'(a)=\ell$.*

Remarque : *ce corollaire est « pratique » et est souvent utilisé mais n'est pas un théorème de prolongement car la fonction f est déjà définie sur $[a,b]$. Le « vrai théorème de prolongement » est donné ici en exercice.*

Exercice 1.3.6.3 Soit f une fonction dérivable sur $]a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que f' a une limite finie ℓ en a. Montrons que f se prolonge alors en une fonction $\tilde{f}$ dérivable sur $[a,b]$.

1. Montrer qu'on peut toujours supposer que f est à valeurs réelles, ce que l'on fait.
2. Justifier qu'on peut toujours supposer que $\ell\geqslant 0$.
3. On suppose que $\ell>0$.
   (a) Montrer f est strictement croissante au voisinage de a.
   (b) En déduire que f se prolonge par continuité en a et conclure.
4. Montrer que le résultat pour $\ell=0$ se déduit du cas précédent.

Les théorèmes suivants, bien qu'énoncés avec des hypothèses fortes (c'est-à-dire qu'on peut donner des versions plus faibles), sont des théorèmes pratiques qui seront beaucoup utilisés dans le chapitre des équations différentielles (cours de mathématiques spéciales 2).

Théorème 1.3.6.4 (Prolongement $\mathcal{C}^1$) *Soit $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :*

(i) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$;

(ii) f et f' admettent des limites finies en a.

Alors f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Remarque : *l'exercice précédent montre que la condition « f admet une limite finie » est inutile mais dans la pratique, on appliquera néanmoins ce théorème.*

Preuve :

• Puisque f admet une limite finie en a, f se prolonge par continuité au point a. Notons $\tilde{f}$ ce prolongement.

• $\tilde{f}$ est continue sur $[a,b]$, $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$ et par hypothèse, $\tilde{f}'$ admet une limite finie en a. D'après le corollaire précédent, $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. ⊠

Théorème 1.3.6.5 (Prolongement $\mathcal{C}^p$) *Soient $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}^\star$. Si :*

(i) $f \in \mathcal{C}^p(]a,b], \mathbb{K})$;

(ii) pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $f^{(k)}$ admet une limite finie en a.

Alors f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b]$.

Preuve :

On procède par récurrence sur $p \geqslant 1$. L'initialisation est le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ et dans l'hérédité, on montre que f se prolonge en $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur le segment puis on applique le faux théorème de prolongement (proposition 1.3.6.1) $\mathcal{C}^1$ à $\tilde{f}^{(p)}$. Les détails sont laissés en exercice. ⊠

Remarques :

- *à nouveau, ce théorème pratique donne des conditions trop fortes. Je vous laisse montrer en exercice (en procédant par récurrence et en utilisant l'exercice 1.3.6.3) que si f est $\mathcal{D}^p$ sur $]a,b]$ ($p \geqslant 1$) et si $f^{(p)}$ admet une limite finie en a, alors f se prolonge en $\tilde{f}$ qui est $\mathcal{D}^p$ sur $[a,b]$ (autrement dit, il suffit que la dernière dérivée admette une limite finie pour pouvoir conclure) ;*

- *si on suppose $f \in \mathcal{C}^p(]a,b])$ et $f^{(p)}$ admet une limite finie en a, la démonstration (comme pour le point précédent de la remarque) devient beaucoup plus simple car il s'agit simplement de prolonger en une fonction continue sur le segment et ce prolongement est alors intégrable sur $[a,b]$. Mais ceci utilise les propriétés du cours d'intégration ;*
- *bien entendu, ce théorème s'applique également si c'est la borne « b » qui est ouverte ;*
- *ce théorème est aussi valable si « $p = \infty$ » (prolongement $\mathcal{C}^\infty$) ;*
- *attention si vous voulez appliquer ces théorèmes sur $I \setminus \{a\}$ (autrement dit, en un point intérieur) ! Dans ce cas, il ne faut pas oublier de montrer l'existence de toutes les limites à droite et à gauche et vérifier les égalités $f^{(k)}(a^-) = f^{(k)}(a^+)$;*
- *ce théorème est dans la pratique utilisé pour $p = 1$ et $p = 2$ dans les équations différentielles (puisqu'on sera souvent amené à considérer des équations différentielles scalaires d'ordre 1 ou 2).*

Exemple 1.3.6.6 On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

On veut montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

• On peut commencer par remarquer qu'il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^\star$.

• Il est aussi évident que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ admet une limite finie à gauche en 0 et que $f^{(n)}(0^-) = 0$ (puisque f est constante (égale à 0 pour $n = 0$) sur $]-\infty, 0]$).

• Ensuite, on montre par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x > 0\ ,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Initialisation :

Pour $n = 0$, il suffit de poser $P_0 = 1$ et la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ et on montre qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in]0,+\infty[\ ,\ f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

En dérivant une fois (licite car toutes les fonctions considérées sont dérivables sur $]0,+\infty[$), on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0,+\infty[\ ,\ f^{(n+1)}(x) &= -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= \left[\frac{1}{x^2}\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) - P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]\exp\left(-\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

On pose $P_{n+1} = X^2(P_n - P_n')$. Alors $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ et d'après le calcul précédent,

$$\forall x > 0 \ , \ f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$ et achève la récurrence.

• Par croissances comparées, on a alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Ce qui montre que : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f^{(n)}(x) = 0$.

• Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f^{(n)}(x) = 0$.

On conclut alors que f est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ f^{(n)}(0) = 0$.

Remarque : *dans le paragraphe suivant, on va introduire les différentes formules de Taylor (dont certaines ont sûrement déjà été vues avant ou bien introduites en physique). Dans l'exemple précédent, on constate que la « série de Taylor » de la fonction f en 0, c'est-à-dire $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est constante égale à 0 (car on vient de prouver que toutes les dérivées successives de f en 0 sont nulles). On en déduit donc que :*

- *la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge ;*
- $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0$ *;*
- *pour tout $x > 0$, $f(x) \neq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.*

Autrement dit, ceci doit répondre à une des questions que vous vous étiez posée : « est-ce que la série de Taylor d'une fonction converge toujours vers la fonction » ? La réponse est donc non ! C'est vrai pour « beaucoup de fonctions usuelles » mais c'est faux en général ! Vous verrez dans le cours sur les séries entières (cours de mathématiques spéciales 2) que :

- *pour des fonctions d'une variable réelle :*
  - *la série de Taylor en 0 peut diverger pour tout $x \neq 0$;*
  - *la série de Taylor peut converger mais pas nécessairement vers $f(x)$;*
- *pour les fonctions d'une variable complexe :*
  - *la série de Taylor converge toujours vers $f(z)$ (au voisinage de 0).*

C'est pour cela que dans les formules de Taylor pour les fonctions, on a un « reste » (contrairement aux polynômes où le reste est identiquement nul) qui peut s'exprimer sous forme d'intégrale (ce sera la formule de Taylor avec reste intégral) ou avec un o (formule de Taylor-Young) et ce reste ne tend par forcément vers 0.

1.4 Définition et propriétés des développements limités

La notion de développement limité et l'approche pratique (c'est-à-dire comme outil de calcul) a déjà été introduite. On va donc principalement se concentrer ici sur la « théorie » mais attention, si la pratique du calcul de développement limité n'est pas bien maîtrisée, le lecteur pourra (et devra) s'entraîner avec les exercices pratiques proposés à la fin du chapitre. Bien que calculatoire, c'est un outil indispensable à de nombreux domaines mathématiques (et scientifiques en général) et il est donc nécessaire de maîtriser le calcul pratique et efficace des développements limités.

Définition 1.4.0.1 Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ ($a \in I$ ou bien une borne finie de I) et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} P(h) + o(h^n)$$

Remarques :

- *par abus, on écrit souvent « f admet un $DL_n(a)$ » pour dire que f admet un développement limité à l'ordre n en a ;*
- *concrètement, f admet un $DL_n(a)$ s'il existe $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que :*

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)$$

(ce qu'on écrira souvent au brouillon sous la forme $f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$) ou encore,

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + h^n \varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

(et au brouillon $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$)

Exemple 1.4.0.2 Puisque exp est dérivable en 0, on sait qu'elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 donné par $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$ (car $\exp'(0) = 1$).

Exemple 1.4.0.3 Pour tout $|x| < 1$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Or, $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$. Donc, $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un DL à tout ordre n en 0.

Exemple 1.4.0.4 $g : x \longmapsto x^6 \sin(\frac{1}{x})$ admet un $DL_5(0)$ car $g(x) = O(x^6) = o(x^5)$.

Proposition 1.4.0.5 *Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, alors ce développement est unique.*

Preuve :

En effet, supposons que f admette deux développements limités à l'ordre n en a, c'est-à-dire que

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)$$

et

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + o(h^n)$$

avec $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, \cdots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Alors :

$$g(h) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) h^k \underset{h\to 0}{=} o(h^n)$$

Supposons qu'il existe au moins un entier $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \neq b_k$. Alors $\{k \in [\![0, n]\!] \ / \ a_k \neq b_k\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$: elle admet donc un plus petit élément. Soit $p = \min\{k \in [\![0, n]\!] \ / \ a_k \neq b_k\}$. Par définition :

$$g(h) \underset{h\to 0}{\sim} (b_p - a_p) h^p$$

Il s'ensuit que :

$$h^{-p} g(h) = a_p - b_p + o(1) \quad \text{et} \quad h^{-p} g(h) = o(h^{n-p})$$

Puisque $n - p \geqslant 0$, on a donc : $0 = \lim\limits_{h\to 0} (h^{-p} g(h)) = a_p - b_p$, ce qui est absurde puisqu'on a supposé $a_p \neq b_p$.
Par conséquent, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$ prouvant l'unicité du développement limité (sous réserve d'existence).

⊠

Corollaire 1.4.0.6 *Si f est paire (respectivement impaire) et si f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0, alors le développement limité de f est pair (respectivement impair).*

Preuve :

Par hypothèse, f admet un développement limité à l'ordre n en 0. Il existe donc un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que :

$$f(h) \underset{h\to 0}{=} P(h) + o(h^n)$$

Puisque f est paire, on a aussi :

$$f(h) = f(-h) \underset{h\to 0}{=} P(-h) + o((-h)^n) \underset{h\to 0}{=} P(-h) + o(h^n)$$

Par unicité du développement limité, $P(X) = P(-X)$, c'est-à-dire P est pair.

⊠

⚠ **Attention :** deux erreurs classiques qu'il faut absolument éviter.

- Si f est paire (ou impaire), on ne peut absolument rien dire de son développement limité en un point autre que 0. Par exemple, cosinus est paire et pourtant son développement limité à l'ordre 1 en $\frac{\pi}{4}$ est donné par :

$$\cos(\frac{\pi}{4} + h) \underset{h\to 0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}h + o(h)$$

  Il n'est donc pas pair !

- La réciproque est fausse ! ! Si le développement limité en 0 est pair (respectivement impair), on ne peut pas conclure que f est paire (respectivement impaire) ! Ceci provient du fait qu'on ne connaît *a priori* pas le $o(h^n)$. Par exemple, si pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^3 + x^{10}e^x$, alors f admet un DL à l'ordre 3 en 0 qui est $f(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^3 + o(x^3)$. Pourtant, f n'est pas impaire.

Proposition 1.4.0.7 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$.*

Si f admet un DL à l'ordre 0 en a, alors f admet une limite finie en a. En particulier, si $a \in I$, f est alors continue en a et sinon, f se prolonge par continuité en a.

Preuve :

On suppose que f admet un DL à l'ordre 0 en a. Alors, par définition, il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que : $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \ell + o(1)$, c'est-à-dire $f(a+h) - \ell \underset{h\to 0}{=} o(1)$. Par suite, $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = \ell$ et f admet donc une limite finie en a. D'où le résultat, en distinguant les cas $a \in I$ et $a \notin I$.

⊠

Proposition 1.4.0.8 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in I$. Sont équivalents :*

(i) f est dérivable en a et $f'(a) = \lambda$;

(ii) $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \lambda(x-a) + o(x-a)$.

Preuve :

Ce résultat a déjà été vu (proposition 1.1.3.1). ⊠

1.5 Opérations sur les développements limités

1.5.1 Somme et produit

Proposition 1.5.1.1 *Si f et g admettent un développement limité à l'ordre n en a, alors :*

(i) pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(a)$ obtenu en additionnant terme à terme ;

(ii) $f \times g$ admet un $DL_n(a)$. De plus, ce développement est obtenu en conservant uniquement les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des développements limités.

Preuve :

Soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ tels que :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} P(h) + o(h^n) \quad \text{et} \quad g(a+h) \underset{h\to 0}{=} Q(h) + o(h^n)$$

D'une part, $(f+g)(a+h) = (P+Q)(h) + o(h^n)$ avec $(P+Q) \in \mathbb{K}_n[X]$ dont $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n en a (qui est bien obtenu en sommant les « polynômes »).
Par ailleurs, soit R le reste de la division euclidienne de PQ par X^{n+1}. On a alors :

$$\begin{aligned} f(a+h) \times g(a+h) &\underset{h\to 0}{=} P(h)Q(h) + (P(h) + Q(h) + o(h^n)) \times o(h^n) \\ &\underset{h\to 0}{=} P(h)Q(h) + o(h^n) \\ &= R(h) + O(h^{n+1}) + o(h^n) \\ &\underset{h\to 0}{=} R(h) + o(h^n) \end{aligned}$$

Or, $R \in \mathbb{K}_n[X]$ d'où le résultat. ⊠

Exercice 1.5.1.2 On suppose que $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+x-2x^2+3x^4+o(x^4)$ et $g(x) = 2+x-x^4+o(x^4)$. Donner le DL à l'ordre 4 en 0 de fg et de $f+g$.

Exercice 1.5.1.3 Donner le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto \sin(x) \times \cos(x)$ (par deux méthodes différentes).

1.5.2 Inverse

Lemme 1.5.2.1 *La fonction* $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ *admet un* $DL_n(0)$ *pour tout entier* n*, donné par :*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

Preuve :

Déjà vu en exemple (voir l'exemple 1.4.0.3). ⊠

Corollaire 1.5.2.2 *La fonction* $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ *admet un* $DL_n(0)$ *à tout ordre donné par :*

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

Corollaire 1.5.2.3 *Si* f *admet un* $DL_n(a)$ *(avec* $n \in \mathbb{N}$*) et si* $a_0 \neq 0$ *(le terme de degré* 0 *du développement limité de* f*), alors* $\dfrac{1}{f}$ *admet un* $DL_n(a)$*.*

Preuve :

C'est la méthode qu'il faut retenir. Par définition, il existe $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$. De plus, $a_0 \neq 0$ donc :

$$\frac{1}{f(a+h)} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{a_0} \times \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_0} h^k + o(h^n)}$$

On pose alors pour h proche de 0, $u(h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_0} h^k + o(h^n)$.

On a par définition, $\lim_{h\to 0} u(h) = 0$. Par suite,

$$\frac{1}{1+u(h)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u(h)^k + o(u(h)^n)$$

D'une part, $o(u^n)$ est une fonction qui est $o(h^n)$ et d'autre part, d'après les propositions précédentes (somme et produits), $h \longmapsto \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u(h)^k$ admet un $DL_n(a)$. Par suite, $\frac{1}{f}$ admet bien un développement limité à l'ordre n en a. ⊠

Remarque : *en fait, ce qui est important, c'est la preuve qui donne la méthode pratique du calcul de développement limité de l'inverse. C'est cette méthode qu'on applique en pratique pour faire le calcul.*

Exemple 1.5.2.4 Donnons le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $\frac{1}{\cos}$.

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}$$

On pose alors $u(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$. Puisque $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$,

$$\frac{1}{1-u(x)} = 1 + u(x) + u(x)^2 + o(u(x)^2)$$

(on fait le développement limité à l'ordre 2 car $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$ est un terme d'ordre 2 et donc pour obtenir le développement à l'ordre 4 (en x), on doit faire un développement à l'ordre 2 « en u »). Enfin, le calcul direct donne $u(x)^2 = \frac{1}{4}x^4 + o\left(x^4\right)$ donc en remplaçant, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) + \frac{1}{4}x^4 + o\left(x^4\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Exercice 1.5.2.5 On suppose que $f(x) \underset{x\to 0}{=} 3 + x - 2x^2 + 5x^3 + o(x^3)$. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{f}$.

Exercice 1.5.2.6 En utilisant les développements limités des fonctions usuelles, déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \longmapsto \frac{e^{\sin x}}{\cos(x)^2}$.

Remarque : *on pourrait énoncer un théorème sur la composition des DL mais ce n'est pas très utile. Dans la pratique, ce qui compte, c'est le calcul efficace. Notez qu'on a déjà en réalité utilisé la composition quand on a fait $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 = o(u^2)$ avec u une fonction.*

1.5.3 Intégration et dérivation d'un DL

Théorème 1.5.3.1 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivable, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si la fonction f' admet un $DL_n(a)$ donné par :*

$$f'(a+h) \underset{h\to 0}{=} b_0 + b_1 h + \cdots + b_n h^n + o(h^n)$$

Alors, f admet un $DL_{n+1}(a)$ donné par intégration terme à terme :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + b_0 h + b_1 \frac{h^2}{2} + \cdots + b_n \frac{h^{n+1}}{n+1} + o(h^{n+1})$$

Preuve :

On admet ce théorème. Pour les plus curieux, voici une démonstration.

On note J l'intervalle $J = I - a$ (autrement dit $h \in J \iff a + h \in I$) et on pose :

$$\forall h \in J \ , \ g(h) = f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_{k-1}}{k} h^k$$

On veut montrer que $g(h) \underset{h\to 0}{=} o(h^{n+1})$.

Soit $\varepsilon > 0$. g est dérivable sur J et par hypothèse, $g'(h) \underset{h\to 0}{=} o(h^n)$. Par définition, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $h \in J \cap [-\alpha, \alpha]$, $|g'(h)| \leqslant \varepsilon |h|^n$. On fixe $h \in]-\alpha, \alpha[\cap J$ et $h \neq 0$.

- g est continue sur $[0, h] \cup [h, 0]$ (on ne sait pas si $h > 0$) ;
- g est dérivable sur $]0, h[\cup]h, 0[$;
- $\forall x \in]0, h[\cup]h, 0[, \ |g'(x)| \leqslant \varepsilon |h|^n$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors :

$$|g(h) - g(0)| \leqslant \varepsilon |h|^{n+1} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad |g(h)| \leqslant \varepsilon |h|^{n+1}$$

On constate que ceci est encore valable pour $h = 0$ car $g(0) = 0$. Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \alpha > 0 \ , \ \forall h \in [-\alpha, \alpha] \cap J \ , \ |g(h)| \leqslant \varepsilon |h^{n+1}|$$

c'est-à-dire $g(h) \underset{h\to 0}{=} o(h^{n+1})$.

⊠

Remarque : *dans la pratique, on utilise plutôt la forme suivante. Si f est continue et admet un $DL_n(a)$, alors $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet un $DL_{n+1}(a)$ donné par :*

$$F(x) \underset{x\to a}{=} F(a) + \int_a^x P(t)\,\mathrm{d}t + o((x-a)^{n+1})$$

Corollaire 1.5.3.2 *La fonction* ln *admet un développement limité en* 1 *à tout ordre* $n \in \mathbb{N}$ *donné par :*

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$$

Preuve :

C'est une conséquence directe du théorème précédent. En effet, on sait que ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée est $x \longmapsto \frac{1}{x}$. De plus, on a prouvé que $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ admet un développement limité à tout ordre en 0. Par intégration (c'est le théorème précédent), on obtient le résultat. ⊠

Corollaire 1.5.3.3 *Si* f *admet un* $DL_{n+1}(a)$ *et si* f' *admet un* $DL_n(a)$*, alors le DL de* f' *s'obtient par dérivation de celui de* f*.*

Preuve :

C'est évident. ⊠

⚠ **Attention :** si f admet un $DL_n(a)$, f' n'admet pas nécessairement de $DL_{n-1}(a)$.

Exemple 1.5.3.4 Soit f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \begin{cases} x^6 \sin\left(\frac{1}{x^5}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors :

- $f(x) = o(x^5)$ donc f admet un $DL_5(0)$;
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est évident sur $\mathbb{R}^\star$ et on vient de montrer l'existence d'un DL à l'ordre 1 en 0) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star\ ,\ f'(x) = 6x^5 \sin\left(\frac{1}{x^5}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^5}\right)$$

- f' n'admet pas de limite en 0 donc f' n'a pas de développement limité en 0.

Remarque : *on retient donc qu'on peut toujours intégrer un développement limité mais que pour le dériver, il faut supposer l'existence.*

1.6 Formules de Taylor

1.6.1 Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 1.6.1.1 *Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $a \in I$. Alors :*

$$\forall x \in I \ , \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ + \ \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve :

On le montre par récurrence sur n.

Initialisation :
Pour $n = 0$, soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et $a, x \in I$. Alors, f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc :

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ + \ \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Ce qui montre que la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité :

On suppose la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ et on montre qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}(I)$ et soient $a \in I$ et $x \in I$. Si $x = a$, alors le résultat est évident. On suppose donc que $x \neq a$.
Puisque $\mathcal{C}^{n+2}(I) \subset \mathcal{C}^{n+1}(I)$, on a par hypothèse de récurrence :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ + \ \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose alors pour $t \in [a,x] \cup [x,a]$,

$$\begin{cases} u(t) &= -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v(t) &= f^{(n+1)}(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) &= \dfrac{(x-t)^n}{n!} \\ v'(t) &= f^{(n+2)}(t) \end{cases}$$

De cette façon, $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,x]\cup[x,a]$, on peut intégrer par parties l'intégrale précédente, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_a^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient donc :

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$ et achève la récurrence. ⊠

Remarque : *la formule de Taylor avec reste intégral est très importante parce que c'est une formule globale, c'est-à-dire valable pour tout $x\in I$ et pas simplement pour les x proches de a. Elle permet donc d'obtenir des inégalités globales et non locales.*

Exercice 1.6.1.2 Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x \geqslant (1+x)$ puis plus généralement, montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \left|e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!}$$

Que peut-on en déduire pour la série de terme général $\sum \frac{x^n}{n!}$?

Corollaire 1.6.1.3 (Inégalité de Taylor-Lagrange) *Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $|f^{n+1}|\leqslant M$ sur I, alors :*

$$\forall x\in I\ ,\ \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve :

Soit $x\in I$. En posant $J=[a,x]$ si $a\leqslant x$ et $J=[x,a]$ sinon, on a d'après la formule de Taylor avec reste intégral (qui s'applique puisque $f\in\mathcal{C}^{n+2}(I)$) :

$$\left|\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_J \frac{M|x-t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

⊠

Corollaire 1.6.1.4 *En particulier, si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et $a \in I$, alors :*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + O((x-a)^{n+1})$$

et donc f admet un $DL_n(a)$ pour tout $a \in I$.

Preuve :

• Soit $J \subset I$ un voisinage fermé de a. Sur ce segment J, $f^{(n+1)}$ est bornée (puisque c'est une fonction continue sur un segment). On applique alors le corollaire précédent (inégalité de Taylor-Lagrange) à f sur l'intervalle J.

• Enfin, pour l'existence du développement limité à l'ordre n en a, c'est clair car $O((x-a)^{n+1}) \underset{x\to a}{=} o((x-a)^n)$.

⊠

Remarque : *le corollaire précédent nécessite une condition forte. Par exemple, on a vu que l'existence d'un $DL_1(a)$ équivaut à f dérivable en a. Or, avec le corollaire, on obtient que si f est $\mathcal{C}^2(I)$, f admet $DL_1(a)$... Ce n'est donc pas le critère qu'on utilisera pour justifier l'existence d'un DL.*

1.6.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 1.6.2.1 (Formule de Taylor-Young) *Soient $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{D}^n(I)$. Alors f admet un $DL_n(a)$ en tout point a de I donné par la série de Taylor :*

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k \quad + \quad o(h^n)$$

Preuve :

On procède à nouveau par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.

Initialisation :

Pour $n = 1$, on a déjà vu que si $f \in \mathcal{D}^1(I)$ et $a \in I$, alors f admet un $DL_1(a)$ donné par : $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$. Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie au rang $n \geqslant 1$ et on montre qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soient $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I)$ et $a \in I$. Alors $f' \in \mathcal{D}^n(I)$. Par hypothèse de récurrence, on a donc :

$$f'(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}h^k + o(h^n)$$
$$\underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}h^k + o(h^n)$$

Ainsi, f' admet un $DL_n(a)$. On en déduit donc que f admet un $DL_{n+1}(a)$ obtenu par intégration terme à terme (voir théorème 1.5.3.1), c'est-à-dire :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}h^{k+1} + o(h^{n+1})$$
$$\underset{h\to 0}{=} \frac{f^{(0)}(a)}{0!}h^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + o(h^{n+1})$$
$$\underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + o(h^{n+1})$$

Ceci prouve que la propriété est vraie au rang $n+1$ et achève donc la démonstration par récurrence. ⊠

Remarques :

- *cette formule reste valable si on suppose que f est seulement n fois dérivable en a (au lieu de sur I) : on conclut alors qu'on a la formule de Taylor-Young au point a (uniquement). La démonstration est quasiment identique et laissée en exercice ;*
- *dans la pratique, on dira plutôt que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors f admet un DL_n en tout point $a \in I$;*
- *la formule de Taylor-Young est une égalité globale entre fonctions mais la fonction $o(h^n)$ est une fonction pour laquelle on ne dispose que d'informations locales (au voisinage de 0). C'est pour cette raison qu'on dit que c'est une formule locale qui permet de déduire des informations de f au voisinage de a mais pas sur I tout entier ;*
- *enfin, notez que la formule de Taylor-Young donne des conditions suffisantes pour l'existence d'un développement limité à l'ordre n (mais pas nécessaires si $n \geqslant 2$, i.e. f peut admettre un $DL_n(a)$ sans que f soit $\mathcal{D}^n$).*

1.6.3 Formule (ou égalité) de Taylor-Lagrange

Théorème 1.6.3.1 (Formule de Taylor-Lagrange) *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $\mathcal{D}^{n+1}$ sur $\overset{\circ}{I}$. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$ tel que $a \neq b$,*

$$\exists c \in]a,b[\cup]b,a[\ , \ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \ + \ \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Preuve :

Pour démontrer ce résultat d'existence, on va appliquer la méthode décrite dans le point méthode. On remplace le « b » par une variable.
Soient $a \in I$ et $b \in I$, $a \neq b$. On pose pour $x \in J = [a,b] \cup [a,b]$,

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - \lambda \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est tel que $g(b) = 0$ (licite puisque $b \neq a$).

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J, $\mathcal{D}^{n+1}$ sur $\overset{\circ}{J}$ et de plus, g possède a comme zéro de multiplicité au moins $n+1$ et b pour zéro de multiplicité au moins 1. Ainsi, g a au moins $n+2$ zéros comptés avec multiplicités dont 2 sont distincts. D'après la généralisation du théorème de Rolle, il existe $c \in \overset{\circ}{J}$ tel que $g^{(n+1)}(c) = 0$, c'est-à-dire

$$\lambda = f^{(n+1)}(c)$$

Sachant que $g(b) = 0$, on obtient donc :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \quad + \quad \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

⊠

Remarque : *dans la démonstration précédente, on a choisi « b » comme variable mais ce choix n'est pas obligatoire ! On pouvait aussi :*

- *choisir « c » comme variable et intégrer $n+1$ fois. Ceci nous aurait amener à considérer la fonction φ définie pour $x \in I$ par :*

  $$\varphi(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k) + (\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - f(b))\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

  (on intègre $n+1$ fois « entre a et x »). Je vous laisse alors vérifier que φ admet a pour zéro avec multiplicité (au moins) $n+1$ et b pour zéro. On conclut en appliquant le théorème de Rolle généralisé ;

- *choisir « a » comme variable, ce qui nous aurait amener à considérer ψ définie par :*

  $$\forall x \in I \ , \ \psi(x) = -f(b) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \lambda \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

  avec λ cette fois choisit de sorte que $\psi(a) = 0$. Sachant que $\psi(b) = 0$, je vous laisse vérifier que l'on peut appliquer le théorème de Rolle à ψ et que l'existence de $c \in]a,b[\cup]b,a[$ tel que $\psi'(c) = 0$ donne $f^{(n+1)}(c) = \lambda$ (indication : on pourra reconnaître une série télescopique dans le calcul de ψ').

Dans cet exemple, le choix de l'un ou l'autre comme « variable » n'est pas très important. Néanmoins, le choix de « c » donne une expression légèrement plus compliquée (puisqu'on intègre plusieurs fois).

1.6.4 Application aux fonctions usuelles

Les fonctions « usuelles » sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine respectif. Par suite, elles admettent des développements limités à tout ordre en tout point.

Théorème 1.6.4.1 (Développements limités usuels) *Les fonctions usuelles suivantes admettent un développement limité à tout ordre en* 0*. De plus, pour* $n \in \mathbb{N}$*, on a :*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \quad \textit{(ou } o(x^{2n+1})\textit{)}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad \textit{(ou } o(x^{2n+2})\textit{)}$$

$$\mathrm{ch}\,(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \quad \textit{(ou } o(x^{2n+1})\textit{)}$$

$$\mathrm{sh}\,(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad \textit{(ou } o(x^{2n+2})\textit{)}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{Argth}\,(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Preuve :

• Pour la fonction exponentielle exp, on applique directement la formule de Taylor-Young avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$.

• On en déduit alors les DL des fonctions hyperboliques ch et sh en prenant la partie paire (respectivement impaire) ou bien en reprenant leur expression avec exponentielle.

• Pour les fonctions cosinus et sinus, on peut aussi appliquer la formule de Taylor-Young en remarquant que pour tout entier k, $\cos^{(k)}(0) = \cos(\frac{k\pi}{2})$ et de même, $\sin^{(k)}(0) = \sin(\frac{k\pi}{2})$.

• Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on note $f_\alpha : x \longmapsto (1+x)^\alpha$. On montre alors par récurrence immédiate (exercice : le faire) que pour tout entier $k \geqslant 1$, et tout $x > -1$, $f^{(k)}(x) = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)\right)(1+x)^{\alpha-k}$. Il s'ensuit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star \ , \ f_\alpha^{(k)}(0) = \prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)$$

On obtient donc le développement limité cherché en appliquant la formule de Taylor-Young.

• Les DL de $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$, $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ et $x \longmapsto \ln(1+x)$ ont déjà été prouvés.

• Pour arctan, on intègre le DL de la dérivée.

On sait que arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

On a alors :

$$\arctan'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$$

Par intégration du développement limité (théorème 1.5.3.1), on a alors :

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \arctan(0) + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

• On procède de même pour la fonction Argth .

• Enfin, pour la fonction arcsin, on utilise la même technique. On sait que arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ (donc admet un DL à tout ordre en 0) et :

$$\forall x \in]-1,1[\ , \ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

En appliquant le développement limité de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ (avec $\alpha = -\frac{1}{2}$) :

$$\arcsin'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(-\frac{1}{2} - i)}{k!}x^{2k} + o(x^{2n})$$

Or, pour $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\prod_{i=0}^{k-1}(-\frac{1}{2}-i) = \prod_{i=0}^{k-1}\frac{-(2i+1)}{2} = \frac{(-1)^k}{2^k}\prod_{i=0}^{k-1}(2i+1)$$

et en remarquant que :

$$\prod_{i=0}^{k-1}(2i+1) = \prod_{i=0}^{k-1}\frac{(2i+1)(2i+2)}{2(i+1)} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$$

on obtient finalement :

$$\arcsin'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k} + o(x^{2n})$$

D'où par intégration (et sachant que $\arcsin(0) = 0$) :

$$\begin{aligned}\arcsin(x) &\underset{x\to 0}{=} x + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)}x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)}x^{2k+1} + o(x^{2n+1})\end{aligned}$$

⊠

Exercice 1.6.4.2 Pourquoi ne pas remplacer x par ix et prendre les parties réelles et imaginaires pour déduire les développements limités de sinus et cosinus à partir de celui de exponentielle ?

Exercice 1.6.4.3 Démontrer que $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$:

(a) en utilisant $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$;

(b) en utilisant $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\tan' = 1 + \tan^2$.

Exercice 1.6.4.4 Déterminer le $DL_6(\pi)$ de $\ln(1+\sin x)$.
(*Réponse :* $\ln(1+\sin(\pi+t)) = -t - (1/2)t^2 - (1/6)t^3 - (1/12)t^4 - (1/24)t^5 - (1/45)t^6 + o(t^6)$.)

Remarque : *certains logiciels de calcul formel (ou certaines calculatrices) font les calculs de développements limités. Avec le logiciel Maple, la commande qui permet de calculer un DL est* $taylor(f(x), x = a, n)$ *mais par défaut, Maple calcule à un* $O((x-a)^n)$.

1.7 Applications des développements limités

1.7.1 Étude des limites ou recherche d'équivalent

Bien entendu, une des applications directes du calcul de développements limités est le calcul de limite (lorsqu'il s'agit de formes indéterminées) ou la recherche d'équivalent.

Exemple 1.7.1.1 Déterminons la limite en 0 de $\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

• Le calcul direct montre que le numérateur (et le dénominateur) tendent vers 0 lorsque x tend vers 0. Il s'agit donc d'une forme indéterminée.

• Se pose alors la question de l'ordre auquel il faut faire le développement limité. La présence du terme en « x^3 » au dénominateur suggère de faire le développement limité à l'ordre 3 mais cela n'est pas un argument mathématique (mais c'est un argument « de bon sens » qui est souvent assez efficace). Voici donc « l'analyse » que vous devez faire :

- $x(e^x+1) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ et $2(e^x-1) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ donc les termes de degré 1 s'éliminent ;
- le terme suivant pour $x(e^x+1)$ est x^2 (autrement dit $x(e^x+1)=2x+x^2+o(x^2)$) et de même pour $2(e^x-1)$. Les termes de degré 2 s'éliminent donc aussi.

Ceci permet de conclure qu'il faudra faire le développement à l'ordre 3 (au moins). Dans cet exemple, les calculs ne sont pas très compliqués et on peut voir que les termes de degré 3 ne vont pas s'éliminer (c'est-à-dire que le $DL_3(0)$ suffit) mais parfois, ce ne sera pas aussi facile et il faudra donc recommencer les calculs avec un terme un plus.

• On a :

$$\begin{aligned}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x(2+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))-2(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3))}{x^3}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{6}+o(1)\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3} = \dfrac{1}{6}$.

Voici un exemple où il n'est pas si « facile » de voir quels termes s'éliminent...

Exemple 1.7.1.2 Déterminons un équivalent de $(1+x)^{\sin(x)}-(1+\sin(x))^x$ en 0.

Il est assez simple de voir directement qu'en utilisant un DL à l'ordre 1, les termes se compensent et on ne peut donc pas donner d'équivalent. En revanche, il n'est pas évident de voir que les termes d'ordre 2 (attention, cette fonction n'est pas impaire) ou 3 ou 4 sont les mêmes... Je vous laisse vérifier (et cela se verra dans les calculs suivants) que dans le calcul des développements limités à l'ordre 4 on obtient exactement les même termes. On ne peut donc pas

donner d'équivalent et on est donc obligé de pousser le DL un cran plus loin. Je signale que ceci n'est pas forcément prévisible !

• Pour commencer, on a :

$$\begin{aligned}(1+\sin x)^x &= \exp\left(x\ln(1+\sin x)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(x\ln\left(1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \exp\left[x\left(x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{2}{6}x^4\right)+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4++o(x^4)\right)\right]\end{aligned}$$

Ce qui donne en regroupant les termes :

$$(1+\sin x)^x \underset{x\to 0}{=} \exp\left(x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{12}x^5+o(x^5)\right)$$

• De façon analogue, on a :

$$\begin{aligned}(1+x)^{\sin x} &= \exp\left(\sin x\ln(1+x)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \exp\left[\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)\right]\\ &\underset{x\to 0}{=} \exp\left[x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^4-\frac{x^5}{4}-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{12}x^5+o(x^5)\right]\\ &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{6}x^5+o(x^5)\right)\end{aligned}$$

• Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}g(x) &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{12}x^5+o(x^5)\right)-\exp\left(x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{6}x^5+o(x^5)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4\right)\left[\exp\left(-\frac{1}{12}x^5+o(x^5)\right)-\exp\left(-\frac{1}{6}x^5+o(x^5)\right)\right]\\ &\underset{x\to 0}{=} (1+o(1))\times\left(1-\frac{1}{12}x^5+o(x^5)-(1-\frac{1}{6}x^5+o(x^5))\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{12}x^5+o(x^5)\end{aligned}$$

Ce qui prouve au final que : $\left((1+\sin x)^x-(1+x)^{\sin x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{12}x^5$.

Exercice 1.7.1.3 Justifier l'existence puis déterminer le développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction $x\longmapsto (1+\sin x)^x-(1+x)^{\sin x}$.

Exercice 1.7.1.4 Montrer que la fonction $x\longmapsto \dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$ se prolonge en une fonction continue en 0, puis montrer que ce prolongement est dérivable en 0.

1.7.2 Étude de position d'une courbe par rapport à sa tangente

Exercice 1.7.2.1 Montrer que la courbe de la fonction exponentielle est au-dessus de ses tangentes.

Exercice 1.7.2.2 On donne $f(x) = \exp(2x) - \operatorname{th}(x)$. Étudier la position (locale) de la courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

1.7.3 Développement asymptotique et étude de position par rapport à une asymptote

Définition 1.7.3.1 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \overline{I}$. Un développement asymptotique de f en a est une écriture de la forme :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f_0(x) + \cdots + f_n(x) + o(f_n(x))$$

où pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{i+1}(x) \underset{x\to a}{=} o(f_i(x))$. On dit qu'on a donné le DA de f en a à un $o(f_n)$ près.

Exemple 1.7.3.2 Par exemple, $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{-1} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \cdots + \dfrac{1}{x^n} + o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ est un développement asymptotique à un $o(1/x^n)$ près en $+\infty$.

Exemple 1.7.3.3 La fonction $x \longmapsto x^x$ admet un développement asymptotique en 0 donné par :

$$x^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k(\ln(x))^k}{k!} + o(x^n(\ln(x))^n)$$

où $n \in \mathbb{N}$. Notez bien que ceci n'est pas un développement limité.

Exemple 1.7.3.4 Soit $f : x \longmapsto x \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

• Il est évident que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. Il y a donc une direction asymptotique.

• Ensuite,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$, c'est-à-dire que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

• Par ailleurs, $f(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{x}$. Or, au voisinage de $+\infty$, $-\frac{1}{x} < 0$. On en déduit donc que la courbe représentative de f est située en-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 1.7.3.5 Montrer que la courbe d'équation polaire $r(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)\cos(2\theta)}$ admet une asymptote et étudier la position (locale) de la courbe par rapport à son asymptote.

Remarque : *si vous ne vous rappelez pas des méthodes d'étude des courbes polaires, vous pouvez omettre le dernier exemple.*

Remarque : *les développements limités sont aussi utilisés dans le cadre des suites pour la recherche d'équivalent simple ou de développement asymptotique. Voir par exemple le cours de mathématiques supérieures 1 (chapitre sur les suites réelles ou complexes).*

1.7.4 Recherche d'extremum

Théorème 1.7.4.1 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :*

(i) $a \in \overset{\circ}{I}$;

(ii) f *est deux fois dérivable en* a ;

(iii) $f'(a) = 0$;

(iv) $f''(a) \neq 0$.

Alors f admet un extremum local en a. De plus, si $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a et si $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a.

Preuve :

• Quitte à remplacer f par $-f$, qui vérifie les mêmes hypothèses, on peut toujours supposer que $f''(a) > 0$.

• Puisque f est deux fois dérivable en a, on peut appliquer la formule de Taylor-Young :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2)$$

Or, par hypothèse, $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$. Par suite,

$$f(a+f) - f(a) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{2}f''(a)h^2$$

Il s'ensuit que la fonction $h \longmapsto f(a+h) - f(a)$ est positive au voisinage de 0, c'est-à-dire f admet un minimum local en a. ⊠

Remarques :

- *on dit souvent que ce théorème donne les conditions suffisantes d'ordre* 2 *pour l'existence d'un extremum ;*
- *la condition* $a \in \overset{\circ}{I}$ *n'est pas nécessaire ici mais dans la pratique, on commence par les conditions nécessaires d'ordre* 1 *(c'est-à-dire la recherche des points intérieurs à l'intervalle où* f' *s'annule) qui suppose que le point* a *est bien à l'intérieur ;*
- *lorsque* $f''(a) = 0$*, on ne peut pas conclure (par exemple,* $x \longmapsto x^3$ *en* 0*) ;*
- *cette condition pratique est souvent utilisée en mécanique pour déterminer si les positions d'équilibre sont stables (minimum d'énergie) ou instables (maximum d'énergie) ;*
- *dans le cas où* $f''(a) = 0$*, on peut déterminer le signe en faisant un développement limité à un ordre supérieur (jusqu'à obtenir un premier terme non nul), sous réserve d'existence.*

1.7.5 Nature d'un point stationnaire d'une courbe paramétrée

Rappelons enfin que la formule de Taylor-Young, démontrée ici, et souvent admise lorsqu'on fait l'étude des courbes paramétrées, permet de donner les développements limités usuels et permet donc également de déterminer la nature d'un point stationnaire (c'est-à-dire point d'allure normale, point d'inflexion, point de rebroussement de première ou seconde espèce). Pour ceux qui se souviennent du critère, voici un exercice d'application.

Exercice 1.7.5.1 Déterminer le (ou les) point(s) stationnaire(s) de la courbe paramétrée suivante et préciser la nature du (des) point(s) stationnaire(s) :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \ , \ \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 1 + \mathrm{th}^2(t) \\ y(t) & = & \frac{t^2}{1+t} \end{array} \right.$$

1.8 Exercices

Exercice 1.8.1 Étudier la dérivabilité puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad ; \quad h(x) = x|x|$$

Exercice 1.8.2 Déterminer $a \in \mathbb{R}$ et $x_0 > 0$ tels que la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } x \in]0, x_0[\\ x^2+12 & \text{si } x \in [x_0, +\infty[\end{cases}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 1.8.3 On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln|x|}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. f est-elle dérivable sur $]-1,1[$?
2. Calculer $f'(x)$ lorsque cela a un sens.
3. Montrer que f' n'est pas continue ni même bornée au voisinage de 0.

Exercice 1.8.4 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les limites éventuelles aux bornes de l'ensemble de définition, étudier la dérivabilité puis calculer la dérivée lorsque cela a un sens.

1. La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$.
2. La fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$.
3. La fonction h définie par $h(x) = x^2 \ln|x| \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\right)$.

Exercice 1.8.5 Étudier la dérivabilité de $x \longmapsto (x - E(x))(x - E(x) - 1)$.

Exercice 1.8.6 Pour $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie pour $x \neq 0$ par $f_n(x) = x^n \exp\left(\dfrac{i}{x^2}\right)$.

1. Déterminer la (ou les) valeur(s) de n pour lesquelles f_n se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la (ou les) valeurs de n pour lesquelles le prolongement de f_n est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 1.8.7 Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une application définie au voisinage de x_0, à valeurs complexes, et dérivable en x_0. Soient $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+bh) - f(x_0-ah)}{(a+b)h} = f'(x_0)$$

Exercice 1.8.8 Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kx)$. On suppose que pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant |\sin x|$. Montrer que :

$$\left| \sum_{k=1}^{k} k a_k \right| \leqslant 1$$

Exercice 1.8.9 Soit f une application de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en 0. On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 ;
* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in]-1,0[$ et $b_n \in]0,1[$.

Montrer que la suite $\left(\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \right)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 1.8.10 Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. Si $h \mapsto \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0, cette limite est appelée la dérivée symétrique de f en a.

1. Montrer que si f est dérivable à droite et à gauche en a, alors elle admet une dérivée symétrique en a.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 1.8.11 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en 0, continue en 0 telle que $f(0) = 0$ et :

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{f(2x) - f(x)}{x} \right) = 0$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{f(x)}{x} = \sum_{k-1}^{n} \dfrac{1}{2^k} \dfrac{f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\frac{x}{2^k}} + \dfrac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}$.
2. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
3. Le résultat reste-t-il encore vrai si on suppose que $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{f(2x) - f(x)}{x} \right) = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$?
4. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 1.8.12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes, après avoir justifié leur existence :

$$f(x) = \frac{1}{3x+1} \quad ; \quad g(x) = \cos^3(x) \quad ; \quad h(x) = e^x \sin(x) \quad ; \quad k(x) = (x^2 + x - 1)e^x$$

Exercice 1.8.13 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer, après avoir justifié l'existence, les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{2x-1}{4x+1} \quad ; \quad g(x) = \sin^3(x)\cos^2(x) \quad ; \quad h(x) = \cos(2x)e^{-x} \quad ; \quad k(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^3}$$

Exercice 1.8.14 Montrer que la fonction $f = \arctan$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \ , \ \forall x \in \mathbb{R} \ , \ f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin\left(n\left(\frac{\pi}{2} + f(x)\right)\right)$$

Exercice 1.8.15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. On définit (P_n) par :

$$P_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in \mathbb{R} \ , \ P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - (2n+1)xP_n(x)$$

1. Montrer que pour tout entier n, P_n est un polynôme de degré n.
2. Démontrer que :$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in \mathbb{R} \ , \ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$.
3. Trouver une équation différentielle linéaire (à coefficients non constants) dont f est solution sur $\mathbb{R}$.
4. Déduire de la question précédente que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x :

$$P_{n+1}(x) + (2n+1)xP_n(x) + n^2(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$$

et

$$(1+x^2)P_n''(x) - (2n-1)xP_n'(x) + n^2P_n(x) = 0$$

Exercice 1.8.16 Cet exercice introduit la règle de l'Hôpital (que nombreux d'entre vous ont vu au lycée sans jamais la démontrer).

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer :

$$\exists c \in]a,b[\ , \ f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a))$$

2. Soient f et g définies sur un voisinage I de a, continues sur I, dérivables sur $I \setminus \{a\}$ et telles que $f(a) = g(a) = 0$ et $\forall x \in I \setminus \{a\}$, $g'(x) \neq 0$. Montrer alors l'implication suivante :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Longrightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

3. Appliquer le résultat pour déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.
4. Retrouver le résultat de la question précédente à l'aide des développements limités.
5. La réciproque de l'implication de la question 2 est-elle vraie ?

Exercice 1.8.17 Montrer que l'équation $e^x = P(x)$ où P est un polynôme n'a qu'un nombre fini de solutions dans $\mathbb{R}$ et donner une majoration de ce nombre.

Exercice 1.8.18 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, à valeurs réelles, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \notin [a,b]$. Montrer qu'il existe au moins une tangente à la courbe représentative de f qui passe par le point $C(c,0)$.

Exercice 1.8.19 Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.
Indication : on pourra construire une fonction g dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et montrer qu'on peut alors se ramener à appliquer le théorème de Rolle usuel.

Exercice 1.8.20 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles) admettant en $+\infty$ et en $-\infty$ une même limite finie. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 1.8.21 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a, b]$, à valeurs réelles et telle que $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$. On souhaite montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

1. Expliquer pourquoi les méthodes directes usuelles ne marchent pas ici.
2. Soient α, β deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ et $g = \alpha f + \beta f'$.
   (a) Montrer que g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.
   (b) Démontrer que l'on peut choisir α, β telles que $g' = \beta(f'' - f)$.
   (c) Conclure.

Exercice 1.8.22 Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

Exercice 1.8.23 Le but de l'exercice est de prouver le théorème de Darboux : « toute fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires ». Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$.

1. Première méthode.
   (a) On suppose $f'(a) < 0 < f'(b)$. Montrer que f' s'annule sur $]a, b[$.
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) < \lambda < f'(b)$. En appliquant le résultat précédent à une fonction bien choisie, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \lambda$.
   (c) Conclure.
2. Seconde méthode.
   On considère les deux fonctions suivantes, définies sur $[a, b]$:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \in]a, b] \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} & \text{si } x \in [a, b[\\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}$$

   (a) Montrer que les fonctions g et h sont continues sur $[a, b]$.
   (b) En déduire que pour tout λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, l'équation $g(x) = \lambda$ ou l'équation $h(x) = \lambda$ admet au moins une solution.
   (c) Conclure.

Exercice 1.8.24 Après avoir justifié l'existence, donner le DL à l'ordre n au point a de la fonction f :

$f(x) = (\ln x)^2$ $n = 3$, $a = 2$ $f(x) = e^x$ $n = 4$, $a = 1$

$f(x) = \cos(2x)$ $n = 5$, $a = \dfrac{\pi}{3}$ $f(x) = \ln(\cos x)$ $n = 7$, $a = 0$

$f(x) = (1 + \sin x)^{\cos x}$ $n = 4$, $a = 0$ $f(x) = e^{\sin(x)}$ $n = 6$, $a = 0$

Exercice 1.8.25 Déterminer le DL à l'ordre n au point a de la fonction f :

$f(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{x}\right)$ $n = 4$, $a = 0$ $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ $n = 4$, $a = 0$

$f(x) = \tan(x)$ $n = 4$, $a = 0$ $f(x) = (1+x)^x$ $n = 4$, $a = 0$

$f(x) = (\cos x)^{\sin x}$ $n = 5$, $a = 0$ $f(x) = \mathrm{ch}\,(x^2 - 1)$ $n = 3$, $a = 1$

Exercice 1.8.26 Déterminer le DL à l'ordre n au point a de la fonction f :

$f(x) = \dfrac{\arctan x}{\arcsin x}$ $n = 4$, $a = 0$ $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$ $n = 3$, $a = \dfrac{\pi}{4}$

$f(x) = (\mathrm{ch}\,(x))^{\frac{1}{x^2}}$ $n = 2$, $a = 0$ $f(x) = x^x$ $n = 3$, $a = 2$

$f(x) = \sqrt{e^{\cos(x)}}$ $n = 3$, $a = \dfrac{\pi}{2}$ $f(x) = \sin(\pi \cos x)$ $n = 2$, $a = \dfrac{\pi}{3}$

Exercice 1.8.27 Déterminer le DL à l'ordre n au point a de la fonction f :

$f(x) = (e^{\sin x} - 1)(\mathrm{ch}\,(x) - \sqrt{\cos(x)})$ $n = 5$, $a = 0$

$f(x) = ((\sin x)^2 - \sin(x^2))^5(\cos(x) - 1)^3$ $n = 27$, $a = 0$

$f(x) = (\mathrm{sh}\,(x) - \sin x)^2(\mathrm{th}\,(x) - \tan x)^3$ $n = 16$, $a = 0$

$f(x) = \dfrac{(\mathrm{sh}\,(x) - \tan(x))^4}{(\sqrt{1+x} - \cos(x))^7}$ $n = 7$, $a = 0$

$f(x) = \ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$ $n = 100$, $a = 0$

Exercice 1.8.28 Calculer les limites suivantes :

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x - 1}{1 - x + \ln x}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - 2\tan x}{1 + \cos(4x)}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\mathrm{sh}\,(x) - x\mathrm{ch}\,(x)}$

Exercice 1.8.29 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan^2(x)}-\frac{1}{x^2}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^x-\sin(x)^{\sin x}}{x^3} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan(x)-\frac{\pi x+1}{2x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arctan x}-e^{\tan x}}{e^{\arcsin x}-e^{\sin x}} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{1-\tan(\frac{\pi x}{4})} \qquad \lim_{x\to e}\frac{e^x-x^e}{\ln x-\log_x(e)}$$

Exercice 1.8.30 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est majorée et que $f''\geqslant 0$ (sur $\mathbb{R}$). À l'aide d'une formule de Taylor, démontrer que f est constante.

Exercice 1.8.31 Montrer que pour tout réel x, $\sum(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge vers $\cos(x)$.

Exercice 1.8.32 Montrer que pour tout réel x, $\sum\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge vers $\operatorname{sh}(x)$.

Exercice 1.8.33 Montrer que $f:x\mapsto x+\ln(1+x)$ admet, au voisinage de 0, une fonction réciproque et que cette fonction réciproque admet un DL à l'ordre 3 en 0 que vous déterminerez.

Exercice 1.8.34 On considère une fonction f définie sur un certain voisinage de 0 et vérifiant : $\sin^3(f(x))+f(x)=x$.

1. Démontrer qu'une telle fonction f existe bien (et qu'elle est unique, en un sens à préciser).
2. Montrer que f admet un DL à tout ordre en 0.
3. Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction f.

Exercice 1.8.35 Former le développement asymptotique de la fonction f suivante au voisinage de 0 à $o(x^2)$ près :

$$f:x\longmapsto\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}$$

Exercice 1.8.36 Déterminer le développement asymptotique de $x\longmapsto x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$ au voisinage de $+\infty$, à $o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ près.

Exercice 1.8.37 Déterminer le développement asymptotique à $o(1)$ près de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^4+3x^3+x^2-1}$.

Exercice 1.8.38 Soit l'application $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par :

$$f(0)=0 \quad\text{et}\quad \forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{x^2}{e^x-e^{-x}}$$

1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 et le calculer.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f'(0)$?
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $(0,f(0))$.
4. Préciser la position relative de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 1.8.39 Étudier la fonction suivante puis construire sa courbe représentative. On étudiera en particulier l'existence d'asymptote(s) et la position de la courbe par rapport à ses asymptotes (du moins localement).

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$$

Exercice 1.8.40 Faire une étude complète puis tracer la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = |\tan(x)|^{\sin x}$.
On étudiera en particulier l'existence d'un prolongement continu, la dérivabilité du prolongement, les tangentes aux points remarquables, l'existence d'axe ou de centre de symétrie.

Exercice 1.8.41 Étudier la fonction f définie par $f(x) = |x|^{x-x^2}$.
En particulier, on cherchera l'existence d'un prolongement continu, la dérivabilité. Pour les variations, on pourra étudier les variations de $g = \dfrac{f'}{f}$ *ainsi que celles de* g'.

Exercice 1.8.42 Cet exercice présente la méthode de Newton. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, à valeurs réelles. On suppose que la fonction f vérifie les hypothèses suivantes :

- $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$;
- $f' > 0$ sur $[a,b]$;
- $f'' \geqslant 0$ sur $[a,b]$.

On définit alors la fonction g par la relation $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

1. Montrer qu'il existe un unique $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.
2. Montrer que g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que c est l'unique point fixe de g sur $[a,b]$.
3. Étudier les variations de g et prouver que $[c,b]$ est stable par g.
4. On définit alors une suite par $u_0 \in [c,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) converge vers c.
   (b) Faire une figure avec une courbe représentant f et construire u_{n+1} à partir de u_n. *Attention, il s'agit bien de la courbe représentative de* f *et non celle de* g *!*
   (c) On suppose à présent que f est de classe $\mathcal{C}^3$.
      (i) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$.
      (ii) En déduire qu'il existe une constante $M \geqslant 0$ que vous déterminerez en fonction de g, g' ou g'', telle que :

$$\forall x \in [a,b] \ , \ \Big|g(x) - c\Big| \leqslant \frac{M}{2}\,|x-c|^2$$

      (iii) Que peut-on dire si $M = 0$?

(iv) On suppose par la suite $M > 0$. Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que :

$$u_0 \in [c, c+h] \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 0 \leqslant u_n - c \leqslant \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

5. Application : on pose $f(x) = \tan x - 1$.
   (a) Appliquer la méthode précédente pour obtenir une valeur approchée de π à 10^{-12} près.
   (b) Écrire une procédure Maple ou Pyhton permettant de calculer u_n.

Exercice 1.8.43 (Polynômes de Laguerre) On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \qquad \text{et} \qquad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x)$$

1. Justifier les écritures précédentes.
2. Calculer L_0, L_1, L_2 et L_3 explicitement.
3. Montrer que pour tout entier n, L_n est une fonction polynomiale et déterminer son degré.

   Dans toute la suite, on identifiera la fonction polynomiale L_n et le polynôme associé.

4. Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients du polynôme L_n.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $h_n^{(n)}$, $h_n^{(n+1)}$ et $h_n^{(n+2)}$ en fonction de L_n, L_n' et L_n''.
   (b) Donner une relation simple entre h_{n+1} et h_n.
   (c) En déduire que : $L_{n+1} = \dfrac{X}{n+1} L_n' + \left(1 - \dfrac{X}{n+1}\right) L_n$.
6. En calculant, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, $h_{n+1}^{(n+2)}$ de deux façons différentes, montrer que :

$$L_{n+1}' = L_n' - L_n$$

7. En utilisant les différents résultats obtenus, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ XL_n'' + (1-X)L_n' + nL_n = 0$$

   et que :

$$\forall n \geqslant 1\ ,\ (n+1)L_{n+1} + (X - 2n - 1)L_n + nL_{n-1} = 0$$

8. Soit $n \geqslant 1$. Montrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $h_n^{(k)}$ s'annule exactement k fois sur $]0, +\infty[$.
9. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, L_n est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont strictement positives.
10. On fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ et on note $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ les racines de L_n et $0 < \beta_1 < \cdots < \beta_{n+1}$ celles de L_{n+1}.

(a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que L'_{n+1} s'annule exactement une fois sur $]\beta_i, \beta_{i+1}[$.

(b) En déduire que $L'_{n+1}(\beta_i)L'_{n+1}(\beta_{i+1}) < 0$.

(c) Montrer alors que L_n s'annule sur $]\beta_i, \beta_{i+1}[$.

(d) En déduire que $0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \cdots < \beta_n < \alpha_n < \beta_{n+1}$.

Exercice 1.8.44 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]0,1[)$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c)f'(c) = \frac{1}{2}$.

Exercice 1.8.45 Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^3(]a,b[)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f^{(3)}(c)$$

Exercice 1.8.46 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que f' est bornée et qu'en posant $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$ pour $k \in [\![0, 2]\!]$:

$$M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$$

Chapitre 2

Espaces vectoriels de dimension finie

Prérequis : dans tout ce chapitre, les notions suivantes sont supposées connues :

- espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels ;
- sous-espaces vectoriels en somme directe et sous-espaces vectoriels supplémentaires ;
- famille de vecteurs ;
- application linéaire, noyau et image ;
- isomorphismes d'espaces vectoriels et groupe linéaire ;
- cardinal d'un ensemble fini et propriétés du cardinal ;
- géométrie vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Aucune connaissance spécifique sur la théorie de la dimension n'est supposée connue.

2.1 Familles de vecteurs

Dans tout ce paragraphe, sauf mention explicite du contraire, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.1.1 Famille libre

Définition 2.1.1.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une famille finie $(x_1, \cdots, x_n)$ de vecteurs de E est libre si :

$$\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ , \ \Big(\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ \lambda_i = 0 \Big)$$

Autrement dit, la seule combinaison linéaire des (x_i) qui est nulle est celle dont tous les coefficients sont nuls.

Remarques :

- *la famille vide $\mathcal{L} = ()$ est libre ! En effet, lorsque $n = 0$, la somme vide est nulle et la propriété commençant par « $\forall i \in \emptyset$ » est toujours vraie. L'implication $P \implies Q$ est vraie lorsque P et Q sont vraies ;*
- *pour deux vecteurs, cela correspond à la notion de colinéarité ;*
- *pour trois vecteurs, c'est la notion de non-coplanarité ;*
- *si σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$, alors $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est libre si et seulement si $(x_{\sigma(i)})_{i \in [\![1,n]\!]}$ est libre ;*
- *en particulier, si une famille (x_i) est libre, alors les éléments sont deux à deux distincts.*

Exemple 2.1.1.2 La famille $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$. En effet, par définition, si $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$, on a :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i = 0 \implies \forall i \in [\![0, n]\!] \ , \ \lambda_i = 0$$

Exemple 2.1.1.3 La base canonique de $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire la famille $\mathcal{B}_c = (e_1, \cdots, e_n)$ avec pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $e_i = (\delta_i(k))_{1 \leqslant k \leqslant n}$, soit encore $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ est une famille libre. En effet, soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0$. Alors, par définition des opérations dans $\mathbb{K}^n$,$(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = 0_{\mathbb{K}^n}$, c'est-à-dire $\forall i \in [\![0, n]\!] \ , \ \lambda_i = 0$.

Exemple 2.1.1.4 Montrons que la famille $(u, v, w) = ((1, 1, 0), (1, 2, 1), (-1, 1, 1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soient α, β, γ trois réels tels que : $\alpha u + \beta b + \gamma w = 0$. On a alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha+\beta-\gamma \\ 0 & & \alpha+2\beta+\gamma \\ 0 & = & \beta+\gamma \end{array}\right.$$

Or,

$$\begin{array}{lll} \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha+\beta-\gamma \\ 0 & & \alpha+2\beta+\gamma \\ 0 & = & \beta+\gamma \end{array}\right. & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha+\beta-\gamma \\ 0 & & \alpha+2\beta+\gamma \\ \gamma & = & -\beta \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha+2\beta \\ 0 & & \alpha+\beta \\ \gamma & = & -\beta \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & -\alpha \\ \beta & & -\alpha \\ \gamma & = & -\beta \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \alpha=\beta=\gamma=0 \end{array}$$

Par suite, $\alpha=\beta=\gamma=0$ et la famille (u,v,w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : *dans le cas particulier de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, vous avez probablement déjà étudié un outil « plus rapide » qui est le calcul de déterminant. Dans l'exemple précédent :*

$$\det(u,v,w)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Il s'ensuit que $\det(u,v,w)\neq 0$ *et on conclut alors que (u,v,w) est une « base » de l'espace $\mathbb{R}^3$: en particulier, les « coordonnées » d'un vecteur dans cette base sont uniques ce qui montre que la famille (u,v,w) est libre.*
On reverra dans le paragraphe sur les bases que c'est un outil pratique dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. La théorie générale des déterminants sera développée dans la fin de ce livre (chapitre 8).

Exemple 2.1.1.5 On considère la famille $\mathcal{L}=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ où :

$$f_1 : x\longmapsto \cos(x) \;\;;\;\; f_2 : x\longmapsto e^x \;\;;\;\; f_3 : x\longmapsto x \;\text{ et }\; f_4 : x\longmapsto e^{2x}$$

Montrons que $\mathcal{L}$ est une famille libre de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (ou de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$). Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$ tel que :

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3+\lambda_4 f_4=0$$

c'est-à-dire

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \lambda_1\cos(x)+\lambda_2 e^x+\lambda_3 x+\lambda_4 e^{2x}=0$$

C'est une égalité entre fonctions. On peut donc essayer d'utiliser « tous les outils » sur les fonctions pour conclure que les coefficients sont nuls. Un argument rapide est le comportement au voisinage de $+\infty$ car les termes en exponentielle ont une croissance plus forte.

En multipliant l'égalité précédente par $x \longmapsto e^{-2x}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \lambda_1 \cos(x) e^{-2x} + \lambda_2 e^{-x} + \lambda_3 x e^{-2x} + \lambda_4 = 0$$

Or, chaque terme a une limite finie en $+\infty$, on peut donc passer à la limite, ce qui donne $\lambda_4 = 0$. En remplaçant dans l'égalité de départ, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 e^{x} + \lambda_3 x = 0$$

De la même façon (en multipliant par $x \longmapsto e^{-x}$ et en prenant la limite en $+\infty$), on montre que $\lambda_2 = 0$. Ce qui montre qu'alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \lambda_1 \cos(x) + \lambda_3 x = 0$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient $\lambda_1 = 0$. Il reste alors $\lambda_3 f_3 = 0$ et puisque $f_3 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Ainsi, on a montré que $\forall k \in [\![1, 4]\!] \ , \ \lambda_k = 0$. Ce qui montre que $\mathcal{L}$ est libre.

Remarques : *dans l'exemple précédent,*

- *on a une égalité entre fonctions. Pour montrer que les coefficients sont tous nuls, on peut utiliser tous les outils à notre disposition ! On peut évaluer en un (ou plusieurs) point(s) (ceci permet d'obtenir des systèmes linéaires d'équations : pour la résolution, voire le chapitre 8), étudier le comportement en un point particulier (ici au voisinage de $+\infty$), dériver (si les fonctions sont dérivables), intégrer, utiliser les décompositions en partie paire et impaire, etc. ;*
- *remarquez aussi que dans l'exemple, on a montré que c'est une famille libre de $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ mais aussi de $F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dans la pratique, on dira seulement que la famille est une famille libre (sans préciser « libre » dans « quoi ») car si $\mathcal{L}$ est une famille libre de E, c'est aussi une famille libre de n'importe quel espace vectoriel F contenant $\mathcal{L}$.*

Exercice 2.1.1.6 Montrer que la famille $((1), (2^n), (3^n), (4^n))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Puis, plus généralement, montrer que si $q_0, \cdots, q_p$ sont $p + 1$ nombres réels distincts, alors $((q_i^n)_{n\in\mathbb{N}})_{0\leqslant i\leqslant p}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 2.1.1.7 Montrer que le résultat de l'exercice précédent reste vrai pour $q_i \in \mathbb{C}$. *On pourra procéder par récurrence sur p.*

⚠ **Attention :** il faut parfois faire attention à bien préciser le corps ! Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ et si E est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel, alors E est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et il est possible qu'une famille de vecteurs de E soit $\mathbb{K}$-libre mais qu'elle ne soit pas $\mathbb{L}$-libre.

Exemple 2.1.1.8 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1, i)$ est libre (car par définition, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x + yi = 0 \Longrightarrow (x = y = 0)$). En revanche, la famille $(1, i)$ n'est pas libre dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ car il existe $(1, i) \in \mathbb{C}^2$ tel que $1.1_{\mathbb{R}} + i.i = 0$ et $(1, i) \neq (0, 0)$.

Exemple 2.1.1.9 De même, dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, la famille $(1, \sqrt{2})$ est libre mais elle ne l'est pas dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ (ou dans le $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$-espace vectoriel $\mathbb{R}$).

Remarque : *dans la pratique, ce problème ne se posera pas car le corps $\mathbb{K}$ sera fixé.*

Définition 2.1.1.10 Soit I un ensemble quelconque (fini ou infini). On dit qu'une famille $\mathcal{L} = (x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est libre si toute sous-famille finie de $\mathcal{L}$ est libre.

Exemple 2.1.1.11 La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$. En effet, si J est une partie finie de $\mathbb{N}$ et si $(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J$ est tel que $\sum_{j\in J} \lambda_j X^j = 0$, alors pour tout $j \in J$, $\lambda_j = 0$ (car un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients le sont).

Exemple 2.1.1.12 Montrons que la famille $(x \longmapsto e^{rx})_{r\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note pour $r \in \mathbb{R}$, $f_r : x \longmapsto e^{rx}$. Soit J une partie finie de $\mathbb{R}$ (que l'on peut toujours supposer non vide). Montrons que $(f_r)_{r\in J}$ est libre. Soit $(\lambda_r)_{r\in J} \in \mathbb{K}^J$ tel que :

$$\sum_{r\in J} \lambda_r f_r = 0$$

On note $A = \{r \in J \ / \ \lambda_r \neq 0\}$ et on suppose que $A \neq \emptyset$. Alors A est une partie finie non vide de $\mathbb{R}$ elle admet donc un plus grand élément. Notons $r_0 = \max A$. On a alors :

$$0 = \sum_{r\in J} \lambda_r f_r = \sum_{r\in A} \lambda_r f_r \underset{+\infty}{\sim} \lambda_{r_0} f_{r_0}$$

Or, par définition, $\lambda_{r_0} \neq 0$ car $(r_0 \in A)$ et f_{r_0} ne s'annule pas (en fait est strictement positive). Ceci contredit $\lambda_{r_0} f_{r_0} \underset{+\infty}{\sim} 0$ (car alors $\lambda_{r_0} f_{r_0}$ est identiquement nulle au voisinage de $+\infty$).

Ainsi, on a montré par l'absurde que $A = \emptyset$, c'est-à-dire $\forall r \in J$, $\lambda_r = 0$. On conclut donc que la famille $(f_r)_{r\in J}$ est libre. On a alors montré que toute sous-famille finie de $(x \longmapsto e^{rx})_{r\in\mathbb{R}}$ est libre, c'est-à-dire , par définition, $(x \longmapsto e^{rx})_{r\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exemple 2.1.1.13 Soient $E = \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ et $D \in E$ défini par : $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $D(P) = P'$. Alors la famille $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre. En effet, soit J est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$, et soit $(\lambda_j)_{j\in J}$ tel que :

$$\sum_{j\in J} \lambda_j D^j = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall P \in \mathbb{K}[X] \ , \ \sum_{j\in J} \lambda_j P^{(j)} = 0$$

Soit $j_0 \in J$. En appliquant la relation qui précède à $P = X^{j_0}$ et en évaluant en 0, on obtient $\lambda_{j_0} = 0$. Ce qui montre que $(D^n)_{n\in J}$ est libre.

Remarque : *dans ce chapitre (et ce livre), on étudie principalement le cas des familles libres finies. En particulier, dans cette partie, toutes les preuves sont données dans le cas d'une famille finie de vecteurs. Le cas des familles infinies sera étudié plus en détails dans le cours de mathématiques spéciales 1. En revanche, on va donner un cas particulier important qui est très utile dans la pratique.*

Définition 2.1.1.14 Soit $I \subset \mathbb{N}$ avec $I \neq \emptyset$. On dit qu'une famille $(P_i)_{i\in I}$ de polynômes est échelonnée en degrés si les polynômes sont tous non nuls et :

$$\forall (i,j) \in I^2 \ , \ (\deg(P_i) = \deg(P_j) \Longrightarrow i = j)$$

Remarques :

- *autrement dit, une famille de polynômes est échelonnée en degrés si les polynômes sont non nuls et de degrés deux à deux distincts ;*
- *dans la pratique, quitte à permuter les indices, on sera dans le cas où « les degrés sont rangés dans l'ordre », c'est-à-dire que pour tout $i, j \in I$, $i < j \Longrightarrow \deg(P_i) < \deg(P_j)$.*

Proposition 2.1.1.15 *Toute famille $(P_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de polynômes échelonnée en degrés est libre.*

Preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(P_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une famille de polynômes échelonnée en degrés. Quitte à travailler avec la famille $(P_{\sigma(i)})_{i\in[\![0,n]\!]}$ où σ est une permutation de $[\![0,n]\!]$ bien choisie, on peut toujours supposer que pour tout $0 \leqslant i < j \leqslant n$, $\deg(P_i) < \deg(P_j)$. Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$$

On suppose que $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \neq 0_{\mathbb{K}^{n+1}}$. Soit $p = \max\{i \in [\![0,n]\!] \ / \ \lambda_i \neq 0\}$. On a alors :

$$0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i P_i$$

Or, $\lambda_p \neq 0$. Par suite,

$$P_p = \sum_{i=0}^{p-1} -\frac{\lambda_i}{\lambda_p} P_i$$

Si la somme est vide, c'est-à-dire $p = 0$, alors $P_0 = 0$ ce qui est absurde. Sinon, $p \geqslant 1$ et par conséquent, $\deg(P_p) \leqslant \max(\deg(P_i) \ , \ i \in [\![0, p-1]\!])$, c'est-à-dire $\deg(P_p) \leqslant \deg(P_{p-1})$, ce qui est absurde puisqu'on a supposé $\deg(P_p) > \deg(P_{p-1})$.

Ainsi, on a montré par l'absurde que $(\lambda_i)_{i\in[\![0,n]\!]} = 0_{\mathbb{K}^{n+1}}$. Ce qui montre que $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre.

⊠

Corollaire 2.1.1.16 *Soient $I \subset \mathbb{N}$ une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $\mathcal{L} = (P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes échelonnée en degrés. Alors $\mathcal{L}$ est libre.*

Preuve :

Soit J une partie finie de I. D'après la proposition précédente, $(P_j)_{j\in J}$ est libre car c'est une famille finie de polynômes échelonnée en degrés. ⊠

Définition 2.1.1.17 On dit qu'une famille $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_n)$ est liée si $\mathcal{F}$ n'est pas libre, c'est-à-dire s'il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$.

Exemple 2.1.1.18 Dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on considère les fonctions : $c : x \longmapsto \cos(x)$, $s : x \longmapsto \sin(x)$ et $f_\varphi : x \longmapsto 2\cos(x - \varphi)$, où $\varphi \in \mathbb{R}$. Alors (c, s, f_φ) est une famille liée.
En effet, pour tout réel x, on a :

$$f_\varphi(x) = 2\cos(\varphi)\cos(x) + 2\sin(\varphi)\sin(x)$$

Autrement dit, $f_\varphi - 2\cos(\varphi)c - 2\sin(\varphi)s = 0$. Il existe donc une combinaison linéaire de ces trois vecteurs, dont les coefficients ne sont pas tous nuls, et qui est nulle : c'est donc une famille liée.

⚠ **Attention :** il ne faut pas confondre la notion de famille libre (on dit aussi linéairement indépendante) et la notion « d'indépendance algébrique » ! Par exemple, si on considère les fonctions $c : x \longmapsto \cos(x)$, $s : x \longmapsto \sin(x)$ et $f : x \longmapsto \sin(2x)$, alors :

- (c, s, f) est une famille libre (exercice : le prouver) ;
- $f = 2 \cdot c \times s$ (on a une relation (non linéaire) qui relie les trois éléments de la famille).

Remarques :

- *la famille $\mathcal{F} = (0)$ est une famille liée et plus généralement, toute famille contenant le vecteur nul 0 est une famille liée ;*
- *de même, si la famille $\mathcal{F}$ contient deux vecteurs égaux, alors c'est une famille liée ;*
- *concrètement, $\mathcal{F}$ est liée signifie que l'on peut exprimer (au moins) un des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ en fonction des autres. Par contre attention, c'est bien un vecteur « en fonctions des autres », c'est-à-dire que ce n'est pas forcément le dernier vecteur de la famille qui s'exprime en fonctions des premiers.*

Exercice 2.1.1.19 Soit $\mathcal{F} = ((1,2,1,1,-1),(15,6,18,5,4),(-1,1,-1,1,-1),(3,-3,6,3,6))$. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ?

Proposition 2.1.1.20 *Soit $\mathcal{L}$ une famille libre. Alors toute sous-famille $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ est libre.*

Preuve :

C'est évident.

⊠

Proposition 2.1.1.21 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{L} = (x_i)_{i\in I}$ une famille libre de E et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On note $f(\mathcal{L}) = (f(x_i))_{i\in I}$ la famille image par f. Alors :*

$$f \text{ injective } \Longrightarrow f(\mathcal{L}) \text{ est libre}$$

Preuve :

• Si $I = \emptyset$, alors $\mathcal{L} = ()$ et $f(\mathcal{L}) = ()$ est la famille vide de F. Dans ce cas, l'implication est vraie car la famille vide est toujours libre.

• On suppose à présent que $I \neq \emptyset$. On fait la preuve dans le cas où $I = [\![1,n]\!]$ (avec $n \in \mathbb{N}^\star$), c'est-à-dire $\mathcal{L} = (x_1, \cdots, x_n)$.
On suppose que f est injective, montrons que $f(\mathcal{L})$ est libre. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = 0 &\iff f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0 \\
&\iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \ker(f) \\
&\iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \quad \text{(puisque } f \text{ est injective)} \\
&\iff \forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ \lambda_i = 0 \quad \text{(puisque } \mathcal{L} \text{ est libre)}
\end{aligned}$$

Par suite, $f(\mathcal{L})$ est libre.

⊠

Remarque : *dans le cas général, c'est la rédaction qui change. Lorsque I est quelconque, on fixe J une partie finie de I et on montre que $(f(x_i))_{i\in J}$ est libre. Pour le prouver, la rédaction et le raisonnement sont identiques. Dans ce livre, puisqu'on se concentre sur le cas des familles finies, on se ramène au cas des familles $(x_i)_{i\in I}$ avec $I = [\![1,n]\!]$. Pour ceux qui le souhaitent, vous pouvez refaire toutes les preuves de cette partie dans le cas général. L'objectif principal dans ce livre est de comprendre et de maîtriser les concepts dans le cadre des familles finies.*

⚠ **Attention :** la réciproque est fausse. Si pour **une** famille libre $\mathcal{L}$, $f(\mathcal{L})$ est libre, on ne peut pas conclure que f est injective. Contre-exemple : soit f la projection sur $<\vec{i},\vec{j}>$ parallèlement à $<\vec{k}>$ (c'est-à-dire la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan vectoriel engendré par $<\vec{i},\vec{j}>$). La famille $\mathcal{L}=(\vec{i},\vec{j})$ est libre, tout comme $f(\mathcal{L})=\mathcal{L}$, et pourtant f n'est pas injective.

Rappel : une combinaison linéaire de vecteurs d'une partie non vide X d'un espace vectoriel est un vecteur $u \in \text{Vect}(X)$, c'est-à-dire un vecteur u qui s'écrit sous la forme :

$$u=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$$

avec $n \in \mathbb{N}^\star$, et pour $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $x_i \in X$.

Proposition 2.1.1.22 *Soit $\mathcal{L}=(x_1,\cdots x_n)$ une famille libre de E et soit $x \in E$. Alors :*

$$x \notin \textit{Vect}(\mathcal{L}) \iff \mathcal{L}'=\mathcal{L}\cup(x) \textit{ est libre}$$

Preuve :

• Si $n=0$, alors $\mathcal{L}=()$, le résultat est clair car $\text{Vect}\,(())=\{0\}$ et (x) est libre si et seulement si $x \neq 0$.

• Sinon, $\mathcal{L}=(x_1,\cdots,x_n)$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrons que :

$$(x_1,\cdots,x_n,x) \text{ est liée} \iff x \in \text{Vect}(x_1,\cdots,x_n)$$

∗ Montrons l'implication directe.
On suppose que la famille $\mathcal{L}'=(x_1,\cdots,x_n,x)$ est liée. Alors il existe $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\lambda) \in \mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\}$ (c'est-à-dire non tous nuls) tel que :

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i+\lambda x=0$$

Si $\lambda=0$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0$ et puisque $\mathcal{L}$ est libre, tous les λ_i (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) sont nuls et donc $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\lambda)=0$, ce qui est absurde. On en déduit donc que $\lambda \neq 0$ et par suite :

$$x=\sum_{i=1}^{n}\frac{-\lambda_i}{\lambda}x_i \in \text{Vect}\,(\mathcal{L})$$

∗ La réciproque est claire car si $x \in \text{Vect}(\mathcal{L})$, il existe $(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i+(-1)x=0$ et $(\mu_1,\cdots,\mu_n,-1) \neq 0_{\mathbb{K}^{n+1}}$.

⊠

2.1.2 Famille génératrice

Définition 2.1.2.1 Soit $\mathcal{G}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E si $\text{Vect}(\mathcal{G}) = E$.

Remarques :

- *dans le cas général, si $\mathcal{G}$ est une famille non vide, alors $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E si :*

$$\forall x \in E \ , \ \exists n \in \mathbb{N}^\star \ , \ \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ , \ \exists x_1, \cdots, x_n \in \mathcal{G} \ , \ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

- *dans le cas le plus simple, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{G} = (x_1, \cdots, x_n)$ est une famille finie, alors $\mathcal{G}$ est une famille génératrice si :*

$$\forall x \in E \ , \ \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ , \ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

  Dans la suite, on se placera toujours dans le cas des familles finies ;
- *la famille vide est une famille génératrice de $\{0\}$ puisque $Vect\,(()) = \{0\}$;*
- *il n'y a pas unicité d'une famille génératrice ! Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, $((1,0),(0,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$, tout comme $((1,1),(1,-1))$. Il y a même une infinité de familles génératrices ;*
- *en ce qui concerne l'existence, c'est évident car la (très « grosse ») famille $(x)_{x \in E}$ est toujours une famille génératrice de E.*

Exemple 2.1.2.2 Dans le plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, $(\vec{i}, \vec{j})$ est une famille génératrice, tout comme $(\vec{i}, \vec{i}+\vec{j}, \vec{i}-\vec{j})$.

Exemple 2.1.2.3 La base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{B}_c = (e_1, \cdots, e_n)$, est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$. En effet, par définition, si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, alors :

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

Exemple 2.1.2.4 Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice.

Exemple 2.1.2.5 La famille $(\cos, \sin)$ est génératrice de $S = \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ , \ y'' + y = 0\}$. En effet, on a vu dans le cours sur les équations différentielles que :

$$y \in \mathcal{S} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ , \ y = \lambda \cos + \mu \sin \iff y \in < \cos, \sin >$$

Ce qui montre que $\mathcal{S} = < \cos, \sin >$.

Exercice 2.1.2.6 Déterminer une famille génératrice de l'espace $S = \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ , \ y' + y = 0\}$.

Exemple 2.1.2.7 Soit $a \in \mathbb{C}$. La famille $\mathcal{G} = ((X-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}[X]$. En effet, d'après la formule de Taylor pour les polynômes, si $P \in \mathbb{C}[X]$, alors pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant \deg(P)$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Par conséquent, $P \in \text{Vect}\,(1, X-a, \cdots, (X-a)^n) \subset \text{Vect}(\mathcal{G})$.

Remarque : *on retrouve donc les méthodes vues dans le cours de mathématiques supérieures 1 pour déterminer $< \mathcal{G} >$. Mais si vous vous rappelez, c'est en général assez difficile. Dans $\mathbb{R}^4$ par exemple, c'est équivalent à résoudre un système de 4 équations à 4 inconnues. On verra dans ce chapitre que dans certains cas, à savoir lorsque E est de dimension finie, alors c'est « facile car inutile »...*

Proposition 2.1.2.8 *Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice (de E). Alors toute sur-famille $\mathcal{G}' \supset \mathcal{G}$ de vecteurs de E est encore génératrice de E.*

Preuve :

C'est clair car si $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$, alors $\text{Vect}(\mathcal{G}) \subset \text{Vect}(\mathcal{G}')$.

⊠

Proposition 2.1.2.9 *Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :*

$$f \text{ surjective} \iff f(\mathcal{G}) \text{ est une famille génératrice de } F$$

Preuve :

En fait, c'est évident à partir du moment où l'on a remarqué que :

$$f(\text{Vect}(\mathcal{G})) = \text{Vect}(f(\mathcal{G}))$$

⊠

Proposition 2.1.2.10 *Soient $\mathcal{G}$ une famille de vecteurs de E, $x \in E$ et $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cup (x)$. On suppose que $\mathcal{G}'$ est une famille génératrice de E. Alors :*

$$x \in \text{Vect}(\mathcal{G}) \iff \mathcal{G} \text{ est une famille génératrice de } E$$

Preuve :

Par hypothèse, $\text{Vect}(\mathcal{G}') = E$. De plus, $\text{Vect}(\mathcal{G} \cup (x)) = \text{Vect}(\mathcal{G}) + \text{Vect}(x)$. Par suite,

$$E = \text{Vect}(\mathcal{G}') = \text{Vect}(\mathcal{G}) + \mathbb{K}x$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \text{ est génératrice de } E &\iff \text{Vect}(\mathcal{G}) = E \\ &\iff \mathbb{K}x \subset \text{Vect}(\mathcal{G}) \\ &\iff x \in \text{Vect}(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

⊠

Remarque : *la démonstration proposée ici est efficace mais elle masque l'idée principale. Quelle est justement cette idée ?*

À retenir sur les familles libres et génératrices :

- si une famille est libre, on peut toujours retirer des vecteurs de cette famille pour obtenir une famille libre ;
- si une famille $\mathcal{L}$ est libre, on peut lui ajouter un vecteur x pour obtenir une famille libre si (et seulement si) x n'est pas une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{L}$;
- si une famille est génératrice, on peut toujours lui ajouter des vecteurs pour obtenir une nouvelle famille génératrice ;
- si une famille $\mathcal{G}$ est génératrice, on peut retirer un vecteur x de cette famille pour obtenir une nouvelle famille génératrice si (et seulement si) x est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G} \setminus (x)$.

2.1.3 Base d'un espace vectoriel

Définition 2.1.3.1 Soit $\mathcal{B}$ une famille quelconque de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une base de E si elle est libre et génératrice de E.

Exemple 2.1.3.2 Dans les exemples précédents, on a déjà montré que :

- la famille vide est une base de $\{0\}$;
- la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est une base de $\mathbb{K}^n$;
- $(\cos, \sin)$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation $y'' + y = 0$;
- la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ (appelée base canonique de $\mathbb{K}[X]$).

Théorème 2.1.3.3 *Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs de E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{B}$ est une base de l'espace E ;

(ii) tout élément x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec $x_i \in \mathbb{K}$.

Dans ce cas, le n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ s'appelle les coordonnées (ou composantes) de x dans la base $\mathcal{B}$.

Preuve :

• Montrons $(i) \Longrightarrow (ii)$.

On suppose que $\mathcal{B}$ est une base de E.

∗ Montrons l'existence.
Soit $x \in E$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, elle est en particulier une famille génératrice de E. Par suite, il existe $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

∗ Montrons l'unicité.
Soient $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que : $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) e_i = 0$$

Or, $\mathcal{B}$ est une base de E, elle est en particulier libre. Par suite,

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) e_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ x_i - y_i = 0$$

D'où l'on déduit que $\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ x_i = y_i$, prouvant ainsi l'unicité.

• Montrons $(ii) \Longrightarrow (i)$.

On suppose (ii). Le fait que $\mathcal{B}$ est génératrice est évident. Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} 0_{\mathbb{K}} e_i$$

Or, par hypothèse, la décomposition de chaque vecteur $x \in E$ est unique. Par suite, $\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ \lambda_i = 0$ et $\mathcal{B}$ est une famille libre.

⊠

Remarques :

- *retenez bien que générateur garantit l'existence d'une décomposition en combinaison linéaire des vecteurs de la famille et libre garantit l'unicité d'une telle décomposition ;*
- *le théorème précédent s'applique encore lorsque $\mathcal{B}$ est une famille quelconque et la preuve est quasi identique à quelques petites adaptations près : ceci sera vu dans le cours de mathématiques spéciales 1.*

Exercice 2.1.3.4 Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{B} = \big((X-a)^k\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base ?

Exercice 2.1.3.5 Soit $\mathcal{L}$ une famille libre. Déterminer une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{L})$.

Définition 2.1.3.6 Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. On dit que :

(i) $\mathcal{F}$ est libre maximale si $\mathcal{F}$ est libre et s'il n'existe aucune famille libre contenant strictement $\mathcal{F}$;

(ii) $\mathcal{F}$ est génératrice minimale si $\mathcal{F}$ est génératrice et s'il n'existe aucune famille génératrice contenue strictement dans $\mathcal{F}$.

Remarque : *concrètement, cela signifie :*

- *une famille libre $\mathcal{L}$ est libre maximale si pour tout $x \in E$, $\mathcal{L} \cup (x)$ est liée ;*
- *une famille génératrice non vide $\mathcal{G}$ est génératrice minimale si pour tout $x \in \mathcal{G}$, $\mathcal{G} \setminus (x)$ n'est pas génératrice (et plus exactement $x \notin Vect(\mathcal{G} \setminus (x))$).*

Remarque : *le théorème qui suit montrera que ces notions sont équivalentes à celle d'une base. D'un point de vue théorique, c'est très important (et permet, avec l'axiome du choix, de justifier l'existence d'une base pour n'importe quel espace vectoriel) mais d'un point de vue pratique, il n'est pas très intéressant, sauf dans le cas des espaces de dimension finie (voir le paragraphe sur la caractérisation des bases en dimension finie).*

Théorème 2.1.3.7 *Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs de E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{F}$ est libre maximale ;

(ii) $\mathcal{F}$ est une base de E ;

(iii) $\mathcal{F}$ est génératrice minimale.

Preuve :

• $(i) \Longrightarrow (ii)$

On suppose que $\mathcal{F}$ est libre maximale. Montrons que $\mathcal{F}$ est une base de E. D'une part, par définition, $\mathcal{F}$ est une famille libre. D'autre part, soit $x \in E$. Alors, $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F} \cup (x)$ et puisque $\mathcal{F}$ est libre maximale, $\mathcal{F} \cup (x)$ est une famille liée. Mais puisque $\mathcal{F}$ est libre,

$$\mathcal{F} \cup (x) \text{ est liée } \iff x \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

Par suite, $x \in \text{Vect}(\mathcal{F})$, ce qui montre que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice. Par conséquent, c'est une base de E.

• $(ii) \Longrightarrow (iii)$

On suppose que $\mathcal{F}$ est une base de E. Alors, d'une part, $\mathcal{F}$ est une famille génératrice. Montrons qu'elle est minimale. Si $\mathcal{F}$ est vide, le résultat est évident puisqu'il n'existe pas de sous-famille stricte de $\mathcal{F}$. Sinon, soit $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{F}$. L'inclusion étant stricte, il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0} \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$.
Par ailleurs, puisque $\mathcal{F}$ est une base, $\mathcal{F}$ est une famille libre. Il s'ensuit que :

$$x_{i_0} \notin \text{Vect}(\mathcal{G})$$

ce qui montre que $\mathcal{G}$ n'est pas une famille génératrice de E.

• $(iii) \Longrightarrow (i)$

On suppose que $\mathcal{F}$ est génératrice minimale. Montrons que $\mathcal{F}$ est libre maximale. Pour commencer, si $\mathcal{F}$ est liée, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0} \in \text{Vect}(\mathcal{G})$ où $\mathcal{G} = \mathcal{F} \setminus (x_{i_0}) = (x_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$. Mais alors, d'après les propriétés des familles génératrices, $\mathcal{G}$ est encore une famille génératrice de E et $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{F}$. Ce qui contredit la minimalité : par conséquent, $\mathcal{F}$ est libre.
Par ailleurs, si $x \in E$, alors $\mathcal{F} \cup (x)$ est liée puisque $\mathcal{F}$ est génératrice. Ce qui montre que $\mathcal{F}$ est libre maximale.

⊠

Remarques :

- *un des intérêts principaux des « bases » est que celles-ci permettent de travailler avec des coordonnées (qui sont des scalaires, c'est-à-dire des nombres) plutôt que de manipuler des objets « vectoriels ». Ceci sera particulièrement efficace en dimension finie (voir la section suivante) ;*
- *évidemment la notion de base généralise celle vue dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ ou en géométrie élémentaire dans le plan ou dans l'espace ;*
- *ceci veut aussi dire que pour une application linéaire, la connaissance de « $f(x)$ » est équivalente à $f(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est une base de E. Ce sera l'objet du paragraphe suivant et c'est une propriété fondamentale.*

2.1.4 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

Proposition 2.1.4.1 *Soient $n \geqslant 1$ et $\mathcal{F} = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E. On considère l'application :*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \end{array}$$

Alors :

(i) $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, E)$;

(ii) $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathit{Vect}(\mathcal{F})$;

(iii) φ *est injective si et seulement si* $\mathcal{F}$ *est libre ;*

(iv) φ *est un isomorphisme si et seulement si* $\mathcal{F}$ *est une base de* E.

Preuve :

C'est clair !

⊠

Théorème 2.1.4.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(u_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs de F.*

Alors, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in I$, $f(e_i) = u_i$.
On dit qu'une application linéaire est parfaitement déterminée (ou caractérisée) par l'image d'une base.

Preuve :

Tout d'abord, si $I = \emptyset$, alors $E = \{0\}$ et il n'y a rien à prouver car la seule application linéaire de $\{0\}$ dans F est l'application nulle et la propriété commençant par « $\forall i \in \emptyset$ » est toujours vraie. On suppose donc que $I \neq \emptyset$.

Pour simplifier les notations, on donne la preuve dans le cas d'une base finie. Le lecteur insatisfait pourra consulter le cours de mathématiques spéciales 1 où la preuve dans le cas d'une famille quelconque est donnée.
On suppose donc qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$.

• Montrons l'unicité (sous réserve d'existence).
On suppose que f et g vérifient les hypothèses du théorème. Montrons que $f = g$, c'est-à-dire montrons que : $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$.
Soit $x \in E$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Or, par hypothèse :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ f(e_i) = u_i = g(e_i)$$

et donc par linéarité de f et g :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(e_i) = g(x)$$

D'où l'unicité sous réserve d'existence.

• Montrons à présent l'existence.
Soit $x \in E$. $\mathcal{B}$ est une base de E donc il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

On pose alors : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. Montrons que f convient.

∗ Tout d'abord, f est bien définie puisque la décomposition de $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$ est unique (ou de façon équivalente, car les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$ sont uniques).

∗ Ensuite, si $i \in [\![1, n]\!]$ et $x = e_i$, alors $f(x) = f(1_{\mathbb{K}} e_i) = 1_{\mathbb{K}} u_i = u_i$. Par suite, $\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ f(e_i) = u_i$.

∗ Enfin, montrons que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.
Soient $(x, y) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe alors $(\lambda_1 \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \quad \text{et} \quad y = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k$$

On a alors par définition de f,

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} (\lambda\lambda_k + \mu\mu_k) e_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda\lambda_k + \mu\mu_k) u_k \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k + \mu \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que f est bien une application linéaire. ⊠

Exercice 2.1.4.3 Montrer qu'il existe une unique forme linéaire f définie sur $\mathbb{K}[X]$ et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(X^n) = n$. De quelle application usuelle s'agit-il ?

Remarque : *dans le cas particulier où $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base finie de E (c'est le cas traité dans la preuve), le théorème précédent est alors une conséquence immédiate de la proposition 2.1.4.1. En effet, en considérant φ et ψ définies par :*

$$\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ , \ \varphi((\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad \psi((\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

on a d'après la proposition 2.1.4.1 :

- $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, F)$;
- $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, E)$;
- $\mathrm{Im}(\varphi) = Vect(\mathcal{B}) = E$ *(car $\mathcal{B}$ est génératrice de E)* ;
- φ *est injective car $\mathcal{B}$ est une famille libre.*

Il s'ensuit que φ est un isomorphisme et que $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ convient pour le théorème.

Une des interprétations très utile de ce théorème est donnée dans le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.4.4 *Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E. Alors :*

$$f = g \iff \forall i \in I \ , \ f(e_i) = g(e_i)$$

Preuve :

C'est évident d'après le théorème précédent. En effet, le sens direct est clair et pour la réciproque, si on pose $(u_i)_{i \in I} = (f(e_i))_{i \in I}$, il existe une unique application linéaire de E dans F vérifiant $f(e_i) = u_i$ pour tout $i \in I$. Or, f et g vérifient ces hypothèses donc $f = g$. ⊠

Remarques :

- *si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une base de E, $(\varepsilon_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le théorème précédent dit que f est parfaitement déterminée par la donnée de $f(e_1), \cdots, f(e_p)$. Or, pour $j \in [\![1, p]\!]$ donné, $f(e_j)$ s'écrit sous la forme :*

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \varepsilon_i \quad \text{avec } (a_{1,j}, \cdots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n$$

  On en déduit que f est parfaitement déterminée par la donnée des $n \times p$ nombres $a_{i,j}$. C'est ce qui motive l'introduction des matrices, notées $[a_{i,j}]$ et qu'on va étudier dans le chapitre suivant ;
- *puisqu'une application linéaire est parfaitement caractérisée par l'image d'une base, la connaissance de $f(\mathcal{B})$ doit permettre de déterminer la nature (injective, surjective ou bijective) de f : c'est l'objet du théorème suivant.*

Théorème 2.1.4.5 *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que $\mathcal{B}$ est une base de E. Alors :*

(i) f est injective $\iff$ $f(\mathcal{B})$ est libre ;
(ii) f est surjective $\iff$ $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F ;
(iii) f est bijective $\iff$ $f(\mathcal{B})$ est une base de F.

Preuve :

Pour commencer, si $\mathcal{B}$ est la famille vide, alors $f(\mathcal{B})$ est la famille vide de F, $E = \{0\}$ et $f = 0$. Alors f est surjective si et seulement si $F = \{0\}$ (et $\{0\} = \text{Vect}\,(())$). Le théorème est donc vrai dans ce cas. On suppose à présent que $\mathcal{B}$ n'est pas vide.

• Montrons (i).

∗ Montrons $\Longrightarrow$
On suppose que f est injective. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, $\mathcal{B}$ est une famille libre. Par conséquent, $f(\mathcal{B})$ est libre (proposition 2.1.1.21).

∗ Montrons $\Longleftarrow$
On suppose que $f(\mathcal{B})$ est une famille libre. Montrons que f est injective. Soit $x \in \ker(f) \subset E$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$, $(e_1, \cdots, e_n) \subset \mathcal{B}$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Alors $0 = f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$. Or, $f(\mathcal{B})$ est libre donc la sous-famille $(f(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est aussi libre. Par conséquent, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$ et donc $x = 0$. Ce qui prouve que $\ker(f) = \{0\}$ et f est injective.

• Montrons (ii).

Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, c'est en particulier une famille génératrice de E. Par suite, $\text{Im}(f) = f(E) = f(\text{Vect}(\mathcal{B})) = \text{Vect}(f(\mathcal{B}))$. On en déduit que :

$$f \text{ est surjective} \iff \text{Im}(f) = F \iff \text{Vect}(f(\mathcal{B})) = F$$

soit encore, f est surjective $\iff$ $f(\mathcal{B})$ est génératrice de F.

• Montrons (iii).

C'est une conséquence directe de (i) et (ii) puisque d'une part, f bijective équivaut à f injective et surjective, et d'autre part, $f(\mathcal{B})$ est une base de F si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est libre et génératrice.

⊠

2.2 Dimension d'un espace vectoriel

2.2.1 Définition et exemples

Définition 2.2.1.1 On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie.

Exemple 2.2.1.2 $\{0\}$ est un espace de dimension finie puisque la famille vide (qui est bien finie) est une famille génératrice de $\{0\}$.

Exemple 2.2.1.3 L'espace usuel est de dimension finie puisque la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une famille génératrice finie.

Exemple 2.2.1.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie puisque la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est une famille génératrice finie.

Exemple 2.2.1.5 L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie puisque la famille finie $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. En revanche, $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie. En effet, si $\mathcal{G}$ est une famille finie de $\mathbb{K}[X]$, alors on choisit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall P \in \mathcal{G}\ ,\ \deg(P) \leqslant n$$

Par construction, $\mathrm{Vect}(\mathcal{G}) \subset \mathbb{K}_n[X]$ donc $X^{n+1} \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$. Ce qui montre que $\mathcal{G}$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

2.2.2 Théorèmes de la dimension et de la base incomplète

Théorème 2.2.2.1 (de la dimension) *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille génératrice de E. Alors toute famille $(y_1, \cdots, y_{n+1})$ de $(n+1)$ vecteurs de E est une famille liée.*

Preuve :

> **On admet ce théorème.** Le lecteur intéressé trouvera une démonstration du théorème en annexe.

⊠

Remarque : *en fait, l'idée centrale est que si l'on peut exprimer $y_1, \cdots, y_{n+1}$ en fonction de $x_1, \cdots, x_n$, alors en substituant successivement les x_i dans les équations, la dernière équation donne une combinaison linéaire des y_i qui est nulle et dont les coefficients ne sont pas tous nuls. La difficulté principale est d'écrire tout cela proprement.*

Corollaire 2.2.2.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de E et si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice finie de E, alors $\mathcal{L}$ est finie et :*

$$|\mathcal{L}| \leqslant |\mathcal{G}|$$

Preuve :

On note $n = |\mathcal{G}|$. On raisonne par l'absurde et on suppose donc que $\mathcal{L}$ contient au moins $n+1$ vecteurs $y_1, \cdots, y_{n+1}$. Alors, d'après le théorème de la dimension, la famille $\mathcal{L}' = (y_1, \cdots, y_{n+1})$ est liée. Or, $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ donc $\mathcal{L}$ est liée, ce qui est absurde. Par suite, $\mathcal{L}$ est finie et $|\mathcal{L}| \leqslant |\mathcal{G}|$. ⊠

Théorème 2.2.2.3 (Base incomplète) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que :*

(i) $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E ;

(ii) $\mathcal{L}$ une famille libre et $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$.

Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Preuve :

On écarte le cas particulier où $\mathcal{G}$ est la famille vide, auquel cas le résultat est évident. On suppose donc par la suite que $\mathcal{G} = (x_1, \cdots, x_n)$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$. On va présenter ici deux démonstrations totalement différentes mais qui présentent chacune des idées ou méthodes importantes.

• **Première méthode (non constructive)**

Le principe est alors de construire une famille libre « maximale ». Dans ce but, on considère l'ensemble :

$$A = \{k \in \mathbb{N} \ / \ \exists I \subset [\![1, n]\!] \ , \ |I| = k \text{ et } \mathcal{L} \subset (x_i)_{i \in I} \subset \mathcal{G} \text{ et } (x_i)_{i \in I} \text{ libre}\}$$

(autrement dit, A est l'ensemble des cardinaux (ou « longueurs ») des familles libres qui contiennent $\mathcal{L}$ et qui sont contenues dans $\mathcal{G}$). Alors :

- ▷ $A \subset \mathbb{N}$ et A est non vide car $|\mathcal{L}| \in A$;
- ▷ par définition, A est majoré par n.

Il s'ensuit que A admet un plus grand élément : soit $p = \max A$.

Puisque $p \in A$, il existe $I \subset [\![1, n]\!]$ de cardinal p tel que $(x_i)_{i\in I}$ soit libre, contienne $\mathcal{L}$ et soit contenue dans $\mathcal{G}$.

On pose $\mathcal{B} = (x_i)_{i\in I}$ et on montre que $\mathcal{B}$ est une base de E.

* $\mathcal{B}$ est libre par construction ;
* Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice.
  Pour cela, on montre que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \in \text{Vect}(\mathcal{B})$.
  Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Si $k \in I$, alors $x_k \in \mathcal{B} \subset \text{Vect}(\mathcal{B})$. Sinon, on considère la famille $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup (x_k)$. Clairement, $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{G}$ et $\mathcal{B}'$ contient $p + 1$ vecteurs . Par suite, $\mathcal{B}'$ est liée puisque $p = \max A$. D'après les propriétés des familles libres, $x_k \in \text{Vect}(\mathcal{B})$. Ainsi,

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \ , \ x_k \in \text{Vect}(\mathcal{B})$$

  et par suite,

$$E = \text{Vect}(\mathcal{G}) \subset \text{Vect}(\mathcal{B}) \subset E$$

  Ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E.

Ceci montre que $\mathcal{B}$ est une base de E vérifiant $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

• **Seconde méthode (algorithmique)**

On montre par récurrence finie sur $k \in [\![1, n]\!]$ qu'il existe $\mathcal{L}_k$ libre, contenant $\mathcal{L}$, contenue dans $\mathcal{G}$, telle que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $x_i \in \text{Vect}(\mathcal{L}_k)$.

Initialisation :
Pour $k = 1$, si $x_1 \in \text{Vect}(\mathcal{L})$, on pose $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$ sinon, on pose $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup (x_1)$. Dans les deux cas, $\mathcal{L}_1$ est libre, $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{G}$ et $x_1 \in \text{Vect}(\mathcal{L}_1)$. Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $k = 1$.

Hérédité :
On suppose avoir construit pour un entier $k < n$ une famille libre $\mathcal{L}_k$, contenant $\mathcal{L}$, contenue dans $\mathcal{G}$, et telle que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $x_i \in \text{Vect}(\mathcal{L}_k)$.

Si $x_{k+1} \in \text{Vect}(\mathcal{L}_k)$, on pose $\mathcal{L}_{k+1} = \mathcal{L}_k$; sinon, on pose $\mathcal{L}_{k+1} = \mathcal{L}_k \cup (x_{k+1})$. À nouveau, $\mathcal{L}_{k+1}$ est libre (puisque par hypothèse de récurrence $\mathcal{L}_k$ est libre et d'après les propriétés des familles libres), contient $\mathcal{L}_k$ et donc $\mathcal{L}$ toujours par hypothèse de récurrence, est contenue dans $\mathcal{G}$ (puisque $\mathcal{L}_k$ l'est et $x_{k+1} \in \mathcal{G}$) et clairement, $\forall i \in [\![1, k + 1]\!]$, $x_i \in \text{Vect}(\mathcal{L}_{k+1})$.

Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $k+1$ et achève la récurrence.

La famille $\mathcal{B} = \mathcal{L}_n$ est alors libre (par construction) et est aussi génératrice car $E = \text{Vect}(\mathcal{G}) \subset \text{Vect}(\mathcal{L}_n)$. Il s'ensuit que $\mathcal{B}$ est une base de E vérifiant $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. ⊠

Remarques :

- *dans la pratique, on applique la preuve « algorithmique » (c'est-à-dire la seconde méthode) pour obtenir explicitement une base connaissant une famille génératrice ;*

- *le théorème affirme l'existence « d'au moins une » base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. Dans les deux démonstrations, on « voit » bien que $\mathcal{B}$ n'est pas nécessairement unique car :*
  - *dans la première méthode le cardinal maximal d'une famille libre est unique mais la partie $I \subset [\![1, n]\!]$ tel que $|I| = \max A$ n'est pas forcément unique ;*
  - *dans la seconde preuve, les vecteurs « x_k » que l'on rajoute (ou non) à la famille $\mathcal{L}$ dépendent des vecteurs rajoutés à l'étape précédente. Autrement dit, le résultat obtenu dépend a priori de l'ordre des vecteurs dans la famille.*

Corollaire 2.2.2.4 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors :*

(i) E admet une base finie ;

(ii) si $\mathcal{L}$ est une famille libre, alors il existe une base de E contenant $\mathcal{L}$;

(iii) si $\mathcal{L}$ est libre et $\mathcal{B}$ est une base de E, alors on peut compléter $\mathcal{L}$ par des vecteurs de $\mathcal{B}$ pour obtenir une base de E ;

(iii) si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice quelconque (c'est-à-dire finie ou non) de E, alors il existe une base de E contenue dans $\mathcal{G}$.

Preuve :

Puisque E est de dimension finie, il existe une famille finie qui est génératrice de E. Soit $\mathcal{G}_0$ une telle famille.

• Montrons (i).
On applique le théorème de la base incomplète avec $\mathcal{L} = ()$ (la famille vide), qui est libre, et $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$ qui est une famille génératrice finie de E contenant $\mathcal{L}$.

• Montrons (ii).
D'après le théorème de la dimension, $\mathcal{L}$ est finie (et $|\mathcal{L}| \leqslant |\mathcal{G}_0|$). Alors la famille $\mathcal{G}' = \mathcal{L} \cup \mathcal{G}_0$ est une famille génératrice finie de E contenant $\mathcal{L}$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathcal{B}$ de E contenant $\mathcal{L}$.

• Montrons (iii).
Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, $\mathcal{B}$ est en particulier libre. D'après le théorème de la dimension, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{L}$ sont finies. Alors $\mathcal{L}$ est libre, $\mathcal{L} \cup \mathcal{B}$ est génératrice (car $\mathcal{B}$ l'est) finie donc d'après le théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{B}$.

• Montrons (iv).
Si $\mathcal{G}$ est finie, on applique directement le théorème de la base incomplète avec $\mathcal{L} = ()$ famille libre contenue dans $\mathcal{G}$, famille génératrice finie de E.

On suppose à présent que $\mathcal{G}$ est infinie. On note $\mathcal{G}_0 = (x_0, \cdots, x_n)$ (car si $\mathcal{G}_0 = ()$, alors $E = \{0\}$ et $\mathcal{B} = ()$ est une base de E contenue dans $\mathcal{G}$).

On note également $\mathcal{G} = (e_i)_{i\in I}$. Puisque $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $x_i \in \text{Vect}(\mathcal{G})$. Par définition, il existe donc J_i une partie finie de I et $(\lambda_{i,j})_{j\in J_i} \in \mathbb{K}^{J_i}$ tels que :

$$x_i = \sum_{j\in J_i} \lambda_{i,j} e_j$$

On pose $J = \bigcup_{i\in[\![0,n]\!]} J_i$, $\mathcal{G}' = (e_i)_{i\in J}$, et on a alors :

- $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$;
- $\mathcal{G}'$ est une famille finie (puisque J est une partie finie de I) ;
- par définition, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $x_i \in \text{Vect}(\mathcal{G}')$. Par conséquent, $\text{Vect}(x_0, \cdots, x_n) \subset \text{Vect}(\mathcal{G}')$, c'est-à-dire $E \subset \text{Vect}(\mathcal{G}')$ (puisque $\mathcal{G}_0$ est génératrice de E). Ce qui montre que $\mathcal{G}'$ est une famille génératrice de E.

Ainsi, $\mathcal{G}'$ est une famille génératrice finie de E : d'après le premier cas, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}'$. Or, $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. ⊠

Exemple 2.2.2.5 Soient $E = \mathbb{R}^4$, $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1, -1)$ et $\mathcal{L} = (u, v)$.

La base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E et $\mathcal{L}$ est clairement libre (puisque u et v sont non colinéaires). On va donc compléter $\mathcal{L}$ en une base de E en appliquant la méthode décrite dans la preuve du théorème de la base incomplète (seconde méthode) :

- $e_1 = (1, 0, 0, 0) \notin \text{Vect}(\mathcal{L})$. En effet, dans le cas contraire, il existerait λ, μ deux réels tels que $e_1 = \lambda u + \mu v$. Par suite,

  $$(\lambda + \mu, \lambda - \mu, \lambda + \mu, \lambda - \mu) = (1, 0, 0, 0)$$

  et donc $1 = \lambda + \mu = 0$, ce qui est absurde. On pose donc $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup (e_1)$;

- de même, on montre que $e_2 \notin \text{Vect}(\mathcal{L}_1)$ (sinon, il existerait λ, μ et γ trois réels tels que $e_2 = \lambda u + \mu v + \gamma e_1$. En prenant la seconde composante puis la quatrième, on trouve $1 = \lambda - \mu = 0$). On pose alors $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cup (e_2) = (u, v, e_1, e_2)$;

- $\mathcal{L}_2$ est libre et $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_2 \cup (e_3)$ est liée car $|\mathcal{L}'| = 5 > 4 = |\mathcal{B}_c|$ (le cardinal d'une famille libre est toujours inférieur au cardinal d'une famille génératrice) donc $e_3 \in \text{Vect}(\mathcal{L}_2)$. On pose donc $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2$;

- de même, on a $e_4 \in \text{Vect}(\mathcal{L}_3)$ donc on pose $\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_3$.

Alors, $\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_2 = (u, v, e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ contenant $\mathcal{L}$.

Exercice 2.2.2.6 Soient $E = \mathbb{K}_5[X]$ et $\mathcal{L} = (1 + X - X^2, 2 - X, X^4 + X^3 - X)$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$.
2. Compléter $\mathcal{L}$ est une base de E (c'est-à-dire trouver une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$).

2.2.3 Dimension d'un espace vectoriel et caractérisation des bases

Théorème 2.2.3.1 (Définition) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E sont finies et ont le même cardinal. Cette quantité s'appelle la dimension de E et est notée* $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Preuve :

On procède en trois étapes.

- Tout d'abord, puisque E est de dimension finie, E admet au moins une base d'après le corollaire précédent.
- Ensuite, puisque E est de dimension finie, il existe $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. Alors, $\mathcal{B}$ est en particulier libre. D'après le corollaire du théorème de la dimension, $\mathcal{B}$ est finie et $|\mathcal{B}| \leqslant |\mathcal{G}|$.
  Ce qui montre que toutes les bases de E sont de cardinal fini.
- Enfin, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, de cardinal n et p respectivement.
  Puisque $\mathcal{B}$ libre et $\mathcal{B}'$ est génératrice, on a $n \leqslant p$. En échangeant les rôles de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, $p \leqslant n$, et donc finalement $p = n$.
  Ce qui montre que toutes les bases ont le même cardinal.

⊠

Remarques :

- *ainsi, on retient que la dimension d'un espace vectoriel est le cardinal d'une base quelconque de cet espace (car toutes les bases ont le même cardinal) ;*
- *lorsque le contexte est clair, on notera aussi* $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim(E)$ *(autrement dit, on ne fera plus référence au corps des scalaires), ou encore* $\dim E$ *;*
- *attention, si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, alors E est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie mais* $\dim_{\mathbb{C}}(E) \neq \dim_{\mathbb{R}}(E)$*. Par exemple, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie égale à* 1 *(une base est* (1)*) mais $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension* 2 *puisqu'une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$ est* $(1, i)$.

Exemple 2.2.3.2 On a les cas simples suivants que vous devez connaître.

- $E = \{0\}$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim\{0\} = 0$ car $\mathcal{B} = ()$ (la famille vide) est une base de $\{0\}$ et $|\mathcal{B}| = 0$. Plus généralement, on a :

$$E = \{0\} \iff (E \text{ est de dimension finie et } \dim E = 0)$$

  Ce qu'on écrira sous la forme plus abrégée (mais abusive) $E = \{0\} \iff \dim E = 0$.

- De façon similaire, si $E = \mathbb{K}u$ avec $u \neq 0$, alors $\mathcal{B} = (u)$ est une base de E donc E est de dimension finie et $\dim E = 1$. Réciproquement, si $\dim E = 1$, alors E a une base $\mathcal{B}$ de cardinal 1. Il existe donc un vecteur $u \in E$ tel que $\mathcal{B} = (u)$. Puisque $\mathcal{B}$ est libre, $u \neq 0$ et puisque $\mathcal{B}$ est génératrice, $E = \mathbb{K}u$. On conclut donc que :

$$\exists u \in E \setminus \{0\}\ ,\ E = \mathbb{K}u \iff (E \text{ est de dimension finie et } \dim E = 1)$$

Exemple 2.2.3.3 L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathcal{S} = 2$.
En effet, on a déjà vu qu'une base de $\mathcal{S}$ est $\mathcal{B} = (t \longmapsto \cos(\omega t), t \longmapsto \sin(\omega t))$ (si $\omega \neq 0$) ou bien $\mathcal{B} = (t \longmapsto 1, t \longmapsto t)$ (si $\omega = 0$). On en déduit donc que :

- $\mathcal{S}$ est de dimension finie puisque $\mathcal{B}$ est une famille génératrice finie de $\mathcal{S}$;
- $\dim \mathcal{S} = |\mathcal{B}|$ (car $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{S}$), c'est-à-dire $\dim \mathcal{S} = 2$.

⚠ **Attention :** il ne faut pas confondre cardinal et dimension ! Si E est un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et $\mathcal{B}$ est une base de E, alors :

- $\dim E$ est un entier qui a un sens mais $|E| = +\infty$ (si $E \neq \{0\}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ;
- $|\mathcal{B}| = \mathrm{Card}(\mathcal{B})$ a un sens mais $\dim \mathcal{B}$ n'a aucun sens !

► À retenir :

On retient donc que :

1. E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie ;
2. si E est de dimension finie, alors E admet des bases et toutes les bases de E ont le même cardinal ;
3. $\dim E = |\mathcal{B}|$ pour n'importe quelle base $\mathcal{B}$;
4. la propriété précédente se comprend en disant que la dimension est « le nombre de paramètres scalaires (c'est-à-dire le nombre de constantes) indépendants qu'il faut pour décrire l'ensemble ».

Proposition 2.2.3.4 *Pour tout entier n, $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et* $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$.

Preuve :

On a déjà vu que $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ (base canonique) et cette famille contient $n + 1$ éléments. ⊠

Proposition 2.2.3.5 *Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.*

Preuve :

C'est clair puisque la base canonique de $\mathbb{K}^n$ contient n vecteurs. ⊠

Définition 2.2.3.6 On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension infinie s'il n'est pas de dimension finie.

Proposition 2.2.3.7 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.*

(i) Si $\mathcal{L}$ est libre, alors $|\mathcal{L}| \leqslant n$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{L}$ est une base ;

(ii) si $\mathcal{G}$ est génératrice, alors $|\mathcal{G}| \geqslant n$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{G}$ est une base.

Corollaire 2.2.3.8 *Si E est de dimension finie n, les familles libres maximales sont les familles libres de cardinal n et les familles génératrices minimales sont celles de cardinal n. Autrement dit, si $\mathcal{F}$ est une famille quelconque de n vecteurs,*

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice} \iff \mathcal{F} \text{ est une base}$$

Preuve :

• Montrons (i).
On sait déjà que $|\mathcal{L}| \leqslant n$ car il existe une base $\mathcal{B}$ de cardinal n. Cette base est une famille génératrice donc $|\mathcal{L}| \leqslant |\mathcal{B}|$. Par ailleurs, si $\mathcal{L}$ est une base alors d'après ce qui précède, $|\mathcal{L}| = n$. Réciproquement, si $|\mathcal{L}| = n$, on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base $\mathcal{L}'$ de E contenant $\mathcal{L}$. Alors, $|\mathcal{L}'| = \dim E = n = |\mathcal{L}|$ donc $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ est une base.

• Montrons (ii).
Soit $\mathcal{B}$ une base de E de cardinal n. Cette famille est libre et $\mathcal{G}$ génératrice, donc $|\mathcal{G}| \geqslant n$. De plus, si $\mathcal{G}$ est une base, il y a égalité d'après ce qui précède. Réciproquement, si $|\mathcal{G}| = n$ d'après le théorème de la base incomplète avec $\mathcal{L} = ()$, il existe $\mathcal{B}'$ une base de E avec $\mathcal{B}' \subset \mathcal{G}$. Par égalité des cardinaux, $\mathcal{G} = \mathcal{B}'$ est une base. ⊠

Remarque : *dans la pratique, c'est la propriété (i) de la proposition qu'on utilise pour montrer qu'une famille est une base. Autrement dit, on montre que $\mathcal{L}$ est libre et que $|\mathcal{L}| = \dim E$.*

Exemple 2.2.3.9 Si on reprend l'exemple 2.1.1.4, on a vu que $\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,2,1),(-1,1,1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Puisque $|\mathcal{B}| = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on peut donc conclure que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2.2.3.10 On pose $P_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $P_{n+1} = \prod_{k=0}^{n}(X-k)$. Montrons que pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_n = (P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

- Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P_k \in \mathbb{K}_n[X]$.
- La famille $\mathcal{L}_n$ est une famille de polynômes échelonnée en degrés. Par conséquent, c'est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Enfin, $|\mathcal{L}_n| = n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$. Par conséquent, $\mathcal{L}_n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 2.2.3.11 *Un espace vectoriel E est de dimension infinie si et seulement si il contient une famille libre infinie.*

Preuve :

• Si E contient une famille libre infinie, alors il n'est pas de dimension finie d'après la proposition précédente (proposition 2.2.3.7).

• Réciproquement, si E est de dimension infinie, on construit par récurrence une famille libre $\mathcal{L} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Initialisation :

Puisque E n'est pas de dimension finie, () n'est pas une famille génératrice de E : par suite, $E \neq \{0\}$. On choisit $e_0 \in E \setminus \{0\}$. Alors $\mathcal{L}_0 = (e_0)$ est une famille libre.

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose avoir construit $\mathcal{L}_n = (e_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une famille libre de E. Puisque cette famille est finie, elle n'est pas génératrice de E. Par suite, $\mathrm{Vect}(\mathcal{L}_n) \subsetneq E$. Soit $e_{n+1} \in E \setminus \mathrm{Vect}(\mathcal{L}_n)$. Alors, $\mathcal{L}_{n+1} = (e_0, \cdots, e_{n+1})$ est une famille libre de E.

Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$ et achève la récurrence. Ainsi, on a construit une famille libre de E qui est infinie. ⊠

Corollaire 2.2.3.12 *Soit I un intervalle non trivial. $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$, $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{K})$ ne sont pas de dimension finie.*

Preuve :

• On a déjà vu que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$. D'après la proposition précédente, $\mathbb{K}[X]$ n'est donc pas de dimension finie.

• Puisque I est une partie infinie, on peut identifier polynôme et fonction polynomiale. On en déduit donc que la famille $(x \longmapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille infinie libre de $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$). Par conséquent, $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$) est de dimension infinie.

• Enfin, par définition de l'ensemble [1] $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Il s'ensuit que la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}} = ((\delta_{n,p})_{p\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une famille infinie libre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

⊠

Proposition 2.2.3.13 *Soient E un espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors,*

$$\Big(E \text{ est de dimension finie et } \dim E = n\Big) \iff E \text{ est isomorphe à } \mathbb{K}^n$$

Preuve :

• Montrons $\Longrightarrow$.

On suppose que E est de dimension finie et que $\dim E = n$. Il existe alors $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. D'après la proposition 2.1.4.1, l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

• Réciproquement, supposons qu'il existe ψ un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E. Alors, en notant $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\psi(\mathcal{B}_c)$ est une base de E (caractérisation des isomorphismes par l'image d'une base (théorème 2.1.4.5)). Or, $|\psi(\mathcal{B}_c)| = |\mathcal{B}_c| = n$ donc E est de dimension finie et $\dim E = |\psi(\mathcal{B}_c)| = n$.

⊠

Corollaire 2.2.3.14 *Deux espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.*

1. voir cours de mathématiques supérieures 1.

Preuve :

Soient E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies.

• Montrons l'implication directe.
On suppose que $\dim E = \dim F$. Notons $n = \dim E = \dim F \in \mathbb{N}$. Alors :

- si $n \geqslant 1$, alors E et F sont isomorphes à $\mathbb{K}^n$ et donc isomorphes ;
- si $n = 0$, alors $E = F$ (ils sont tous deux égaux à $\{0\}$) et *a fortiori*, E et F sont isomorphes.

• Montrons la réciproque.
On suppose que E et F sont isomorphes. Alors, il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ qui est un isomorphisme. Soit $\mathcal{B}$ une base de E (qui existe puisqu'on a supposé E de dimension finie). Puisque f est bijective, $f(\mathcal{B})$ est une base de F et par suite :

$$\dim E = |\mathcal{B}| = |f(\mathcal{B})| = \dim F$$

⊠

Terminons ce paragraphe avec un corollaire un peu plus général et très pratique pour montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie et calculer sa dimension.

Corollaire 2.2.3.15 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que :*

(i) E est de dimension finie ;

(ii) F est isomorphe à E.

Alors F est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Preuve :

C'est évident car si $\mathcal{B}$ est une base de E et $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme, alors $f(\mathcal{B})$ est une base de F. Or, $f(\mathcal{B})$ est une famille finie (car $\mathcal{B}$ l'est) donc F est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}(F) = |f(\mathcal{B})| = |\mathcal{B}| = \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

⊠

Remarque : *la proposition 2.2.3.13 a une interprétation importante et simple. Dans un espace vectoriel de dimension finie, connaître un vecteur ou bien ses coordonnées c'est « la même chose ». On retrouve donc l'interprétation de la dimension en tant que « nombre de degré de liberté » ou encore le nombre de constantes indépendantes nécessaires pour décrire notre ensemble. Ceci permet souvent de « comprendre » ou de « deviner » la dimension d'un espace, en particulier, dans les espaces de matrices (voir chapitre 3).*
Par exemple, dans $\mathbb{R}^6$, l'ensemble des éléments $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant 6}$ vérifiant les conditions : $x_1 + x_2 = 0$ et $x_3 - x_5 = 0$ est un espace vectoriel (à justifier) et on a 6 degrés de liberté moins 2 contraintes indépendantes, c'est-à-dire au final 4 degrés de liberté donc la dimension de cet espace est 4. Bien entendu ceci n'est pas du tout une preuve ! Mais c'est un moyen simple de « comprendre » à quoi correspond la dimension.

2.3 Propriétés de la dimension

2.3.1 Dimensions d'un produit cartésien et d'une somme directe

Proposition 2.3.1.1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors $E \times F$ est de dimension finie et :*

$$\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

Preuve :

• Si $E = \{0\}$, alors $E \times F = \{0\} \times F \simeq F$ et d'après le corollaire précédent (2.2.3.15), F étant de dimension finie, $E \times F$ est de dimension finie et :

$$\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(\{0\} \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(\{0\}) + \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

soit encore, $\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

• Puisque $E \times F \simeq F \times E$, si $F = \{0\}$, alors d'après le cas précédent, $E \times F$ est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

• On suppose à présent que $E \neq \{0\}$ et $F \neq \{0\}$. Soient $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$ et $p = \dim_{\mathbb{K}}(F)$: on a donc $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$. Soient alors $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (e'_1, \cdots, e'_p)$ une base de F.
Montrons que la famille $\mathcal{B} = ((e_1, 0_F), \cdots, (e_n, 0_F), (0_E, e'_1), \cdots, (0_E, e'_p))$ est une base de $E \times F$.

∗ Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $E \times F$.
Soit $(x, y) \in E \times F$. Puisque $\mathcal{B}_E$ (respectivement $\mathcal{B}_F$) est une base de E (respectivement F), il existe $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ et $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{p} y_j e'_j$$

Par suite,

$$(x, y) = (x, 0_F) + (0_E, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, 0_F\right) + \left(0_E, \sum_{j=1}^{p} y_j e'_j\right)$$

soit encore :

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i (e_i, 0_F) \quad + \quad \sum_{j=1}^{p} y_j (0_E, e'_j)$$

Ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $E \times F$.

∗ Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille libre.
Soient $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ et $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(e_i, 0_F) \quad + \quad \sum_{j=1}^{p} y_j(0_E, e'_j) = 0_{E\times F}$$

Alors, d'après les calculs précédents,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0_E \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{p} y_j e'_j = 0_F$$

Or, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont libres (puisque ce sont des bases), donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ x_i = 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1, p]\!] \ , \ y_j = 0$$

Ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est libre.

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de $E \times F$ et c'est une famille finie. Par conséquent,

- ▷ $E \times F$ est de dimension finie ;
- ▷ et $\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = |\mathcal{B}| = n + p = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

⊠

Exercice 2.3.1.2 Proposer une autre démonstration, beaucoup plus courte, en utilisant des isomorphismes « naturels ».

Corollaire 2.3.1.3 *Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que :*

(i) F et G sont en somme directe ;

(ii) F et G sont de dimensions finies.

Alors $F \oplus G$ est de dimension finie et on a :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$$

Preuve :

En effet, l'application $\varphi : F \times G \longrightarrow F + G$ qui à (x, y) associe $x + y$ est linéaire surjective (par définition de la somme de deux espaces vectoriels) et injective (puisque F et G sont en somme directe). Par suite, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Or, d'après la proposition précédente, $F \times G$ est de dimension finie (puisque F et G le sont). Par conséquent, $F \oplus G$ est de dimension finie et :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}(F \times G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$$

⊠

2.3.2 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 2.3.2.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*

(i) F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$ *;*

(ii) $\dim(F) = \dim(E)$ *si et seulement si* $F = E$.

Preuve :

• Montrons (i).
Posons $n = \dim(E)$ et raisonnons par l'absurde : si F n'est pas de dimension finie ou si $\dim(F) > \dim(E)$, alors il existe $\mathcal{L} = (x_1, \cdots, x_{n+1})$ une famille libre de F. En effet,

- ∗ si F n'est pas de dimension finie, il existe une famille infinie qui est libre. On prend les $n+1$ premiers vecteurs de cette famille ;
- ∗ si F est de dimension finie et $\dim(F) > \dim(E)$, on choisit une base de F : celle-ci contient $\dim(F) > n$ vecteurs, donc au moins $n+1$ vecteurs. On prend les $n+1$ premiers vecteurs de cette base.

Puisque $F \subset E$, $\mathcal{L}$ est aussi une famille libre de E donc $|\mathcal{L}| \leqslant \dim(E)$, c'est-à-dire $n+1 \leqslant n$, ce qui est absurde.
Ceci montre que F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim E$.

• Montrons (ii), c'est-à-dire $\dim(E) = \dim(F) \iff E = F$.

- ∗ L'implication $\Longleftarrow$ est évidente.
- ∗ Réciproquement, on suppose que $\dim(E) = \dim(F)$.
  Soit $\mathcal{B}$ une base de F. Alors d'une part, puisque $F \subset E$, $\mathcal{B}$ est une famille libre de E. Et d'autre part, $|\mathcal{B}| = \dim(F) = \dim(E)$. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une base de E. Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de E et de F donc $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = F$. ⊠

▶ Méthode :

Pour montrer que deux espaces vectoriels E et F, de dimension finie, sont égaux, on montre que :

$$F \subset E \quad \text{et} \quad \dim(F) = \dim(E)$$

Remarque : *la dimension remplace le cardinal pour les ensembles. En effet, on a vu que pour deux ensembles finis A et B, $A \subset B$ et $|A| = |B|$ implique que $A = B$. Pour les espaces vectoriels, c'est la même chose mais on remplace le cardinal par la dimension.*

Exercice 2.3.2.2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. En considérant l'ensemble :

$$A = \{k \in \mathbb{N} \ / \ \text{il existe } \mathcal{L} \text{ famille libre de } F \text{ telle que } |\mathcal{L}| = k\}$$

proposer une autre démonstration du théorème précédent.

Corollaire 2.3.2.3 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*

(i) F admet au moins un supplémentaire dans E ;

(ii) de plus, pour tout supplémentaire G de F dans E, on a : $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Preuve :

• Montrons (i).

D'après le théorème précédent, on sait déjà que F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. Puisque F est de dimension finie, il admet une base. Soit $\mathcal{B}_F$ une base de F. Alors, $\mathcal{B}_F$ est une famille libre de F, donc aussi une famille libre de E. D'après le corollaire du théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B}_F \subset \mathcal{B}$. On pose alors :

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_F \qquad \text{et} \qquad G = \text{Vect}(\mathcal{B}')$$

Alors, d'une part :

$$F + G = \text{Vect}(\mathcal{B}_F) + \text{Vect}(\mathcal{B}') = \text{Vect}(\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}') = \text{Vect}(\mathcal{B}) = E$$

et d'autre part, $F \cap G = \{0\}$ (puisque $\mathcal{B}$ est libre). Il s'ensuit que G est un supplémentaire de F dans E.
Ce qui prouve l'existence d'au moins un supplémentaire de F dans E.

• La propriété (ii) est évidente car si $F \oplus G = E$, alors F et G sont de dimension finie (ce sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie) et donc, d'après le corollaire 2.3.1.3,

$$\dim(E) = \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$ ⊠

Remarques :

- *on rappelle qu'un supplémentaire n'est pas du tout unique (sauf si $F = E$ ou $F = \{0\}$) ! Ce corollaire dit seulement que si E est de dimension finie, alors tous les supplémentaires de F ont la même dimension finie ;*
- *ce corollaire prouve l'existence d'un supplémentaire en dimension finie. En dimension infinie, ce problème est équivalent à l'existence d'une base et nécessite des outils qui dépassent de loin les objectifs de ce livre.*

Exercice 2.3.2.4 Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que G et H sont deux supplémentaires de F dans E.

1. Montrer que G et H sont isomorphes (*on pourra considérer le projecteur sur G parallèlement à F*).
2. Retrouver alors que si E est de dimension finie, tous les supplémentaires de F ont la même dimension.

Corollaire 2.3.2.5 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et H un sous-espace vectoriel de E. Alors,*

$$H \text{ est un hyperplan de } E \iff \dim H = n - 1$$

Preuve :

• Si H est un hyperplan de E, alors il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $H \oplus \mathbb{K}x = E$. Or, E est de dimension finie donc H et $\mathbb{K}x$ le sont et :

$$\dim(H) + \dim(\mathbb{K}x) = \dim(E) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \dim(H) = \dim(E) - 1$$

• Réciproquement, si $\dim(H) = n - 1$, d'après le corollaire précédent, H admet un supplémentaire G dans E et $\dim(G) = \dim(E) - \dim(H) = 1$. Autrement dit, un supplémentaire de H est une droite vectorielle. Par suite, H est un hyperplan de E.

⊠

Remarque : *on retrouve donc que les hyperplans sont les sous-espaces vectoriels maximaux de E. En effet, si $H \subset F \subset E$ alors en prenant les dimensions, on obtient :*

$$n - 1 = \dim(H) \leqslant \dim(F) \leqslant \dim(E) = n$$

Par suite, $\dim(F) = n - 1$ *(et dans ce cas $H = F$) ou bien* $\dim(F) = n$ *(et dans ce cas $F = E$).*

2.3.3 Dimension d'une somme de deux espaces

Théorème 2.3.3.1 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :*

(i) *$F + G$ et $F \cap G$ sont de dimension finie ;*

(ii) $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Remarque : *compte tenu des analogies entre dimension d'un espace vectoriel et cardinal d'un ensemble fini, les démonstrations seront identiques en remplaçant « complémentaire » (pour les ensembles) par « supplémentaire » (pour les espaces vectoriels).*

Preuve :

• Tout d'abord, on peut remarquer que puisque E est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel de E est de dimension finie. Il s'ensuit que F, G, $F+G$ et $F\cap G$ sont aussi de dimensions finies.

• Ensuite, puisque G est de dimension finie et $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de G, $F\cap G$ admet au moins un supplémentaire dans G. Soit G' tel que $G=G'\oplus(F\cap G)$. Montrons que $F+G=F\oplus G'$.

∗ Soit $x\in F\cap G'$. Puisque $G'\subset G$, $x\in F\cap G$ et on en déduit donc que $x\in(F\cap G)\cap G'=\{0\}$. Par conséquent, $F\cap G'=\{0\}$.

∗ Montrons que $F+G=F+G'$.
Puisque $G'\subset G$, l'inclusion $F+G'\subset F+G$ est claire.
Réciproquement, soit $x\in F+G$. Alors, par définition de la somme, il existe $u\in F$ et $v\in G$ tels que $x=u+v$. Puisque $G=G'\oplus(F\cap G)$, il existe $v'\in G'$ et $u'\in F\cap G$ tels que $v=v'+u'$. On a alors : $x=u+v'+u'=(u+u')+v'\in F+G'$.

Puisque G est de dimension finie, G' et $F\cap G$ le sont aussi et d'après le corollaire 2.3.1.2 (dimension d'une somme directe) :

$$\dim(G)=\dim(F\cap G)+\dim G'$$

De même, puisque $F+G=F\oplus G'$ et F et G' sont de dimensions finies :

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G')$$

Par suite,

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$$

⊠

Corollaire 2.3.3.2 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, tous deux de dimensions finies. Alors :*

$$F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \iff \dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)$$

Preuve :

C'est évident car $F\cap G=\{0\}$ si et seulement si $\dim(F\cap G)=0$.

⊠

Terminons ce paragraphe avec un corollaire important qui est la méthode pratique utilisée en dimension finie pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

Corollaire 2.3.3.3 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors,*

$$F \oplus G = E \iff \big(\ F \cap G = \{0\} \quad et \quad \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \ \big)$$

Preuve :

En effet, on sait que $F \oplus G \iff F \cap G = \{0\}$. Par suite,

$$\begin{aligned} F \oplus G = E &\iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ F + G = E \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim(F+G) = \dim(E) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases} \end{aligned}$$

⊠

Exemple 2.3.3.4 On se place dans $E = \mathbb{K}^4$ et on considère les ensembles :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \ / \ x = y = z\} \ \text{ et } \ G = \mathrm{Vect}((1,-1,0,0),(0,0,1,1))$$

Alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$ car c'est l'intersection de deux hyperplans (les noyaux des formes linéaires $(x,y,z,t) \longmapsto x-y$ et $(x,y,z,t) \longmapsto x-z$). De plus, pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4$, on a :

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in F &\iff (x,y,z,t) = x(1,1,1,0) + t(0,0,0,1) \\ &\iff (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}((1,1,1,0),(0,0,0,1)) \end{aligned}$$

Par suite, $F = \mathrm{Vect}((1,1,1,0),(0,0,0,1))$. Il s'ensuit que $\mathcal{B} = ((1,1,1,0),(0,0,0,1))$ est une famille génératrice de F et il est clair que c'est une famille libre (car les deux vecteurs de cette famille ne sont pas colinéaires). Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de F et $\dim(F) = |\mathcal{B}| = 2$.
De la même façon, $\mathcal{C} = ((1,-1,0,0),(0,0,1,1))$ est une base de G (elle est génératrice par définition et libre car les deux vecteurs sont non colinéaires). Par suite, $\dim(G) = 2$.

Par ailleurs, si $(x,y,z,t) \in F \cap G$, alors d'une part, $x = y = z$ et d'autre part, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $(x,y,z,t) = \alpha(1,-1,0,0) + \beta(0,0,1,1)$. Alors $x = \alpha$, $y = -\alpha$, $z = \beta$ et $t = \beta$. Il s'ensuit que $\alpha = 0$ (car on a aussi $x = y$) et donc $0 = x = y = z$. On en déduit ainsi que $\beta = 0$ et on conclut donc que $t = 0$.
Finalement, $F \cap G = \{0\}$. Or, $\dim(F) + \dim(G) = 4 = \dim(\mathbb{K}^4)$ donc $F \oplus G = \mathbb{K}^4$.

Remarque : *en fait le raisonnement ici est lourd car connaissant une base de chaque espace F et G, il faut et il suffit de montrer que la réunion des deux est une base de $\mathbb{K}^4$ pour conclure que $F \oplus G = \mathbb{K}^4$. Cette technique sera détaillée dans le paragraphe suivant.*

2.3.4 Caractérisation des sommes directes et des sous-espaces supplémentaires par les bases

Ce paragraphe complet est à considérer comme une « méthode ».

Théorème 2.3.4.1 (Caractérisation des sommes directes par les bases) *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que F et G sont de dimension finie et on considère $\mathcal{B}_1$ une base de F et $\mathcal{B}_2$ une base de G. Alors :*

$$F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \iff \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \text{ est une base de } F+G$$

Preuve :

• L'implication directe a quasiment déjà été montrée.
En effet, si on note $\mathcal{B}'_1 = ((e_i, 0_E))$ et $\mathcal{B}'_2 = ((0_E, e'_i))$, alors d'après la preuve de la proposition 2.3.1.1, $\mathcal{B}'_1 \cup \mathcal{B}'_2$ est une base de $F \times G$. Son image par $\varphi : (x, y) \longmapsto x+y$ est alors une base de $F+G$ car φ est un isomorphisme de $F \times G$ dans $F+G$. Or, $\varphi(\mathcal{B}'_k) = \mathcal{B}_k$ pour $k \in \{1, 2\}$ donc $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \varphi(\mathcal{B}'_1 \cup \mathcal{B}'_2)$ est bien une base de $F+G$.

• Réciproquement, on suppose que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $F+G$. Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Si $F = \{0\}$ ou $G = \{0\}$, alors la propriété est évidente. On suppose donc que $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$ et on note $n = \dim(F)$ et $p = \dim(G)$. Soit $x \in F \cap G$.

∗ $\mathcal{B}_1 = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de F et $x \in F$. Il existe $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tel que :
$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

∗ De même, il existe $(\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$ tel que : $x = \sum_{j=1}^{p} \mu_j e'_j$.

Alors, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i - \sum_{j=1}^{p} \mu_j e'_j = 0$. Or, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est libre (puisque c'est une base de $F+G$) et $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = (e_1, \cdots, e_n, e'_1, \cdots e'_p)$. Par suite,

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ \lambda_i = 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1, p]\!] \ , \ \mu_j = 0$$

On en déduit donc que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$.

⊠

Corollaire 2.3.4.2 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Soient par ailleurs $\mathcal{B}_1$ une base de F et $\mathcal{B}_2$ une base de G. Alors :*

$$F \oplus G = E \iff \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \text{ est une base de } E$$

Preuve :

C'est une conséquence directe du théorème précédent.

⊠

Remarque : *rappelons que dans le paragraphe précédent, on a également donné une caractérisation (par les dimensions) des sommes directes et des espaces supplémentaires (voir corollaires 2.3.3.2 et 2.3.3.3). Ceci donne « deux » nouvelles méthodes (en dimension finie) pour prouver que les sommes sont directes ou que deux espaces sont supplémentaires. En général, on utilise :*

- *la caractérisation par les dimensions lorsqu'on n'a pas déterminé (ou on ne connaît pas) de base explicite des espaces F et G ;*
- *la caractérisation par les bases lorsqu'on a déjà trouvé une base de chaque espace.*

On verra que la première méthode (argument de dimension) est très pratique lorsqu'elle est combinée avec le théorème du rang (voir le paragraphe 4).

2.3.5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 2.3.5.1 Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille finie de E. On définit le rang de $\mathcal{F}$ par :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}))$$

Exemple 2.3.5.2 Si $x \in E \setminus \{0\}$, alors la famille $\mathcal{F} = (x)$ est de rang 1.

Exemple 2.3.5.3 Dans le plan usuel, le rang de $\mathcal{F} = (\vec{i}+\vec{j}, \vec{i}-\vec{j}, 2\vec{i}+\vec{j}, 3\vec{i}-\vec{j})$ est 2. En effet, l'espace vectoriel engendré par cette famille :

- est un sous-espace vectoriel du plan $< \vec{i}, \vec{j} >$ donc sa dimension est au plus 2 ;
- contient l'espace vectoriel engendré par les deux premiers vecteurs de la famille, donc est de dimension au moins 2 (car les deux premiers vecteurs sont non colinéaires).

On conclut donc que la dimension de cet espace est 2 et ainsi, par définition, $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$.

Exemple 2.3.5.4 Si $\mathcal{F} = (X^2 + X + 1, X^2 - X + 1, X)$, alors $\text{rg}(\mathcal{F}) = 2$. En effet,

$$X^2 + X + 1 = 1 \cdot (X^2 - X + 1) + 2 \cdot X \in < X^2 - X + 1, X >$$

Par suite, $< X^2 + X + 1, X^2 - X + 1, X >=< X^2 - X + 1, X >$ et $(X, X^2 - X + 1)$ est libre car échelonnée en degrés. Ainsi, $(X, X^2 - X + 1)$ est une base de $< X^2 + X + 1, X^2 - X + 1, X >$ et cet espace est donc de dimension finie égale à 2.

Remarques :

- *dans la pratique, pour déterminer le rang d'une famille (finie) de vecteurs, on procède exactement comme dans la preuve du théorème de la base incomplète pour déterminer une base de Vect($\mathcal{F}$) ;*
- *on peut étendre la notion de rang à une famille quelconque. On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ (quelconque) de vecteurs est de rang fini si Vect($\mathcal{F}$) est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle rang de $\mathcal{F}$, le nombre rg($\mathcal{F}$) = $\dim_{\mathbb{K}}$(Vect($\mathcal{F}$)). On constate alors que toute famille finie est de rang fini et on retrouve la définition dans le cas des familles finies.*

Exemple 2.3.5.5 Soient $f : x \longmapsto \cos(2x)$ et $\mathcal{F} = (f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, la famille $\mathcal{F}$ est une famille infinie de rang fini et $\text{rg}(\mathcal{F}) = 2$. En effet, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x,

$$f^{(n)}(x) = \Re e\left((2i)^n e^{2ix}\right) = \Re e\left(2^n e^{i\frac{n\pi}{2}} e^{2ix}\right) = 2^n \cos(n\frac{\pi}{2})\cos(2x) - 2^n \sin(n\frac{\pi}{2})\sin(2x)$$

Il s'ensuit que $f^{(n)} \in \text{Vect}(f, f')$ et donc $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(f, f')$. Alors, $\mathcal{F}$ est de rang fini et $\text{rg}(\mathcal{F}) \leqslant 2$. Enfin, puisque (f, f') est une famille libre (exercice : le vérifier ou voir les exemples du début de ce chapitre), on conclut que $\dim(\text{Vect}(f, f')) = 2$ et donc $\text{rg}(\mathcal{F}) = 2$.

Proposition 2.3.5.6 *Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E.*

(i) Si E est de dimension finie, alors rg($\mathcal{F}$) $\leqslant \dim(E)$.

(ii) rg($\mathcal{F}$) $\leqslant |\mathcal{F}|$.

(iii) rg($\mathcal{F}$) $= |\mathcal{F}|$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.

Preuve :

• (i) est clair car $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

• (ii) est une conséquence des propriétés de la dimension. En effet, $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$. Par suite, F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant |\mathcal{F}|$.

• Montrons (iii). Si $\mathcal{F}$ est libre, alors c'est une base de $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ et donc $|\mathcal{F}| = \dim(F) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{rg}(\mathcal{F})$.
Réciproquement, si $|\mathcal{F}| = \text{rg}(\mathcal{F})$, alors $\mathcal{F}$ est une famille génératrice minimale de $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$: par conséquent, c'est une base de F. En particulier, $\mathcal{F}$ est une famille libre. ⊠

2.4 Théorème du rang

2.4.1 Définition du rang d'une application linéaire

Définition 2.4.1.1 Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle rang de f, et on note $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ (à condition que $\mathrm{Im}(f)$ soit de dimension finie). Autrement dit,

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Exemple 2.4.1.2 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ f(x,y,z) = (x+y+z, 2x-y+z, x+4y+2z)$$

On note $\mathcal{B}_c = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a vu (voir la preuve du point (iii) du théorème 2.1.4.5) que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(\mathcal{B}_c)) = \ < f(e_1), f(e_2), f(e_3) > \ = \ < (1,2,1), (1,-1,4), (1,1,2) >$$

Il est évident que les deux premiers vecteurs sont non colinéaires. Il reste donc à déterminer si $(1,1,2) \in \mathrm{Vect}((1,2,1),(1,-1,4))$. Or, pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
(1,1,2) = \alpha(1,2,1) + \beta(1,-1,4) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & \alpha+\beta \\ 1 & = & 2\alpha-\beta \\ 2 & = & \alpha+4\beta \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2 & = & 3\alpha \\ \beta & = & 1-\alpha \\ 2 & = & \alpha+4\beta \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

On conclut donc que $(1,1,2) = \frac{2}{3}(1,2,1) + \frac{1}{3}(1,-1,4) \in \mathrm{Vect}((1,2,1),(1,-1,4))$. Ceci prouve donc que $\mathrm{Im}(f) =< (1,2,1),(1,-1,4) >$. Les deux vecteurs étant non colinéaires, on conclut donc que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(f) = 2$.

Remarque : *bien entendu ici, dans $\mathbb{R}^3$, il était plus rapide de calculer le déterminant pour conclure que les trois vecteurs sont coplanaires. Autrement dit :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Ce qui permet de dire que les trois vecteurs sont coplanaires. Or, les deux premiers sont linéairement indépendants donc ils forment une base du plan engendré par les trois vecteurs.

Exemple 2.4.1.3 Soit $B \in \mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$. L'application f qui à un polynôme A associe le reste de la division euclidienne de A par B est une application linéaire dont le rang est $\mathrm{rg}(f) = \deg(B)$. En effet, en notant $n = \deg(B)$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X]) = n$.

Remarque : *pour le moment, avec cette définition, on est donc amené à déterminer l'image de f explicitement afin de calculer sa dimension. Dans ce qui suit, on va voir qu'en fait il n'est pas toujours nécessaire de connaître* $\mathrm{Im}(f)$ *pour calculer sa dimension.*

Proposition 2.4.1.4 *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*

(i) Si E est de dimension finie, alors $rg(f)$ est fini. De plus, si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E, on a :

$$rg(f) = \dim\left(Vect(f(e_1),\cdots,f(e_n))\right) \leqslant n \quad \text{et} \quad f \text{ est injective} \iff rg(f) = \dim E$$

(ii) Si F est de dimension finie, alors $rg(f)$ est fini et $rg(f) \leqslant \dim F$. De plus,

$$f \text{ est surjective} \iff rg(f) = \dim F$$

(iii) Si E et F sont de dimensions finies, alors :

$$f \text{ bijective} \iff \dim E = \dim F = rg(f)$$

Preuve :

• Montrons (i). Par définition,

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = f\left(\mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_n)\right) = \mathrm{Vect}(f(e_1),\cdots,f(e_n))$$

Par suite, $\mathrm{Im}(f)$ est un espace vectoriel de dimension finie (il existe une famille génératrice finie) et $\mathrm{rg}(f) \leqslant n$ (la dimension d'un espace est toujours inférieure ou égale au cardinal d'une famille génératrice). De plus, puisque $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_n)$ est une base de E,

$$f \text{ est injective} \iff f(\mathcal{B}) \text{ est libre} \iff \mathrm{rg}(f(\mathcal{B})) = n \iff \mathrm{rg}(f) = n$$

• Montrons (ii).

Si F est de dimension finie, alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie (puisque c'est un sous-espace vectoriel de F) et $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}f) \leqslant \dim(F)$. De plus, on a alors :

$$f \text{ est surjective} \iff \mathrm{Im}(f) = F \iff \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$$

la dernière équivalence provenant de l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset F$.

• La propriété (iii) est une conséquence directe de (i) et (ii). ⊠

Remarques : *si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E et F de dimensions finies, on a :*

- *si $\dim(E) \neq \dim(F)$, alors f ne peut pas être bijective (on le savait déjà : pourquoi ?) ; on verra un peu plus loin (mais vous pouvez déjà le prouver directement en exercice) que si $\dim(E) < \dim(F)$, alors f ne peut pas être surjective et si $\dim(E) > \dim(F)$, f ne peut pas être injective ;*
- *on a toujours, $rg(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$;*
- *si $\dim(E) = \dim(F)$, alors f est bijective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est injective. On reverra une autre preuve de ce résultat juste après (conséquence du théorème du rang). Vous pouvez noter la similarité avec les ensembles finis. Si A et B sont deux ensembles finis de même cardinal et $f : A \longrightarrow B$, alors f est bijective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est injective.*

2.4.2 Théorème du rang

Théorème 2.4.2.1 *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie et soit H un supplémentaire dans E de $\ker(f)$, c'est-à-dire $E = \ker(f) \oplus H$. Alors :*

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{f} : H & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et par conséquent, on a le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + rg(f)$$

Preuve :

• Tout d'abord, on peut remarquer que comme E est de dimension finie, on a prouvé l'existence d'un supplémentaire dans E de $\ker(f)$. Sinon, la démonstration suivante est valable lorsque E est de dimension infinie en admettant qu'il existe au moins un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E.

• Ensuite, pour tout $x \in H$, $\widetilde{f}(x) = f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ donc l'application $\widetilde{f}$ est bien définie et puisque la restriction d'une application linéaire est linéaire, $\widetilde{f} \in \mathcal{L}(H, \mathrm{Im}(f))$.

• Montrons enfin que $\widetilde{f}$ est bijective.

∗ Montrons que $\widetilde{f}$ est injective.

$$x \in \ker(\widetilde{f}) \iff (x \in H \text{ et } f(x) = 0) \iff x \in H \cap \ker(f) = \{0\}$$

Par conséquent, $\ker(\widetilde{f}) = \{0\}$ et $\widetilde{f}$ est injective.

∗ Montrons que $\widetilde{f}$ est surjective.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus, puisque $H \oplus \ker(f) = E$, il existe $h \in H$ et $x_0 \in \ker(f)$ tels que : $x = h + x_0$. On a alors :

$$y = f(x) = f(h + x_0) = f(h) + f(x_0) = f(h)$$

Or, $h \in H$ donc $y = \widetilde{f}(h)$. Par suite, $\widetilde{f}$ est surjective.

• Pour finir, puisque E est de dimension finie, H est de dimension finie, tout comme $\ker(f)$ et on a :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(H)$$

$\widetilde{f}$ étant un isomorphisme de H dans $\mathrm{Im}(f)$ et H étant de dimension finie, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim H$$

En remplaçant, on obtient le résultat.

⊠

Remarque : *en fait ce théorème comporte deux parties, l'une aussi importante que l'autre !*

- *La première partie est l'isomorphisme entre un supplémentaire du noyau et l'image : ceci est très important. D'un point de vue mathématique, c'est logique car H est isomorphe à l'espace vectoriel quotient $E/\ker(f)$. Pour plus de détails, vous pouvez consulter n'importe quel ouvrage d'algèbre général dans lequel les structures quotients sont abordées.*
- *La seconde concerne la relation entre les dimensions de l'image et du noyau.*

Exemple 2.4.2.2 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrons que $f : P \longmapsto P(X+1) - P(X)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est surjective.
Pour commencer, on vérifie que f est bien définie et linéaire (exercice : le faire).

- Première méthode : on détermine l'image (ou sa dimension)
  $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie et on connaît une base : la base canonique $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. Il s'ensuit que :
  $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((f(X^k))_{0\leqslant k\leqslant n})$$
  Or, pour $k = 0$, $f(1) = 0$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\deg(f(X^k)) = k - 1$ (on utilise la formule du binôme de Newton). Par suite, $(f(X^k))_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de polynômes non nuls et échelonnés en degrés. C'est donc une famille libre et :
  $$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Vect}((f(X^k))_{0\leqslant k\leqslant n}) = \dim(\mathrm{Vect}((f(X^k))_{1\leqslant k\leqslant n}) = n$$
  Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$. Par suite, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et f est surjective.

- Seconde méthode : on détermine le noyau.
  Soit $P \in \ker(f)$, alors $x \longmapsto P(x)$ est périodique (de période 1) et continue : par conséquent, cette fonction est bornée. Ceci impose que P est constant. Réciproquement, si P est constant, alors $P(X+1) - P(X) = 0$. Par suite, $\ker(f) = \mathbb{R}$ et d'après le théorème du rang :
  $$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim(\ker(f)) = n$$
  On conclut alors de même qu'avant que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (inclusion et égalité des dimensions).

Exercice 2.4.2.3 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans E.
2. Quels endomorphismes remarquables vérifient cette propriété ?
3. Tout endomorphisme vérifiant $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$ est-il un projecteur ?

Exercice 2.4.2.4 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On suppose que E et F sont de dimension finie. Montrer que :

$$\dim(\ker(g \circ f)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g))$$

Indication : on pourra utiliser « la première conclusion » dans le théorème précédent.

Corollaire 2.4.2.5 *Soient E et F deux espaces de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

(i) Si f est injective, alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.

(ii) Si f est surjective, alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.

Preuve :

• Puisque E est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang et on a :
$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$$

• On suppose que f est injective. Alors, $\dim(\ker(f)) = 0$ et donc, sachant que $\mathrm{Im}(f) \subset F$:

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(F)$$

• On suppose que f est surjective. Alors, $\mathrm{Im}(f) = F$ et $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$. Par suite,
$$\dim(e) = \dim(F) + \dim(\ker(f)) \geqslant \dim(F)$$

⊠

Proposition 2.4.2.6 *Soient E, F, G, H quatre espaces vectoriels tous de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et φ, ψ deux isomorphismes de F dans G et de H dans E, respectivement. Alors :*

$$rg(\varphi \circ f) = rg(f) \quad \text{et} \quad rg(f \circ \psi) = rg(f)$$

Remarques :

- *cette propriété est souvent énoncée sous la forme suivante (que vous devez connaître) : un isomorphisme conserve le rang. Cela sera très pratique dans le calcul matriciel et sera à la base du calcul du rang par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice ;*
- *en fait, il n'est pas nécessaire que φ et ψ soient bijectives. La démonstration ci-dessous traite un cas un peu plus général : φ est injective et ψ est surjective.*

Preuve :

Pour le premier point, il suffit de remarquer que :

$$\mathrm{Im}(f \circ \psi) = f(\psi(H)) = f(E) = \mathrm{Im}(f) \quad \text{(puisque } \psi \text{ est surjective)}$$

De même, si φ est injective, $\varphi_{|\mathrm{Im}(f)}$ est un isomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ sur son image, c'est-à-dire sur $\varphi(\mathrm{Im}(f)) = \varphi(f(E)) = \mathrm{Im}(\varphi \circ f)$ et deux espaces isomorphes sont de même dimension. ⊠

Exercice 2.4.2.7 Retrouver le résultat précédent en introduisant des bases (à vous de voir de quel(s) espace(s)) et les propriétés sur les images d'une base par une application linéaire injective, surjective ou bijective.

2.4.3 Caractérisation des isomorphismes et des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$

Le théorème suivant est analogue à celui vu pour les ensembles finis en remplaçant ensembles finis par espaces vectoriels de dimensions finies et application par application linéaire.

Théorème 2.4.3.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels ayant même dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f est injective ;
(ii) f est surjective ;
(iii) f est bijective ;
(iv) $rg(f) = n$.

Preuve :

• En fait, on a déjà vu ce théorème comme conséquence de la proposition 2.4.1.4 mais on peut aussi donner une autre démonstration simple à partir du théorème du rang.

• Montrons $(i) \Longrightarrow (ii)$.
Si f est injective, alors $\ker(f) = \{0\}$ donc d'après le théorème du rang :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(E) - 0 = \dim(E) = \dim(F)$$

Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \subset F$ et $\dim(F) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ donc $\mathrm{Im}(f) = F$ et f est surjective.

• Montrons $(ii) \Longrightarrow (iii)$.
Si f est surjective, alors $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F) = \dim(E)$. Toujours d'après le théorème du rang :

$$\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = 0$$

Par suite, $\ker(f) = \{0\}$ et f est injective, donc bijective.

• $(iii) \Longrightarrow (iv)$ est évident.

• Montrons $(iv) \Longrightarrow (i)$.
Si $\mathrm{rg}(f) = n$, alors $\dim(\ker(f)) = \dim E - \mathrm{rg}(f) = 0$ et f est injective. ⊠

Corollaire 2.4.3.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors,*

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

⚠ **Attention : ce résultat est faux si les espaces n'ont pas même dimension ou ne sont pas de dimension finie !**

Exercice 2.4.3.3 Contre-exemple en dimension infinie. Soit D la dérivation de $\mathbb{K}[X]$.

1. D est-il injectif ? Surjectif ? Bijectif ?
2. Conclusion par rapport au corollaire précédent ?

Exercice 2.4.3.4 Donner un exemple :

1. d'application linéaire simple surjective mais pas injective lorsque E et F n'ont pas la même dimension.
2. d'application linéaire simple, injective mais non surjective, lorsque E et F n'ont pas la même dimension.

2.5 Exercices

Exercice 2.5.1 Pour chacune des familles suivantes, préciser s'il s'agit d'une famille libre ou liée :

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = (u, v)$ avec $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, 1, 2)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = (u, v, w)$ avec $u = (1, -1, 2)$, $v = (2, 1, 1)$ et $w = (5, -1, 8)$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = (a, b, c, d)$ avec $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, -1, 1)$, $c = (-1, 1, 1)$ et $d = (1, 2, 3)$.
4. Dans $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{F} = (P, Q, R)$ avec $P = X^2 + 2X + 1$, $Q = X^2 + 4X + 4$ et $R = X^2 + 6X + 9$.
5. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\mathcal{F} = (f, g, h)$ avec pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = \sin(2x)$.

Exercice 2.5.2 Pour chacune des familles suivantes, préciser s'il s'agit d'une famille libre ou liée :

1. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F} = (f, g, h)$ avec pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = \sin(x)$ et $h(x) = \cos(3x)$.
2. Dans $\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = (u, v, w)$ avec $(u_n) = (q_1^n)$, $(v_n) = (q_2)^n$ et $(w_n) = (q_3^n)$ avec q_1, q_2 et q_3 trois réels.
3. Dans $\mathbb{C}_n[X]$, $\mathcal{F} = (P_0, \cdots P_n)$ où pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $P_k = (X - a)^k$ avec $a \in \mathbb{C}$.
4. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F} = (f, g, h)$ avec pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2 + 1$ et $h(x) = (x + 1)^2$.

Exercice 2.5.3 Préciser si les familles suivantes sont libres ou non.

1. $\mathcal{F} = (f, g, h)$ avec pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, $g(x) = \cos(x)$ et $h(x) = \sqrt{2}\sin^2(\frac{x}{2})$.
2. $\mathcal{F} = (f, g, h)$ avec pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = (x - 1)$, $h(x) = x(x - 1)(x - 2)$.
3. $\mathcal{F} = (f, g, h)$ avec pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ et $h(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$.

Exercice 2.5.4 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère les deux familles $\mathcal{C} = (x \mapsto \cos(kx))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ et $\mathcal{S} = (x \mapsto \sin(kx))_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est libre.
2. En déduire que $\mathcal{S}$ est libre.
3. Montrer que $\mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ est libre.

Exercice 2.5.5 Pour chacune des familles de vecteurs suivants, donner une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ puis compléter si nécessaire en une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(1, -2, 1), (1, 0, -3), (1, 0, 1)\} \quad ; \quad \mathcal{F}_2 = \{(1, -1, 0), (2, 1, -1), (1, 5, -2)\}$$

$$\mathcal{F}_3 = \{(1, 1, 1), (1, 2, 2), (-1, -1, -1)\} \quad ; \quad \mathcal{F}_4 = \{(1, -1, 1), (-1, 2, 1), (1, -1, 5)\}$$

Exercice 2.5.6 Dans chacun des cas suivant, $F = \text{Vect}(u, u')$ et $G = \text{Vect}(v, v')$. Déterminer une base de $F \cap G$.

1. $u = (-1, 2, -3)$, $u' = (0, 1, -1)$, $v = (2, -3, 1)$ et $v' = (7, -9, 8)$.
2. $u = (2, 3, -1)$, $u' = (-1, 2, 5)$, $v = (3, 1, -6)$ et $v' = (4, 13, 7)$.
3. $u = (-1, 2, 1)$, $u' = (-1, 6, 5)$, $v = (2, -3, -1)$ et $v' = (0, 1, 1)$.
4. $u = (1, 2, 1, 1)$, $u' = (-1, 1, 1, 0)$, $v = (0, 3, 2, 1)$ et $v' = (2, 1, 0, 1)$.

Exercice 2.5.7 Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels de dimension finie puis déterminer une base de chacun :

1. $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$;
2. $F = \{(x, y - x, z, y) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

Exercice 2.5.8 Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $y'' + iy + 2y = 0$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer une base de $\mathcal{S}$.

Exercice 2.5.9 Après avoir justifié qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel, déterminer la dimension des espaces suivants :

1. L'ensemble $E_1 = \{((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique}\}$.
2. L'ensemble $E_2 = \{P \in \mathbb{R}_5[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$.
3. L'ensemble $E_3 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ , \ f'' + f = 0\}$.
4. L'ensemble $E_4 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid X | P'\}$.

Exercice 2.5.10 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^4)$ définie par $f(e_1) = f(e_2) = e_1 - e_2$, $f(e_3) = -f(e_4) = e_3 - e_4$, où (e_1, e_2, e_3, e_4) désigne la base canonique de $\mathbb{K}^4$.

1. Déterminer $f(x, y, z, t)$, puis $f^2(e_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$ et enfin, $f^2(x, y, z, t)$.
2. Donner une base, une représentation paramétrique et un système d'équations cartésiennes de $\ker(f)$, $\text{Im}(f)$, $\ker(f^2)$ et $\text{Im}(f^2)$.
3. Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ ne sont pas en somme directe mais que $\ker(f^2)$ et $\text{Im}(f^2)$ le sont.

Exercice 2.5.11 Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme P_n tel que $P_n(X) + P_n(X + 1) = 2X^n$, puis montrer que pour tout entier n, $P'_{n+1} = (n + 1)P_n$.

Exercice 2.5.12 Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

(i) $\forall x \in E \ , \ \exists \lambda_x \in \mathbb{K} \ , \ f(x) = \lambda_x x$;

(ii) $\exists \lambda \in \mathbb{K} \ , \ \forall x \in E \ , \ f(x) = \lambda x$.

Exercice 2.5.13 Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq b$. Montrer que la famille $((X-a)^k(X-b)^{n-k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 2.5.14 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que E est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et que $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2n = 2\dim_{\mathbb{C}}(E)$.

Exercice 2.5.15 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que : $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 2.5.16 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose F de dimension finie. Montrer que : $F \subset f(F) \Longrightarrow F = f(F)$.

Exercice 2.5.17 Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que deux quelconques des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

(i) $F \cap G = \{0\}$ (ii) $F + G = E$ (iii) $\dim F + \dim G = \dim E$

Exercice 2.5.18 Pour chacune des applications suivantes, déterminer le rang, ainsi qu'une base de l'image et du noyau.

1. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ définie par $f(x,y,z) = (x+y, x+z, y+z, x+y+z)$.
2. $g : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $g(P) = XP'$.
3. $h : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ qui à P associe $XP' - P$.

Exercice 2.5.19 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. On suppose que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 2.5.20 Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g))$$

Exercice 2.5.21 Soient E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2. En déduire que $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g)$.

Exercice 2.5.22 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que si E est de dimension finie, alors f et g sont des automorphismes de E.
2. Donner un contre-exemple lorsqu'on ne suppose plus E de dimension finie.

Exercice 2.5.23 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\dim(\ker(f^2)) \leqslant 2\dim(\ker(f))$.

Exercice 2.5.24 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$f + g = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant \dim E$$

Montrer que f et g sont des projecteurs.

Exercice 2.5.25 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

1. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$;
   (ii) $\ker(u) = \ker(u^2)$;
   (iii) $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$.
2. On pose ici que $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère u définie par $u(P) = P'' + 2P'$.
   (a) Montrer que u est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer $\ker(u)$ et $\ker(u^2)$.
   (c) Montrer que u est surjective. En déduire $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}(u^2)$.
   (d) Parmi les égalités (i), (ii) et (iii) de la question 1, quelles sont celles qui sont vérifiées ?

Exercice 2.5.26 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$, $f^p = 0$.

1. f est-il injectif ? f est-il surjectif ? Justifier clairement la réponse.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(f) \leqslant n - 1$.
3. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^\star$ le plus petit entier non nul tel que $f^q = 0$.
4. Montrer que $\forall k \geqslant q$, $f^k = 0$.
5. Justifier l'existence de $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{q-1}(x_0))$ soit libre.
6. Montrer que $q \leqslant n$ puis que $f^n = 0$.
7. Si $q = n$, que peut-on dire de la famille $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{q-1}(x_0))$?

Exercice 2.5.27 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que : $\forall x \in E$, $\exists p_x \in \mathbb{N}$, $u^{p_x}(x) = 0$.

1. Montrer que si E est de dimension finie, alors u est nilpotent.
2. Le résultat est-il encore vrai si on ne suppose plus E de dimension finie ?

Exercice 2.5.28 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que la suite $(\ker(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante (pour l'inclusion).
2. Énoncer puis démontrer une propriété analogue pour $(\mathrm{Im}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$ et qu'alors, pour tout entier $k \geqslant p$, $\ker(f^k) = \ker(f^p)$.
4. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Im}(f^q) = \mathrm{Im}(f^{q+1})$ et qu'alors, pour tout entier $k \geqslant q$, $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^q)$.
5. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ le plus petit entier naturel tel que $\ker(f^{k_0}) = \ker(f^{k_0+1})$. Montrer qu'alors $\mathrm{Im}(f^{k_0}) = \mathrm{Im}(f^{k_0+1})$ et que $E = \ker(f^{k_0}) \oplus \mathrm{Im}(f^{k_0})$.

Exercice 2.5.29 Soit $\mathbb{K}$ un corps.

1. On note $1_\mathbb{K}$ le neutre de $\mathbb{K}$ pour la multiplication et on considère l'application :
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & n \cdot 1_\mathbb{K} \end{array}$$
   (a) Montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(\varphi) = n\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $n = 0$ ou bien n est premier. *Cette valeur de l'entier « n » est appelée la caractéristique du corps* $\mathbb{K}$.
   (c) On suppose que $n = 0$. Montrer que $\mathbb{K}$ contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$ et que ce sous-corps est le plus petit sous-corps de $\mathbb{K}$.
   (d) On suppose que $n = p$ est premier. Montrer que $\mathbb{K}$ contient un corps isomorphe à $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et que ce corps est le plus petit sous-corps de $\mathbb{K}$.
2. On suppose ici que $\mathbb{K}$ est un corps fini.
   (a) Que peut-on dire de la caractéristique de $\mathbb{K}$?
   (b) En déduire qu'il existe un nombre premier p tel que $\mathbb{K}$ soit un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel et qu'il est nécessairement de dimension finie.
   (c) Que peut-on en déduire pour le cardinal de $\mathbb{K}$?

Exercice 2.5.30 Soient $\mathbb{K}$ un corps et A une $\mathbb{K}$-algèbre intègre et de dimension finie. Montrer que A est un corps.

Exercice 2.5.31 Soit $\mathbb{L}$ un corps et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{L}$.

1. Montrer qu'on peut munir $\mathbb{L}$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. On suppose que $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On note alors :
$$[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = \dim_\mathbb{K}(\mathbb{L})$$
   Montrer que pour tout corps $\mathbb{M}$ tel que $\mathbb{K} \subset \mathbb{M} \subset \mathbb{L}$:
$$[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = [\mathbb{L} : \mathbb{M}] \times [\mathbb{M} : \mathbb{K}]$$

2.6 Annexe

2.6.1 Démonstration du théorème fondamental de la théorie de la dimension

Rappel : la théorie de la dimension est fondée sur le théorème fondamental suivant :

Théorème fondamental (de la dimension) Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille génératrice de E. Alors toute famille $(y_1, \cdots, y_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs de E est une famille liée.

Preuve :

Pour $n = 0$, si la famille vide est génératrice de E, alors $\text{Vect}\,(()) = \{0\}$ donc $E = \{0\}$ et par suite, pour tout vecteur $y_1 \in E$, $(y_1) = (0)$ est une famille liée. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

On procède ensuite par récurrence sur $n \geqslant 1$. On démontre par récurrence que si E est un espace vectoriel admettant une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille de $(n+1)$ vecteurs est liée.

Initialisation :

Pour $n = 1$, on suppose que E est un espace vectoriel admettant une famille génératrice constituée d'un vecteur. Alors, il existe $a \in E$ tel que $E =< a >$. Soit (y_1, y_2) une famille de E contenant deux vecteurs. Puisque $E =< a >$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que : $(y_1, y_2) = (\alpha a, \beta a)$. Cette famille est clairement liée (en effet, si $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, alors $y_1 = y_2 = 0$ donc la famille (y_1, y_2) est liée et si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, alors $\beta y_1 - \alpha y_2 = 0$ est une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls).

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie au rang $n-1$ pour un certain entier $n \geqslant 2$ et on montre qu'elle est vraie au rang n.

Soit E un espace vectoriel admettant $\mathcal{G} = (x_1, \cdots, x_n)$ comme famille génératrice de E et soit $(y_1, \cdots, y_{n+1})$ une famille de $(n+1)$ vecteurs de E. On veut montrer que $(y_1, \cdots, y_{n+1})$ est liée.

• $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, donc :

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!] \ , \ \exists (a_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{K}^n \ , \ y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

On fixe pour chaque $i \in [\![1, n+1]\!]$, un tel n-uplet $(a_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$.

• On distingue alors deux cas.

∗ Premier cas : $\forall i \in [\![1, n+1]\!] \ , \ \forall j \in [\![1, n]\!] \ , \ a_{i,j} = 0$
Alors, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!] \ , \ y_i = 0$ et la famille est clairement liée.

∗ Deuxième cas : il existe $(i_0, j_0) \in [\![1, n+1]\!] \times [\![1, n]\!]$ tel que $a_{i_0,j_0} \neq 0$.

Quitte à réordonner (ou renommer) les familles $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$, on peut toujours supposer que $a_{n+1,n} \neq 0$. On a alors :

$$x_n = \frac{1}{a_{n+1,n}} \left(y_{n+1} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n+1,j} x_j \right)$$

On remplace alors dans les n premières équations. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a,

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} x_j + a_{i,n} \left(\frac{1}{a_{n+1,n}} \left(y_{n+1} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n+1,j} x_j \right) \right) \\ &= \frac{a_{i,n}}{a_{n+1,n}} y_{n+1} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(a_{i,j} - \frac{a_{i,n} a_{n+1,j}}{a_{n+1,n}} x_j \right) \end{aligned}$$

On pose alors pour $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$z_i = y_i - \frac{a_{i,n}}{a_{n+1,n}} y_{n+1} = \sum_{j=1}^{n-1} \left(a_{i,j} - \frac{a_{i,n} a_{n+1,j}}{a_{n+1,n}} \right) x_j$$

On considère alors l'espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_{n-1})$. Par définition, $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ est une famille génératrice de F et on a une famille $(z_1, \cdots, z_n)$ de n vecteurs de F. Par hypothèse de récurrence, cette famille est liée. Il existe donc $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i = 0$$

soit encore,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i a_{i,n}}{a_{n+1,n}} \right) y_{n+1} = 0$$

Puisque les λ_i ne sont pas tous nuls, on a donc montré que (y_i) est une famille liée.

Ce qui montre que la propriété est vraie au rang n et achève la récurrence. ⊠

Chapitre 3

Matrices

Prérequis : dans tout ce chapitre, les notions suivantes sont supposées connues :

- espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels ;
- sous-espaces vectoriels en somme directe et sous-espaces vectoriels supplémentaires ;
- application linéaire, noyau et image ;
- théorie de la dimension ; rang d'une famille de vecteurs et d'une application linéaire ;
- base d'un espace vectoriel et caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base ;
- isomorphismes d'espaces vectoriels et groupe linéaire.

Aucune connaissance spécifique sur les matrices n'est supposée connue.

3.1 Définition d'une matrice

Dans tout ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif quelconque. Dans la pratique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Le lecteur voulant généraliser pourra étudier la théorie des matrices à coefficients dans un anneau A : soit en adaptant les définitions et propriétés, soit en consultant d'autres ouvrages.

Définition 3.1.0.1 Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle matrice à n lignes et p colonnes (ou de type (n,p), ou encore de format (n,p)) à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute application :

$$\begin{array}{rcl} A : [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{i,j} \end{array}$$

On écrit alors :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix} \quad \text{ou aussi} \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

On note aussi $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ ou $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, ou encore $A = [a_{i,j}]$ si le contexte est clair.

L'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 3.1.0.2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice de type $(2,3)$ à coefficients réels.

Exemple 3.1.0.3 $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ est une matrice de type $(1,6)$ à coefficients réels.

Exemple 3.1.0.4 $C = \begin{pmatrix} i & 1+i & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice de type $(1,3)$ à coefficients complexes.

Exemple 3.1.0.5 $M = \begin{bmatrix} X & 2 \\ i-X & 1-X \end{bmatrix}$ est une matrice $(2,2)$ à coefficients dans $\mathbb{C}(X)$.

Remarques :

- *par définition, une matrice est une application. Par conséquent, deux matrices A et B sont égales si et seulement si elles sont de même type (i.e $n = n'$ et $p = p'$) et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{i,j} = b_{i,j}$. Autrement dit, $A = B$ si les deux matrices ont la même « taille » et les « mêmes coefficients » ;*
- *par convention, dans l'écriture $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, le premier indice correspond toujours à l'indice de ligne et le second à l'indice de colonne.*

Définition 3.1.0.6 Soit $A = [a_{i,j}]$ une matrice de type (n, p).

- n est alors le nombres de lignes de la matrice, et p, le nombre de colonnes.
- Les nombres $a_{i,j}$ sont appelés les coefficients de la matrice ; plus précisément, on dit que $a_{i,j}$ est le (i, j)-ème terme de la matrice ou encore le coefficient (i, j) de la matrice.
- On dit qu'une matrice A est carrée d'ordre n (ou carrée de taille n) lorsque $n = p$. Dans ce cas, les coefficients $a_{i,i}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) sont appelés les coefficients diagonaux de la matrice A.
- On dit que A est une matrice colonne si $p = 1$.
- On dit que A est une matrice ligne si $n = 1$.
- Pour $i \in [\![1, n]\!]$ fixé, la matrice ligne $[a_{i,1}\ a_{i,2} \cdots a_{i,p}] \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est appelée la i-ème ligne de A.
- Pour $j \in [\![1, p]\!]$ fixé, la matrice colonne $\begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$ est appelée la j-ème colonne de A.

Exemple 3.1.0.7 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & i \\ -1 & i & i & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & i \end{pmatrix}$ est la 2^e ligne de la matrice A et $\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$ est la 4^e colonne de A.

3.2 Opérations sur les matrices

3.2.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 3.2.1.1 Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de même type (n, p). On définit la somme de A et B, notée $A + B$, comme la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]\ ,\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Autrement dit, $A + B$ est la matrice obtenue par addition des coefficients terme à terme.

Remarque : *cette définition coïncide avec la définition de la somme de deux applications définies sur* $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.

Définition 3.2.1.2 On définit une multiplication externe sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, [a_{i,j}]) & \longmapsto & [\lambda \times a_{i,j}] \end{array}$$

Remarque : *cette définition coïncide avec la définition de la multiplication externe sur l'ensemble des applications de* $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ *dans* $\mathbb{K}$.

Exemple 3.2.1.3 Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors :

$$2 \cdot A + 3 \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 9 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Remarque et notation : *comme d'habitude, on écrira* $2A$ *au lieu de* $2 \cdot A$.

Proposition 3.2.1.4 *Muni de ces opérations,* $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Le neutre pour l'addition est la matrice nulle, c'est-à-dire la matrice de type* (n,p) *dont tous les coefficients sont nuls.*

Preuve :

En fait, c'est une conséquence directe du fait que $\mathcal{F}([\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le neutre est l'application nulle. ⊠

Notation : *la matrice nulle de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est notée* $O_{n,p}$, *ou* 0 *si le contexte est clair.*

3.2.2 Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 3.2.2.1 Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le (i,j)-ème terme vaut 1 et tous les autres sont nuls. Autrement dit,

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \overset{j\text{-ème colonne}}{\downarrow} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-ème ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Remarques :

- *dans la notation $E_{i,j}$, on ne précise pas le format de la matrice, il est sous-entendu suivant le contexte. En toute rigueur, il faudrait écrite $E_{i,j}(n,p)$;*
- *il est souvent utile d'utiliser le symbole de Kronecker. On rappelle que le symbole de Kronecker est $\delta_{i,j}$ où pour $i,j \in \mathbb{N}$, on pose $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. On a alors :*

$$E_{i,j} = [\delta_{l,i}\delta_{k,j}]_{\substack{1\leqslant l\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant p}}$$

Théorème 3.2.2.2 *La famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée la base canonique. En particulier, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et :*

$$\dim_{\mathbb{K}}\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right) = np$$

Preuve :

• Montrons que $\mathcal{B} = (E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

∗ On montre d'abord que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a alors clairement :

$$A = [a_{i,j}] = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}E_{i,j}$$

Par suite, $\mathcal{B}$ est bien une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

∗ On montre ensuite que $\mathcal{B}$ est une famille libre.
Soit $(\lambda_{i,j}) \in \mathbb{K}^{np}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{i,j}E_{i,j} = 0$$

Alors, d'après le calcul précédent, $[\lambda_{i,j}] = 0_{n,p}$ (la matrice nulle). Par suite, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\lambda_{i,j} = 0$, ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est libre.

Ce qui montre que $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

• Puisque $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et que $\mathcal{B}$ est finie, on en déduit que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et :

$$\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = |\mathcal{B}| = n \times p$$

⊠

Remarque : *dans une matrice, on a np choix de constantes à faire et il n'y a aucune contrainte entre ces coefficients. La dimension est donc bien $n \times p$. Rappelez-vous que concrètement la dimension correspond au nombre de paramètres pour fixer les objets.*

3.2.3 Produit matriciel

Définition 3.2.3.1 Soient n, p et q trois entiers naturels non nuls, $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = [b_{j,k}] \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit le produit de A et B, noté $A \times B$ ou tout simplement AB, comme la matrice $C = [c_{i,k}] \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!] \ , \ c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}$$

Remarques :

- *on note justement l'indice des lignes de B et l'indice des colonnes de A de la même façon pour obtenir un moyen simple de retenir la formule ;*
- *attention aussi à l'ordre ! Il se peut que le produit AB soit défini mais pas le produit BA !*
- ⚠ **Attention :** *il faut vérifier la bonne compatibilité des formats ! C'est comme pour la relation de Chasles : retenez que $(n,p) \times (p,q) = (n,q)$. Il n'y a aucun sens à faire le produit d'une matrice $(2,3)$ avec une matrice $(5,1)$;*
- *enfin, il est naturel de se demander pourquoi on ne définit pas le produit terme à terme : la réponse à cette question apparaîtra naturellement lorsqu'on fera l'interprétation en termes d'applications linéaires.*

Exemple 3.2.3.2 Soient $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
D'une part, le produit AB est bien défini puisque A est de type $(2,3)$ et B est de type $(3,2)$. La matrice obtenue est une matrice de type $(2,2)$, c'est-à-dire une matrice carrée de taille 2 :

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

D'autre part, le produit BA est aussi défini puisque B est de type $(3,2)$ et A est de type $(2,3)$. Par contre, la matrice obtenue par produit est une matrice carrée d'ordre 3 cette fois :

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarques :

- *avec le logiciel Maple, on définit une matrice à l'aide de la commande Matrix dont la syntaxe est : $B := Matrix([[1,1],[1,2],[0,1]])$ (en fait, on rentre la liste des matrices lignes). Puis pour faire le produit, le plus simple est de charger le package avec la commande « $with(LinearAlgebra)$; » (validée par le point virgule, sans espace) puis, on écrit l'instruction $A.B$ (noter qu'il s'agit du point et non du produit $*$ habituel sous Maple) ;*

- *avec Scilab (ou Matlab), la syntaxe est quasiment identique.* $B = [1\,1; 1\,2; 0\,1]$. *Pour le produit, on saisit* $A \star B$ *(même produit que pour les nombres) ;*
- *avec Python, la syntaxe est quasi identique. D'abord, on importe le « package » numpy (import numpy) puis pour définir A, on saisit :* $A = numpy.array([[-1,1,1],[2,1,1]])$; *(et de même pour B). Pour faire le produit, on saisit l'instruction :* $numpy.dot(A,B)$.

Exercice 3.2.3.3 Soient $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Calculer CD et DC.

⚠ **Attention :** la conclusion est que $AB = 0 \not\Longrightarrow A = 0$ ou $B = 0$!! Erreur classique et très grave ! En revanche, on ne parle en général pas de « non intégrité » car la multiplication n'est pas une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (sauf si $n = p$).

Proposition 3.2.3.4 *Le produit matriciel est associatif quand il est bien défini, c'est-à-dire que si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *et* $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, *de sorte que les produits* AB, BC, $(AB)C$ *et* $A(BC)$ *sont tous définis, on a alors :*

$$(AB)C = A(BC)$$

Preuve :

• Pour commencer, on remarque que $(AB)C$ et $A(BC)$ sont deux matrices de même type (n, r).

• Notons $a = [a_{i,j}]$, $B = [b_{j,k}]$, $C = [c_{k,l}]$, $AB = [d_{i,k}]$, $BC = [e_{j,l}]$, $(AB)C = [f_{i,l}]$, $A(BC) = [g_{i,l}]$ et on fixe $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]$. On a alors :

$$\begin{aligned} g_{i,l} &= \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} e_{j,l} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{j,k} c_{k,l} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k} \right) c_{k,l} \\ &= \sum_{k=1}^{q} d_{i,k} c_{k,l} \\ &= f_{i,l} \end{aligned}$$

Ce qui montre que $(AB)C$ et $A(BC)$ sont de même type et ont les mêmes coefficients. Par suite, elles sont égales, c'est-à-dire $(AB)C = A(BC)$. ⊠

Théorème 3.2.3.5 *Soient n, p, q trois entiers strictement positifs. Alors, l'application φ :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

est une application bilinéaire, c'est-à-dire que :

(i) φ est linéaire à gauche :

$$\forall (A, A') \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2,\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\ ,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ (\lambda A + \mu A')B = \lambda(AB) + \mu(A'B)$$

(ii) φ est linéaire à droite :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\ ,\ \forall (B, B') \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ A(\lambda B + \mu B') = \lambda(AB) + \mu(AB')$$

Preuve :

Montrons par exemple que φ est linéaire à gauche.
Soient $A = [a_{i,j}], A' = [a'_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = [b_{j,k}] \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Par définition, $\lambda A + \mu A' = [\lambda a_{i,j} + \mu a'_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Par suite,

$$\begin{aligned} (\lambda A + \mu A')B &= \left[\sum_{j=1}^{p} (\lambda a_{ij} + \mu a'_{i,j}) b_{j,k}\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant q}} \\ &= \left[\lambda \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k} + \mu \sum_{j=1}^{p} a'_{i,j} b_{j,k}\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant q}} \\ &= \lambda \left[\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant q}} + \mu \left[\sum_{j=1}^{p} a'_{i,j} b_{j,k}\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant q}} \\ &= \lambda(AB) + \mu(A'B) \end{aligned}$$

⊠

Remarques :

- *autrement dit, lorsque cela a un sens, les règles de calcul avec les matrices sont celles qu'on attend !*
- *Pourquoi ne peut-on pas simplement dire que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre ?*
- *On verra dans le paragraphe suivant que la linéarité à droite se déduit de la linéarité à gauche à l'aide de la transposition.*

3.2.4 Transposition

Définition 3.2.4.1 Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A, et on note ${}^tA$, la matrice définie par ${}^tA = [\alpha_{i,j}] \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, où pour $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$, $\alpha_{i,j} = a_{j,i}$.

Remarques :

- *en clair, lorsqu'on calcule la transposée d'une matrice, on échange simplement les lignes et les colonnes ;*
- *on peut aussi écrire* ${}^tA = [a_{i,j}]_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\1\leqslant i\leqslant n}}$ *ou encore* ${}^tA = [a_{j,i}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$. *Mais attention aux risques de confusions et aux problèmes d'écritures, en particulier, la notation* $[a_{j,i}]_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\1\leqslant i\leqslant p}}$ *désigne encore A et non sa transposée. Pour éviter les confusions, je vous conseille d'introduire les* $\alpha_{i,j} = a_{j,i}$ *;*
- *la notation* ${}^tA$*, pour la transposée de la matrice A, est une notation typiquement française ! On trouve aussi la notation (plus universelle)* $A^\top$ *(ou* A^T*) qui ne sera pas utilisée dans ce livre ;*
- *l'intérêt principal de la transposée sera établie très clairement dans l'étude de la dualité ou de l'adjoint d'un endomorphisme (voir cours de mathématiques spéciales 2).*

Exemple 3.2.4.2 Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, alors :

$$ {}^tA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} $$

Proposition 3.2.4.3 *La transposition vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^t({}^tA) = A$.

(ii) La transposition est linéaire : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$.

(iii) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Preuve :

• Les propriétés (i) et (ii) sont évidentes.

• Montrons (iii). Soient $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = [b_{j,k}] \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On pose $AB = [c_{i,k}] \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et ${}^tB\,{}^tA = [d_{i,j}] \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$.

∗ Tout d'abord, on constate que ${}^t(AB)$ et ${}^tB\,{}^tA$ sont de même type.

∗ Ensuite, pour tout $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$,

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k} b_{k,i} = c_{j,i}$$

Par suite, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. ⊠

Remarques :

- *les propriétés (i) et (ii) se traduisent simplement lorsque $n = p$ en disant que la transposition est une symétrie de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$;*
- *attention à l'ordre pour la transposée d'un produit : il y a inversion de l'ordre, comme pour le calcul d'inverse dans un groupe ;*
- *on verra une preuve non calculatoire dans le cours de mathématiques spéciales 2 (qui utilise la notion d'adjoint).*

Corollaire 3.2.4.4 *L'application transposition de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est bijective.*

Preuve :

C'est évident car son inverse est la transposition de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'après la proposition précédente (le premier point). ⊠

3.3 Matrices carrées

3.3.1 Algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 3.3.1.1 L'ensemble des matrices carrées de taille n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 3.3.1.2 *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors :*

(i) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n^2.*

(ii) La multiplication matricielle est une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est associative.

(iii) La matrice $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *est neutre pour le produit.*

(iv) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ *est une $\mathbb{K}$-algèbre (non commutative et non intègre si $n \neq 1$).*

Preuve :

• (i) est un cas particulier de la proposition 3.2.1.4 et du théorème 3.2.2.2 avec $n = p$.

• La propriété (ii) est une conséquence de la définition du produit matriciel et de la proposition 3.2.3.4 (c'est-à-dire que le produit matriciel est associatif lorsqu'il est défini).

• Montrons (iii).
Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $AI_n = [b_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $I_nA = [c_{i,j}]$. En remarquant que $I_n = [\delta_{i,j}]$, on a, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,j} = a_{i,j} \quad \text{et} \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}a_{k,j} = a_{i,j}$$

D'où $AI_n = I_nA = A$.

• Enfin, montrons (iv).

∗ On a déjà montré que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

∗ On montre que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

▷ $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien (puisque $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) ;

▷ $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est associative et possède un neutre (d'après (iii)). De plus, d'après le théorème 3.2.3.5, $\times$ est bilinéaire : en particulier, elle est donc distributive par rapport à $+$ à gauche et à droite.

Ce qui prouve que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

∗ Enfin, toujours par bilinéarité de $\times$, on a :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \ , \ (\lambda \cdot A) \times B = \lambda \cdot (A \times B) = A \times (\lambda \cdot B)$$

Par conséquent, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est bien une $\mathbb{K}$-algèbre.

Enfin, si on suppose que $n \geqslant 2$, on considère $A = E_{1,2} = [\delta_{1,i}\delta_{2,j}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ et $B = E_{2,2} = [\delta_{2,i}\delta_{2,j}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, et on vérifie alors que :

$$A \times B = A \quad \text{et} \quad B \times A = 0$$

Il s'ensuit que : $AB \neq BA$ (donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas une algèbre commutative) et $BA = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$ (donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre). ⊠

Remarque : $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ *est donc un anneau non commutatif si* $n \geqslant 2$. *C'est un des exemples le « plus simple » d'anneau non commutatif. Lorsque* $n = 1$, *on identifie* $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ *et* $\mathbb{K}$ *et c'est donc un corps commutatif.*

Terminons cette section par une remarque/propriété élémentaire mais très utile.

Proposition 3.3.1.3 *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$:*

$$E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

Preuve :

La difficulté principale ici est le choix des « noms » des variables... Notons $E_{i,j} = [\delta_{r,i}\delta_{s,j}]_{\substack{1\leqslant r\leqslant n\\1\leqslant s\leqslant n}}$, $E_{k,l} = [\delta_{s,k}\delta_{t,l}]_{\substack{1\leqslant s\leqslant n\\1\leqslant t\leqslant n}}$ et $E_{i,j} \times E_{k,l} = [a_{r,t}]_{\substack{1\leqslant r\leqslant n\\1\leqslant t\leqslant n}}$.

Alors, pour $(r,t) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$a_{r,t} = \sum_{s=1}^{n} \delta_{r,i}\delta_{s,j}\delta_{s,k}\delta_{t,l} = \delta_{r,i}\delta_{t,l}\sum_{s=1}^{n} \delta_{s,j}\delta_{s,k}$$

Or, dans cette dernière somme, $\delta_{s,j} = 0$ si $s \neq j$ (et 1 sinon). Par suite,

$$a_{r,t} = \delta_{r,i}\delta_{t,l}\delta_{j,k}$$

Sachant que $E_{i,l} = [\delta_{r,i}\delta_{t,l}]_{\substack{1\leqslant r\leqslant n\\1\leqslant t\leqslant n}}$, on conclut que $E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.

⊠

Remarques :

- *on reverra une démonstration plus algébrique (sans autant de calcul) quand on aura fait le lien entre matrices et applications linéaires ;*
- *dans la pratique, lorsqu'une propriété est vraie pour toute(s) matrice(s), il peut être intéressant de regarder ce qu'on obtient en choisissant des matrices parmi les $E_{i,j}$. On reverra cela dans les exemples un peu plus loin et dans les exercices.*

3.3.2 Matrices carrées inversibles et groupe $GL_n(\mathbb{K})$

Définition 3.3.2.1 On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- inversible à droite s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = I_n$;
- inversible à gauche s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $BA = I_n$;
- inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = BA = I_n$.

Exemple 3.3.2.2 La matrice I_n est inversible car $I_n \times I_n = I_n$.

Exemple 3.3.2.3 La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est inversible car $A \times A = I_2$.

Exercice 3.3.2.4 Montrer que la matrice $J = [1]$ (la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1) n'est pas inversible.

Remarque : *pour le moment (c'est-à-dire avec la simple définition), il n'est pas toujours évident de voir si une matrice est ou n'est pas inversible. La méthode « naturelle » serait de résoudre le système $AB = I_n$ (système dont les inconnues sont les n^2 coefficients de la matrice B) mais on verra que cela est bien trop compliqué et qu'on dispose en fait d'outils bien plus simples (ou au minimum, beaucoup moins calculatoire).*

Théorème 3.3.2.5 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Alors :*

$$A \text{ inversible à droite} \iff A \text{ inversible à gauche} \iff A \text{ inversible}$$

Dans ce cas, l'inverse à droite, l'inverse à gauche et l'inverse sont égaux et uniques. On note alors A^{-1} l'inverse de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve :

• Montrons que A inversible à droite implique A est inversible à gauche.
On suppose que A est inversible à droite. Soit alors $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $AB = I_n$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto & XA \end{array}$$

Puisque le produit matriciel est bilinéaire, il est en particulier linéaire à gauche. Par suite, $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$XA = 0 \Longrightarrow (XA)B = 0 \times B \Longrightarrow X(AB) = 0 \Longrightarrow XI_n = 0 \Longrightarrow X = 0$$

et par conséquent, $\ker(\varphi) \subset \{0\}$, c'est-à-dire φ est un endomorphisme injectif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Or, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie : par conséquent, φ est bijective. On en déduit donc qu'il existe (une unique matrice) $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $CA = I_n$, c'est-à-dire que A est inversible à gauche et cet inverse à gauche est unique. De plus,

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B$$

Ce qui montre que l'inverse à droite est égal à l'inverse à gauche.

• Montrons A inversible à gauche implique que A est inversible.
En reprenant exactement le même raisonnement avec $\psi(X) = AX$, on montre que si A est inversible à gauche, alors A est inversible à droite et les inverses sont égaux et uniques. Par suite, A est inversible tout court.

• L'implication A inversible $\Longrightarrow$ A inversible à droite est évidente. ⊠

Proposition 3.3.2.6 *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ A \text{ est inversible}\}$. Alors $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe, appelé groupe linéaire.*

Preuve :

C'est clair car on a déjà vu à plusieurs reprises (voir cours de mathématiques supérieures 1) que si A est un anneau, alors l'ensemble $\mathcal{U}$ des éléments inversibles de A est un groupe pour la multiplication. ⊠

Remarques :

- *en particulier, comme dans tout groupe (non commutatif), si A et B sont inversibles alors AB l'est aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;*
- *vous pouvez constater l'analogie avec l'exercice 1.3.16 du cours de mathématiques supérieures 1 où on suppose que A est un anneau fini. Ici, le cardinal est remplacé par la dimension ;*
- *on reverra un peu plus loin les méthodes pratiques pour déterminer si une matrice est ou n'est pas inversible et lorsqu'elle l'est, comment calculer son inverse.*

⚠ **Attention :** on n'écrit jamais $\frac{1}{A}$!!! Si A est inversible, on écrit A^{-1} pour l'inverse.

Proposition 3.3.2.7 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :*

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff {}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$$

Dans ce cas, ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

Preuve :

• Tout d'abord, puisque ${}^t({}^tA) = A$, il faut et il suffit de démontrer que : $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow {}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$.

• Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors, il existe $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $AA^{-1} = I_n$ (on a vu qu'inversible équivaut à inversible à droite). Mais alors :

$${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI_n = I_n$$

Par conséquent, ${}^tA$ est inversible à gauche et donc inversible. De plus, le calcul précédent montre que :

$${}^t(A^{-1}){}^tA = I_n \quad \text{donc} \quad ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

⊠

3.3.3 Sous-ensembles remarquables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

3.3.3.a Matrices diagonales

Définition 3.3.3.1 On dit qu'une matrice carrée $D = [d_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(i \neq j \Longrightarrow d_{i,j} = 0)$. On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales.

Exemple 3.3.3.2 La matrice nulle (carrée) est diagonale et $I_n \in D_n(\mathbb{K})$.

Notation : on écrit souvent $D = diag(d_{1,1}, d_{2,2}, \cdots, d_{n,n})$ pour désigner la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont les $d_{i,i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Parfois, on écrira tout simplement $D = diag(d_1, \cdots, d_n)$ (on omet le double indice).

Proposition 3.3.3.3 *$D_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Preuve :

• Il est clair que $D_n(\mathbb{K})$ contient I_n et est stable par combinaisons linéaires. Il reste donc seulement à vérifier la stabilité par produit matriciel.

• Soient $D = [d_{i,j}], E = [e_{i,j}] \in D_n(\mathbb{K})$. Posons $DE = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$ tels que $i \neq j$. On a alors :

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} e_{k,j} \\ &= d_{i,i} e_{i,j} && \text{(puisque } d_{i,k} = 0 \text{ si } k \neq i) \\ &= 0 && \text{(puisque } e_{i,j} = 0 \text{ pour } i \neq j) \end{aligned}$$

Par suite, $DE \in D_n(\mathbb{K})$ et on peut donc conclure que $D_n(\mathbb{K})$ est bien une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Enfin, pour tout $(d_1, \cdots, d_n) \in \mathbb{K}^n$ et tout $(e_1, \cdots, e_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} diag(d_1, \cdots, d_n) \times diag(e_1, \cdots, e_n) &= diag(d_1 e_1, \cdots d_n e_n) \\ &= diag(e_1 d_1, \cdots, e_n d_n) \\ &= diag(e_1, \cdots, e_n) \times diag(d_1, \cdots, d_n) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $D_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ⊠

Exercice 3.3.3.4 Quelle est la dimension de $D_n(\mathbb{K})$? Ce résultat est à connaître.

Proposition 3.3.3.5 *Soit $D = diag(d_1, \cdots, d_n) \in D_n(\mathbb{K})$. Alors :*

$$D \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ d_i \neq 0$$

Dans ce cas, $D^{-1} = diag(d_1^{-1}, \cdots, d_n^{-1}) \in D_n(\mathbb{K})$.

Preuve :

• $\Longleftarrow$ est évidente.
En effet, si $\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ d_i \neq 0$, on pose $C = diag(d_1^{-1}, \cdots, d_n^{-1})$. D'après ce qui précède, $DC = CD = diag(1, 1, \cdots, 1) = I_n$.

• Montrons $\Longrightarrow$.
On suppose que D est inversible. Alors, il existe $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ telle que $DA = I_n$. Par suite, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$\delta_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} a_{k,j} = d_i a_{i,j}$$

On en déduit donc que :

- si $i = j$, alors $d_i a_{i,i} = 1$, et par conséquent, $d_i \neq 0$ et $a_{i,i} = d_i^{-1}$ (ce qui prouve le premier point) ;
- pour $i \neq j$, on a $d_i a_{i,j} = 0$ et donc $a_{i,j} = 0$ (puisqu'on vient de montrer que $d_i \neq 0$). Ce qui prouve que A est, elle aussi, une matrice diagonale.

⊠

Exercice 3.3.3.6 Proposer une autre démonstration (considérer $X \longmapsto DX$).

Exemple 3.3.3.7 Pour $n \geqslant 2$, on souhaite déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $\forall D \in D_n(\mathbb{K}) \ , \ MD = DM$. On raisonne par analyse-synthèse.

• Analyse
Supposons que $M = [m_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit solution. Alors, pour tout entier $s \in [\![1, n]\!]$,

$$E_{s,s}M = ME_{s,s} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \ , \ \delta_{i,s} m_{s,j} = m_{i,s} \delta_{j,s}$$

Soient alors $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. En choisissant $s = i$, on obtient : $\delta_{i,i} m_{i,j} = m_{i,i} \delta_{j,i} = 0$, c'est-à-dire $m_{i,j} = 0$. Ce qui prouve que M est une matrice diagonale.

• Synthèse

Réciproquement, si $M \in D_n(\mathbb{K})$, alors $\forall D \in D_n(\mathbb{K}) \ , \ DM = MD$ (car on a vu que $D_n(\mathbb{K})$ est une algèbre commutative).

Remarque : *en fait, il est naturel de regarder ce qui se passe pour les matrices $E_{i,i}$. En effet, $D \longmapsto MD - DM$ est linéaire. Elle est donc nulle si et seulement si elle s'annule sur une base de $D_n(\mathbb{K})$. On aurait aussi pu raisonner par équivalence mais la rédaction est plus difficile.*

3.3.3.b Matrices triangulaires

Définition 3.3.3.8 On dit qu'une matrice carrée $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- triangulaire supérieure si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0)$.
  Autrement, dit une matrice triangulaire supérieure est une matrice de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

- triangulaire inférieure si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(i < j \Longrightarrow a_{i,j} = 0)$.
  Autrement, dit une matrice triangulaire inférieure est une matrice de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

On note $T_{n,s}(\mathbb{K})$ (respectivement $T_{n,i}(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition 3.3.3.9 *On a les propriétés suivantes :*

(i) $T_{n,s}(\mathbb{K})$ *et* $T_{n,i}(\mathbb{K})$ *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et on a*

$$\dim T_{n,s}(\mathbb{K}) = \dim T_{n,i}(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

(ii) La transposition est un isomorphisme de l'espace vectoriel $T_{n,s}$ *sur* $T_{n,i}$.

(iii) $T_{n,s}(\mathbb{K})$ *et* $T_{n,i}(\mathbb{K})$ *sont des sous-anneaux de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(iv) Si $A = [a_{i,j}] \in T_{n,s}(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K})$, *alors* $A^{-1} \in T_{n,s}(\mathbb{K})$. *De plus, les coefficients diagonaux de* A^{-1} *sont les* $a_{i,i}^{-1}$.

(v) Si $A = [a_{i,j}] \in T_{n,s}(\mathbb{K})$ *(resp.* $T_{n,i}(\mathbb{K})$*), alors*

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in [\![1,n]\!] \ , \ a_{i,i} \neq 0$$

Dans ce cas, les coefficients diagonaux de A^{-1} *sont les* $a_{i,i}^{-1}$.

Preuve :

• Montrons (i) et (ii).

∗ On vérifie de façon immédiate que $T_{n,s}(\mathbb{K})$ (respectivement $T_{n,i}(\mathbb{K})$) contient la matrice nulle et est stable par combinaisons linéaires. Par suite, $T_{n,s}(\mathbb{K})$ et $T_{n,i}(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

∗ De même, il est clair que la transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure donc $A \longmapsto {}^tA$ est bien une application linéaire de $T_{n,s}(\mathbb{K})$ dans $T_{n,i}(\mathbb{K})$. De plus, puisque pour toute matrice A, ${}^t({}^tA) = A$, la transposition est bien un isomorphisme de $T_{n,s}(\mathbb{K})$ sur $T_{n,i}(\mathbb{K})$.

∗ D'une part, $T_{n,s}(\mathbb{K})$ et $T_{n,i}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie (en tant que sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie). D'autre part, puisque $T_{n,s}$ et $T_{n,i}$ sont isomorphes, ils ont la même dimension. Enfin, il est clair que $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $T_{n,s}(\mathbb{K})$. Par suite,

$$\dim_{\mathbb{K}}\left(T_{n,i}(\mathbb{K})\right) = \dim_{\mathbb{K}}\left(T_{n,s}(\mathbb{K})\right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

• Montrons (iii).

∗ Il est clair que $I_n \in T_{n,s}(\mathbb{K}) \cap T_{n,i}(\mathbb{K})$.

∗ Puisque $T_{n,s}(\mathbb{K})$ (et $T_{n,i}(\mathbb{K})$) est un espace vectoriel, il reste donc à prouver que $T_{n,s}(\mathbb{K})$ (respectivement $T_{n,i}(\mathbb{K})$) est stable par produit. Soient $A = [a_{i,j}], B = [b_{i,j}] \in T_{n,s}(\mathbb{K})$. On pose $AB = [c_{i,j}]$ et on montre que $AB \in T_{n,s}(\mathbb{K})$. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i > j$. Alors :

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{j} a_{i,k}b_{k,j} && \text{(puisque si } k > j,\ b_{k,j} = 0) \\ &= 0 && \text{(puisque pour } k \leqslant j < i,\ a_{i,k} = 0) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $AB \in T_{n,s}(\mathbb{K})$.

On en déduit que $T_{n,i}(\mathbb{K})$ est également stable par produit puisque si $A', B' \in T_{n,i}(\mathbb{K})$, alors ${}^tA', {}^tB' \in T_{n,s}(\mathbb{K})$ et :

$$A'B' = {}^t({}^t(A'B')) = {}^t({}^t(B'){}^t(A')) \in T_{n,i}(\mathbb{K})$$

puisque le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure et la tranposée d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire inférieure.

• Montrons (iv).
Soient $A \in T_{n,s}(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K})$ et $\phi \in \mathcal{L}(T_{n,s}(\mathbb{K}))$ définie par :

$$\forall X \in T_{n,s}(\mathbb{K})\ ,\ \phi(X) = AX$$

Tout d'abord, ϕ est bien définie puisque $T_{n,s}(\mathbb{K})$ est stable par produit et ϕ est bien linéaire. Ensuite, puisque $A \in GL_n(\mathbb{K})$, ϕ est injective. Ainsi, ϕ est un endomorphisme injectif de $T_{n,s}(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie et par conséquent ϕ est bijective. On en déduit donc qu'il existe $B \in T_{n,s}(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$, c'est-à-dire $A^{-1} \in T_{n,s}(\mathbb{K})$.

• Montrons (v).
Soit $A = [a_{i,j}] \in T_{n,s}(\mathbb{K})$.

∗ Montrons $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]\ ,\ a_{i,i} \neq 0$.
On suppose que $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors, d'après la propriété précédente, $A^{-1} \in T_{n,s}(\mathbb{K})$. Posons $A^{-1} = [b_{i,j}]$ et soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a alors :

$$1 = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{i} a_{i,k} b_{k,i} = a_{i,i} b_{i,i}$$

Par suite, $a_{i,i} \neq 0$ et $b_{i,i} = a_{i,i}^{-1}$.

∗ On admet provisoirement la réciproque. Une démonstration sera donnée plus loin (voir proposition 3.5.1.9).

⊠

Remarques : *en fait, dans la démonstration précédente, on a montré deux propriétés remarquables à connaître !*

- *Si $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ sont deux matrices triangulaires, alors leur produit AB est aussi triangulaire (de même type) et de plus, les coefficients diagonaux de AB sont les $a_{i,i}b_{i,i}$;*

- *si $A = [a_{ij}]$ est triangulaire et inversible, alors son inverse est triangulaire (de même type) et de plus les coefficients diagonaux de A^{-1} sont les $a_{i,i}^{-1}$;*

- *on verra une démonstration moins calculatoire et bien plus élégante de la propriété (iii), ou plus exactement du fait que $T_{n,s}(\mathbb{K})$ (respectivement $T_{n,i}(\mathbb{K})$) est stable par produit ; cette démonstration est basée sur l'interprétation d'une matrice comme la matrice d'une application linéaire (voir paragraphe suivant) ;*

- *enfin, pour la réciproque dans (v), pour les plus curieux, vous pouvez faire une preuve par récurrence sur $n \geqslant 1$ (la taille de la matrice) en introduisant un découpage par blocs, c'est-à-dire :*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & L \\ \hline 0 & T \end{array}\right]$$

où $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, $T \in T_{n-1,s}(\mathbb{K})$ et 0 désigne la matrice colonne nulle (de taille $n-1$).

3.3.3.c Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 3.3.3.10 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est symétrique si ${}^tA = A$. On note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- On dit que A est antisymétrique si ${}^tA = -A$. On note $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple 3.3.3.11 La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ est une matrice symétrique réelle.

Exemple 3.3.3.12 La matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice antisymétrique complexe.

Exercice 3.3.3.13 Montrer que si $A = [a_{i,j}] \in A_n(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire A est antisymétrique), alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = 0$.

Proposition 3.3.3.14 *$S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:*

$$S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Par ailleurs, $\dim_{\mathbb{K}}(S_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *et* $\dim_{\mathbb{K}}(A_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Preuve :

• Notons τ la transposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même. On a déjà montré que $\tau \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et que $\tau^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Par conséquent, τ est une symétrie. On en déduit que :

- $\ker(\tau - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) = S_n(\mathbb{K})$ et $\ker(\tau + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) = A_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
- $\ker(\tau - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) \oplus \ker(\tau + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire

$$S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

• Pour les dimensions de ces espaces, je vous laisse vérifier en exercice que la famille $\mathcal{B} = (E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ est une base de $A_n(\mathbb{K})$. On conclut alors que $\dim_{\mathbb{K}}(A_n(\mathbb{K})) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ et que $\dim_{\mathbb{K}}(S_n(\mathbb{K})) = n^2 - \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

⊠

⚠ **Attention :** en revanche, $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ ne sont pas stables par produit (et donc ne sont pas des anneaux) ! Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Exercice 3.3.3.15 Soient $A \in S_n(\mathbb{K})$ et $B \in S_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $AB \in S_n(\mathbb{K})$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $AB \in A_n(\mathbb{K})$.
3. Lorsque $n = 2$, construire $A, B \in S_2(\mathbb{K})$ telles que $AB \in A_2(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$.

Exercice 3.3.3.16 Montrer que si $A, B \in A_2(\mathbb{K})$, alors $AB \in < I_2 >$.

Remarque : *il existe bien entendu d'autres ensembles de matrices remarquables comme le groupe spécial linéaire (voir chapitre 8 : déterminants), les matrices orthogonales (voir le chapitre 9 : espaces euclidiens), les matrices hermitiennes ou anti-hermitiennes, les matrices unitaires (voir cours de mathématiques spéciales 2)... Dans ce chapitre, on se concentre sur un nombre réduit d'ensembles remarquables que vous devez donc parfaitement maîtriser.*

3.4 Matrices et applications linéaires

3.4.1 Définition de la matrice d'une application linéaire relativement à deux bases

Définition 3.4.1.1 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. On note $p = \dim E$ et $n = \dim F$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)$ une base de F et enfin, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, il existe un unique $(a_{1,j}, \cdots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_i$$

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et on note $Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ ou $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, la matrice $[a_{i,j}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

Remarques :

- *autrement dit, la matrice de l'application linéaire f relativement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ (au départ) et $\mathcal{C}$ (à l'arrivée) est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(e_1), \cdots, f(e_p)$ dans la base $\mathcal{C}$;*
- *attention à l'ordre des bases ! La matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ n'est pas la même que celle de f relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$. Cette dernière matrice n'a d'ailleurs aucun sens si $F \neq E$;*
- *par définition, $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$.*

Exemple 3.4.1.2 Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui à (x, y, z) associe $(x + y, x - z)$. On sait que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour déterminer la matrice A de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement, on calcule les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

- $f(1, 0, 0) = (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1)$ donc la première colonne de A est $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;
- de même, $f(0, 1, 0) = (1, 0)$ donc la deuxième colonne de A est $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;
- enfin, $f(0, 0, 1) = (0, 1)$ donc la troisième colonne de A est $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Par conséquent, la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 3.4.1.3 Soit p le projecteur orthogonal sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 0$. On veut déterminer la matrice de p relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (au départ et à l'arrivée).

- En notant $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, on a $\mathcal{P}^\perp = \mathbb{R}\varepsilon$.
- Soit q le projecteur associé à p, c'est-à-dire le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}\varepsilon$. En notant $(.|.)$ le produit scalaire « usuel » dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on a :

  $$\forall X \in \mathbb{R}^3 \ , \ q(X) = (X|\varepsilon)\varepsilon$$

  soit encore,

  $$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ q((x, y, z)) = \left(\frac{x + y + z}{3}, \frac{x + y + z}{3}, \frac{x + y + z}{3} \right)$$

  Or, $p = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - q$ donc :

  $$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ p((x, y, z)) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right)$$

- Il reste alors à calculer les images des vecteurs de la base canonique par p :

$$\begin{aligned} p((1,0,0)) &= \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) \\ p((0,1,0)) &= \left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right) \\ p((0,0,1)) &= \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

On conclut donc que la matrice de p relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (au départ et à l'arrivée) est :

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Remarques :

- *on pouvait aussi déterminer une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ du plan $\mathcal{P}$ pour conclure que $p(X) = (X|\varepsilon_1)\varepsilon_1 + (X|\varepsilon_2)\varepsilon_2$ mais cela revient à peu près au même que la solution proposée ;*
- *si vous ne vous souvenez plus des méthodes de calcul de projection orthogonale dans $\mathbb{R}^3$ (qu'on reverra dans la chapitre 9 : espaces euclidiens), vous pouviez aussi tout simplement appliquer la définition pour déterminer la décomposition d'un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ comme la somme d'un élément de $\mathcal{P}$ et d'un élément de $\mathbb{R}\varepsilon$;*
- *vous pouvez aussi constater que cette matrice est symétrique : autrement dit, que vous écriviez les coordonnées des images en ligne ou en colonne, on obtient la même réponse ! Il est donc mieux ici de conclure, au moins après le premier calcul, que la première colonne de la matrice est donc $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$;*
- *enfin, on reverra dans le paragraphe sur les endomorphismes qu'on dit simplement « la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ » (on ne précise pas « au départ et à l'arrivée »).*

Exemple 3.4.1.4 On considère $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X] \ , \ f(P) = (X+1)P'' + 2P'$$

- Tout d'abord, f est une application bien définie car si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $\deg((X+1)P'') \leqslant 2$ et $\deg(2P') \leqslant 2$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
- Ensuite, puisque la dérivation est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et la multiplication est bilinéaire, f est linéaire.
- Enfin, notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour $k \in [\![0, 3]\!]$,

$$f(X^k) = k(k+1)X^{k-1} + k(k-1)X^{k-2}$$

Il s'ensuit que $f(1)=0$, $f(X)=2$, $f(X^2)=6X+2$, $f(X^3)=12X^2+6X$ et donc :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)=\begin{bmatrix}0&2&2&0\\0&0&6&6\\0&0&0&12\end{bmatrix}$$

Exemple 3.4.1.5 Soient $n\in\mathbb{N}^\star$ et f la restriction de l'endomorphisme de dérivation à $\mathbb{K}_n[X]$. Alors $f\in\mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$ et :

$$\forall k\in[\![0,n]\!]\ ,\ f(X^k)=kX^{k-1}$$

On en déduit donc qu'en notant $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$:

$$Mat(f,\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_c)=\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&2&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0&n\\0&\dots&\dots&\dots&0\end{bmatrix}$$

Exemple 3.4.1.6 Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x_0,x_1,\cdots,x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. On considère l'application :

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{K}_n[X]&\longrightarrow&\mathbb{K}^{n+1}\\P&\longmapsto&(P(x_0),\cdots,P(x_n))\end{array}$$

- Il est évident que $f\in\mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X],\mathbb{K}^{n+1})$ car les évaluations sont des formes linéaires sur $\mathbb{K}[X]$.
- Pour déterminer A, la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ et la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$, on détermine les images par f des vecteurs de la base canonique. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, on a :

  $$f(X^k)=(x_0^k,x_1^k,\cdots,x_n^k)$$

  On conclut donc que la k-ième colonne de A est donc $[x_i^k]_{0\leqslant i\leqslant n}$. Par suite,

  $$A=\begin{bmatrix}1&x_0&x_0^2&\dots&x_0^n\\1&x_1&x_1^2&\dots&x_1^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\dots&x_n^n\end{bmatrix}$$

  Ce que l'on peut aussi écrire plus formellement sous la forme : $A=\left[x_{i-1}^{j-1}\right]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n+1\\1\leqslant j\leqslant n+1}}$.

Remarque : *la matrice A de l'exemple précédent est une matrice très importante qui intervient régulièrement dans la pratique. Cette matrice s'appelle matrice de Vandermonde (associée à $(x_0,\cdots,x_n)$). La transposée est aussi souvent appelée matrice de Vandermonde. Vous devez connaître le nom de cette matrice.*

Exercice 3.4.1.7 On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ muni de la base $\mathcal{B}=(1,i)$. Pour $\theta\in\mathbb{R}$, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}$ défini par $f(z)=e^{i\theta}z$ pour tout $z\in\mathbb{C}$. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

3.4.2 Propriétés élémentaires des matrices d'applications linéaires

Proposition 3.4.2.1 *Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de F. On note $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Pour tout $x \in E$, on note X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. Alors, les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$ sont données par la matrice colonne AX.*

Remarque : *en clair, si $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$, on pose $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$. Si $Y = AX$, avec $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, alors :*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i$$

Preuve :

En fait, c'est évident, comme on va le voir. Soit $x \in E$ et soient $(x_1, \cdots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. On a donc $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$. Par suite,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \right) \varepsilon_i \end{aligned}$$

Par suite, la matrice colonne constituée des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ est :

$$Y = \left[\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \right]_{1\leqslant i\leqslant n}$$

On reconnaît immédiatement le produit AX avec $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$. ⊠

Remarque : *en fait, on a équivalence. Autrement dit, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donnée et vérifie : pour tout $x \in E$, AX (où X est la matrice colonne constituée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$) est la matrice colonne constituée des coordonnées de $f(x)$ dans $\mathcal{C}$, alors $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Pourquoi ?*

Proposition 3.4.2.2 *Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F et $\mathcal{D}$ une base de G. Soient également $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :*

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

Preuve :

On pose $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$, $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ et $\mathcal{D} = (u_1, \cdots u_q)$. Notons $A = [a_{i,j}] = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $B = [b_{i,j}] = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)$.
Montrons que BA est la matrice de $g \circ f$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$. Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Par définition de la matrice d'une application linéaire, on a successivement :

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(e_j) &= g(f(e_j)) \\
&= g\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} g(\varepsilon_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{q} b_{k,i} u_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,j}\right) u_k
\end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice de $g \circ f$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ est :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \left[\sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,j}\right]_{\substack{1 \leqslant k \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = BA$$

⊠

Remarque : *on peut aussi retrouver ce résultat en raisonnant sur les images. Si $x \in E$, on note X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. Alors AX est la matrice des coordonnées de $y = f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$. Par suite, $B(AX)$ est la matrice des coordonnées de $g(y) = (g \circ f)(x)$ dans la base $\mathcal{D}$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on conclut que BA est la matrice de $g \circ f$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$. Cette méthode pour déterminer la matrice d'une application linéaire est très pratique lorsque $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$. Par exemple, si pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y, 2x - y - z, y + 2z)$, alors cette observation permet directement de dire que :*

$$Mat_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad car \ A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ 2x - y - z \\ y + 2z \end{bmatrix}$$

Notez bien que dans ce cas, on lit la matrice A « par ligne » alors que normalement, dans la définition de la matrice d'une application linéaire, on lit la matrice « par colonne ».

3.4.3 Isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème 3.4.3.1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives $p \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$. Étant données deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et F respectivement, l'application :*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En particulier, si $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$, φ est appelé isomorphisme canonique et toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ représente une unique application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ relativement aux bases canoniques. On dit que f est l'application linéaire canoniquement associée à A.

Preuve :

• On peut noter pour commencer que φ est bien une application.

• Il est évident que φ est linéaire.

• Enfin, puisqu'une application linéaire est parfaitement caractérisée par l'image d'une base et que les coordonnées d'un vecteur dans une base existent et sont uniques, on conclut que φ est un isomorphisme.

⊠

Exercice 3.4.3.2 Rédiger les détails de la preuve.

Corollaire 3.4.3.3 *Si E et F sont de dimensions finies, alors $\mathcal{L}(E,F)$ l'est aussi et $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.*

Preuve :

• Si $\dim E = 0$ ou bien $\dim F = 0$, alors $\mathcal{L}(E,F) = \{0\}$, donc la propriété est vraie.

• Sinon, $\dim E = p \geqslant 1$ et $\dim F = n \geqslant 1$. D'après le théorème précédent, $\mathcal{L}(E,F)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et on a vu que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie. Par conséquent, $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et :

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}(E,F)) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = p \times n = \dim_{\mathbb{K}}(E) \times \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

⊠

Remarque : *lorsque $p \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, on peut expliciter très simplement une base de $\mathcal{L}(E,F)$. En effet, en fixant $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ une base de E et $(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de F, $(\varphi^{-1}(E_{i,j})) = (f_{i,j})$ est une base de $\mathcal{L}(E,F)$ et pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$:*

$$\forall k \in [\![1,p]\!] \ , \ f_{i,j}(e_k) = \delta_{k,j}\varepsilon_i$$

Définition 3.4.3.4 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle :

- noyau de A, noté $\ker(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \ / \ AX = 0\}$$

- image de A, notée $\mathrm{Im}(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ / \ \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \ , \ Y = AX\}$$

Remarques :

- *l'image de A est donc aussi égal à l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A (puisque la j-ième colonne de A est l'image par A de la matrice $E_{j,1}$ et la famille des $(E_{j,1})_{1 \leqslant j \leqslant p}$ est une base de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$) ;*
- *si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A (c'est-à-dire que A est la matrice de f relativement aux bases canoniques). En identifiant $\mathbb{K}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^p$ avec $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on a alors :*

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(A) \quad \text{et} \quad \ker(f) = \ker(A)$$

  Dans la pratique, on fera toujours cette identification et on confondra souvent f et A ;

- ⚠ **Attention :** *l'identification précédente provient du fait que dans $\mathbb{K}^n$ un vecteur et ses coordonnées dans la base canonique sont identiques. Il n'y a donc pas de problème à identifier vecteur et coordonnées. En revanche, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F quelconques, on ne peut pas identifier $\ker(f)$ et $\ker(A)$. Par exemple, si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}_2[X])$ et A est la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$, alors :*
  - *$\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ alors que $\ker(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^4$;*
  - *$\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ alors que $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^3$.*

Exemple 3.4.3.5 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice relativement aux bases canoniques est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

En identifiant $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

puisque $(2, 1, 3) = (1, 1, 2) + (1, 0, 1)$.

Par ailleurs, il est clair que $(1,1,2)$ et $(1,0,1)$ sont non colinéaires. On en déduit donc que l'image de f est le plan de $\mathbb{R}^3$ dont une base est $((1,0,1),(1,1,2))$. On écrit aussi souvent que c'est le plan dont une base est $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right)$.

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On note $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
(x,y,z)\in\ker(f) & \iff & f((x,y,z))=0\\
& \iff & AX=0\\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z &=& 0\\ y+z &=& 0\\ x+3y+2z &=& 0\end{array}\right.\\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0\\ z &=& -y\\ x+y &=& 0\end{array}\right.\\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -y\\ z &=& -y\end{array}\right.\\
& \iff & (x,y,z)=y(-1,1,-1)\\
& \iff & (x,y,z)\in\mathbb{R}(-1,1,-1)
\end{array}$$

Ce qui montre que $\ker(f)=<(-1,1,-1)>$. On écrit aussi souvent $\ker(f)=<\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}>$.

Exemple 3.4.3.6 Soit $B=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$. De même que dans l'exemple précédent,

$$\mathrm{Im}(B)=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$

Les deux matrices colonnes précédentes étant clairement linéairement indépendantes, on conclut que $\mathrm{Im}(B)$ est le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont une base est $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$.

Je vous laisse montrer que :

$$\ker(B)=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})\ /\ x+z=y+t=0\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)$$

Proposition 3.4.3.7 *Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. On note $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Pour $x \in E$ et $y \in F$, on note respectivement X et Y les matrices colonnes constituées des coordonnées de x (respectivement y) dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{C}$). Alors :*

$$x \in \ker(f) \iff X \in \ker(A) \quad et \quad y \in \mathrm{Im}(f) \iff Y \in \mathrm{Im}(A)$$

Preuve :

C'est clair d'après la proposition 3.4.2.1. ⊠

Exemple 3.4.3.8 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_2[X])$ dont la matrice M relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ (au départ et à l'arrivée) est :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• Soit[1] $U = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} U \in \ker(M) &\iff \begin{cases} 0 &= x - y + 3z \\ 0 &= x + 2z \\ 0 &= x + y + z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0 &= -y + z \\ x &= -2z \\ 0 &= y - z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y &= z \\ x &= -2z \end{cases} \\ &\iff U \in < (-2,1,1) > \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\ker(f) = < X^2 + X - 2 >$$

En effet, si $P = x + yX + zX^2$ avec $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors $f(P) = 0$ si et seulement si $M(x,y,z) = 0$ si et seulement si $(x,y,z) \in < (-2,1,1) >$. Il reste alors à traduire cette propriété sur les coefficients du polynôme P et c'est ainsi qu'on détermine le noyau de f.

• Pour l'image, on constate que : $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. On en déduit donc que : $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ et par conséquent,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(1 + X + X^2, -1 + X^2\right)$$

1. on ne choisit pas « X » car c'est l'indéterminée des polynômes et ici on travaille dans $\mathbb{R}_2[X]$.

3.4.4 Cas des formes linéaires : équations cartésiennes d'un hyperplan

Proposition 3.4.4.1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$ et f une forme linéaire sur E. Étant donnée une base $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ de E, la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ est une matrice ligne.*

On peut donc identifier $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K})$ avec $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.

Preuve :

Ceci découle de la définition de la matrice d'une application linéaire. ⊠

Exemple 3.4.4.2 Soit f de $\mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $P \longmapsto P(1)$. Alors, la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Théorème 3.4.4.3 *Soit $p \in \mathbb{N}^\star$ et soit H un sous-ensemble de $\mathbb{K}^p$. Alors H est un hyperplan de $\mathbb{K}^p$ si et seulement si il existe $(a_1, \cdots, a_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{0_{\mathbb{K}^p}\}$ tel que :*

$$\forall (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p \ , \ \left((x_1, \cdots, x_p) \in H \iff \sum_{k=1}^{p} a_k x_k = 0 \right)$$

Dans ce cas, on dit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k x_k = 0$ est une équation cartésienne de l'hyperplan H.

Par ailleurs, deux équations $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k x_k = 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} b_k x_k = 0$ définissent le même hyperplan si et seulement si les équations sont proportionnelles (et non nulles), c'est-à-dire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $(b_1, \cdots, b_p) = \lambda(a_1, \cdots, a_p)$.

Preuve :

On a déjà vu que H est un hyperplan si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Or, la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^p$ d'une forme linéaire non nulle est de la forme $[a_j]_{1\leqslant j\leqslant p}$ avec $(a_j) \in \mathbb{K}^p \setminus \{0\}$.
Par ailleurs, on a aussi vu que deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles. ⊠

Remarque : *toute forme linéaire sur $\mathbb{K}^p$ peut aussi s'écrire $X \mapsto {}^tLX$, avec $L \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Comment interpréter ce résultat en terme de « produit scalaire » ?*

3.5 Matrice d'un endomorphisme

3.5.1 Définition et isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 3.5.1.1 Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. On appelle matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$ (ou bien matrice de f dans la base $\mathcal{B}$) la matrice :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$$

Remarques :

- *autrement dit, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées de $f(e_1), \cdots, f(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}$;*
- *dans certains cas, on peut être amené à munir E de deux bases différentes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On peut alors aussi définir la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (en prenant $F = E$ et $\mathcal{C} = \mathcal{B}'$) ;*
- *vous pouvez reprendre les exemples 3.4.1.3 et 3.4.1.5. pour déterminer la matrice d'un endomorphisme dans une base.*

Exercice 3.5.1.2 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique, former la matrice de la rotation (vectorielle) d'angle θ.

Théorème 3.5.1.3 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & f & \longmapsto & Mat_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres, c'est-à-dire un isomorphisme d'espaces vectoriels et un morphisme d'anneaux.
En particulier, toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ représente un unique endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ muni de la base canonique.

Preuve :

On a déjà vu qu'il s'agit d'un isomorphisme d'espaces vectoriels (cas particulier du théorème 3.4.3.1). Il reste uniquement à vérifier que :

- $\varphi(\mathrm{Id}_E) = I_n$ (ce qui est clair) ;
- $\forall (f, g) \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)^2$, $\varphi(g \circ f) = \varphi(g) \times \varphi(f)$ (déjà vu : c'est un cas particulier de la proposition 3.4.2.2).

⊠

Remarques :

- *le fait que φ soit un isomorphisme permet de dire que « matrice » ou « endomorphisme » c'est la même chose. Rigoureusement, ce sont des objets différents mais fondamentalement ou manipule le même objet de deux façons différentes ;*
- *en fait, à la base on a fait un « transfert de structure », c'est-à-dire qu'on a défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les opérations de façon à ce que φ soit un morphisme d'algèbres. C'est pour cela d'ailleurs, qu'on n'a pas défini la multiplication de matrices terme à terme.*

Exemple 3.5.1.4 On va maintenant voir comment l'interprétation d'une matrice en terme d'application linéaire permet parfois de simplifier un problème. On va donner une démonstration « plus simple » du fait que $T_{n,s}(\mathbb{K})$ est stable par multiplication.

- Pour commencer, soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Notons $\mathcal{B}_c = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors :

$$A \in T_{n,s} \iff \forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ f(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \cdots, e_i)$$

  ou encore de façon équivalente, en notant $F_i =< (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant i} >$ pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$A \in T_{n,s}(\mathbb{K}) \iff \forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ f(F_i) \subset F_i$$

- Soient A et B triangulaires supérieures, f et g les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$(g \circ f)(F_i) = g(f(F_i)) \subset g(F_i) \subset F_i$$

  Ce qui montre que $B \times A \in T_{n,s}(\mathbb{K})$.

Proposition 3.5.1.5 *Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Alors :*

$$f \text{ est bijective} \iff A \in GL_n(\mathbb{K})$$

Dans ce cas, $A^{-1} = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1})$.

Preuve :

• Si f est bijective, alors d'après la proposition 3.4.2.2 (matrice de la composée de deux applications linéaires), on a :

$$I_n = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

c'est-à-dire :

$$I_n = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1})A$$

Par suite, A est inversible et $A^{-1} = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1})$.

• Réciproquement, si A est inversible, soit g l'unique application linéaire de F dans E telle que $Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = A^{-1}$. On a alors :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A^{-1}A = I_n$$

Par suite, $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ (puisque l'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans une base est un isomorphisme). On en déduit donc que f est injective. Puisque E et F ont même dimension finie, f est donc bijective et $g = f^{-1}$.

⊠

Voici un cas particulier de ce théorème (cas d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie) qui est très utile dans la pratique.

Corollaire 3.5.1.6 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}$ une base de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Alors :*

$$f \in GL_{\mathbb{K}}(E) \iff A \in GL_n(\mathbb{K})$$

Dans ce cas, on a $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}$.

Corollaire 3.5.1.7 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $C_1, \cdots, C_n$ les vecteurs colonnes de A, $L_1, \cdots L_n$ les matrices lignes. Alors sont les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) A est inversible ;
(ii) $(C_1, \cdots, C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$;
(iii) $({}^tL_1, \cdots, {}^tL_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Preuve :

• Montrons $(i) \iff (ii)$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. On identifie $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a alors :

$$\begin{aligned} A \in GL_n(\mathbb{K}) &\iff f \text{ est bijective} \\ &\iff f(\mathcal{B}_c) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n \\ &\iff (C_1, \cdots, C_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

• Pour $(i) \iff (iii)$, il suffit de remarquer que ${}^tL_i$ sont les vecteurs colonnes de ${}^tA$ et que A est inversible si et seulement si ${}^tA$ l'est.

⊠

Remarque : *pour ceux qui ne sont pas satisfaits à cause de la phrase « on identifie », refaire une démonstration très propre en introduisant l'isomorphisme naturel de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.*

Corollaire 3.5.1.8 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si* $\ker(A) = \{0\}$.

Preuve :

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} A \in GL_n(\mathbb{K}) &\iff f \text{ est bijective} \\ &\iff f \text{ est injective} \\ &\iff \ker(f) = \{0\} \\ &\iff \ker(A) = \{0\} \end{aligned}$$

La seconde équivalence provient du fait que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ avec $\mathbb{K}^n$ qui est de dimension finie. ⊠

Proposition 3.5.1.9 *Soit $A = [a_{i,j}] \in T_{n,s}(\mathbb{K})$ telle que $a_{i,i} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Alors A est inversible.*

Preuve :

• Pour montrer que A est inversible, on montre que $\ker(A) = \{0\}$. Soit $X \in \ker(A)$. On note $X = {}^t[x_1, \cdots, x_n]$. Alors $AX = 0$, soit encore :

$$(*) \ \ \forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0$$

On montre par récurrence forte finie que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_{n-k} = 0$.

Initialisation :

Pour $k = 0$, on choisit $i = n$ dans $(*)$: $\sum_{j=1}^{n} a_{n,j} x_j = 0$. Or, A est triangulaire supérieure, donc $a_{n,j} = 0$ si $j < n$. Par suite,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{n,j} x_j = 0 \iff a_{n,n} x_n = 0 \iff x_n = 0$$

puisque par hypothèse, $a_{n,n} \neq 0$. Ce qui montre que $x_{n-0} = 0$ et la propriété est vraie au rang $k = 0$.

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang $k-1$ pour un certain entier $1 \leqslant k < n$ et on montre qu'elle est vraie au rang k. Par hypothèse de récurrence, $x_{n-j} = 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$. On choisit $i = n - k$ dans $(*)$:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_{n-k,j}\, x_j = \sum_{j=n-k}^{n} a_{n-k,j}\, x_j = \sum_{l=0}^{k} a_{n-k,n-l}\, x_{n-l}$$

D'où, par hypothèse de récurrence, $a_{n-k,n-k}\, x_{n-k} = 0$ et donc $x_{n-k} = 0$ (puisque $a_{n-k,n-k} \neq 0$). Ce qui montre que la propriété est vraie au rang k et achève la récurrence.

On a donc montré que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_{n-k} = 0$, c'est-à-dire $X = 0$. D'où $\ker(A) = \{0\}$ et A est inversible.

⊠

Proposition 3.5.1.10 (Première méthode de calcul de A^{-1}) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $A \in GL_n(\mathbb{K})$ *;*

(ii) $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\exists! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $Y = AX$.

Dans ce cas, pour tout $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2$, $Y = AX \iff X = A^{-1}Y$.
En particulier, la résolution « brutale » du système $Y = AX$ permet de calculer A^{-1}.

Preuve :

C'est évident car si f est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, on a déjà vu que A est inversible si et seulement si f est bijective, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall y \in \mathbb{K}^n \text{ , } \exists! x \in \mathbb{K}^n \text{ , } y = f(x)$$

En traduisant cette égalité dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (au lieu de $\mathbb{K}^n$), on a donc A est inversible si et seulement si :

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ , } \exists! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ , } Y = AX$$

⊠

Exemple 3.5.1.11 Montrons que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible et déterminons son inverse.
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &\iff \begin{cases} a &= x + 2y \\ b &= -x + y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a &= x + 2y \\ a + b &= 3y \end{cases} \qquad L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\
&\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b \\ y &= \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b \end{cases}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $A \in GL_2(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemple 3.5.1.12 Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. On sait déjà que B est inversible car c'est une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls. Pour calculer son inverse, on applique la même méthode, c'est-à-dire on résout le système « $Y = BX$ ». On identifie $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soient $Y = (a, b, c)$ et $X = (x, y, z)$, deux éléments de $\mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} Y = AX &\iff \begin{cases} a &= x + 2y + z \\ b &= 2y + z \\ c &= z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= a - b \\ y &= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ z &= c \end{cases} \\ &\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui montre que $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Remarque : *on savait déjà que B^{-1} est de la forme $\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \frac{1}{2} & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc la forme obtenue est cohérente.*

► Méthode :

Pour montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, on peut :

1. si A est triangulaire, appliquer le critère sur les coefficients diagonaux ;
2. montrer que $\ker(A) = \{0\}$;
3. montrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
4. montrer que le système $Y = AX$ (d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) admet une unique solution.

Pour calculer l'inverse de A lorsque A est inversible, on résout le système $Y = AX$.

Remarque : *on verra d'autres méthodes plus loin dans ce chapitre (et dans le chapitre sur les déterminants) pour montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse. Dans la pratique, la méthode 4 (résolution du système) est la plus efficace pour montrer que A est inversible et calculer son inverse. En revanche, ce n'est pas la meilleure méthode si on souhaite uniquement montrer que A est inversible : dans ce cas, il est souvent préférable de calculer le rang de la matrice (voir la section suivante) ou son déterminant (voir chapitre 8).*

Remarque : *si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ou $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, en utilisant les outils vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on constate que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ (le déterminant étant celui des vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^2$ ou $\mathbb{K}^3$).*

3.5.2 Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base

Définition 3.5.2.1 Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $\mathcal{F} = (x_1, \cdots x_p)$ une famille finie (non vide) de vecteurs de E. On appelle matrice de la famille $\mathcal{F}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ (ou plus simplement matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$), et on note $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, la matrice de type (n, p) dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs x_i dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 3.5.2.2 Dans le plan $\mathbb{R}^2$ usuel, la matrice de la famille $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j}, 2\vec{i} + 3\vec{j})$ est :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemple 3.5.2.3 Pour tout réel x, $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ et $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$. La matrice de la famille $\mathcal{F} = (x \longmapsto e^{ix}, x \longmapsto e^{-ix})$ dans la base $\mathcal{B} = (\cos, \sin)$ est donc :

$$Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

Exemple 3.5.2.4 La matrice de la famille $\mathcal{F} = (X^2 + X + 1, -X^2 + 1, 2X^2 + 3X - 1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$Mat_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{F}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ici, attention, la base canonique est $(1, X, X^2)$ donc les coordonnées sont inversées par rapport à l'écriture des polynômes !

Exemple 3.5.2.5 Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $\mathcal{B}$ est une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F, alors :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = Mat_{\mathcal{C}}(f(\mathcal{B}))$$

c'est-à-dire la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la matrice dans la base $\mathcal{C}$ de la famille $f(\mathcal{B})$.

On peut aussi reformuler ce qu'on a déjà vu pour les endomorphismes.

Corollaire 3.5.2.6 *Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (E et F étant de dimensions finies non nulles), $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F et $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Alors, pour tout $x \in E$,*

$$Mat_{\mathcal{C}}(f(x)) = A \times Mat_{\mathcal{B}}(x)$$

Proposition 3.5.2.7 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E, de cardinal n. Alors :*

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \iff Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in GL_n(\mathbb{K})$$

Preuve :

On note $A = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ et on considère $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme associé à A (c'est-à-dire tel que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est A). Par définition, on a donc $f(\mathcal{B}) = \mathcal{F}$. Alors :

$$\begin{aligned} A \in GL_n(\mathbb{K}) &\iff f \text{ est bijective} \\ &\iff f(\mathcal{B}) \text{ est une base de } E \\ &\iff \mathcal{F} \text{ est une base de } E \end{aligned}$$

⊠

Remarque : *ceci permet de retrouver très rapidement qu'une famille de polynômes échelonnés en degrés est libre. En effet, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n soit un polynôme de degré n et fixons $n \in \mathbb{N}$. Alors, la matrice de la famille $\mathcal{F}_n = (P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille de $\mathbb{K}_n[X]$ et sa matrice M dans la base canonique est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls (car pour $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est de degré k exactement). On en déduit donc que M est inversible et donc d'après la proposition précédente, $\mathcal{F}_n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et a fortiori, cette famille est libre.*

Exercice 3.5.2.8 Comment adapter cette démonstration si on se donne une famille finie quelconque de polynômes échelonnés en degrés ? Autrement dit, on se donne $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de degrés distincts (et entiers) mais on ne suppose plus $\deg(P_i) = i$.

3.5.3 Matrice de passage et changements de bases

Définition 3.5.3.1 Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ ou encore $Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Remarques :

- ⚠ **Attention :** *l'ordre des bases est important ! Les rôles de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ne sont pas du tout symétriques !*
- ⚠ **Attention :** *on ne parle pas de matrice de passage tant qu'on n'a pas démontré que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases !*

Exemple 3.5.3.2 La famille $\mathcal{B} = (1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (famille libre (car échelonnée en degrés) et maximale (car $|\mathcal{B}| = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$)) et :

$$Pass(\mathcal{B}_c, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposition 3.5.3.3 *Soit $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors :*

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$$

Preuve :

C'est clair mais attention à l'ordre des bases ! ⊠

Corollaire 3.5.3.4 *Toute matrice de passage est inversible et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.*

Preuve :

En effet, Id_E est bijective donc $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ est inversible et :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E^{-1}) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

⊠

Exercice 3.5.3.5 Montrer que toute matrice inversible est une matrice de passage.

Proposition 3.5.3.6 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et soit $x \in E$. On suppose que :*

(i) $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E et $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$;

(ii) $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ (la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$) ;

(iii) $X' = Mat_{\mathcal{B}'}(x)$ (la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$).

Alors X, X' sont liés par la relation (appelée formule de changement de coordonnées) :

$$X = PX'$$

Preuve :

En effet, on a : $X = Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) Mat_{\mathcal{B}'}(x) = PX'$. ⊠

Exercice 3.5.3.7 Prouver la proposition directement par le calcul brutal.

⚠ **Attention :** remarquez bien que la formule de changement de coordonnées exprime les « anciennes coordonnées » en fonction des « nouvelles coordonnées ». Dans la pratique, c'est « l'autre sens » qui nous intéresse, c'est-à-dire la relation $X' = P^{-1}X$.

Exemple 3.5.3.8 Soient $\mathcal{B}_c = (\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique du plan et $\mathcal{B}$ la base obtenue par rotation d'angle θ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathcal{B} = \left(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}, -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}\right)$$

On en déduit donc que la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est :

$$P = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

et en notant (x, y) les coordonnées d'un vecteur dans la base canonique et (x', y') ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$X = PX' \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x &= \cos(\theta)x' - \sin(\theta)y' \\ y &= \sin(\theta)x' + \cos(\theta)y' \end{cases}$$

Ceci nous amène à la proposition suivante, appelée « formule de changement de bases pour une application linéaire », qui donne la relation entre les matrices d'une même application linéaire exprimée dans des bases différentes.

Proposition 3.5.3.9 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. On suppose que :*

(i) $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E et $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$;

(ii) $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux bases de F et $Q = Pass(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$;

(iii) $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $A' = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$.

Alors :

$$A' = Q^{-1}AP$$

Remarques :

- *noter ici que si $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$, alors $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ puisque ce sont des matrices de passages (donc inversibles) mais P et Q ne sont pas nécessairement de même taille ;*
- *cette propriété est très importante et sera à l'origine de la notion de matrices équivalentes (et le corollaire suivant sera à l'origine de la notion de matrices semblables).*

Preuve :

• *Première méthode : on raisonne sur les bases uniquement*

On remarque que $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$. On a alors :

$$Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$$

Par suite, $A' = P_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} \times A \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, soit encore $A' = Q^{-1}AP$.

• *Deuxième méthode : on raisonne sur les vecteurs*

Soient $x \in E$, $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = Mat_{\mathcal{B}'}(x)$. Alors :

- $AX = Mat_{\mathcal{C}}(f(x))$;
- puisque $X = PX'$, $APX' = Mat_{\mathcal{C}}(f(x))$;
- d'après les formules de changement de coordonnées « $Y' = Q^{-1}Y$ », donc $Q^{-1}(APX') = Mat_{\mathcal{C}'}(f(x))$.

Ainsi, pour tout vecteur $x \in E$:

$$X' = Mat_{\mathcal{B}'}(x) \Longrightarrow Q^{-1}APX' = Mat_{\mathcal{C}'}(f(x))$$

Ce qui montre que $Q^{-1}AP$ est alors la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$. ⊠

Remarque : *ceci donne donc une autre méthode pour déterminer la matrice d'une application linéaire. Si on connaît déjà la matrice de f relativement à deux bases données, on peut simplement appliquer les formules de changement de bases. En revanche, cette méthode n'est pas toujours pratique puisque pour l'appliquer, on doit déterminer les deux matrices de passage (ce qui n'est pas toujours rapide et nécessite souvent de calculer l'inverse de l'une des matrices) puis faire deux produits matriciels.*

Corollaire 3.5.3.10 (Formule de changement de base pour un endomorphisme) *Soient E un espace vectoriel de dimension finie non nulle, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors :*

$$A' = P^{-1}AP$$

Exercice 3.5.3.11 Soit p un projecteur non nul de $\mathbb{K}^n$ et $r = \mathrm{rg}(f)$. On note A la matrice de p dans la base canonique. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r} \end{array}\right]$.

Exercice 3.5.3.12 Reprendre l'exercice précédent pour une symétrie en adaptant la conclusion et les notations.

3.6 Rang d'une matrice et opérations élémentaires

3.6.1 Définition du rang d'une matrice et première caractérisation

Définition 3.6.1.1 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $C_1, \cdots C_p \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ les colonnes de A. On définit alors le rang de A, noté $\text{rg}(A)$, par :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, C_2, \cdots, C_p)$$

Exemple 3.6.1.2 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Alors $\text{rg}(A) = 2$. En effet, il est clair que les vecteurs C_1, C_2 forment une famille libre et $C_3 = C_2 - C_1$. Par conséquent,

$$\text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}(C_1, C_2) \quad \text{et} \quad \text{rg}(A) = 2$$

Dans la pratique, on rédigera souvent comme suit :

$$\begin{aligned} \text{rg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= \text{rg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_3 \longleftarrow C_3 - C_2 + C_1 \\ &= \text{rg}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Exemple 3.6.1.3 Si $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, alors $\text{rg}(B) = 2$ car en notant $B = [C_1\, C_2\, C_3\, C_4]$,

- $C_3 = 2C_1 + C_2$,
- $C_4 = 3C_1 + 2C_2$,
- et (C_1, C_2) est libre.

Exemple 3.6.1.4 Soit $J = [1] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1). Alors $\text{rg}(J) = 1$ car toutes les colonnes sont égales à la première colonne et cette première colonne est non nulle.

Voici un cas particulier où l'on peut déterminer directement le rang.

Proposition 3.6.1.5 *Si $A = diag(d_1, \cdots, d_n)$, alors $rg(A) = |\{k \in [\![1, n]\!] \ / \ d_k \neq 0\}|$.*

Preuve :

On note $(E_1, \cdots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors par hypothèse, en notant C_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, les colonnes de A, et $I = \{k \in [\![1, n]\!] \ / \ d_k \neq 0\}$, on a :

$$\text{Vect}(C_1, \cdots, C_n) = \text{Vect}(d_1 E_1, \cdots, d_n E_n) = \text{Vect}\left((E_i)_{i \in I}\right)$$

Or, $(E_i)_{i \in I}$ est libre donc $\dim\left(\text{Vect}\left((E_i)_{i \in I}\right)\right) = |I|$. ⊠

⚠ **Attention :** ce résultat est très faux pour une matrice triangulaire ! Les matrices suivantes sont triangulaires à coefficients diagonaux nuls mais pourtant :

$$\text{rg}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \ ; \ \text{rg}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1$$

Proposition 3.6.1.6 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finies non nulles, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de f et $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Alors $rg(A) = rg(f)$.*

Preuve :

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$. On a vu que l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & F \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \varepsilon_k \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sur F. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \text{rg}(A) & = & \text{rg}(C_1, \cdots, C_p) \\ & = & \text{rg}(\varphi(C_1), \cdots, \varphi(C_p)) \\ & = & \text{rg}(f(e_1), \cdots, f(e_p))) \\ & = & \text{rg}(f) \end{array}$$

En effet, $\tilde{\varphi}$ (la restriction de φ à $< C_1, \cdots, C_p >$ au départ et à son image $< \varphi(C_1), \cdots, \varphi(C_p) >$ à l'arrivée) est un isomorphisme donc conserve la dimension. ⊠

Remarque : *ceci donne une nouvelle méthode pour déterminer le rang d'une application linéaire. On peut déterminer le rang de la matrice de f relativement à deux bases (quelconques) de E et F, respectivement.*

Corollaire 3.6.1.7 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $rg(A) \leqslant n$ et $rg(A) \leqslant p$, c'est-à-dire :*

$$rg(A) \leqslant min(n, p)$$

Preuve :

En effet, en notant $(C_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ les matrices colonnes de A, $(C_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une famille de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc $\text{rg}(A) \leqslant n$ (car $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = n$). Par ailleurs, $\text{rg}(A) \leqslant p$ (le nombre de vecteurs de la famille). ⊠

Exercice 3.6.1.8 Faire une preuve directe de cette propriété à l'aide de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Proposition 3.6.1.9 *En interprétant matriciellement les résultats prouvés sur les applications linéaires, on a :*

(i) Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $rg(A) = n \iff A \in GL_n(\mathbb{K})$.

(ii) Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$\forall P \in GL_p(\mathbb{K})\ ,\ rg(AP) = rg(A) \qquad et \qquad \forall Q \in GL_n(\mathbb{K})\ ,\ rg(QA) = rg(A)$$

Preuve :

• Pour (i), c'est une conséquence du corollaire 3.5.1.7, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} A \in GL_n(\mathbb{K}) &\iff (C_1, \cdots, C_n) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ &\iff \text{rg}(C_1, \cdots, C_n) = n \\ &\iff \text{rg}(A) = n \end{aligned}$$

• La propriété (ii) est la traduction matricielle de la proposition 2.4.2.6 qui dit que les isomorphismes conservent le rang. Notons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A.

∗ Si $P \in GL_p(\mathbb{K})$, l'application linéaire φ canoniquement associée à P est un automorphisme de $\mathbb{K}^p$. Par suite :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = \text{rg}(f \circ \varphi) = \text{rg}(AP)$$

∗ De même si $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et ψ est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à Q, alors ψ est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$ et :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = \text{rg}(\psi \circ f) = \text{rg}(QA)$$

⊠

3.6.2 Opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes)

Définition 3.6.2.1 On appelle « opérations élémentaires » sur les colonnes d'une matrice, les trois types de transformations suivantes :

- l'échange de deux colonnes C_i et C_k (avec $i \neq k$), que l'on note $C_i \longleftrightarrow C_k$;
- le remplacement d'une colonne C_i de A par αC_i avec $\alpha \in \mathbb{K}^\star$, que l'on note $C_i \longleftarrow \alpha C_i$;
- le remplacement d'une colonne C_i de A par $C_i + \alpha C_k$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in [\![1, p]\!] \setminus \{i\}$. Cette opération est notée $C_i \longleftarrow C_i + \alpha C_k$.

Remarques :

- *attention dans le second type de transformation, $\alpha \neq 0$;*
- *on définit de la même façon les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, que l'on note respectivement :*
  - $L_i \longleftrightarrow L_k$ *(échange des lignes i et k) ;*
  - $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ *avec $\alpha \in \mathbb{K}^\star$ (remplacement de la i-ième ligne par αL_i) ;*
  - $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_k$.

Théorème 3.6.2.2 *Les opérations élémentaires sur les colonnes reviennent à multiplier à droite par une matrice inversible et les opérations élémentaires sur les lignes reviennent à multiplier à gauche par une matrice inversible. Plus précisément, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:*

(i) l'échange des colonnes C_i et C_k (pour $k \neq i$) revient à multiplier à droite par la matrice $P_{i,k} = I_p + (E_{i,k} + E_{k,i} - E_{i,i} - E_{k,k}) \in GL_p(\mathbb{K})$;

(ii) l'échange des lignes L_i et L_k (pour $k \neq i$) revient à multiplier à gauche par la matrice $P_{i,k} = I_n + (E_{i,k} + E_{k,i} - E_{i,i} - E_{k,k}) \in GL_n(\mathbb{K})$;

(iii) le remplacement d'une colonne C_i par αC_i avec $\alpha \in \mathbb{K}^\star$ revient à multiplier à droite par la matrice $D_i(\alpha) = diag(1, \cdots, 1, \alpha, 1, \cdots 1) = I_p + (\alpha - 1)E_{i,i}$;

(iv) le remplacement d'une ligne L_i par αL_i avec $\alpha \in \mathbb{K}^\star$ revient à multiplier à gauche par la matrice $D_i(\alpha) = diag(1, \cdots, 1, \alpha, 1, \cdots 1) = I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$;

(v) remplacer la colonne C_i par $C_i + \alpha C_k$ (avec $k \neq i$) revient à multiplier à droite par la matrice $T_{k,i}(\alpha) = I_p + \alpha E_{k,i}$;

(vi) remplacer la ligne L_i par $L_i + \alpha L_k$ (avec $k \neq i$) revient à multiplier à gauche par la matrice $T_{i,k}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,k}$.

Exercice 3.6.2.3 Écrire les matrices correspondant à chaque opération élémentaire.

Remarque très importante : *on constate que les matrices par lesquelles on multiplie sont obtenues en partant de I_p (respectivement I_n) et en effectuant la même opération sur la matrice I_p (respectivement I_n).*

Preuve :

On va commencer par démontrer les propriétés sur les opérations élémentaires sur les colonnes en interprétant en termes d'applications linéaires. Pour cela, on note :

- $C_1, \cdots, C_p$ les colonnes de A ;
- $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A ;
- g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à $P_{i,k}$;
- h l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à $D_i(\alpha)$;
- l l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à $T_{k,i}(\alpha)$.

• Montrons (i).
$AP_{i,k}$ est la matrice de $f \circ g$ relativement aux bases canoniques. Déterminons à présent les vecteurs colonnes de $AP_{i,k}$, c'est-à-dire les coordonnées (dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$) des images par $f \circ g$ des vecteurs de la base canonique $(e_1, \cdots, e_p)$ de $\mathbb{K}^p$. Soit $j \in [\![1, p]\!]$. On a alors trois cas :

- Premier cas : $j \notin \{i, k\}$
  Dans ce cas, $g(e_j) = e_j$ et $(f \circ g)(e_j) = f(e_j)$ dont le vecteur colonne associé est C_j : la j-ième colonne de $AP_{i,k}$ est donc C_j.

- Deuxième cas : $j = i$
  Alors $g(e_i) = e_k$ et donc $(f \circ g)(e_i) = f(e_k)$. Par suite, la i-ième colonne de $AP_{i,k}$ est C_k.

- Troisième cas : $j = k$
  De même, $(f \circ g)(e_k) = f(e_i)$ donc la k-ième colonne de $AP_{i,k}$ est C_i.

Ce qui montre que $AP_{i,k}$ est la matrice dont les matrices colonnes sont celles de A où l'on a échangé les colonnes C_i et C_k.
Par ailleurs, les calculs précédents montrent aussi que $g^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p}$ (ces deux applications linéaires sont égales sur la base canonique) et donc que g est un automorphisme, c'est-à-dire $P_{i,k} \in GL_p(\mathbb{K})$.

• La preuve de (iii) est identique avec seulement deux cas à distinguer car $h(e_j) = e_j$ si $j \neq i$ et $h(e_i) = \alpha e_i$ puis on vérifie que $D_i(\alpha)^{-1} = D_i(\alpha^{-1})$.

• Montrons (v).
On reprend la même méthode : $AT_{k,i}(\alpha)$ est la matrice de $f \circ l$ relativement aux bases canoniques et on explicite donc l'image de la base canonique.

Par définition, $T_{k,i}(\alpha) = I_p + \alpha E_{k,i}$. Par suite,

$$\forall j \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\} \ , \ l(e_j) = e_j \quad \text{et} \quad l(e_i) = e_i + \alpha e_k$$

Il s'ensuit que pour $j \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}$, $(f \circ l)(e_j) = f(e_j)$ et par conséquent, la j-ième colonne de $AT_{i,k}(\alpha)$ est C_j.
De plus, $(f \circ l)(e_i) = f(e_i + \alpha e_k) = f(e_i) + \alpha f(e_k)$ et donc la i-ème colonne de $AT_{i,k}(\alpha)$ est $C_i + \alpha C_k$.
Enfin, on remarque par ailleurs que $T_{k,ki}(\alpha)^{-1} = T_{k,i}(-\alpha)$.

Pour les opérations élémentaires sur les lignes, il est plus difficile de raisonner sur les applications linéaires puisque dans ce cas, les matrices sont lues par « colonne » et non par « ligne ». On va présenter ici deux preuves : l'une par le calcul brutal et l'autre par déduction des opérations sur les colonnes.

• Montrons (ii) par le calcul.
On note $P_{i,k} = [\alpha_{r,s}]_{\substack{1 \leqslant r \leqslant n \\ 1 \leqslant s \leqslant n}}$. Alors par définition,

$$\forall (r,s) \in [\![1,n]\!]^2 \ , \ \alpha_{r,s} = \delta_{r,s} + \delta_{r,i}\delta_{s,k} + \delta_{r,k}\delta_{s,i} - \delta_{r,i}\delta_{s,i} - \delta_{r,k}\delta_{s,k}$$

On a alors :

$$P_{i,k}A = \left[\sum_{s=1}^{n} \alpha_{r,s} a_{s,t}\right]_{\substack{1 \leqslant r \leqslant n \\ 1 \leqslant t \leqslant p}}$$

On détermine alors les lignes de cette matrice. Soit $r \in [\![1,n]\!]$.

∗ Premier cas : $r \neq i$ et $r \neq k$
Dans ce cas, $\forall s \in [\![1,n]\!] \ , \ \alpha_{r,s} = \delta_{s,r}$ et donc pour tout $t \in [\![1,p]\!]$,

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_{r,s} a_{s,t} = \sum_{s=1}^{n} \delta_{r,s} a_{s,t} = a_{r,t}$$

Ce qui montre que la r-ième ligne de $P_{i,k}A$ est $[a_{r,t}]_{1 \leqslant t \leqslant p} = L_r$.

∗ Deuxième cas : $r = i$.
Dans ce cas, on vérifie que $\forall s \in [\![1,n]\!] \ , \ \alpha_{r,s} = \delta_{s,k}$ et donc :

$$\forall t \in [\![1,p]\!] \ , \ \sum_{s=1}^{n} \alpha_{r,s} a_{s,t} = \sum_{s=1}^{n} \delta_{s,k} a_{s,t} = a_{k,t}$$

On conclut donc que la i-ème ligne de $P_{i,k}A$ est L_k.

∗ Troisième cas : $r = k$.
De la même façon, $\forall s \in [\![1,n]\!] \ , \ \alpha_{r,s} = \delta_{s,i}$ et donc :

$$\forall t \in [\![1,p]\!] \ , \ \sum_{s=1}^{n} \alpha_{r,s} a_{s,t} = \sum_{s=1}^{n} \delta_{s,i} a_{s,t} = a_{i,t}$$

On conclut donc que la k-ème ligne de $P_{i,k}A$ est L_i.

• Montrons (vi).
On considère la matrice $B = {}^tA$. Alors les colonnes de la matrice B sont $C'_i = {}^tL_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ (où $L_1, \cdots L_n$ désignent les lignes de la matrice A). D'après (v), en notant $Q_{k,i}(\alpha) = I_n + \alpha E_{k,i}$, $BQ_{k,i}(\alpha)$ est la matrice ayant les mêmes colonnes que B sauf la i-ème qui a été remplacée par $C_i + \alpha C_k$. Autrement dit, ${}^tAQ_{k,i}(\alpha)$ est la matrice dont les colonnes sont :

* ${}^tL_j$ si $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$;
* ${}^tL_i + \alpha {}^tL_k$ pour la i-ème colonne.

Alors les lignes de ${}^t(BQ_{k,i}(\alpha))$, c'est-à-dire les lignes de ${}^tQ_{k,i}(\alpha)A$ sont :

* L_j si $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$;
* $L_i + \alpha L_k$ pour la i-ème ligne.

On conclut en remarquant que ${}^tQ_{k,i}(\alpha) = {}^tI_n + \alpha {}^tE_{k,i} = I_n + \alpha E_{i,k}$.

• La propriété (iv) est laissée en exercice et se démontre de l'une des deux façons présentées avant.

⊠

Remarque : *un moyen « simple » de retenir sur qui on agit (lignes ou colonnes) quand on multiplie par une matrice inversible est le suivant :*

« LINES = LEFT »

Cela marche pour un francophone mais pas pour un anglophone car en anglais, on parle de « rows » pour les lignes, et « columns » pour les colonnes. La terminologie « lines » n'existe pas...

Corollaire 3.6.2.4 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

- *Faire une série d'opérations élémentaires successives sur les colonnes de la matrice A revient à multiplier A à droite par une matrice inversible $P \in GL_p(\mathbb{K})$. Cette matrice P est d'ailleurs obtenue en effectuant la même série d'opérations sur la matrice I_p.*
- *Faire une succession d'opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A revient à multiplier A à gauche par une matrice inversible $Q \in GL_n(\mathbb{K})$. Cette matrice Q est obtenue en effectuant la même série d'opérations sur les lignes de la matrice I_n.*

Preuve :

• La première partie des assertions est claire car un produit de matrices inversibles est inversible et chaque opération élémentaire est équivalente à multiplier par une matrice inversible (d'après la proposition précédente).

• En écrivant $A = AI_p$ (ou $A = I_nA$), on constate que $AP = A(I_pP)$ et donc la matrice I_pP est bien la matrice I_p à laquelle on fait les mêmes opérations élémentaires sur les colonnes. De même pour les lignes.

⊠

Corollaire 3.6.2.5 *Les opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice ne modifient pas le rang de la matrice.*

Preuve :

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et M est la matrice obtenue après une série d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A, le corollaire précédent montre qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M = QAP$. Par suite,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(QAP) = \mathrm{rg}(M)$$

puisqu'on a déjà vu que la multiplication par une matrice inversible conserve le rang (proposition 3.6.1.9).

⊠

Exemple 3.6.2.6 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$C_2 \longleftarrow C_2 - 2C_1$ $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$C_2 \longleftarrow -C_2$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$C_1 \longleftarrow C_1 - C_2$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$C_1 \longleftarrow C_1 - C_3$ $C_2 \longleftarrow C_2 + C_3$

Ainsi, en posant :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{on a} \quad PA = I_3 \text{ donc } A \in GL_3(\mathbb{R}) \text{ et } A^{-1} = P$$

Remarques :

- *en général, on privilégie les opérations élémentaires sur les colonnes parce qu'elles ne modifient pas l'image de la matrice (exercice : le justifier) ;*
- *pour un système, c'est le contraire : on ne fait que des opérations élémentaires sur les lignes (on reverra cela en détails dans le cours sur les déterminants et systèmes linéaires) ;*
- *enfin, on verra dans le paragraphe suivant que dans certains cas, on effectue des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Ceci est exclusivement réservé au calcul de rang et « transformation » en la matrice « J_r ». Pour le calcul d'inverse, on ne fait que des opérations sur les colonnes ou bien que des opérations sur les lignes, mais pas les deux (voir paragraphe suivant).*

Exemple 3.6.2.7 On considère le système $(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x+3y+z+5s+t & = & 1 \\ x+2y+z+4s+3t & = & 2 \\ 2y+z+2s+2t & = & 0 \end{array} \right.$.

• Si on pose :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Alors le système (S) s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ c'est-à-dire que :

$$(x, y, z, s, t) \text{ est solution de } (S) \iff AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Une méthode possible de résolution (et de rédaction) est « l'élimination de variables » par opérations élémentaires sur les lignes, à savoir :

$$\begin{array}{rcl} AX = B & \iff & \left\{ \begin{array}{rcll} 1 & = & x+3y+z+5s+t & L_1 \\ 2 & = & x+2y+z+4s+3t & L_2 \\ 0 & = & 2y+z+2s+2t & L_3 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcll} 1 & = & x+3y+z+5s+t & L_1 \\ 1 & = & -y-s+2t & L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ 0 & = & 2y+z+2s+2t & L_3 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcll} 1 & = & x+3y+z+5s+t & L_1 \\ 1 & = & -y-s+2t & L_2 \\ 2 & = & z+6t & L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2-2s-t \\ y & = & -1-s+2t \\ z & = & 2-6t \end{array} \right. \end{array}$$

3.6.3 Méthode du pivot de Gauss pour déterminer le rang d'une matrice (ou l'inverse d'une matrice)

Définition 3.6.3.1 Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ fixés et $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leqslant n$ et $r \leqslant p$. On définit la matrice $J_{n,p}(r) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$J_{n,p}(r) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow \ r \\ \updownarrow \ n-r \end{array}$$
$$\begin{array}{cc} \longleftrightarrow & \longleftrightarrow \\ r & p-r \end{array}$$

Remarques :

- *on convient que quand $r = 0$, $J_{n,p}(r) = 0$ (autrement dit le « bloc vide » n'est pas écrit) et de même, lorsque $r = p < n$ ou lorsque $r = n < p$:*
$$J_{n,p}(p) = \begin{bmatrix} I_p \\ 0_{n-p,p} \end{bmatrix} \text{ respectivement } J_{n,p}(n) = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n,p-n} \end{bmatrix}$$
où pour $(r,s) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$, $0_{r,s}$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$;
- *dans le cas particulier où $n = r$ et $r = n = p$, $J_{n,n}(n) = I_n$;*
- *pour ceux qui ne sont pas satisfaits, on peut aussi définir explicitement cette matrice par ses coefficients $\alpha_{i,j}$ en posant :*
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \ , \ \alpha_{i,j} = \delta_{i,j}\chi_{[\![1,r]\!]}(i)$$
où $\chi_{[\![1,r]\!]}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $[\![1,r]\!]$;
- *dans la pratique, lorsque le contexte est clair (c'est-à-dire lorsque les tailles des matrices sont connues), on écrit tout simplement J_r ou $J(r)$. La notation la plus répandue est J_r.*

Lemme 3.6.3.2 *Pour tout $r \leqslant \min(n,p)$, la matrice J_r est une matrice de rang r.*

Preuve :

C'est évident et la démonstration formelle est laissée en exercice. ⊠

Théorème 3.6.3.3 (Pivot de Gauss) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, on peut transformer A en une matrice J_r. L'entier r est alors unique et on a $r = rg(A)$.*

Preuve :

• L'unicité de r est claire car les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes ne modifient pas le rang. Par suite, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(J_r) = r$.

• On démontre le théorème par récurrence sur $n \geqslant 1$.

Initialisation :
Pour $n = 1$, soient $p \in \mathbb{N}^\star$ et $A = [a_{1,j}]_{1 \leqslant j \leqslant p} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.

- ∗ Si $A = [0]$, alors $A = J_0$ directement.
- ∗ Sinon, il existe $j_0 \in [\![1, p]\!]$ tel que $a_{1,j_0} \neq 0$. On effectue alors les opérations élémentaires suivantes (et dans cet ordre) :
  - ▷ $C_{j_0} \longleftrightarrow C_1$;
  - ▷ $C_1 \longleftarrow \dfrac{1}{a_{1,j_0}} C_1$;
  - ▷ pour $j \in [\![2, p]\!]$, $C_j \longleftarrow C_j - a_{1,j} C_1$;

  Alors, par cette succession d'opérations élémentaires sur les colonnes de A, on a transformé A en $J_{1,p}(1)$.

Hérédité :
On suppose la propriété vraie au rang $n - 1 \geqslant 1$ et on montre qu'elle est vraie au rang n. On suppose donc que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^\star$ et toute matrice $B \in \mathcal{M}_{n-1,p}(\mathbb{K})$, on peut transformer B en une matrice J_r par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de B.

Soient $p \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- ∗ Si A est nulle, alors $A = J_0$ et la propriété est vraie au rang n.
- ∗ Si $p = 1$, on procède de la même façon que dans l'initialisation.
- ∗ Sinon, $p \geqslant 2$ et $A \neq 0$. Il existe $a_{i,j} \neq 0$.
  - ▷ On échange alors la première colonne avec la j-ème, puis on échange la première ligne avec la i-ème. On est alors ramené à une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \dots & a'_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{n,1} & \dots & a'_{n,p} \end{bmatrix}$$

  avec α un nombre non nul.
  - ▷ On peut alors multiplier la première colonne par α^{-1}, ce qui transforme la matrice en :

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{1,2} & a'_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a''_{n,1} & \dots & a'_{n,p} \end{bmatrix}$$

▷ Pour $j \in [\![2,p]\!]$, $C_j \leftarrow C_j - a'_{1,j}C_1$, ce qui conduit à la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{2,1} & \vdots & \vdots & a'_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{n,1} & \dots & \dots & a'_{n,p} \end{bmatrix}$$

▷ Pour $2 \leqslant i \leqslant n$, on effectue $L_i \leftarrow L_i - a'_{i,1}L_1$, ce qui conduit à une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n,2} & \dots & a'_{n,p} \end{bmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence à la matrice $A' = \left[a'_{i,j}\right]_{\substack{2\leqslant i\leqslant n \\ 2\leqslant j\leqslant p}}$: par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A', on peut transformer A' en une matrice J_r. En considérant la même succession d'opérations sur les lignes et les colonnes de la matrice précédente, on peut donc la transformer en :

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = J_{r+1}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang n, ce qui achève la récurrence. ⊠

Remarque : *les plus rigoureux d'entre vous ne seront pas satisfaits par cette preuve qui utilise des « ... ». Dans ce cas, on peut énoncer puis démontrer un résultat un peu plus formel. Pour toute matrice A, il existe $U \in GL_n(\mathbb{K})$ qui est un produit fini de matrices d'opérations élémentaires sur les lignes et $V \in GL_p(\mathbb{K})$ qui est un produit fini d'opérations élémentaires sur les colonnes telles que $UAV = J_r$. Dans ce cas, pour l'initialisation (lorsque $A \neq 0$), on pose :*

$$V = P_{1,j_0} D_1(a_{1,j_0}^{-1}) \prod_{j=2}^{p} T_{1,j}(-a_{1,j})$$

Alors V est un produit fini de matrices élémentaires et $AV = J_1$. Vous pouvez d'ailleurs remarquer que le dernier produit est commutatif.

Dans l'hérédité, on reprend le raisonnement en écrivant de la façon suivante (lorsque $A \neq 0$ et $p \geqslant 2$) :

- ▷ *$A_1 = P_{1,i_0} A P_{1,j_0}$ est une matrice dont le coefficient $(1,1)$ est non nul. On le note α ;*
- ▷ *$A_2 = A_1 D_1(\alpha^{-1})$ est une matrice dont le coefficient $(1,1)$ vaut 1 ;*

▷ *En notant $A_2 = [b_{i,j}]$, on pose alors :*

$$A_3 = \prod_{i=2}^{n} T_{i,1}(-b_{i,1}) \cdot A_2 \cdot \prod_{j=2}^{p} T_{1,j}(-b_{1,j})$$

Notez qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans les produits car les matrices dans chaque produit commutent deux à deux. Alors A_3 est de la forme :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n,2} & \dots & a'_{n,p} \end{bmatrix}$$

Quand on applique l'hypothèse de récurrence à A' (même notation que dans la preuve), il existe $U' \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ qui est un produit fini de matrices élémentaires et $V' \in GL_{p-1}$ qui est un produit fini de matrices élémentaires telles que :

$$U'A'V' = J_r$$

Notons par exemple $U' = \prod_{k=1}^{N} R'_k$ et $V' = \prod_{k=1}^{N'} N'_k$ où les R'_k et N'_k sont des matrices élémentaires. On pose alors :

- *si $R'_k = P_{i,j} \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$, $R_k = P_{i+1,j+1}$;*
- *si $R'_k = D_i(\alpha)$, $R_k = D_{i+1}(\alpha)$;*
- *si $R'_k = T_{k,i}(\alpha)$, $R_k = T_{k+1,i+1}(\alpha)$.*

(et de même pour les N'_k). Alors en posant :

$$U = \prod_{k=1}^{N} R_k \quad et \quad V = \prod_{k=1}^{N'} N_k$$

D'une part, $U \in GL_n(\mathbb{K})$ et est un produit fini de matrices élémentaires (de taille n).

D'autre part, $V \in GL_p(\mathbb{K})$ et est un produit fini de matrices élémentaires (de taille p) ;

De plus, $UA_3V = J_{r+1}$ et finalement :

$$\left(U \times \prod_{i=2}^{n} T_{i,1}(-b_{i,1}) \times P_{1,i_0} \right) \times A \times \left(P_{1,j_0} \times D_1(\alpha^{-1}) \times \prod_{j=2}^{p} T_{1,j}(-b_{1,j}) \times V \right) = J_{r+1}$$

Ce qui montre qu'il existe deux matrices inversibles P et Q^{-1}, obtenues comme produit fini de matrices d'opérations élémentaires, telles que $Q^{-1}AP = J_{r+1}$ et termine la preuve par récurrence.

Corollaire 3.6.3.4 *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \leqslant \min(n,p)$. Alors $r = rg(A)$ si et seulement si il existe $U \in GL_n(\mathbb{K})$, $V \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que :*

$$UAV = J_r$$

Preuve :

• Pour le sens direct, c'est la traduction matricielle du théorème précédent, en remarquant que faire une succession d'opérations élémentaires sur les lignes (respectivement colonnes) revient à multiplier à gauche (respectivement à droite) par une matrice inversible (ou bien voir la remarque précédente).

• La réciproque est immédiate puisque $\mathrm{rg}(UJ_rV) = \mathrm{rg}(J_r) = r$ pour toutes matrices inversibles $U \in GL_n(\mathbb{K})$ et $V \in GL_p(\mathbb{K})$. ⊠

Remarques :

- *on peut utiliser l'algorithme du théorème précédent pour déterminer le rang d'une matrice. C'est la méthode du pivot de Gauss qui consiste à mettre un « 1 » en première position et utiliser ce « 1 » pour faire apparaître des zéros sur la première ligne et la première colonne (sauf le tout premier coefficient bien sûr) puis recommencer ;*
- *les matrices U et V ne sont pas du tout uniques ! On peut trouver un couple (U,V) qui convient en effectuant les mêmes opérations sur les lignes (respectivement les colonnes) que sur A sur la matrice I_n (respectivement I_p) ;*
- *en fait, le corollaire peut se déduire directement de l'étude des applications linéaires. En effet, si $(e_1, \cdots e_s)$ est une base de $\ker(f)$, on la complète en une base $\mathcal{B}'$ de E. D'après le théorème du rang, $p = \dim(E) = r + s$ avec $r = rg(f)$ et $(\varepsilon_1 = f(e_{s+1}), \cdots, \varepsilon_r = f(e_p))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. On complète en une base $\mathcal{C}'$ de F. La matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ est la matrice J_r et d'après les formules de changement de bases : $J_r = Q^{-1}AP$.*

Exemple 3.6.3.5 Déterminons le rang de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et trouvons U, V inversibles telles que $UAV = J_r$.

• Première méthode : on va simplement appliquer la méthode du pivot de Gauss. Ceci permet aussi de préciser la rédaction attendue.
L'avantage (ou l'inconvénient) de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas de comprendre le lien avec les applications linéaires : elle est purement « algorithmique ».
En général, on présente les calculs sous la forme d'un tableau de 3 matrices : à gauche la matrice utilisée pour faire les opérations sur les lignes, au milieu la matrice obtenue après les transformations sur les lignes ou colonnes et à droite, la matrice pour les opérations sur les colonnes.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$
$C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$
$C_5 \leftarrow C_5 - C_1$

$L_2 \leftrightarrow L_4$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_2 \leftarrow -L_2$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2$
$C_4 \leftarrow C_4 + C_2$
$C_5 \leftarrow C_5 - C_2$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$C_4 \leftarrow C_4 + C_3$

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3 & & & \\
\hline
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{array}{l} L_3 \leftarrow -L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_4 \end{array} & & & \\
\end{array}
$$

Ainsi, en posant :

$$
U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$U \in GL_4(\mathbb{R})$, $V \in GL_5(\mathbb{R})$ et par construction :

$$
UAV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

• Seconde méthode : en raisonnant sur l'application linéaire associée.
Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A. On note $(e_1, \cdots, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Pour commencer,

$$
\mathrm{Im}(A) = < C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 > = < C_1, C_2, C_3, C_4 > = < C_1 - C_2, C_2, C_3 - C_4, C_4 >
$$

soit encore en remplaçant :

$$
\mathrm{Im}(A) = < \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} > = < \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} >
$$

Enfin, en remplaçant C_2 par $-C_2 + C_4$ et C_3 par $-C_3 + C_4$, on obtient :

$$
\mathrm{Im}(A) = < \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} >= \mathbb{R}^4
$$

On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^4$ (A est surjective) et $\mathrm{rg}(A) = 4$ donc $\dim(\ker(A)) = 1$. Or, $C_2 = C_5$ donc $C_2 - C_5 = 0$, c'est-à-dire $f(e_2 - e_5) = 0$. On conclut donc que :

$$\ker(f) = < e_2 - e_5 >$$

On en déduit alors que si on pose $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 - e_2)$, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^5$ et $\mathcal{C} = (f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ est une base de l'image de f, c'est-à-dire de $\mathbb{R}^4$, car $< e_1, e_2, e_3, e_4 >$ est un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $\mathbb{R}^5$. Ainsi, en posant :

$$P = Pass(\mathcal{B}_c, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q = Pass(\mathcal{B}'_c, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

P et Q sont inversibles car ce sont des matrices de passages et :

$$Q^{-1}AP = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En toute rigueur, il faudrait encore déterminer Q^{-1}. Je vous laisse vérifier en exercice qu'on obtient :

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Corollaire 3.6.3.6 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $rg(A) = rg({}^tA)$.*

Preuve :

Soit $r = \mathrm{rg}(A)$. Il existe $U \in GL_n(\mathbb{K})$ et $V \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que :

$$UAV = J_{n,p}(r)$$

Notez qu'ici, les formats de A et ${}^tA$ étant différents, il est sans doute mieux de préciser de quelle matrice « J_r » on parle. Alors :

$$J_{p,n}(r) = {}^tJ_{n,p}(r) = {}^tV\,{}^tA\,{}^tU$$

Or, ${}^tU \in GL_n(\mathbb{K})$ et ${}^tV \in GL_p(\mathbb{K})$ donc $\mathrm{rg}({}^tA) = r = \mathrm{rg}(A)$.

⊠

Remarque : *en fait ce n'est pas si évident que « le nombre de colonnes linéairement indépendantes » est le même que le « nombre de lignes linéairement indépendantes ». Ce corollaire, simple d'énoncé, n'est a priori pas si simple que cela. On reverra dans le cours de mathématiques spéciales 2 qu'en interprétant ${}^tA$ comme la matrice de l'adjoint, alors le résultat est évident (ou presque évident).*

Corollaire 3.6.3.7 *Toute matrice inversible s'écrit comme un produit fini de matrices d'opérations élémentaires.*

Preuve :

En effet, si $P \in GL_n$, alors $\mathrm{rg}(P) = n$. D'après le théorème précédent, on peut transformer P en la matrice $J_n = I_n$ par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, c'est-à-dire qu'il existe U, V produits de matrices d'opérations élémentaires telles que $UPV = I_n$. Alors $P = U^{-1}V^{-1}$ et U^{-1}, V^{-1} sont des produits finis de matrices d'opérations élémentaires. ⊠

Remarque : *en vocabulaire de la théorie des groupes, on peut reformuler en disant que le groupe $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est engendré par les matrices d'opérations élémentaires.*

Exercice 3.6.3.8 Calculer $D_j(-1)T_{i,j}(1)T_{j,i}(-1)T_{i,j}(1)$. En déduire que toute matrice inversible s'écrit comme un produit de matrices d'opérations élémentaires de type $T_{i,j}(\alpha)$ ou $D_i(\alpha)$.

Corollaire 3.6.3.9 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, on peut transformer de A en la matrice I_n par une succession d'opérations élémentaires uniquement sur les colonnes (respectivement uniquement sur les lignes).*

Preuve :

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n = BA$. La multiplication à gauche par B est alors une succession d'opérations élémentaires sur les lignes de A d'après le corollaire précédent. ⊠

Exercice 3.6.3.10 Montrer que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3.7 Matrices équivalentes, matrices semblables et trace d'une matrice carrée

3.7.1 Matrices équivalentes

Définition 3.7.1.1 Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A est équivalente à B s'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que :

$$B = Q^{-1}AP$$

On note alors parfois A eq B.

Proposition 3.7.1.2 *On a les propriétés suivantes :*

(i) la relation eq est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive ;

(ii) pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$A \text{ eq } B \iff rg(A) = rg(B)$$

Preuve :

• La démonstration de (i) est laissée en exercice. Cela découle du fait que $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL_p(\mathbb{K})$ sont des groupes.

• Montrons (ii).
D'après le corollaire précédent, on sait que :

$$\mathrm{rg}(A) = r \iff A \text{ eq } J_r$$

D'où le résultat. ⊠

Remarques :

- *il n'y a aucun sens à dire que deux matrices de taille différentes sont équivalentes ! Cette notion n'est définie que pour deux matrices de même taille ;*
- *puisque eq est une relation d'équivalence (donc symétrique), on dit que A et B sont équivalentes plutôt que A est équivalente à B ;*
- *on peut interpréter en termes d'applications linéaires le fait que A et B sont équivalentes mais en général, cette interprétation n'est pas très utile. Elle le sera en revanche dans le paragraphe suivant avec la notion de matrices semblables.*

3.7.2 Matrices semblables

Définition 3.7.2.1 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B, et on note $A \sim B$, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$B = P^{-1}AP$$

Proposition 3.7.2.2 *La relation de similitude $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Preuve :

C'est évident. Exercice : le démontrer. ⊠

Remarque : *de même que pour les matrices équivalentes, on dira plutôt que A et B sont semblables (puisque la relation de similitude est symétrique) au lieu de A est semblable à B.*

Proposition 3.7.2.3 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

(i) $A \sim B \Longrightarrow A$ eq B mais la réciproque est fausse ;

(ii) si $A \sim B$, alors $rg(A) = rg(B)$ (mais la réciproque est fausse) ;

(iii) $A \sim B$ si et seulement si A et B représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans des bases différentes.

Preuve :

• Montrons (i).

Si $A \sim B$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que : $B = P^{-1}AP$. En posant $Q = P$, on a bien : il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$. Par suite, A eq B.

Pour la réciproque, soient $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Clairement, $\mathrm{rg}(A) = 1 = \mathrm{rg}(B)$ donc A et B sont équivalentes (d'après la proposition précédente). En revanche,

$$A^2 = 0 \quad \text{et} \quad B^2 = B$$

Par suite, A et B ne sont pas semblables. En effet, si elles l'étaient, il existerait $P \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que : $B = P^{-1}AP$. Mais dans ce cas, $B^2 = (P^{-1}AP) \times (P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P = 0$, ce qui est absurde.

- (ii) est une conséquence de (i) (en fait est équivalent à (i)).
- Montrons (iii).
  - Si A et B représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans deux bases différentes, alors, par définition, il existe $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, deux bases de $\mathbb{K}^n$, et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tels que : $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$. En notant $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, on a $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B = P^{-1}AP$ donc A et B sont semblables.
  - Réciproquement, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire $A = Mat_{\mathcal{B}_c}(f)$. Puisque P est inversible, les vecteurs colonnes de P forment une base de $\mathbb{K}^n$ (en identifiant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) : notons $\mathcal{B}'$ cette base. Alors, $P = P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'}$ et donc $B = P^{-1}AP = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.

⊠

3.7.3 Trace d'une matrice carrée et trace d'un endomorphisme

Définition 3.7.3.1 Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A, et on note $\mathrm{tr}(A)$, le nombre :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Remarque : *autrement dit, la trace d'une matrice carrée est la somme des coefficients diagonaux de cette matrice. Attention, calculer la trace d'une matrice non carrée n'a aucun sens !*

Proposition 3.7.3.2 *On a les propriétés suivantes :*

(i) l'application trace, $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, *est une forme linéaire non nulle sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
(ii) $\ker(\mathrm{tr})$ *est un hyperplan de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *dont un supplémentaire est* $\mathbb{K}I_n$;
(iii) pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$;
(iv) Si $A \sim B$, *alors* $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ *mais la réciproque est fausse.*

Preuve :

- Montrons que la trace est linéaire.

Soient $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B = [b_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

$$\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \mathrm{tr}([\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}]) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_{k,k} + \mu b_{k,k})$$

Par suite,

$$\mathrm{tr}(\lambda A+\mu B)=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{k,k}+\mu\sum_{k=1}^{n}b_{k,k}=\lambda\,\mathrm{tr}(A)+\mu\,\mathrm{tr}(B)$$

Ce qui montre que la trace est bien une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Montrons (ii).
Puisque la trace est une forme linéaire non nulle et $\mathrm{tr}(I_n)=n\neq 0$, on a [1] :

$$\ker(\mathrm{tr})\oplus\mathbb{K}I_n=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

• Montrons (iii).
La preuve est purement calculatoire mais on va néanmoins faire les calculs. Soient $A=[a_{i,j}]\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B=[b_{i,j}]\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $AB=[c_{i,j}]$ et $BA=[d_{i,j}]$. Pour tout $(i,j)[\![1,n]\!]^2$,

$$c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\quad\text{ et }\quad d_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}b_{i,k}a_{k,j}$$

Par suite,

$$\sum_{i=1}^{n}c_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,i}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{k,i}a_{i,k}\right)=\sum_{k=1}^{n}d_{k,k}$$

c'est-à-dire $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.

• Montrons enfin (iv).
Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, alors il existe $P\in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B=P^{-1}AP$. On en déduit, en utilisant (iii), que :

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(P^{-1}(AP))=\mathrm{tr}((AP)P^{-1})=\mathrm{tr}(A(PP^{-1}))=\mathrm{tr}(AI_n)$$

c'est-à-dire $\mathrm{tr}(B)=\mathrm{tr}(A)$. ⊠

Exercice 3.7.3.3 Pour A,B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $[A,B]=AB-BA$ (qu'on appelle le commutateur de A et B). Montrer que :

$$\mathrm{Vect}\left(\{[A,B]\ ,\ (A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\}\right)=\ker(\mathrm{tr})$$

Définition 3.7.3.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Pour tout endomorphisme $f\in\mathcal{L}(E)$, on appelle trace de f, et on note $\mathrm{tr}(f)$, la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E.

1. voir le lien entre hyperplans et formes linéaires (cours de mathématiques supérieures 1).

Proposition 3.7.3.5 *La trace d'un endomorphisme est bien définie.*

Preuve :

En effet, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors, $A \sim A'$ donc $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A')$. Par suite, la trace ne dépend pas du choix de la base de E, c'est-à-dire que $\mathrm{tr}(f)$ est bien défini.

⊠

Proposition 3.7.3.6 *Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors,*

$$\mathrm{tr}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{tr}(f) + \mu \mathrm{tr}(g) \quad et \quad \mathrm{tr}(g \circ f) = \mathrm{tr}(f \circ g)$$

Preuve :

C'est une conséquence directe du fait que :

- $f \longmapsto Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres ;
- $A \longmapsto \mathrm{tr}(A)$ est linéaire et vérifie la relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

⊠

Terminons par une propriété simple mais remarquable (et importante dans la pratique).

Proposition 3.7.3.7 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle et p un projecteur de E. Alors :*

$$\mathrm{tr}(p) = rg(p)$$

Preuve :

On fixe $\mathcal{B}_1$ une base de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker(p)$. Alors, d'après les propriétés des projecteurs et des sommes directes, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E et :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(Mat_{\mathcal{B}}(p)) = \mathrm{tr}(J_r) = r = \mathrm{rg}(p)$$

⊠

3.8 Exercices

Exercice 3.8.1 Calculer si possible les produits suivants :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^2 \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^2$$

Exercice 3.8.2 On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Parmi les produits suivants dire lesquels ont un sens puis les calculer : AB, BA, AC, CA, BC, CB, A^2, B^2, C^2 et ${}^tCAB$.

Exercice 3.8.3 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

1. À quelle(s) condition(s) les produits AB et BA sont-ils simultanément définis ? Comment est la matrice produit dans ce cas ?
2. Montrer que les matrices $A{}^tA$ et ${}^tAA$ sont toujours définies. Que peut-on en dire de plus ?
3. Calculer la trace de ${}^tAA$. En déduire que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et ${}^tAA = 0$, alors $A = 0$.

Exercice 3.8.4 Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. En écrivant B sous la forme $I_3 + C$, calculer B^n.

Exercice 3.8.5 Soient $A = [a_1\, a_2\, a_3\, a_4]$ et $B = [b_1\, b_2\, b_3\, b_4]$. Calculer $({}^tAB)^n$.

Exercice 3.8.6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente, c'est-à-dire telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^p = 0$.

1. Justifier l'existence de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k A^k$. À quoi cette série vous fait-elle formellement penser ?
2. Montrer que $I_n + A$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

Exercice 3.8.7 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $AB = \alpha A + \beta B$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^\star$. Montrer que A et B commutent.

Exercice 3.8.8 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

1. A est-elle nécessairement nulle ?
2. Montrer par des exemples que A peut être ou ne pas être inversible.
3. Montrer que $A^2 + I_n$ est inversible et déterminer son inverse.
4. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, j, \bar{j}\}$, alors $A + \alpha I_n$ est inversible.

Exercice 3.8.9 On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

1. Étudier l'existence et l'unicité d'un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.
2. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ engendré par I_2 et A.
   (a) F est-il de dimension finie ? Si oui, quelle est sa dimension ?
   (b) Montrer que F est un anneau commutatif.
3. On suppose que le couple (α, β) est unique. Montrer que A est inversible si et seulement si $\beta \neq 0$ et déterminer A^{-1} dans ce cas.
4. Quel résultat "connu" a-t-on retrouvé dans la question précédente ?

Exercice 3.8.10 On note $\mathbb{H}$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{bmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{bmatrix}$ pour $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.

1. Montrer que $\mathbb{H}$ est un anneau non commutatif.
2. Montrer que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible. Que vient-on de prouver sur $\mathbb{H}$?
3. $\mathbb{H}$ est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? Est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
4. Lorsque $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (*cf.* question 3), $\mathbb{H}$ est-il de dimension finie ? Si oui, déterminer une $\mathbb{K}$-base.

Pour information, le corps $\mathbb{H}$ est appelé le corps des quaternions : c'est un exemple « simple » de corps non commutatif.

Exercice 3.8.11 Pour $a \in \mathbb{K}$, calculer les inverses des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Généraliser au cas d'une matrice de cette forme de type (n, n).

Exercice 3.8.12 Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 3.8.13 Calculer le rang des matrices suivantes et déterminer leur inverse lorsque cela a un sens :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{bmatrix}$$

Exercice 3.8.14 Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont 1.

1. J est-elle inversible ? Quel est son rang ?
2. Donner une base de $\ker(J)$ puis de $\mathrm{Im}(J)$.
3. Calculer J^p pour $p \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 3.8.15 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer le rang de chacune de ses matrices.
2. Pour chaque matrice, trouver U, V inversibles telles que $UMV = J_r$ avec $r = \mathrm{rg}(M)$.

Exercice 3.8.16 Soit A une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = V\,{}^tU$ et en déduire que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.

Exercice 3.8.17 Déterminer suivant la valeur du paramètre réel m le rang des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^2 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 3.8.18 Déterminer l'espace vectoriel engendré par les matrices de rang 1.

Exercice 3.8.19 Donner la matrice relativement aux bases canoniques des applications linéaires suivantes :

1. l'homothétie e $\mathbb{K}^n$ de rapport λ ;
2. la projection orthogonale sur le plan d'équation $x - y + z = 0$;
3. l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui à P associe $(X+1)P$.
4. l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ qui à A associe ${}^tA$.

Exercice 3.8.20 Donner la matrice relativement aux bases canoniques des applications linéaires suivantes :

1. l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à P associe P'.
2. l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui à P associe $XP' + P$.
3. l'application de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_n[X]$ qui à P associe $P(X+1)$.
4. l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à $\vec{u}$ associe $(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \wedge \vec{u}$.

Exercice 3.8.21 On donne la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \\ 4 & 7 & 12 \end{bmatrix}$.

1. Si f est l'application linéaire de $\mathbb{K}^r$ dans $\mathbb{K}^s$ dont la matrice associée est A, que valent r et s ?
2. Déterminer $\ker(f)$ et en déduire le rang de A.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$.

Exercice 3.8.22 Soit H l'hyperplan de $\mathbb{K}^n$ d'équation $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite dirigée par $u = (b_1, \cdots, b_n)$ avec u n'appartenant pas à H. Donner la matrice dans la base canonique de la projection sur $\mathcal{D}$ parallèlement à H puis celle de la projection sur H parallèlement à $\mathcal{D}$.

Exercice 3.8.23 Soit la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $\begin{array}{rcl} f_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$.
Donner la matrice de f_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 3.8.24 Soit M la matrice carrée de taille $n+1$ avec $m_{i,j} = \binom{j}{i}$ avec la convention $\binom{j}{i} = 0$ si $i > j$.

1. M est-elle inversible ?
2. Déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ ayant M pour matrice dans la base canonique.
3. En déduire l'inverse de M.

Exercice 3.8.25 Dans $\mathbb{R}^3$, démontrer que les deux familles suivantes sont des bases puis donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$:

$$\mathcal{B} = ((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = ((3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7))$$

Exercice 3.8.26 Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont équivalentes à une matrice nilpotente ?

Exercice 3.8.27 Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que l'endomorphisme associé à AB est un projecteur et déterminer son rang.
2. Montrer que BA est de rang 2 et conclure que $BA = I_2$.

Exercice 3.8.28 Déterminer l'ensemble des matrices :

1. qui commutent avec toutes les matrices diagonales ;
2. qui commutent avec toutes les matrices triangulaires supérieures ;
3. qui commutent avec toute matrice inversible.

Exercice 3.8.29 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$Mat_{\mathcal{B}_c}(f) = A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f. Ces deux espaces sont-ils supplémentaires ?
2. Montrer que $f \circ f = -f$ et déterminer une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans laquelle la matrice de f est :
$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
3. On considère le système différentiel : $(S) : X' = AX$ où $X = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$. On note $(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ les coordonnées de $X(t)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
   (a) Montrer que X est dérivable si et seulement si α, β et γ le sont.
   (b) Montrer que X est solution de (S) si et seulement si α, β et γ sont chacune solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
   (c) En déduire les solutions de (S).

Exercice 3.8.30 Dans tout cet exercice, on notera 0 la matrice nulle, I la matrice I_3, et A la matrice suivante :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 15 \\ 3 & 7 & 15 \\ -3 & -9 & -17 \end{bmatrix}$$

Partie 1

1. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer A^{-1} et sinon, préciser le rang de A.
2. Calculer A^2 et A^3 et déterminer des réels a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 et b_3 tels que :
$$A = a_1 A + b_1 I \quad ; \quad A^2 = a_2 A + b_2 I \quad ; \quad A^3 = a_3 A + b_3 I$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tels que :
$$A^n = a_n A + b_n I$$
On donnera une relation liant a_{n+1} à a_n, b_n et une autre liant b_{n+1} à a_n et b_n.
4. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = -7a_{n+1} - 10a_n$.
5. En déduire l'expression de a_n en fonction de n puis celle de b_n.
6. En déduire l'expression de A^n.
7. La dernière relation est-elle encore valable pour calculer la matrice A^{-1} ?

Partie 2

On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = Mat_{\mathcal{B}_c}(f)$.

1. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
2. Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas inversible.
3. On pose $F = \ker(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $G = \ker(f + 5\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
   (a) Déterminer la dimension, une base $\mathcal{B}_F$ et un système d'équations cartésiennes de F.
   (b) Déterminer la dimension, une base $\mathcal{B}_G$ et un système d'équations cartésiennes de G.
   (c) Montrer que $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire sur F et G ?

   On pose par la suite $\varepsilon_1 = (1, -2, 1)$**,** $\varepsilon_2 = (2, 1, -1)$ **et** $\varepsilon_3 = (-1, -1, 1)$ **et** $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$**.**
4. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Donner la matrice, notée D, de f dans la base $\mathcal{B}$.
6. Donner la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ vers la base $\mathcal{B}$. On la notera P.
7. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
8. En déduire une relation simple pour $n \in \mathbb{Z}$ entre A^n, D^n, P et P^{-1}.

Partie 3

On note $\mathcal{M} = \{P(A)\ ,\ P \in \mathbb{R}[X]\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, où si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$.

En particulier,

- si $P = 1$, $P(A) = I_3 = I$;
- si $Q = X$, $Q(A) = A$.

Ainsi, une matrice M appartient à $\mathcal{M}$ si et seulement si il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = P(A)$.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel. Est-il de dimension finie ?
2. En utilisant les résultats de la partie 1, montrer que $\mathcal{M}$ est de dimension 2 et donner une base $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}$.
3. Montrer que $\mathcal{M}$ est un anneau commutatif. Est-ce un corps ?
4. On note $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ /\ AM = MA\}$ (appelé le commutant de A).
   (a) Montrer que $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}(A)$.
   (b) Avec les notations de la partie 2, montrer que si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$, alors :
   $$M \in \mathcal{C}(A) \iff DN = ND$$
   (c) En écrivant N sous forme matricielle (9 coefficients), calculer DN et ND.
   (d) Conclure que $\mathcal{C}(A)$ est un espace vectoriel de dimension 5.
   (e) A-t-on $\mathcal{M} = \mathcal{C}(A)$?

Exercice 3.8.31 Soit $A = [a_{i,j}]$ une matrice carrée triangulaire supérieure telle que $a_{i,i} = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

1. Montrer que $A^n = 0$ en raisonnant sur l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé à A.
2. Montrer qu'on a le même résultat pour une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux nuls.

Exercice 3.8.32 On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A et trouver P, Q inversibles telles que $QAP = J_r$.
2. Déterminer, suivant la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, la dimension et une base de $\ker(A - \lambda I_3)$.
3. En déduire qu'il existe P inversible que vous donnerez telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 3.8.33 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\big(\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ , \ (XA)^2 = 0\big) \Longrightarrow A = 0$$

Exercice 3.8.34 Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les équations suivantes :

1. $X + \mathrm{tr}(X)A = B$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ données ;
2. $X + {}^tX = \mathrm{tr}(X)A$.

Exercice 3.8.35 Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le système :

$$\begin{cases} \mathrm{tr}(X)Y + \mathrm{tr}(Y)X = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \\ XY = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Exercice 3.8.36 Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $G \subset GL_n(\mathbb{K})$. On suppose que :

(i) G est un ensemble fini non vide $|G| = p \in \mathbb{N}^\star$;
(ii) G est stable par multiplication : $\forall (A, B) \in G^2$, $A \times B \in G$.

1. Démontrer que G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $M = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{A \in G} A$ est un projecteur.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{A \in G} \mathrm{tr}(A) \equiv 0 \ [p]$.

Exercice 3.8.37 Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On veut montrer que $H \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$.

1. On suppose qu'il existe $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $E_{i,j} \notin H$. Montrer alors que $< I_n, E_{i,j} > \cap H \neq \{0\}$ et conclure.
2. On suppose que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $E_{i,j} \in H$. Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

Chapitre 4

Intégration des fonctions d'une variable réelle

Prérequis : dans tout ce chapitre, les notions suivantes sont supposées connues :

- limite et continuité, continuité uniforme, dérivation pour une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes ;
- suites et convergence de suites réelles ou complexes ;
- relation de comparaison o, O et $\sim$ pour les suites et pour les fonctions ;
- fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle ;
- structures algébriques : anneaux, espaces vectoriels et algèbres ;
- application linéaire ;
- polynômes, fractions rationnelles et décomposition en éléments simples.

Aucune connaissance spécifique sur la notion d'intégrale n'est supposée connue.

La théorie ou plutôt les théories de l'intégration sont essentielles et nombreuses. Parmi elles, deux théories dominent : l'intégration au sens de Riemann et l'intégration au sens de Lebesgue. Pour la théorie de Lebesgue, bien que plus « souple » et plus facilement « compatible avec les passages à la limite », elle nécessite des outils théoriques assez avancés : en particulier, la notion de tribu et la notion de mesure. Ces notions seront introduites brièvement dans le chapitre de probabilités et revues dans le cours de mathématiques spéciales 2. Cela donnera une introduction à la théorie de la mesure mais ne constituera absolument pas un cours complet. Le lecteur intéressé pourra consulter n'importe quel ouvrage d'analyse réelle (le livre de Walter Rudin est souvent considéré comme « la » référence sur le sujet).

En ce qui concerne ce cours, on va se focaliser sur la théorie de l'intégration de Riemann, mais dans un cadre un peu plus restreint : celui des fonctions continues ou continues par morceaux (notion qui sera introduite au début du premier paragraphe). Ceux qui souhaiteraient connaître les généralisations peuvent à nouveau lire n'importe quel ouvrage de licence sur le thème de l'intégrale de Riemann.

4.1 Intégration sur un segment d'une fonction en escalier

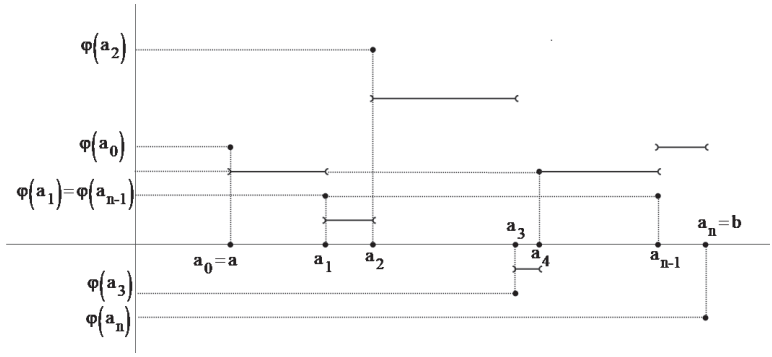
4.1.1 Fonction en escalier

Définition 4.1.1.1 Soient $a < b$ deux réels.

(i) Une subdivision σ de $[a, b]$ est une suite finie strictement croissante $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ telle que $a_0 = a$ et $a_n = b$. On note en général

$$\sigma = [a_0, \cdots, a_n]$$

(ii) On dit qu'une application $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = [a_0, \cdots, a_n]$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi_{]]a_i, a_{i+1}[}$ est constante :

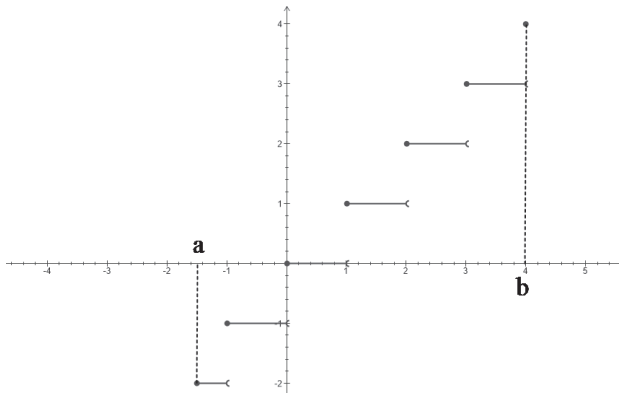


Une telle subdivision est dîte adaptée à φ.

Remarques :

- *tout d'abord, notez bien que l'on n'impose rien du tout sur les valeurs de φ aux points a_i de la subdivision ;*
- *une subdivision adaptée à une fonction en escalier n'est pas unique : on peut toujours rajouter des points à une subdivision adaptée (et on obtient encore une subdivision adaptée) et dans certains cas, on peut en retirer ;*
- *on peut aussi définir la notion de fonction en escalier sur un intervalle quelconque I en disant qu'elle l'est sur I si elle l'est sur tout segment inclus dans I.*

Exemple 4.1.1.2 La fonction partie entière est une fonction en escalier sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$:



Exemple 4.1.1.3 La fonction $x \longmapsto (-1)^{E(x)}$ (signal créneau en physique) est une fonction en escalier sur tout segment.

Lemme 4.1.1.4 *Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur le segment $[a, b]$. Alors, il existe une subdivision de $[a, b]$ adaptée à φ et à ψ.*

Preuve :

Soient $\sigma_1 = [a_0, \cdots, a_n]$ une subdivision adaptée à φ et $\sigma_2 = [b_0, \cdots, b_p]$ une subdivision adaptée à ψ. On considère la subdivision $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, c'est-à-dire la subdivision obtenue en rangeant dans l'ordre tous les éléments de $\{a_0, \cdots, a_n\} \cup \{b_0, \cdots b_p\}$. Alors, σ est clairement une subdivision de $[a, b]$ adaptée à φ et ψ.

⊠

Proposition 4.1.1.5 *L'ensemble $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une sous-$\mathbb{K}$-algèbre de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$.*
En particulier, toute fonction en escalier sur un segment $[a,b]$ est bornée.

Preuve :

• Montrons d'abord que $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}) \subset \mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$.
Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ et soit $\sigma = [a_i]_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à φ. Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note $\lambda_i \in \mathbb{K}$ la valeur (constante) de φ sur $]a_i, a_{i+1}[$. On pose alors :

$$M = \max\left(\{|\varphi(a_i)| \ , \ i \in [\![0,n]\!]\} \cup \{|\lambda_i| \ , \ i \in [\![0,n-1]\!]\}\right)$$

(qui est bien défini puisque l'ensemble en question est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$). Alors, clairement :

$$\forall x \in [a,b] \ \ , \ |\varphi(x)| \leqslant M$$

D'où φ est bornée sur $[a,b]$.

• Montrons à présent que $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$.

∗ $1_{[a,b]}$, la fonction constante égale à 1 est bien une fonction en escalier sur $[a,b]$;

∗ soient $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. D'après le lemme précédent, il existe une subdivision $\sigma = [a_0 \cdots, a_n]$ de $[a,b]$, adaptée à φ et ψ. Il est alors clair que :

▷ $\lambda\varphi + \mu\psi$ est constante sur chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ avec $0 \leqslant i < n$ et donc $\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$;

▷ $\varphi \times \psi$ est constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ pour $0 \leqslant i < n$ et donc $\varphi \times \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$.

Ce qui prouve que $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ est bien une sous-algèbre de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$. ⊠

Remarques :

- *si $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$, alors $|f| \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}^+)$ mais la réciproque est fausse (par exemple, $x \longmapsto e^{ix}$ n'est pas en escalier sur $[0,2\pi]$ mais $|f| = 1$ est constante et a fortiori en escalier) ;*
- *la composée (lorsqu'elle est bien définie) de deux fonctions en escalier est aussi en escalier. En fait, si φ est en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $A \subset \mathbb{K}$ et si f est une application de A dans $\mathbb{K}$, alors $f \circ \varphi$ est en escalier sur $[a,b]$. Mais dans la pratique, on ne fait pas de composition de fonctions en escalier.*

4.1.2 Intégrale sur un segment d'une fonction en escalier

Théorème 4.1.2.1 (Définition) *Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$. Soient $\sigma = [a_0,\cdots,a_n]$ une subdivision adaptée à φ et pour $0 \leqslant i < n$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_i = \varphi_{]]a_i,a_{i+1}[}$. Alors le nombre :*

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i$$

est indépendant du choix de la subdivision adaptée à φ. Ce nombre est appelé intégrale de φ sur le segment $[a,b]$ et on le note :

$$\int_{[a,b]}\varphi = \int_a^b \varphi = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve :

La démonstration se découpe en trois étapes :

(i) d'abord, on montre que si on rajoute un point à la subdivision adaptée, cela ne change pas la valeur ;

(ii) ensuite, on montre par récurrence que si on rajoute un nombre fini de points à la subdivision adaptée, la valeur ne change pas ;

(iii) enfin, on choisit deux subdivisions adaptées et on montre que les deux valeurs sont égales.

Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$. Pour toute subdivision $\sigma = [a_0,\cdots,a_n]$ de $[a,b]$ adaptée à φ, on note :

$$I(\varphi,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i$$

où pour $i \in [\![0,n-1]\!]$, λ_i est la valeur (constante) de φ sur $]a_i,a_{i+1}[$.

• Première étape.
Soit $\sigma = [a_i]_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à φ et pour $i \in [\![0,n-1]\!]$, λ_i la valeur (constante) de φ sur $]a_i,a_{i+1}[$. Montrons que si l'on rajoute un point à σ, alors la nouvelle subdivision σ' obtenue est encore adaptée à φ et $I(\varphi,\sigma) = I(\varphi,\sigma')$.
Soit $c \in [a,b] \setminus \{a_i\ ,\ i \in [\![0,n]\!]\}$. Considérons la subdivision $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$. Autrement dit, puisque $c \in [a,b] \setminus \{a_i\ ,\ i \in [\![0,n]\!]\}$ et $a_0 = a$ et $a_n = b$, il existe un unique entier $k \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $a_k < c < a_{k+1}$: on a donc $\sigma' = [a_0,\cdots,a_k,c,a_{k+1},\cdots,a_n]$. Il est clair que σ' est encore une subdivision adaptée à φ et de plus, sur $]a_k,c[$ et $]c,a_{k+1}[$, φ est constante et vaut λ_k. Par suite,

$$I(\varphi,\sigma') = \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i + (c-a_k)\lambda_k + (a_{k+1}-c)\lambda_k + \sum_{i=k+1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} I(\varphi,\sigma') &= \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i + (a_{k+1}-a_k)\lambda_k + \sum_{i=k+1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i \\ &= I(\varphi,\sigma) \end{aligned}$$

• Deuxième étape.
On fixe à nouveau $\sigma = [a_0, \cdots, a_n]$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à φ et on conserve les mêmes notations que précédemment. On montre par récurrence sur $p \geqslant 1$ que si l'on rajoute p points à σ, alors la nouvelle subdivision σ_p est encore adaptée à φ et $I(\varphi,\sigma) = I(\varphi,\sigma_p)$.

Initialisation :
La propriété est vraie au rang 1 d'après ce qui précède, c'est-à-dire la première étape de la démonstration.

Hérédité :
On suppose que la propriété est vraie au rang $p \geqslant 1$ et on montre qu'elle est vraie au rang $p+1$.
Soient $b_1, \cdots, b_{p+1}$, $p+1$ points distincts de $[a,b]\setminus\{a_i\ ,\ i \in [\![0,n]\!]\}$. On pose alors :

$$\sigma_p = \sigma \cup \{b_1, \cdots, b_p\} \quad \text{et} \quad \sigma_{p+1} = \sigma_p \cup \{b_{p+1}\}$$

Il est clair que σ_p et σ_{p+1} sont encore des subdivisions de $[a,b]$, adaptées à φ. De plus, d'après hypothèse de récurrence, on a :

$$I(\varphi,\sigma) = I(\varphi,\sigma_p)$$

De plus, d'après la première étape du raisonnement (appliquée à σ_p et $\{b_{p+1}\}$), $I(\varphi,\sigma_p) = I(\varphi,\sigma_{p+1})$. Par suite,

$$I(\varphi,\sigma_{p+1}) = I(\varphi,\sigma)$$

Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $p+1$ et achève la récurrence.

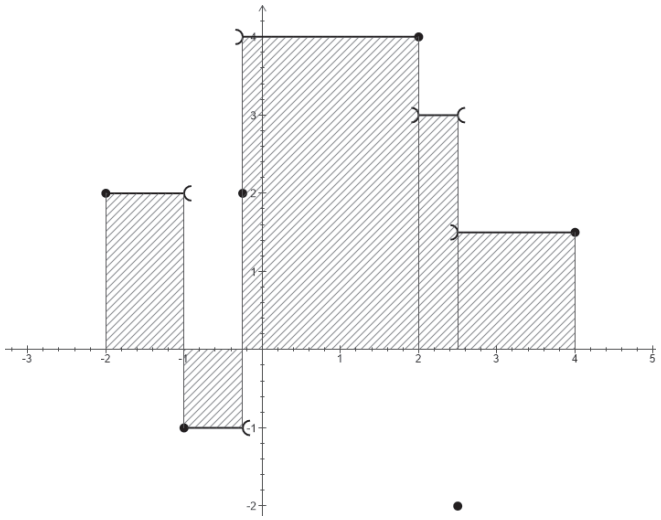
• Dernière étape.
Enfin, soient σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$, adaptées à φ. Alors, $\sigma \cup \sigma'$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à φ. De plus, $\sigma \cup \sigma'$ est obtenue en rajoutant un nombre fini de points à la subdivision σ (respectivement σ'). Par conséquent,

$$I(\varphi,\sigma) = I(\varphi,\sigma\cup\sigma') = I(\varphi,\sigma')$$

⊠

Remarque très importante : la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier ne fait pas intervenir les valeurs de la fonction aux points de la subdivision adaptée. On peut donc modifier la valeur d'une fonction φ en escalier en un nombre fini de points sans changer la valeur de son intégrale.

Interprétation graphique : $\int_{[a,b]} \varphi$ est la somme des aires algébriques des rectangles délimités par les droites d'équation $x = a_i$, $x = a_{i+1}$, $y = 0$ et $y = \lambda_i$:



Exemple 4.1.2.2 Soit $\varphi : x \longmapsto E(x^2)$ définie sur $[0,2]$.

- φ est en escalier sur $[0,2]$ et $[0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},2]$ est une subdivision adaptée à φ ;
- et par définition :

$$\begin{aligned}\int_{[0,2]} \varphi &= (1-0)\times 0 + (\sqrt{2}-1)\times 1 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\times 2 + (2-\sqrt{3})\times 3 \\ &= 6 - (\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

Exercice 4.1.2.3 Calculer $\int_0^4 (-1)^{E(x)} E(x)\,\mathrm{d}x$.

4.1.3 Propriétés de l'intégrale

4.1.3.a Linéarité

Proposition 4.1.3.1 *L'application* $I : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \varphi & \longmapsto & \int_{[a,b]} \varphi \end{array}$ *est une forme linéaire, c'est-à-dire :*

$$\forall (\varphi,\psi) \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})^2 \ , \ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \ , \ \int_{[a,b]} (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \int_{[a,b]} \varphi + \mu \int_{[a,b]} \psi$$

Preuve :

Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit par ailleurs $\sigma = [a_0, \cdots, a_n]$, une subdivision de $[a,b]$, adaptée à φ et ψ. On pose pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $\lambda_i = \varphi_{]]a_i,a_{i+1}[}$ et $\mu_i = \psi_{]]a_i,a_{i+1}[}$. Il est alors clair que σ est adaptée à $\lambda\varphi + \mu\psi$ et $\big(\lambda\varphi + \mu\psi\big)_{]]a_i,a_{i+1}[} = \lambda\lambda_i + \mu\mu_i$. Par suite,

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} (\lambda\varphi + \mu\psi) &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)(\lambda\lambda_i + \mu\mu_i) \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\lambda_i + \mu \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\mu_i \\ &= \lambda \int_{[a,b]} \varphi + \mu \int_{[a,b]} \psi\end{aligned}$$

⊠

4.1.3.b Monotonie

Proposition 4.1.3.2 *Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$. Si $\varphi \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \geqslant 0$.*

Preuve :

C'est clair !

⊠

Corollaire 4.1.3.3 *Par conséquent,*

(i) pour toutes $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$: $\varphi \leqslant \psi \Longrightarrow \displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi$;

(ii) pour toute $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$, $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} \varphi\right| \leqslant \int_{[a,b]} |\varphi|$.

Preuve :

• Pour (i), il suffit de remarquer que $\psi - \varphi \geqslant 0$, appliquer la proposition précédente et utiliser la linéarité de l'intégrale.

• Pour (ii), c'est une simple conséquence de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.

⊠

4.1.3.c Relation de Chasles

Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ et soit $c \in]a,b[$, alors $\varphi_{|_{[a,c]}} \in \mathcal{E}([a,c],\mathbb{K})$ et $\varphi_{|_{[c,b]}} \in \mathcal{E}([c,b],\mathbb{K})$. Pour simplifier les notations, on posera alors :

$$\int_{[a,c]} \varphi_{|_{[a,c]}} = \int_{[a,c]} \varphi$$

Proposition 4.1.3.4 (Relation de Chasles) *Soient $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ et $c \in [a,b]$. Alors :*

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi$$

Preuve :

En effet, si on prend une subdivision adaptée à φ qui contient c (ce qui est toujours possible), on a directement l'égalité. ⊠

4.2 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

4.2.1 Fonctions continues par morceaux et approximation uniforme par des fonctions en escalier

Définition 4.2.1.1 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une application. On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = [a_0, \cdots, a_n]$ de $[a,b]$ telle que :

(i) pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|_{]a_i,a_{i+1}[}}$ est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$;

(ii) pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, f admet une limite finie à droite en a_i et une limite finie à gauche en a_{i+1}.

On note $\mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque : *de façon équivalente,*

- *f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ si et seulement si f a un nombre fini de points de discontinuité dans le segment $[a,b]$ et en chacun de ces points, f admet des limites finies à droite et à gauche (lorsque celles-ci sont bien définies) ;*
- *ou encore f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ si et seulement si il existe $\sigma = [a_i]_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$.*

Exemple 4.2.1.2 On peut vérifier sans aucune difficulté que :

- les fonctions en escalier sur $[a,b]$ sont des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$;
- les fonctions affines par morceaux sur $[a,b]$ sont également des fonctions continues par morceaux ;
- toute fonction continue sur $[a,b]$ est *a fortiori* continue par morceaux sur $[a,b]$;
- la fonction f définie sur $[0,4]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \in]0,1[\\ x+1 & \text{si } x \in [1,2[\\ 2-x & \text{si } x \in [2,3] \\ \ln(x) & \text{si } x \in]3,4] \end{cases}$$

  est une fonction continue par morceaux sur $[0,4]$;
- en revanche, les fonctions f et g définies par :

$$\forall x \in [0,1] \ , \ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

  ne sont pas continues par morceaux sur $[0,1]$ car elles n'ont pas de limite finie à droite en 0 (ou pas de limite tout court pour g) ;
- de même la fonction f définie par :

$$\forall x \in [0,1] \ , \ f(x) = \begin{cases} xE(\frac{1}{x}) & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

  n'est pas continue par morceaux sur le segment $[0,1]$ (bien qu'elle soit continue en 0 !). Ici, le problème n'est pas du tout l'existence des limites aux points de discontinuité (la partie entière admet des limites finies à droite et à gauche aux points entiers) mais dans cet exemple, f a une infinité de points de discontinuité qui sont tous les $\frac{1}{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : *l'exemple précédent dit que* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K}) \subset \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{K})$.

Proposition 4.2.1.3 *Soient a et b deux réels tels que $a < b$.*

(i) $\mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{K}) \subset \mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$ *: toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$;*

(ii) $\mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{K})$ *une sous-algèbre de l'ensemble des fonctions bornées sur $[a,b]$.*

On retient donc que la somme ou le produit de fonctions continues par morceaux est continue par morceaux.

Preuve :

• Montrons que $\mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{K})$ est inclus dans $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$.
Soient $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{K})$ et $\sigma = [a_i]_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. On définit la fonction $f_i : [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{K}$ par :

$$f_i(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to a_i \\ x>a_i}} f(x) & \text{si } x = a_i \\ f(x) & \text{si } x \in]a_i, a_{i+1}[\\ \lim\limits_{\substack{x\to a_{i+1} \\ x<a_{i+1}}} f(x) & \text{si } x = a_{i+1} \end{cases}$$

f_i est bien définie et est continue sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$ puisque par définition, f admet une limite finie à droite en a_i, à gauche en a_{i+1} et f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$. Par conséquent, f_i est bornée sur $[a_i, a_{i+1}]$.
On a alors pour tout $x \in [a,b]$:

$$|f(x)| \leqslant \max\Big(\{|f(a_i)| \ , \ i \in [\![0,n]\!]\} \cup \{ \sup_{x\in[a_i,a_{i+1}]} |f_i(x)| \ , \ i \in [\![0, n-1]\!]\}\Big)$$

Ce qui prouve que f est bornée sur $[a,b]$.

• Le fait qu'il s'agisse d'une sous-algèbre découle alors directement de l'existence d'une subdivision adaptée commune pour deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et des opérations algébriques sur les limites. ⊠

⚠ **Attention :** si $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R})$, f est bornée mais n'atteint pas forcément ses bornes !

⚠ **Attention :** si f et g sont continues par morceaux, $g \circ f$ ne l'est pas forcément !

Théorème 4.2.1.4 (d'approximation) *Soit $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R})$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que :*

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad et \qquad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$$

Preuve :

On admet ce théorème. Pour les plus curieux, une démonstration est donnée en annexe. L'outil principal est le théorème de Heine et la continuité uniforme. ⊠

Remarques : *vous verrez dans le cours de mathématiques spéciales 1 que $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$ définit ce qu'on appelle une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R})$ et le théorème se traduit alors par le fait que l'ensemble des fonctions en escalier est dense dans $(\mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.*

4.2.2 Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

Théorème 4.2.2.1 (Définition) *Soit $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R})$. On pose :*

$$A(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \ , \ \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \ \textit{et} \ \varphi \leqslant f \right\}$$

$$B(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \psi \ , \ \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \ \textit{et} \ f \leqslant \psi \right\}$$

(i) $A(f)$ admet une borne supérieure ;

(ii) $B(f)$ admet une borne inférieure ;

(iii) $\sup A(f) = \inf B(f)$.

On appelle alors intégrale de f sur $[a,b]$, et on note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, cette borne commune :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f = \int_{[a,b]} f = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \\ \varphi \leqslant f}} \int_{[a,b]} \varphi = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \\ f \leqslant \psi}} \int_{[a,b]} \psi$$

Preuve :

• Tout d'abord, f est continue par morceaux sur $[a,b]$, elle est donc bornée (d'après la proposition précédente). Soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a,b]$. Alors, la fonction constante égale à m (respectivement à M) est en escalier sur $[a,b]$ et vérifie $m \leqslant f$ (respectivement $f \leqslant M$). Par suite, $A(f)$ et $B(f)$ sont des parties non vides de $\mathbb{R}$ (elles contiennent respectivement $m(b-a)$ et $M(b-a)$).

• Par ailleurs, si $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $\varphi \leqslant f$, alors $\varphi \leqslant M$ et par conséquent :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant M(b-a)$$

Par suite, $A(f)$ est majorée par $M(b-a)$. De façon similaire, $B(f)$ est minorée par $m(b-a)$. Plus généralement, tout élément de $A(f)$ minore $B(f)$ et tout élément de $B(f)$ majore $A(f)$.

• Ainsi, $A(f)$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$: elle admet une borne supérieure. De même, $B(f)$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ donc elle admet une borne inférieure. Ceci prouve donc les propriétés (i) et (ii).

• Par ailleurs, d'après ce qui précède,

$$\sup A(f) \leqslant \inf B(f)$$

En effet, si $x \in A(f)$ et $y \in B(f)$, alors il existe φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que $\varphi \leqslant f$, $f \leqslant \psi$ et :

$$x = \int_{[a,b]} \varphi \ \text{ et } \ y = \int_{[a,b]} \psi$$

Or, $\varphi \leqslant \psi$ donc par croissance de l'intégrale (pour les fonctions en escalier) :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi \ \text{ c'est-à-dire } \ x \leqslant y$$

Ainsi, $A(f)$ admet une borne supérieure, $B(f)$ admet une borne inférieure et de plus $\forall (x,y) \in A(f) \times B(f)$, $x \leqslant y$. Par conséquent, $\sup A(f) \leqslant \inf B(f)$.

• Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème d'approximation des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier (théorème 4.2.1.4), il existe φ, ψ en escalier sur le segment $[a,b]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
On a alors :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi \leqslant \int_{[a,b]} \varphi + \varepsilon$$

On en déduit donc que :

$$\inf B(f) \leqslant \int_{[a,b]} \psi \leqslant \int_{[a,b]} \varphi + \varepsilon \leqslant \sup A(f) + \varepsilon$$

• Ainsi, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sup A(f) \leqslant \inf B(f) \leqslant \sup A(f) + \varepsilon$$

Par conséquent,

$$\sup A(f) = \inf B(f)$$

⊠

Interprétation graphique : *c'est à nouveau l'aire algébrique de la portion du plan comprise entre les droites d'équations $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.*

Remarques :

- *cette définition de l'intégrale prolonge celle des fonctions en escalier puisque si f est en escalier sur le segment $[a,b]$, alors*

$$\sup A(f) = \max A(f) = \int_{[a,b]} f = \min B(f) = \inf B(f)$$

- *dans un cadre un peu plus général que celui des fonctions continues par morceaux, on dit que $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si $A(f)$ admet une borne supérieure, $B(f)$ admet une borne inférieure et $\sup A(f) = \inf B(f)$. Le théorème précédent exprime donc que toute fonction continue par morceaux sur un segment est Riemann intégrable.*

4.2.3 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Pour étendre la notion d'intégrale aux fonctions à valeurs complexes, on ne peut pas procéder comme dans le cas des fonctions réelles puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre naturel dans $\mathbb{C}$. En revanche, puisqu'on veut une intégrale linéaire, la définition naturelle est donc de poser :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} (\Re e(f) + i\Im m(f)) = \int_{[a,b]} \Re e(f) + i \int_{[a,b]} \Im m(f)$$

Pour cela, il y a néanmoins une propriété qui est sous-entendue : c'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.2.3.1 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors :*

$$f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{C}) \iff (\Re e(f) \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } \Im m(f) \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R}))$$

Preuve :

C'est évident car on a déjà vu que f admet une limite en un point $\alpha \in [a,b]$ si et seulement si $\Re e(f)$ et $\Im m(f)$ admettent des limites finies en α et que dans ce cas, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} \Re e(f)(x) + i \lim\limits_{x\to\alpha} \Im m(f)$. ⊠

On peut maintenant définir sans ambiguïté l'intégrale de f.

Définition 4.2.3.2 On pose pour $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{C})$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \Re e(f) + i \int_{[a,b]} \Im m(f)$.

4.2.4 Linéarité, monotonie et relation de Chasles

Proposition 4.2.4.1 *Soit $I : \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ qui à f associe $I(f) = \displaystyle\int_{[a,b]} f$.*

(i) I est une application $\mathbb{K}$-linéaire :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{K})^2 \ , \ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \ , \ \int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$$

(ii) La restriction de I à $\mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R})$ est positive :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R}) \ , \ \left(\ f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_{[a,b]} f \geqslant 0 \ \right)$$

(iii) La restriction de I à $\mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R})$ est croissante :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R})^2 \ , \ \left(\ f \leqslant g \Longrightarrow \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g \ \right)$$

Preuve :

• Soient $f, g \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{K})$. Montrons $I(f+g) = I(f) + I(g)$.

Par définition de l'intégrale d'une fonction complexe et par $\mathbb{R}$-linéarité de la partie réelle et de la partie imaginaire, il suffit de le prouver lorsque f et g sont à valeurs réelles. En effet, si le résultat est prouvé pour toutes les fonctions réelles, alors :

$$\begin{aligned}
I(f+g) &= \int_{[a,b]} \Re e(f+g) + i \int_{[a,b]} \Im m(f+g) \quad \text{(par définition)} \\
&= \int_{[a,b]} (\Re e(f) + \Re e(g)) + i \left(\int_{[a,b]} (\Im m(f) + \Im m(g)) \right) \\
&= \int_{[a,b]} \Re e(f) + \int_{[a,b]} \Re e(g) + i \int_{[a,b]} \Im m(f) + i \int_{[a,b]} \Im m(g) \\
&= \int_{[a,b]} \Re e(f) + i \int_{[a,b]} \Im m(f) \quad + \quad \int_{[a,b]} \Re e(g) + i \int_{[a,b]} \Im m(g) \\
&= \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g
\end{aligned}$$

Soit φ_2 en escalier telle que $\varphi_2 \leqslant g$. Alors pour toute φ_1 en escalier telle que $\varphi_1 \leqslant f$, on a : $\varphi_1 + \varphi_2 \leqslant f + g$. Par suite,

$$\int_{[a,b]} \varphi_1 + \int_{[a,b]} \varphi_2 = \int_{[a,b]} (\varphi_1 + \varphi_2) \leqslant \int_{[a,b]} (f+g)$$

On en déduit que :

$$\forall \varphi_1 \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \ , \ \left(\varphi_1 \leqslant f \Longrightarrow \int_{[a,b]} \varphi_1 \leqslant \int_{[a,b]} (f+g) - \int_{[a,b]} \varphi_2 \right)$$

d'où

$$\sup_{\substack{\varphi_1 \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \\ \varphi_1 \leqslant f}} \int_{[a,b]} \varphi_1 \quad \leqslant \int_{[a,b]} (f+g) - \int_{[a,b]} \varphi_2$$

soit encore, par définition de l'intégrale,

$$\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} (f+g) - \int_{[a,b]} \varphi_2$$

On en déduit donc que :

$$\forall \varphi_2 \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \ , \ \left(\varphi_2 \leqslant g \Longrightarrow \int_{[a,b]} \varphi_2 \leqslant \int_{[a,b]} (f+g) - \int_{[a,b]} f \right)$$

d'où

$$\sup_{\substack{\varphi_2 \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \\ \varphi_2 \leqslant g}} \int_{[a,b]} \varphi_2 \quad \leqslant \int_{[a,b]} (f+g) - \int_{[a,b]} f$$

Et finalement, compte tenu de la définition de l'intégrale :

$$\int_{[a,b]} g \leqslant \int_{[a,b]} (f+g) - \int_{[a,b]} f$$

c'est-à-dire

$$\int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g \leqslant \int_{[a,b]} (f+g)$$

En procédant de façon analogue avec ψ_1 et ψ_2 en escalier telles que $f \leqslant \psi_1$ et $g \leqslant \psi_2$, on obtient la seconde inégalité, c'est-à-dire :

$$\int_{[a,b]} (f+g) \leqslant \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$$

• Montrons à présent que : $\forall f \in \mathcal{C}_{o,m}([a,b],\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $I(\lambda f) = \lambda I(f)$.

∗ Première étape : $\forall f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $I(\lambda f) = \lambda I(f)$.
Soit $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On distingue trois cas.

▷ On suppose que $\lambda > 0$. Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$. Alors, $\lambda\varphi \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\psi$ et puisque $\lambda\varphi$ et $\lambda\psi$ sont en escalier, on a alors :

$$\int_{[a,b]} \lambda\varphi \leqslant \int_{[a,b]} \lambda f \leqslant \int_{[a,b]} \lambda\psi$$

soit encore, d'après la propriété de linéarité pour l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\lambda \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \lambda f \leqslant \lambda \int_{[a,b]} \psi$$

et donc en multipliant par $\lambda^{-1} > 0$:

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{[a,b]} (\lambda f) \leqslant \int_{[a,b]} \psi$$

Ceci étant vrai pour toutes fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, on a en passant respectivement à la borne supérieure et à la borne inférieure :

$$\sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \\ \varphi \leqslant f}} \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{[a,b]} (\lambda f) \leqslant \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \\ f \leqslant \psi}} \int_{[a,b]} \psi$$

c'est-à-dire

$$\int_{[a,b]} f \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{[a,b]} (\lambda f) \leqslant \int_{[a,b]} f$$

D'où, on a bien $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f = \lambda \int_{[a,b]} f$.

▷ On suppose que $\lambda < 0$. En reprenant la même démarche que dans le cas précédent, si $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, avec φ et ψ en escalier sur le segment $[a,b]$, alors $\lambda\psi \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\varphi$. De façon similaire, on a alors successivement :

$$\lambda \int_{[a,b]} \psi \leqslant \int_{[a,b]} (\lambda f) \leqslant \lambda \int_{[a,b]} \psi$$

Ayant supposé ici $\lambda < 0$,

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{[a,b]} (\lambda f) \leqslant \int_{[a,b]} \psi$$

On conclut alors exactement comme dans le cas précédent que :

$$\int_{[a,b]} (\lambda f) = \lambda \int_{[a,b]} f$$

▷ Enfin, si $\lambda = 0$, alors la propriété est évidente.

∗ Deuxième étape : cas général.
Soient $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b], \mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On note $u = \Re e(f)$, $v = \Im m(f)$, $x = \Re e(\lambda)$ et $y = \Im m(\lambda)$. Alors :

$$\lambda f = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

avec $xu - yv$ et $xv + yu$ à valeurs réelles. Par définition, on a alors :

$$\int_{[a,b]} (\lambda f) = \int_{[a,b]} (xu - yv) + i \int_{[a,b]} (xv + yu)$$

Or, par on a déjà montré que la restriction de l'intégrale à $\mathcal{C}_{0,m}([a,b], \mathbb{R})$ est $\mathbb{R}$-linéaire. On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} (xu - yv) &= x \int_{[a,b]} u - y \int_{[a,b]} v \\ \int_{[a,b]} (xv + yu) &= y \int_{[a,b]} u + x \int_{[a,b]} v \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \lambda f &= (x + iy) \int_{[a,b]} u + (ix - y) \int_{[a,b]} v \\ &= \lambda \int_{[a,b]} u + (x + iy)i \int_{[a,b]} v \\ &= \lambda \left(\int_{[a,b]} u + i \int_{[a,b]} v \right) \\ &= \lambda \int_{[a,b]} f \end{aligned}$$

• Montrons (ii) (ce qui donnera directement (iii) par linéarité de l'intégrale). Soit $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $0 \leqslant f$. Alors la fonction φ_1, nulle sur $[a,b]$, est une fonction en escalier sur $[a,b]$ vérifiant $\varphi_1 \leqslant f$. Par suite,

$$\int_{[a,b]} \varphi_1 \leqslant \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \\ \varphi \leqslant f}} \int_{[a,b]} \varphi$$

c'est-à-dire $0 \leqslant \displaystyle\int_{[a,b]} f$.

⊠

Corollaire 4.2.4.2 *Soit $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{K})$. Alors :* $\left|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

Preuve :

• Si f est à valeurs réelles, le résultat est évident car $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ et par croissance et linéarité de l'intégrale (propriété (iii) de la proposition précédente) :

$$-\int_{[a,b]} |f| \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

Ce qui équivaut à $\left|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

• Si $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{C})$, on pose $r = \left|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right|$ et on fixe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\int_{[a,b]} f = re^{i\theta}$$

On a alors :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = r = \int_{[a,b]} e^{-i\theta} f = \int_{[a,b]} \Re e(e^{-i\theta} f) + i \int_{[a,b]} \Im m(e^{-i\theta} f)$$

Ainsi $\displaystyle\int_{[a,b]} \Im m(e^{-i\theta} f) = 0$ et $r = \int_{[a,b]} \Re e(e^{-i\theta} f)$. Enfin, $g = \Re e(e^{-i\theta} f)$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs réelles et $|g| \leqslant |e^{-i\theta} f| \leqslant |f|$. Par croissance de l'intégrale sur $\mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R})$ et d'après le cas réel, on a alors :

$$\left|\int_{[a,b]} g\right| \leqslant \int_{[a,b]} |g| \leqslant \int_{[a,b]} |f| \text{ c'est-à-dire } \left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

⊠

Proposition 4.2.4.3 (Relation de Chasles) *Soit $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{K})$ et soit $c \in]a,b[$. Alors :*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

Preuve :

Ceci découle des définitions de l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles puis à valeurs complexes et de la relation de Chasles pour les fonctions en escalier.

• Tout d'abord, il faut et il suffit de vérifier cette relation de Chasles pour les fonctions à valeurs réelles. Exercice : le vérifier.

• Ensuite, si $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R})$, soient φ_1 et φ_2 en escalier sur $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement, telles que : $\varphi_1 \leqslant f_{|_{[a,c]}}$ et $\varphi_2 \leqslant f_{|_{[c,b]}}$. Alors φ définie sur $[a,b]$ par $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ si $x \in [a,c]$ et $\varphi_2(x)$ sinon, est en escalier sur $[a,b]$ et vérifie $\varphi \leqslant f$. Par suite :

$$\int_{[a,c]} \varphi_1 + \int_{[c,b]} \varphi_2 = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi = \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} f$$

Ceci étant vrai pour toute fonction φ_1 (respectivement φ_2) en escalier sur $[a,c]$ (respectivement $[c,b]$) telle que $\varphi_1 \leqslant f_{|_{[a,c]}}$ (respectivement telle que $\varphi_2 \leqslant f_{|[c,b]}$), on peut passer à la borne supérieure, ce qui donne :

$$\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} f$$

En raisonnant de la même façon avec des fonctions ψ_1 en escalier sur $[a,c]$ et ψ_2 en escalier sur $[c,b]$ telles que $f_{|_{[a,c]}} \leqslant \psi_1$ et $f_{|_{[c,b]}} \leqslant \psi_2$, on obtient :

$$\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

⊠

Notations : lorsque f est continue par morceaux sur tout segment inclus dans l'intervalle I et $\alpha, \beta \in I$, on pose :

$$\int_\alpha^\beta f = \begin{cases} \displaystyle\int_{[\alpha,\beta]} f & \text{si } \alpha < \beta \\ 0 & \text{si } \alpha = \beta \\ \displaystyle -\int_{[\beta,\alpha]} f & \text{si } \alpha > \beta \end{cases}$$

Proposition 4.2.4.4 *Avec cette nouvelle convention, si f est continue par morceaux sur tout segment inclus dans l'intervalle I et à valeurs réelles ou complexes, alors :*

$$\forall (a,b,c) \in I^3 \ , \ \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Preuve :

La démonstration (ou vérification) est laissée en exercice. ⊠

4.2.5 Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

Théorème 4.2.5.1 (Inégalité de la moyenne) *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors :*

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \times \int_{[a,b]} |g|$$

Preuve :

• Tout d'abord, on peut remarquer que $\sup\limits_{[a,b]} |f|$ est bien défini (dans $\mathbb{R}$) puisqu'on a déjà vu qu'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ est bien bornée sur $[a,b]$.

• Ensuite, pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)g(x)| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \ \times \ |g(x)|$. S'agissant de fonctions à valeurs réelles, on a, par croissance et linéarité de l'intégrale et d'après l'inégalité établie auparavant :

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a,b]} fg \right| &\leqslant \int_{[a,b]} |fg| \\ &\leqslant \int_{[a,b]} \left(\sup_{[a,b]} |f| \times |g| \right) \\ &\leqslant \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g| \end{aligned}$$

⊠

Exercice 4.2.5.2 Soient f continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles et g continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles avec $g \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_{[a,b]} fg = f(c) \times \int_{[a,b]} g$$

Corollaire 4.2.5.3 *En particulier, si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, alors :*

(i) $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant (b-a) \times \sup_{[a,b]} |f|$;

(ii) si f est à valeurs réelles, alors : $(b-a) \times \inf_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant (b-a) \times \sup_{[a,b]} f$

Preuve :

• Pour la première inégalité, il suffit de choisir $g = 1$ et d'appliquer l'inégalité de la moyenne.

• Pour la seconde, on remarque que $\inf_{[a,b]} f \leqslant f \leqslant \sup_{[a,b]} f$. D'où :

$$(b-a) \times \inf_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \inf_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} \sup_{[a,b]} f = (b-a) \times \sup_{[a,b]} f$$

⊠

Définition 4.2.5.4 Soit $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R})$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le nombre :

$$\mu(f) = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f$$

Exercice 4.2.5.5 Interpréter graphiquement la valeur moyenne d'une fonction f.

Exercice 4.2.5.6 Calculer la valeur moyenne de cosinus et sinus sur une période (on pourra utiliser des « primitives » pour le calcul même si cela n'a pas encore été démontré).

Exercice 4.2.5.7 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$.

1. Montrer que si f est continue sur $[a,b]$ et à valeurs réelles, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $\mu(f) = f(c)$.
2. Le résultat est-il encore valable si f est continue et à valeurs complexes ?
3. Le résultat est-il encore valable si f est continue par morceaux et à valeurs réelles ?

Remarque : *en physique, on est souvent amené à plutôt considérer la valeur moyenne quadratique (puisque les valeurs moyennes sont nulles) définie par :*

$$\mu_2(f) = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} |f|^2}$$

4.2.6 Cas des fonctions continues : produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 4.2.6.1 *Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Alors :*

$$\left(\int_{[a,b]} f = 0\right) \implies f = 0$$

Preuve :

On raisonne par contraposée. Si $f \neq 0$, alors il existe au moins un point $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$. Alors, par continuité de f en c, il existe un voisinage fermé V de c tel que :

$$\forall x \in V \cap [a,b] \ , \ f(x) \geqslant \frac{1}{2} f(c)$$

On pose :

$$\forall x \in [a,b] \ , \ \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(c) & \text{si } x \in V \cap [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, par construction, $\varphi \leqslant f$ sur $[a,b]$ (et φ est en escalier) donc :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} f \quad \text{et donc} \quad 0 < \frac{\ell(V \cap [a,b])}{2} f(c) \leqslant \int_{[a,b]} f$$

où $\ell(V \cap [a,b])$ est la longueur de l'intervalle $V \cap [a,b]$ et est donc strictement positif.

⊠

⚠ **Attention :** le résultat est très faux si on retire l'hypothèse f positive sur $[a,b]$. Par exemple, $\displaystyle\int_{[-1,1]} x \, \mathrm{d}x = 0$ mais $x \longmapsto x$ n'est pas identiquement nulle sur $[-1,1]$.

⚠ **Attention :** le résultat est très faux sans l'hypothèse de continuité. Par exemple, la fonction δ_0 sur le segment $[0,1]$ (fonction identiquement nulle sur $]0,1]$ et qui vaut 1 en 0) est continue par morceaux, positive sur $[0,1]$ et d'intégrale nulle (par définition).

Remarques :

- *dans la pratique, on utilise beaucoup la contraposée (comme dans la preuve) pour déterminer le signe de l'intégrale ;*
- *on verra une preuve plus simple lorsqu'on aura étudié les propriétés de $x \longmapsto \int_{[a,x]} f$.*

Définition 4.2.6.2 On définit l'application :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a,b]} fg \end{array}$$

On pose alors $\varphi(f,g) = (f|g)$, qu'on appelle produit scalaire usuel de f et g.

Proposition 4.2.6.3 *L'application φ vérifie les axiomes d'un produit scalaire, c'est-à-dire :*

(i) φ est bilinéaire : pour tout $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda f_1 + \mu f_2, g) = \lambda\varphi(f_1,g) + \mu\varphi(f_2,g) \;\text{ et }\; \varphi(f, \lambda_1 g_1 + \mu g_2) = \lambda\varphi(f,g_1) + \mu\varphi(f,g_2)$$

(ii) φ est symétrique :

$$\forall f,g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \;,\; (f|g) = (g|f)$$

(iii) φ est positive :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \;,\; (f|f) \geqslant 0$$

(iv) φ est définie :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \;,\; \Big((f|f) = 0 \Longrightarrow f = 0\Big)$$

Preuve :

- (i) est une conséquence directe de la bilinéarité de la multiplication de deux fonctions et de la linéarité de l'intégrale.
- (ii) est clair puisque $f \times g = g \times f$.
- (iii) est une conséquence directe de la positivité de l'intégrale.
- La propriété (iv) est le résultat de la proposition précédente.

⊠

Théorème 4.2.6.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Alors :*

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leqslant \sqrt{\int_{[a,b]} f^2} \times \sqrt{\int_{[a,b]} g^2} \quad \textit{ou encore} \quad \left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leqslant \int_{[a,b]} f^2 \times \int_{[a,b]} g^2$$

De plus, il y a égalité si et seulement si (f,g) est une famille liée.

Preuve :

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.

• Si $g = 0$, alors l'inégalité est évidente (et c'est même une égalité).

• On suppose donc que $g \neq 0$ et on pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ P(t) = \int_{[a,b]} (f+tg)^2$$

∗ Par positivité de l'intégrale, on a : $\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ P(t) \geqslant 0$.

∗ Par ailleurs par linéarité de l'intégrale,

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ P(t) = \left(\int_{[a,b]} g^2\right) t^2 + 2\left(\int_{[a,b]} fg\right) t + \int_{[a,b]} f^2$$

Or, g^2 est continue, positive et non nulle donc $\displaystyle\int_{[a,b]} g^2 \neq 0$. Par suite, P est une fonction polynomiale du second degré.

∗ Puisque P est positive, on en déduit que P admet au plus une racine réelle. Par suite, son discriminant Δ est négatif ou nul, c'est-à-dire :

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leqslant \int_{[a,b]} f^2 \times \int_{[a,b]} g^2$$

D'où l'inégalité voulue.

• Par ailleurs, il y a égalité si et seulement si $g = 0$ ou bien $\Delta = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $g = 0$ ou bien il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(t_0) = 0$. Or,

$$P(t_0) = 0 \iff \int_{[a,b]} (f+t_0 g)^2 = 0 \iff f + t_0 g = 0$$

puisque le produit scalaire est défini-positif. Ainsi, il y a égalité si et seulement si (f, g) est une famille liée.

⊠

Remarques :

- *l'inégalité de Cauchy-Schwarz reste vraie pour f, g continues par morceaux (la démonstration est identique). En revanche, le cas d'égalité n'est plus vrai ;*
- *cette inégalité est en fait valable pour toute forme bilinéaire, symétrique et positive (le cas d'égalité étant vrai si on rajoute définie-positive) et la démonstration est identique à celle donnée ci-dessus (voir le chapitre 9 : espaces euclidiens) ;*
- *si on pose $||f||_2 = \sqrt{(f|f)}$ (appelé norme 2 de f), l'application $||.||_2$ vérifie les axiomes des normes, à savoir : définie-positive, homogénéité et inégalité triangulaire. On reverra cela dans le cours de mathématiques spéciales 1.*

4.3 Approximation de l'intégrale

4.3.1 Sommes de Riemann

Définition 4.3.1.1 Soit f une application définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère $\sigma = [a_k]_{0\leqslant k\leqslant n}$, la subdivision régulière de $[a,b]$ définie par $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, et on se donne $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \ , \ \xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$$

On appelle somme de Riemann de f associée à (σ, ξ) le nombre :

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)f(\xi_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$$

Exemple 4.3.1.2 Soit $f : x \longmapsto x+1$ sur l'intervalle $[0,1]$. Alors :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{k}{n} + 1)$$

est une somme de Riemann de f associée à la subdivision régulière de $[0,1]$ et aux points $(\frac{k}{n})_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.

Exercice 4.3.1.3 Calculer la limite de (S_n). Quel lien y-a-t-il avec l'intégrale ?

Exemple 4.3.1.4 Pour $n \geqslant 1$, la somme $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$ est une somme de Riemann de la fonction f associée à la subdivision régulière de $[0,1]$ et aux points $(\frac{k}{n} + \frac{1}{2n})_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.

Théorème 4.3.1.5 *Pour tout $n \geqslant 1$, on se donne $\sigma_n = [a_{0,n}, \cdots, a_{n,n}]$ la subdivision régulière de $[a,b]$ et un élément $\xi_n = (\xi_{0,n}, \cdots, \xi_{n-1,n}) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \ , \ \forall k \in [\![0, n-1]\!] \ , \ \xi_{k,n} \in [a_{k,n}, a_{k+1,n}]$$

Alors, pour toute f fonction continue sur $[a,b]$, la suite des sommes de Riemann associées à (σ_n, ξ_n) converge et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k,n})\right) = \lim_{n\to+\infty} S(f,\sigma_n,\xi_n) = \int_{[a,b]} f$$

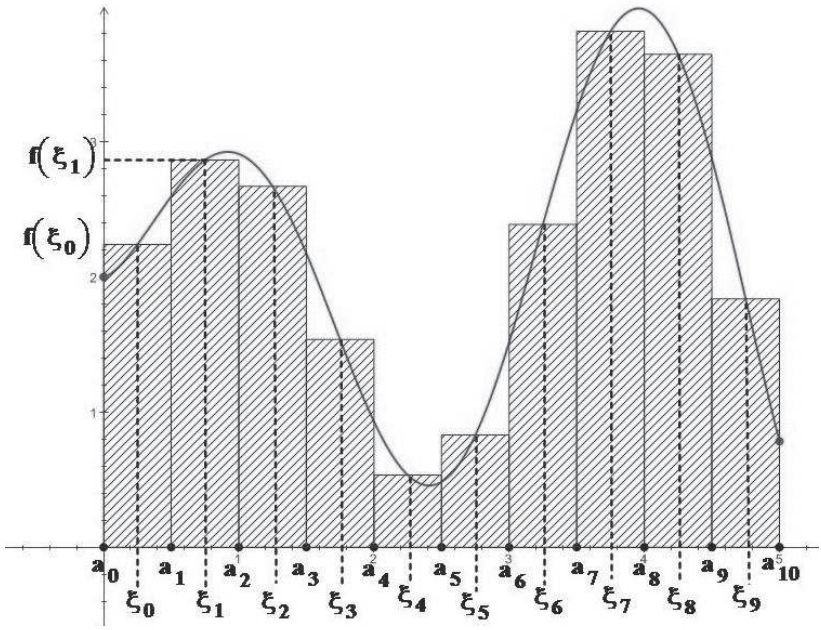
Remarques importantes et extension du théorème :

- *on écrira souvent* $\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) = \int_{[a,b]} f$*, c'est-à-dire qu'on ne précisera pas que les nombres* ξ_k *dépendent aussi de* n *;*
- *en fait, le résultat reste vrai pour une subdivision* $\sigma = [a_0, \cdots, a_n]$ *quelconque de* $[a, b]$ *dont le pas, c'est-à-dire* $\max(a_{k+1} - a_k)$*, tend vers zéro quand* n *tend vers l'infini ;*
- *le théorème s'applique aussi lorsque* f *est seulement continue par morceaux. Une démonstration dans le cas général (c'est-à-dire* f *continue par morceaux et une subdivision quelconque) est proposée en annexe pour les étudiants intéressés ;*
- *dans la pratique, on aura des sommes de Riemann de la forme :*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k(b-a)}{n})$$

Vous pouvez utiliser ces résultats généraux dans les exercices.

Interprétation graphique : la somme de Riemann de f associée à σ et à $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_{n-1})$ est la somme des aires algébrique des rectangles de longueur $f(\xi_k)$ et de largeur $a_{k+1} - a_k$:



Preuve du théorème :

On conserve les notations et les hypothèses du théorème.
• Tout d'abord, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a d'après la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_{k,n}}^{a_{k+1,n}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Par ailleurs, on a pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_{k+1,n} - a_{k,n} = \frac{b-a}{n}$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\left| S(f,\sigma_n,\xi_n) - \int_{[a,b]} f \right| &= \left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k,n}) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[a_{k,n},a_{k+1,n}]} f \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1,n}\text{-}a_{k,n}) f(\xi_{k,n}) \text{-} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[a_{k,n},a_{k+1,n}]} f \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_{k,n}}^{a_{k+1,n}} f(\xi_{k,n})\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_{k,n}}^{a_{k+1,n}} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_{k,n}}^{a_{k+1,n}} |f(\xi_{k,n}) - f(x)|\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

• Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, elle est uniformément continue sur $[a,b]$ d'après le théorème de Heine. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2 \ , \ \left(\ |x-y| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \right)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} = 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \frac{b-a}{n} \leqslant \alpha$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $n \geqslant n_0$. On a alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $0 \leqslant a_{k+1,n} - a_{k,n} \leqslant \alpha$ et $\xi_{k,n} \in [a_{k,n}, a_{k+1,n}]$. Par conséquent, $\forall x \in [a_{k,n}, a_{k+1,n}] \ , \ |x - \xi_{k,n}| \leqslant \alpha$. Il s'ensuit que :

$$\forall x \in [a_{k,n}, a_{k+1,n}] \ , \ |f(\xi_{k,n}) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{a_{k,n}}^{a_{k+1,n}} |f(\xi_{k,n}) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{a_{k,n}}^{a_{k+1,n}} \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}x$$

c'est-à-dire

$$\int_{a_{k,n}}^{a_{k+1,n}} |f(\xi_{k,n}) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\left|S(f,\sigma_n,\xi_n)-\int_{[a,b]}f\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_{k,n}}^{a_{k+1,n}}|f(\xi_{k,n})-f(x)|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{n}\\ &\leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

Ainsi, on a prouvé que :

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ ,\ \forall n\geqslant n_0\ ,\ \left|S(f,\sigma_n,\xi_n)-\int_{[a,b]}f\right|\leqslant\varepsilon$$

Ce qui prouve que la suite des sommes de Riemann de f converge vers l'intégrale de f sur $[a,b]$. ⊠

Exemple 4.3.1.6 On pose pour $n\geqslant 1$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$. Alors, pour tout $n\geqslant 1$:

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

On reconnaît donc une somme de Riemann de $f:x\longmapsto\frac{1}{1+x}$ associée à la subdivision régulière $[0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1]$ de $[0,1]$ et à $\xi_n=(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n}{n})$. Puisque f est continue sur $[0,1]$, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2$$

Exercice 4.3.1.7 Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

On peut aussi parfois utiliser les sommes de Riemann pour déterminer des équivalents de certaines sommes partielles de séries.

Exemple 4.3.1.8 On considère la série (S_n) de terme général $u_n=\sqrt{n}$. Alors pour tout entier $n\geqslant 1$,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=n\sqrt{n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

Or, $f:x\longmapsto\sqrt{x}$ est continue sur $[0,1]$. Par suite, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\neq 0$. Ce qui permet donc de conclure que $S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{3}n\sqrt{n}$.

4.3.2 Méthode des rectangles pour approcher une intégrale

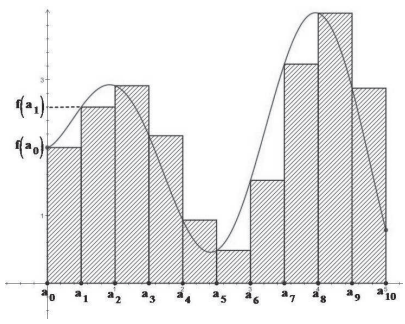
Proposition 4.3.2.1 (Définition) *Soit f continue (ou continue par morceaux) sur $[a,b]$. Alors les suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ respectivement définies par :*

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star\ ,\ S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\quad et\quad T_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

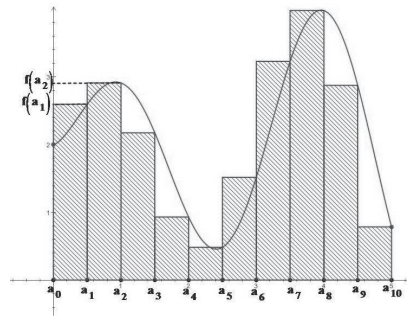
convergent vers $\displaystyle\int_{[a,b]} f$. On dit que S_n (respectivement T_n) est une valeur approchée de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ par la méthode des rectangles à gauche (respectivement à droite).

Preuve :

C'est évident puisque ce sont les suites des sommes de Riemann de f associées aux subdivisions régulières de $[a,b]$. ⊠



Méthode des rectangles à gauche



Méthode des rectangles à droite

Proposition 4.3.2.2 *Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors, pour tout entier $n\geqslant 1$, on a :*

$$\left|\int_{[a,b]} f-S_n\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{2n}\times\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$$

et

$$\left|\int_{[a,b]} f-T_n\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{2n}\times\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$$

Par conséquent, $S_n=\displaystyle\int_{[a,b]} f+O\left(\frac{1}{n}\right)$ et $T_n=\displaystyle\int_{[a,b]} f+O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Preuve :

Pour démontrer cela, il nous manque une propriété que l'on va admettre maintenant et qui sera démontrée dans le paragraphe suivant. On admet provisoirement que si f est continue sur l'intervalle I et $a \in I$, alors $F : x \longmapsto \int_{[a,x]} f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F' = f$.

Dans notre cas, puisqu'on suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a alors pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$|F(a_{k+1}) - F(a_k) - (a_{k+1} - a_k)F'(a_k)| \leqslant \frac{(a_{k+1} - a_k)^2}{2} \sup_{x \in [a_k, a_{k+1}]} |F''(x)|$$

Or, $F' = f$, $F'' = f'$ et $\sup\limits_{x \in [a_k, a_{k+1}]} |F''(x)| \leqslant \sup\limits_{x \in [a,b]} |F''(x)|$. Par suite,

$$\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(a_k) \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(a_k) \right) \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(a_k) \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| \\
&\leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|
\end{aligned}$$

Pour les rectangles à droite, on procède exactement de la même façon mais en appliquant la formule de Taylor au point a_{k+1} au lieu de a_k. ⊠

Remarque : *on dispose aussi de la méthode du point milieu. Celle-ci consiste à approcher l'intégrale par la suite définie par :*

$$\forall n \geqslant 1\ ,\ M_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2} \right)$$

On verra en exercice, et c'est un peu plus subtil, que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, alors :

$$\left| \int_{[a,b]} f - M_n \right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^2} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

4.3.3 Méthodes des trapèzes

Proposition 4.3.3.1 *Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors, la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :*

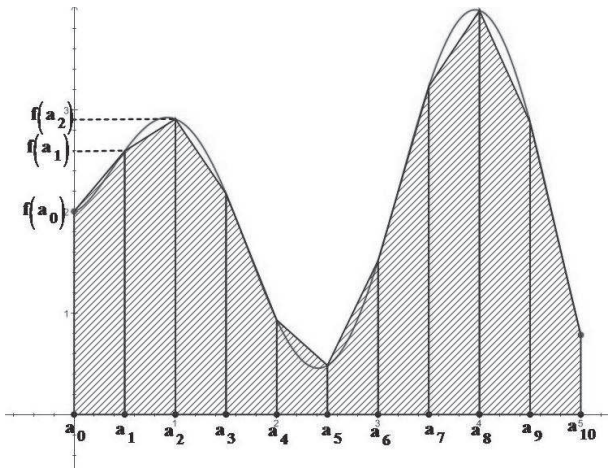
$$\forall n \geqslant 1 \ , \ U_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a+k\frac{b-a}{n}) + f(a+(k+1)\frac{b-a}{n})}{2}$$

converge vers $\int_{[a,b]} f$. On dit que U_n est une valeur approchée de $\int_{[a,b]} f$ par la méthode des trapèzes.

Preuve :

C'est clair car pour tout entier $n \geqslant 1$, $U_n = \frac{1}{2}(S_n + T_n)$. ⊠

Interprétation graphique :



Méthode des trapèzes pour le calcul de $\int_{[a,b]} f$

Proposition 4.3.3.2 *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour tout entier $n \geqslant 1$:*

$$\left| \int_{[a,b]} f - U_n \right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Preuve :

On reprend la même démarche que pour la méthode des rectangles. On note donc $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{[a,x]} f$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, F est de classe [1] $\mathcal{C}^3$.

• Soient α et β deux réels dans $[a, b]$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$F(\beta) = F(\alpha) + (\beta-\alpha)F'(\alpha) + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2F''(\alpha) + \int_\alpha^\beta \frac{(\beta-t)^2}{2}F^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t$$

soit encore

$$F(\beta) - F(\alpha) = (\beta-\alpha)f(\alpha) + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2f'(\alpha) + \int_\alpha^\beta \frac{(\beta-t)^2}{2}f''(t)\,\mathrm{d}t$$

En échangeant les rôles de α et β, on a également :

$$F(\alpha) - F(\beta) = (\alpha-\beta)f(\beta) + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2f'(\beta) + \int_\beta^\alpha \frac{(\alpha-t)^2}{2}f''(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarquez qu'il est parfaitement logique d'écrire ces deux formules car dans la méthode des trapèzes, les rôles de « a_k » et « a_{k+1} » sont symétriques. En faisant la différence de ces deux égalités, et en simplifiant, on obtient donc :

$$2\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = (\beta-\alpha)(f(\alpha)+f(\beta)) + R(\alpha,\beta)$$

avec

$$R(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2(f'(\beta)-f'(\alpha)) + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)\left((\beta-t)^2+(\alpha-t)^2\right)\,\mathrm{d}t$$

Puisque f' est de classe $\mathcal{C}^1$, $f'(\beta)-f'(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f''(t)\,\mathrm{d}t$. Par suite,

$$\begin{aligned}
R(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)\left((\beta-t)^2+(\alpha-t)^2\right)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\beta-\alpha)^2f''(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)\left((\beta-t)^2+(\alpha-t)^2-(\beta-\alpha)^2\right)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)\left(2t^2-2(\alpha+\beta)t+2\alpha\beta\right)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta)f''(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

1. voir paragraphe suivant.

Il s'ensuit que pour $\alpha < \beta$, on a :

$$\begin{aligned}
|R(\alpha,\beta)| &= \left|\int_\alpha^\beta (t-\alpha)(t-\beta)f''(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_{\alpha'}^{\beta'} |(t-\alpha)(t-\beta)| \times |f''(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f''(t)| \times \int_{\alpha'}^{\beta'} (t-\alpha)(\beta-t)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \times \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f''(t)| \\
&\leqslant \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \times \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|
\end{aligned}$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. En choisissant $\alpha = a_k$ et $\beta = a_{k+1}$ dans le raisonnement précédent, on obtient :

$$\left|2\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\left(f(a_k)+f(a_{k+1})\right)\right| \leqslant \frac{1}{6n^3}(b-a)^3 \times \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|$$

soit encore

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{12n^3}(b-a)^3 \times \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|$$

Alors, en appliquant l'inégalité triangulaire et en sommant, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t) - U_n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right)\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{12n^3}(b-a)^3 \times \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)| \\
&\leqslant \frac{1}{12n^2}(b-a)^3 \times \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|
\end{aligned}$$

⊠

Remarque : *en fait, dans ces méthodes, il s'agit d'approximer f par une fonction polynomiale sur chacun des intervalles $[a_k, a_{k+1}]$.*

- *Dans la méthode des rectangles, il s'agit d'approcher f par une fonction polynomiale P_0 de degré 0 (constante), soit égale à f en a_k (méthode des rectangles à gauche), soit égale à f en a_{k+1} (méthode des rectangles à droite).*

- *Dans la méthode des trapèzes, il s'agit d'approcher f par une fonction polynomiale P_1 de degré 1 qui est égale à f aux points a_k et a_{k+1}. On peut expliciter P_1 directement ou bien plus généralement à l'aide des polynômes d'interpolation de Lagrange*[1] *:*

$$\begin{aligned}\forall x \in [a_k, a_{k+1}] \ , \ P(x) &= f(a_k)L_0(x) + f(a_{k+1})L_1(x) \\ &= f(a_k) + \frac{f(a_{k+1}) - f(a_k)}{a_{k+1} - a_k}(x - a_k)\end{aligned}$$

où L_0 et L_1 sont les polynômes de Lagrange associés à (a_k, a_{k+1}). Pour rappel,

$$L_0 = \frac{X - a_1}{a_0 - a_1} \ \text{ et } \ L_1 = \frac{X - a_0}{a_1 - a_0}$$

La question dans ces méthodes d'approximation de l'intégrale est donc en réalité liée à contrôler l'erreur entre f et l'approximation faite à l'aide des polynômes d'interpolation de Lagrange. Or, on peut démontrer que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et si $(x_0, \cdots, x_n)$ sont $n+1$ points distincts de $[a, b]$, alors :

$$\forall x \in [a, b] \ , \ \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}| \times \prod_{k=0}^{n} |x - a_k|$$

- *Dans la méthode des rectangles, on a un seul point. Cette approximation s'écrit donc :*

$$\forall x \in [a_k, a_{k+1}] \ , \ |f(x) - f(a_k)| \leqslant |x - a_k| \times \sup |f'|$$

En remarquant que $(a_{k+1} - a_k)f(a_k) = \displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k)\,\mathrm{d}t$, on a alors :

$$\begin{aligned}\left| \int_{a^k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - (a_{k+1} - a_k)f(a_k) \right| &= \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k))\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_{a_k}^{a_{k+1}} |t - a_k| \sup |f'|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sup |f'| \times \int_{a_k}^{a_{k+1}} |t - a_k|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On retrouve donc bien l'estimation de l'erreur trouvée dans la proposition 4.3.2.2.

- *Dans la méthode des trapèzes, on a deux points. On a donc pour tout $x \in [a_k, a_{k+1}]$:*

$$|f(x) - f(a_k)L_0(x) + f(a_{k+1})L_1(x)| \leqslant \frac{1}{2} \sup |f''| \times |(x - a_k)(x - a_{k+1})|$$

Or, $x \longmapsto f(a_k)L_0(x) + f(a_{k+1})L_1(x)$ est affine sur $[a_k, a_{k+1}]$, égale à $f(a_k)$ en a_k et à $f(a_{k+1})$ en a_{k+1}. On en déduit que l'aire algébrique sous cette courbe est l'aire du trapèze, c'est-à-dire :

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(a_k)L_0(x) + f(a_{k+1})L_1(x))\,\mathrm{d}x = (a_{k+1} - a_k) \times \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$$

1. voir cours de mathématiques supérieures 1 : exercice 7.7.21.

En procédant de même que dans la méthode des rectangles, on conclut donc que :

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) - \frac{b-a}{n} \times \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)| \times \int_{a_k}^{a_{k+1}} |(x-a_k)(x-a_{k+1})|\,\mathrm{d}x$$

En faisant le calcul explicit de l'intégrale, on retrouve donc l'inégalité :

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) - \frac{b-a}{n} \times \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| \leqslant \frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{12} \times \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|$$

c'est-à-dire :

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) - \frac{b-a}{n} \times \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^3} \times \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|$$

Et on retrouve donc exactement le même résultat que dans la preuve de la proposition 4.3.3.2.

Ainsi, on constate que tout repose en réalité sur l'estimation de l'erreur commise par l'approximation polynomiale par les polynômes d'interpolation de Lagrange et la fonction : c'est l'objet de l'exercice qui suit.

Exercice 4.3.3.3 Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{K})$ et soient $x_0, \cdots x_n$ des points de $[a,b]$, deux à deux distincts. On note $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $(x_0,\cdots,x_n)$. On rappelle que par définition :

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\ ,\ L_k \in \mathbb{K}_n[X] \qquad \text{et} \qquad \forall (k,j) \in [\![0,n]\!]\ ,\ L_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

1. On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on fixe $x \in [a,b] \setminus \{x_0,\cdots,x_n\}$. On pose alors :

$$\forall t \in [a,b]\ \ ,\ \varphi(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(t) - \lambda \prod_{k=0}^{n} \frac{t-x_k}{x-x_k}$$

   (a) Déterminer la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = 0$.

   (b) Montrer que φ s'annule $n+2$ fois sur $[a,b]$.

   (c) En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\lambda = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \times \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$.

   (d) En déduire que : $\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x)\right| \leqslant \dfrac{\sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} \times \prod_{k=0}^{n} |x-x_k|$.

   (e) Le résultat est il-encore valable si $x \in \{x_0,\cdots,x_n\}$?

2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on fixe $x \in [a,b] \setminus \{x_0,\cdots,x_n\}$.

   (a) Pourquoi la démonstration précédente n'est-elle plus valable ?

   (b) Soient $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que : $|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x)| = re^{i\theta}$. En vous inspirant de la preuve du corollaire 4.2.4.2 et en utilisant le cas réel (question 1), montrer que le résultat est encore vrai pour f à valeurs complexes.

4.4 Intégration et dérivation

Dans cette partie, on va démontrer les résultats importants (que vous connaissez déjà) qui relient intégrale et primitive. Bien que vous connaissiez déjà ce résultat, rappelez-vous que ce n'est pas si évident que cela si on part de la définition de l'intégrale comme borne supérieure (ou borne inférieure).

4.4.1 Primitive d'une fonction continue

Définition 4.4.1.1 Soit f une fonction définie sur l'intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque : *la condition « I est un intervalle » n'est pas nécessaire dans la définition. On peut aussi prendre une réunion d'intervalles mais pour éviter des confusions importantes, on se place toujours sur un intervalle. On reverra cela dans les exemples et propriétés simples qui suivent.*

Exemple 4.4.1.2 La fonction $x \longmapsto \sin(x)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction cosinus.

Exemple 4.4.1.3 La fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ admet

$$F : x \longmapsto \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

pour primitive sur $\mathbb{R}$. En effet, il est évident que F est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et que $F' = f$ sur $\mathbb{R}^\star$. De plus, puisque $F(x) \underset{x\to 0}{=} O(x^2) \underset{x\to 0}{=} o(x)$, F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0 = f(0)$.

Exemple 4.4.1.4 La fonction partie entière n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$. En effet, si elle admet une primitive f, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = E$. Alors :

- f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et f' admet une limite (finie) en 1^- qui est 0 (puisque la partie entière est constante égale à 0 sur $]0,1[$). D'après le théorème de prolongement (proposition 1.3.6.1), f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = 0$.
- Puisque f est dérivable en 1, $0 = f'_g(1) = f'(1) = E(1) = 1$. Ce qui est absurde.

Remarque : *pour la partie entière, on dispose d'une autre façon très simple de justifier qu'elle n'admet pas de primitive : c'est le théorème de Darboux (exercice 1.8.23) qui affirme que toute fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

⚠ **Attention :** les exemples précédents montrent qu'une fonction non continue peut ou non admettre une primitive !

Proposition 4.4.1.5 *Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :*

$$\forall x \in I \ , \ F(x) = G(x) + \lambda$$

Preuve :

C'est évident car $(F - G)' = 0$ sur un intervalle. ⊠

4.4.2 Fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque

Définition 4.4.2.1 Soit I un intervalle quelconque. On dit qu'une application $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur l'intervalle I si pour tout segment $[a, b] \subset I$, $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.
On note $\mathcal{C}_{0,m}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

⚠ **Attention :** une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque (c'est-à-dire sur un intervalle qui n'est pas un segment) peut admettre une infinité de points de discontinuité (voir les exemples ci-dessous). En revanche, dans tout segment inclus dans l'intervalle I, il n'y en a qu'un nombre fini ! Ceci permet de montrer qu'elle a un nombre dénombrable [1] de points de discontinuité.

Exemple 4.4.2.2 La partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ puisque tout segment de $\mathbb{R}$ ne contient qu'un nombre fini d'entiers.

Exercice 4.4.2.3 Soit f définie par : $\forall x > 0 \ , \ f(x) = x^2 E(\frac{1}{x})$.

1. Montrer que f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f se prolonge par continuité en 0. On note $\tilde{f}$ ce prolongement.
3. $\tilde{f}$ est-elle continue par morceaux sur $[0, +\infty[$?
4. Commentaires ?

On montre directement la proposition suivante (exercice : le faire).

Proposition 4.4.2.4 *L'ensemble $\mathcal{C}_{0,m}(I, \mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$-algèbre.*

1. voir le paragraphe 5.5.1.

4.4.3 Intégrale de la borne supérieure et théorème fondamental

Théorème 4.4.3.1 (théorème fondamental de l'analyse) *Soient I un intervalle réel quelconque et $a \in I$.*

(i) Si $f \in \mathcal{C}_{0,m}(I, \mathbb{K})$, alors la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{[a,x]} f(t)\,\mathrm{d}t$:

- *est continue sur I ;*
- *est dérivable en tout point $x_0 \in I$ où f est continue et $F'(x_0) = f(x_0)$;*
- *admet en tout point $x_0 \in I$ une dérivée à droite et à gauche (lorsque cela a un sens) qui sont :*

$$F'_g(x_0) = f(x_0^-) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \quad \text{et} \quad F'_d(x_0) = f(x_0^+) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

(ii) Si f est continue sur I,

- *$F : x \longmapsto \displaystyle\int_{[a,x]} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et est l'unique primitive de f qui s'annule en a ;*
- *pour tout $x \in I$, et toute primitive G de f sur I, $\displaystyle\int_{[a,x]} f(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(a)$.*

En particulier, on vient de montrer que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Preuve :

• Montrons (i). On suppose que f est continue par morceaux sur I.

∗ Tout d'abord, on peut remarquer que F est bien définie car si $x \in I$, alors $[a, x] \cup [x, a] \subset I$ (par définition d'un intervalle) et f est encore continue par morceaux sur le segment $[a, x] \cup [x, a]$.

∗ Montrons que F est continue sur I.
Soit J un segment inclus dans I. Puisque f est continue par morceaux sur le segment J, f est bornée sur J. Par suite,

$$\forall x, y \in J\ ,\ |F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{[x,y]\cup[y,x]} |f| \leqslant \sup_{t \in J} |f(t)| \times |y - x|$$

Par suite, F est lipschitzienne sur J et donc, continue sur J. F est donc continue sur tout segment $J \subset I$: on en déduit que F est continue sur I.

∗ Montrons que F est dérivable à droite (respectivement à gauche) en tout point $x \in I$ tel que $x \neq \sup I$ (respectivement $x \neq \inf I$).

Soit $x_0 \in I$ tel que $x_0 \neq \sup I$. Montrons que F est dérivable à droite en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0^+)$ où l'on note $f(x_0^+) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \alpha] \ , \ |f(x) - f(x_0^+)| \leqslant \varepsilon$$

Alors, pour tout $x \in I \cap]x_0, x_0 + \alpha]$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0^+) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(x_0^+)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0^+)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \epsilon \end{aligned}$$

Ceci montre que :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0^+)$$

c'est-à-dire F est dérivable à droite en x_0 et $F'_d(x_0) = f(x_0^+)$.

$*$ On montre de la même façon que F est dérivable à gauche en tout point $x_0 \in I$ tel que $x_0 \neq \inf I$ et que de plus, $F'_g(x_0) = f(x_0^-)$.

$*$ Supposons enfin que f soit continue en $x_0 \in I$. Si $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, alors d'après ce qui précède,

- ▷ F est dérivable à droite et à gauche en x_0 ;
- ▷ $F'_d(x_0) = f(x_0^+) = f(x_0) = f(x_0^-) = F'_g(x_0)$.

Par suite, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.
Si $x_0 = \sup I$ (et donc $x_0 = \max I$) ou $x_0 = \inf I$, alors le résultat est déjà montré (on ne peut calculer la limite à gauche en $x_0 = \max I$ et à droite en $x_0 = \min I$).

• Montrons (ii).

$*$ Si f est continue sur I, alors d'après (i), F est dérivable sur I et $F' = f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. D'où, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, $F' = f$ et $F(a) = 0$.

$*$ Soit G une autre primitive de f sur I. Alors, d'après la proposition 4.4.1.5, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $G = F + \lambda$. Il s'ensuit que :

- ▷ d'une part, $\forall x \in I \ , \ \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a) = G(x) - G(a)$;
- ▷ et d'autre part, $G(a) = 0 \iff \lambda = 0 \iff G = F$, c'est-à-dire que F est bien l'unique primitive de f qui s'annule en a. ⊠

Corollaire 4.4.3.2 *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $a, b \in I$, alors*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve :

C'est clair ! ⊠

Ce théorème fondamental a pour conséquence que les calculs d'intégrales sont donc bien les mêmes que ceux que vous avez appris avant. Dans les cas pratiques simples, il s'agit donc d'un simple calcul de primitive.

Exercice 4.4.3.3 Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$.

⚠ **Attention :** on reverra à la fin de ce chapitre qu'il ne faut pas oublier de vérifier que la fonction intégrée est bien continue par morceaux sur l'intervalle. Par exemple, une erreur classique et très grave est de faire le calcul suivant :

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln|x|]_{-1}^1 = 0 \quad \textit{HORREUR !!!}$$

Ceci n'a pas de sens actuellement car la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1, 1]$! On reverra que cela n'a pas de sens de toute façon, même dans le cadre des intégrales généralisées.

Corollaire 4.4.3.4 *Soit I un intervalle réel. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.*

Preuve :

Puisque $f \in \mathcal{C}^n \subset \mathcal{C}^0$, F est dérivable et $F' = f$. Par suite, F' est de classe $\mathcal{C}^n$, c'est-à-dire F est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. ⊠

Exercice 4.4.3.5 Soient f une fonction continue sur l'intervalle I, u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle J et à valeurs dans I. On considère alors la fonction g définie par :

$$\forall x \in J\ ,\ g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que g est dérivable sur J et calculer g'.

4.5 Calcul d'intégrales et de primitives

Dans ce paragraphe, on va utiliser une notation, assez commune, mais qui peut induire en erreur. Je vous conseille donc de bien faire attention et de ne pas confondre :

- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ qui désigne l'intégrale de f sur le segment $[a,b]$;
- $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ qui désigne les primitives de f (à condition qu'elles existent).

4.5.1 Intégration par parties

Théorème 4.5.1.1 (Intégration par parties) *Soient u, v deux fonctions de I dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors pour tout $(a,b) \in I^2$:*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve :

Puisque u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, uv est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(uv)' = u'v + uv'$. Alors :

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = (u\times v)(b) - (u\times v)(a) = \int_a^b (uv)'(t)$$

Ce qui donne, par linéarité de l'intégrale :

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

⊠

Exemple 4.5.1.2 Les fonctions $u : x \longmapsto \ln x$ et $v : x \longmapsto x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. D'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [u(x)v(x)] - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [x\ln(x)] - [x] \\ &= x\ln(x) - x + c \quad \text{, avec } c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Exemple 4.5.1.3 Calculons la valeur de l'intégrale $\int_0^\pi (2x+1)\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

Soient $u : x \longmapsto (2x+1)$ et $v : x \longmapsto \sin(x)$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. D'après la formule d'intégration par parties, on a donc :

$$\int_0^\pi (2x+1)\cos(x)\,\mathrm{d}x = [(2x+1)\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin(x) = 0 - 2\,[-\cos(x)]_0^\pi = -4$$

Remarque : *il faut prendre l'habitude de toujours vérifier la cohérence des résultats ! En physique, on vous apprend à vérifier qu'une formule est homogène. En mathématiques, ce qui joue le rôle de l'homogénéité, c'est le signe. Il est donc impératif quand on a terminé un calcul (d'intégrale, de limite, d'équivalent, etc.) de vérifier, si c'est possible, que les signes sont cohérents. Cela ne permet pas de dire que la réponse donnée est correcte mais cela permet de détecter les erreurs grossières (et en particulier les erreurs de signe qui sont fréquentes lorsqu'on fait une intégration par parties).*

Dans l'exemple précédent, on trouve une intégrale négative ce qui est parfaitement logique puisque les valeurs de la fonction cosinus sont « symétriques par rapport à $\frac{\pi}{2}$ » (positive puis négative) et la fonction $x \longmapsto (2x+1)$ est positive et ses valeurs « plus grandes » sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

La technique d'intégration par parties permet aussi souvent de déterminer une relation de récurrence quand on a une suite d'intégrales.

Exemple 4.5.1.4 On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $x \longmapsto x^{n+1}$ et $x \longmapsto e^x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. En intégrant par parties, on a donc :

$$I_{n+1} = \left[x^{n+1}e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x \,\mathrm{d}x = e - (n+1)I_n$$

Exercice 4.5.1.5 Les intégrales de Wallis sont définies pour $n \in \mathbb{N}$, par $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \,\mathrm{d}x$. Montrer que pour tout entier n, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

4.5.2 Changement de variable

Théorème 4.5.2.1 (Changement de variable) *Soient f une fonction continue sur I, φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans I. Alors :*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) \,\mathrm{d}t$$

On dit qu'on a fait le changement de variable $t = \varphi(x)$.

Preuve :

Puisque f est continue sur I, elle admet une primitive F sur I qui est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. De plus, puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, $F \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$. Par suite,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) \,\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x$$

⊠

Exemple 4.5.2.2 Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$. On pose $t = \cos(x)$ (ce qui correspond à choisir $\varphi(x) = \cos(x)$ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[0,1]$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$). Alors :

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sqrt{1-\cos^2(x)}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Or,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Finalement, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4.5.2.3 Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$.

⚠ **Attention :** il faut s'assurer que le changement de variable soit légitime. Par exemple, on ne peut poser $x = \cos t$ dans $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x^2-1}$ car $\varphi = \cos$ est à valeurs dans $[-1,1] \not\subset [1,2]$.

⚠ **Attention :** il faut aussi s'assurer que le changement de variable est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ! Une erreur classique : on ne peut pas poser $t = \tan x$ dans

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

puisque la fonction tangente n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

Proposition 4.5.2.4 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue, avec I un intervalle.*

(i) Si f est T-périodique, alors pour tout $a, b \in I$, $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

(ii) Si f est paire, pour tout $a \in I$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

(iii) Si f est impaire, alors pour tout $a \in I$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 4.5.2.5 À l'aide des sommes de Riemann, montrer que la proposition précédente reste vraie si f est seulement continue par morceaux.

Preuve :

• Montrons (i).
On suppose que f est continue et T-périodique. On fixe a, b deux éléments de I et on fait le changement de variable $u = t + T$ (qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ dans $[a + T, b + T]$) et on a directement :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t+T)\,\mathrm{d}t = \int_{a+T}^{b+T} f(u)\,\mathrm{d}u$$

• Montrons (ii) et (iii).
On suppose que : $\forall x \in I\ ,\ f(-x) = \varepsilon f(x)$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Alors pour tout $a \in I$, en faisant le changement de variable $t = -x$, on a :

$$\int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^0 f(-x)\,\mathrm{d}x = \varepsilon \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

On en déduit alors facilement (ii) et (iii). ⊠

Remarques :

- *le théorème de changement de variable a été énoncé sous l'hypothèse « f continue » et c'est pour cela que la démonstration précédente ne s'applique plus lorsque f est seulement continue par morceaux. En fait, vous verrez que cette preuve est encore correcte (voir cours de mathématiques spéciales 2) car le changement de variable est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ;*
- *en revanche, on retient (c'est l'objet de l'exercice 4.5.2.5 juste avant) que cette proposition reste valable lorsque f est continue par morceaux ;*
- *enfin, retenez (et c'est important) que le changement de variable permet toujours de ramener le calcul d'une intégrale sur un segment quelconque $[a, b]$ à celui d'une autre fonction sur $[0, 1]$ en posant $x = a + t(b - a)$.*

4.5.3 Cas des fonctions rationnelles

Dans le cours de mathématiques supérieures 1, on a vu que toute fraction rationnelle se décompose de façon unique en éléments simples. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que le calcul de primitive de fonctions rationnelles se ramène aux calculs de primitives de polynômes et d'éléments simples.

Exemple 4.5.3.1 La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)}$ est $\dfrac{1}{X(X+1)} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X+1}$. Il s'ensuit que :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x| - \ln|x+1| + c \quad \text{, avec } c \in \mathbb{R}$$

Bien entendu, il faudra prendre garde aux intervalles sur le(s)quel(s) ce calcul est valable.

On est donc ramener à savoir déterminer des primitives d'éléments simples. Pour cela, on dispose des propositions suivantes (dont les preuves sont évidentes et laissées en exercice). Pour la troisième, elle se prouve en faisant une intégration par parties par exemple.

Proposition 4.5.3.2 *Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour tout entier $n \geqslant 2$,*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c, \text{ avec } c \in \mathbb{K}$$

Proposition 4.5.3.3 *Pour le cas, $n = 1$, il faut distinguer deux cas à cause du logarithme « complexe » qui n'est pas défini.*

(i) Si $a \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a| + c$, *avec $c \in \mathbb{R}$.*

(ii) Si $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\beta \neq 0$, on écrit : $\displaystyle\frac{1}{X-a} = \frac{X-\alpha+i\beta}{(X-\alpha)^2+\beta^2}$ *et on est ramené au calcul pour des éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$:*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\alpha-i\beta} = \frac{1}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + i\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + c \quad \text{, avec } c \in \mathbb{R}$$

Proposition 4.5.3.4 *Le calcul de primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^p}$ se fait par un calcul « de proche en proche » en utilisant la relation :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \ , \ \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{2n-1}{2n}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n}\left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]$$

► Méthode :

Pour déterminer une primitive d'une fonction rationnelle :

1. on décompose en éléments simples ;
2. on intègre directement la partie principale (polynôme) et les éléments simples d'ordre 1 ;
3. pour les éléments d'ordre 2 :
   (a) on fait apparaître la forme $\frac{u'}{u}$ (qu'on intègre directement) ;
   (b) pour le terme qui reste, on fait un changement de variable pour se ramener à une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$;
   (c) on détermine une primitive par intégration par parties successives ($n-1$ intégrations par parties).

Exemple 4.5.3.5 Déterminons une primitive de $x \longmapsto F(x)$ où $F = \dfrac{5X-4}{X^2+4X+6}$.

• On constate que F est déjà un élément simple (l'étape 1 est donc « offerte » et il n'y a pas d'étape 2 car il n'y a pas d'élément simple d'ordre 1).

• Pour l'élément simple d'ordre 2 (en fait F ici), on procède en deux étapes (puisque la multiplicité est 1 au dénominateur) :

∗ Tout d'abord, on complète pour faire apparaître la forme $\dfrac{u'}{u}$ à une constante près. Ici :

$$F = \frac{5}{2} \times \frac{2X+4}{X^2+4X+6} - \frac{14}{X^2+4X+6}$$

Du coup, on a :

$$\int \frac{5}{2} \times \frac{2x+4}{x^2+4x+6}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+4x+6\right| + c \ , \ c \in \mathbb{R}$$

∗ Ensuite, pour le terme qui reste, on se ramène à la forme arctan′. Pour cela, on complète les identités remarquables (ou on donne la forme canonique) :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+2} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}u}{u^2+1} && \text{(on pose } u = \frac{x+2}{\sqrt{2}}\text{)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan u + C && \text{avec } C \in \mathbb{R} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + C && \text{avec } C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

On conclut alors que les primitives de F sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$x \longmapsto \frac{5}{2}\ln\left|x^2+4x+6\right| + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + c \quad \text{, avec } c \in \mathbb{R}$$

Exercice 4.5.3.6 Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \dfrac{3x+1}{2x^2+x+1}$.

Réponse : $x \longmapsto \dfrac{3}{4}\ln|2x^2+x+1| + \dfrac{1}{2\sqrt{7}}\arctan\left(\dfrac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\right) + C.$

Exemple 4.5.3.7 Déterminons une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2x^2+5x+1}{(x^2+2x+5)^2}$.

• Tout d'abord, la décomposition en éléments simples est de la forme :

$$F = \frac{aX+b}{X^2+2X+5} + \frac{cX+d}{(X^2+2X+5)^2}$$

avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. En remarquant que $2X^2+5X+1 = 2(X^2+2X+5)+X-9$, on conclut que :

$$F = \frac{2}{X^2+2X+5} + \frac{X-9}{(X^2+2X+5)^2}$$

• Pour le premier terme (qui est d'ordre 2 et de multiplicité 1), on applique la même méthode que dans l'exemple précédent (changement de variable pour se ramener à la dérivée de arctan) :

$$\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+(\frac{x+1}{2})^2} = \left[\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$$

• Pour le second terme, on procède étape par étape :

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-9}{(x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x-9}{((x+1)^2+4)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{x-9}{16\left((\frac{x+1}{2})^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{16}\int \frac{x-9}{\left(1+(\frac{x+1}{2})^2\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{u-5}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u \quad (\text{avec } u = \frac{x+1}{2})
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\frac{1}{4}\int \frac{u-5}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\int \frac{2u}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u - \frac{5}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} = -\frac{1}{8}\times\frac{1}{1+u^2} - \frac{5}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}$$

Il reste alors à faire l'intégration par parties : « l'astuce » consiste à partir de la puissance précédente :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} &= \left[\frac{u}{1+u^2}\right] + \int \frac{2u^2}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u \\
\arctan u &= \frac{u}{1+u^2} + 2\arctan u - 2\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} + C
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{2}\arctan u + C$$

On remplace :

$$\begin{aligned}\int \frac{x-9}{(x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{8}\frac{1}{1+(\frac{x+1}{2})^2} - \frac{5}{8}\left(\frac{\frac{x+1}{2}}{1+(\frac{x+1}{2})^2} + \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + C \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+5} - \frac{5}{4}\frac{x+1}{x^2+2x+5} - \frac{5}{8}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C \\ &= -\frac{1}{4}\frac{5x+7}{x^2+2x+5} - \frac{5}{8}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C\end{aligned}$$

• On conclut alors qu'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2x^2+5x+1}{(x^2+2x+5)^2}$ est :

$$x \longmapsto -\frac{1}{4}\frac{5x+7}{x^2+2x+5} + \frac{3}{8}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

4.5.4 Fonctions rationnelles en sinus et cosinus

Cadre : on veut calculer l'intégrale sur un segment ou bien trouver une primitive de $f : x \longmapsto R(\cos x, \sin x)$ où R est une fonction rationnelle en deux variables.

► Méthode :

On applique les règles de Bioche :

- si « $f(x)\,\mathrm{d}x$ » est invariant par la transformation $x \longmapsto -x$, on pose $t = \cos x$;
- si « $f(x)\,\mathrm{d}x$ » est invariant par la transformation $x \longmapsto \pi - x$, on pose $t = \sin x$;
- si « $f(x)\,\mathrm{d}x$ » est invariant par la transformation $x \longmapsto \pi + x$, on pose $t = \tan x$;
- sinon, on fait le changement de variable « universel » t=$\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Ceci ramène le calcul d'intégrale ou de primitive de f à un calcul de primitive d'une fonction rationnelle en « t ».

⚠ **Attention :** bien entendu, comme toujours, il faudra faire attention aux intervalles, voire découper l'intégrale en utilisant la relation de Chasles et faire des calculs sur des intervalles distincts où le changement de variable est légitime.

Remarques :

- *pour se souvenir du « bon changement de variable », c'est en fait assez facile. L'invariance par $x \longmapsto -x$ est la symétrie de la fonction cosinus, l'invariance par $x \longmapsto \pi - x$ est la symétrie de la fonction sinus et pour la dernière, c'est l'invariance pour tangente qui est π-périodique ;*

- *si vous ne vous souvenez plus des règles de Bioche, la bonne nouvelle est qu'il suffit de connaître le changement de variable « universel » (qui marche toujours)* $t = \tan(\frac{x}{2})$ *;*
- *par contre, si vous appliquez correctement les règles de Bioche, les calculs seront plus simples car elles permettent de diminuer (diviser par deux) le degré de la fraction rationnelle qu'il restera à intégrer.*

Exemple 4.5.4.1 Calculons l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$.

• On vérifie que la forme « $f(x)\,\mathrm{d}x$ » n'est pas invariante par $x \longmapsto -x$, $x \longmapsto \pi - x$ ou $x \longmapsto \pi + x$. On va donc poser : $t = \tan\dfrac{x}{2}$.

• On pose donc $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ (licite ici puisque $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$). On a alors : $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}(1+t^2)\,\mathrm{d}x$ soit $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. D'où l'on déduit :

$$I = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

⚠ **Attention :** il faut par contre faire attention à la légitimité du changement de variable !

Exemple 4.5.4.2 Calculons les intégrales :

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{4+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad K = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

• Calcul de J

Pour J, il n'y a aucun problème. On montre que $J = 0$:

- ∗ soit en appliquant les règles de Bioche et en faisant le changement de variable $t = \cos(x)$;
- ∗ soit en remarquant que $\sin(x) = -\cos'(x)$ et en calculant directement une primitive, qui ici donnerait $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{\cos x}{2}\right)$;
- ∗ ou bien en remarquant que par 2π-périodicité et imparité, on a :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{4+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{4+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = 0$$

• Calcul de K

D'après les règles de Bioche, puisque la forme est invariante par changement $x \longmapsto x+\pi$, on fait le changement de variable $t = \tan x$. Le problème ici est que l'on ne peut poser $t = \tan(x)$ sur tout l'intervalle $x \in [0, 2\pi]$. On fait donc le calcul intervalle par intervalle, là où ce changement de variable est licite.

∗ Tout d'abord, on se place sur un intervalle $I_n = \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Sur cet intervalle, on peut poser $t = \tan x$. Alors :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2} \quad ; \quad \mathrm{d}t = (1+t^2)\,\mathrm{d}x \ \text{ et } \ \sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}$$

Par suite,

$$\int \frac{\sin^2 x}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(3t^2+4)(t^2+1)}$$

∗ Ensuite, on décompose la fraction en éléments simples. On sait qu'il existe un unique $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel qu'on ait l'égalité dans $\mathbb{K}(T)$:

$$\frac{T^2}{(3T^2+4)(T^2+1)} = \frac{aT+b}{T^2+1} + \frac{cT+d}{3T^2+4}$$

Le calcul (laissé en exercice) donne :

$$\frac{T^2}{(3T^2+4)(T^2+1)} = \frac{4}{3T^2+4} - \frac{1}{1+T^2}$$

On en déduit alors successivement que :

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(3t^2+4)(t^2+1)} &= -\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + 4\int \frac{\mathrm{d}t}{4+3t^2} \\ &= -\arctan t + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_n \ , \ c_n \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, il existe $c_n \in \mathbb{R}$ tel que, sur chaque intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$, on ait :

$$\int \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\arctan(\tan x) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x\right) + c_n$$

∗ Il y a alors essentiellement deux façons de procéder :

▷ Première méthode : par « recollement des constantes »

On sait que $f : x \longmapsto \dfrac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ (elle est continue sur $\mathbb{R}$). Soit F une primitive. Alors d'après ce qui précède, F s'écrit de la forme précédente sur chaque intervalle I_n pour $n \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un unique $c_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[\ , \ F(x) = -\arctan(\tan x) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x\right) + c_n$$

Alors, pour $n \in \mathbb{Z}$ fixé, la continuité de F en $\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ implique que :

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_{n+1}$$

D'où l'on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ ,\ c_{n+1} = c_n + \frac{2}{\sqrt{3}}\pi - \pi$$

Il s'agit donc d'une « famille » géométrique et on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ ,\ c_n = c_0 - n\pi + \frac{2n\pi}{\sqrt{3}}$$

On conclut finalement que : $K = F(2\pi) - F(0) = c_2 - c_0 = -2\pi + \dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}$.

▷ Seconde méthode : on découpe en intervalles puis on passe à la limite.

On fixe $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < b < c < \frac{3\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2} < d < 2\pi$. On pose :

$$K(a,b,c,d) = \int_0^a \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x + \int_b^c \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x + \int_d^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

Puisque $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, la première intégrale vaut :

$$\int_0^a \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\arctan(\tan a) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan a\right)$$

Par continuité sur $\mathbb{R}$ de $a \longmapsto \displaystyle\int_0^a \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to\frac{\pi}{2}\\ a<\frac{\pi}{2}}} \int_0^a \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{2}$$

De même,

$$\int_b^c \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \left[-\arctan(\tan(x)) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan(x)\right)\right]_b^c$$

Or,

$$\lim_{\substack{c\to\frac{3\pi}{2}\\ c<\frac{3\pi}{2}}} \left[-\arctan(\tan(c)) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan(c)\right)\right] = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2}$$

et

$$\lim_{\substack{b\to\frac{\pi}{2}\\ b>\frac{\pi}{2}}} \left[-\arctan(\tan(b)) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan(b)\right)\right] = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2}$$

Toujours par continuité sur $\mathbb{R}$ de $u \longmapsto \displaystyle\int_0^u \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$, on conclut que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \pi$$

Enfin, en reprenant la même démarche :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{d\to\frac{3\pi}{2}\\ d>\frac{3\pi}{2}}} \left[-\arctan(\tan(x)) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan(x)\right)\right]_d^{2\pi} \\
&= \lim_{\substack{d\to\frac{3\pi}{2}\\ d>\frac{3\pi}{2}}} \left(\arctan(\tan(x)) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan(x)\right)\right) \\
&= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \pi + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{4\pi}{\sqrt{3}} - 2\pi
\end{aligned}$$

4.5.5 Autres exemples

Dans les paragraphes précédents, on a donné des méthodes générales pour le calcul de primitives pour des fonctions d'une forme particulière. Lorsqu'on n'est pas dans ces cas, il faut utiliser son « bon sens » et les outils usuels : changement de variable et intégration par parties.

Exemple 4.5.5.1 On veut calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x}$. On peut alors faire le changement de variable $u = \sqrt{x}$ et on a :

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x} = \int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \times \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{4}} \frac{1}{1+u} \times 2\,\mathrm{d}u = \left[2\ln(1+u)\right]_1^2$$

Exercice 4.5.5.2 Déterminer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh}^2(x)}{1+\mathrm{ch}\,(x)}$.

4.6 Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Dans cette partie, on donne une introduction à la notion d'intégrale généralisée, que nous utiliserons dans la suite de ce livre pour étudier les propriétés de convergence ou de divergence de certaines séries numériques, notamment à l'aide du théorème de comparaison série-intégrale.

S'agissant d'une introduction, on ne développera pas toutes les méthodes et outils et certains aspects théoriques ne seront pas non plus abordés. L'étude approfondie sera abordée plus en détails dans le cours de mathématiques spéciales 2.

4.6.1 Définition de la convergence d'une intégrale généralisée

Définition 4.6.1.1 Soit $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b[\,,\mathbb{K})$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

- On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ou est convergente) si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_{[a,x]} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers b.

  Dans ce cas, on pose : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

- Si $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ n'admet pas de limite ou bien admet une limite infinie lorsque x tend vers b, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge (ou est divergente).

Remarques :

- *cette définition a un sens puisque pour $x \in [a,b[$, la fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a,x]$. Son intégrale sur le segment $[a,x]$ est donc parfaitement définie ;*
- *on note aussi parfois $\displaystyle\int_{[a,b[} f = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée ou impropre ;*
- *si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} f$. L'intégrale généralisée est donc un prolongement de l'intégrale sur un segment ;*
- *pour tout $c \in [a,b[$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature (c'est-à-dire que l'une converge si et seulement si l'autre converge) ;*
- *par définition, si $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ converge, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_x^b f = 0$.*

Exemple 4.6.1.2 L'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente et $I = \dfrac{\pi}{2}$. En effet, pour tout $x > 0$:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Exemple 4.6.1.3 En revanche, l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente puisque la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t$ (c'est-à-dire sinus) n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exemple 4.6.1.4 L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente puisque pour tout $0 < x < 1$,

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} -\ln(1-x) = +\infty$$

Exemple 4.6.1.5 En revanche, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ converge car :

$$\forall x \in]0,1[\ ,\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = 2-\sqrt{1-x} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \left(2-\sqrt{1-x}\right) = 2$$

Exercice 4.6.1.6 Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente et calculer sa valeur.

Définition 4.6.1.7 Soit $f \in \mathcal{C}_{0,m}(]a,b],\mathbb{K})$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.

- On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ou est convergente) si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_{[x,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en a.

  Dans ce cas, on pose : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to a\\x>a}} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $x \longmapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'admet pas de limite ou bien admet une limite infinie lorsque x tend vers a, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge (ou est divergente).

Exemple 4.6.1.8 Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et calculons sa valeur. Soit $x \in]0,1[$. Les fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto \ln(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[x,1]$, on peut donc intégrer par parties, ce qui donne :

$$\int_x^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_x^1 - \int_x^1 \mathrm{d}t = -x\ln(x) + x - 1$$

Or, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-x\ln(x)+x-1) = -1$ donc $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$.

Théorème 4.6.1.9 (Définition) *Soit $f \in \mathcal{C}_{0,m}(]a,b[,\mathbb{K})$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe $c \in]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_{]a,c]} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{[c,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent ;

(ii) pour tout $c \in]a,b[$, $\displaystyle\int_{]a,c]} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{[c,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Lorsque l'une de ces conditions équivalentes est vérifiée, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on pose

$$\int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[c,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{\substack{y\to b\\ y>b}} \int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

Cette définition de l'intégrale ne dépend pas du choix de $c \in]a,b[$.
Sinon, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge (ou est divergente).

Preuve :

• L'implication $(ii) \Longrightarrow (i)$ est évidente.

• Montrons que $(i) \Longrightarrow (ii)$.
En réalité c'est évident, c'est une simple conséquence de la relation de Chasles. On va néanmoins donner les détails. On suppose qu'il existe $c_0 \in I$ tel que $\displaystyle\int_{]a,c_0]} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{[c_0,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Notons alors :

$$F_0 : x \longmapsto \int_{[x,c_0]} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G_0 : x \longmapsto \int_{[c_0,x]} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par définition de la convergence d'une intégrale généralisée, F_0 admet une limite finie en a et G_0 admet une limite finie en b.
Soit $c \in I$ et soient F, G les fonctions définies par :

$$F : x \longmapsto \int_{[x,c]} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G : x \longmapsto \int_{[c,x]} f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'après la relation de Chasles, pour tout $x \in I$:

$$F(x) = \int_{[x,c]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[x,c_0]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_0}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$$

où on rappelle qu'on note ici :

$$\int_{c_0}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int_{[c_0,c]} f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } c_0 < c \\ 0 & \text{si } c_0 = c \\ \displaystyle -\int_{[c,c_0]} f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } c_0 > c \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in I\ ,\ F(x) = F_0(x) + \int_{c_0}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$$

De même, $\forall x \in I\ ,\ G(x) = G_0(x) + \displaystyle\int_{c}^{c_0} f(t)\,\mathrm{d}t$.

- Puisque F_0 admet une limite finie en a, F admet une limite finie en a, c'est-à-dire $\displaystyle\int_a^c f(f)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Puisque G_0 admet une limite finie en b, G admet une limite finie en b, c'est-à-dire $\displaystyle\int_c^b f(f)\,\mathrm{d}t$ converge.

Ce qui prouve (ii) et de plus, on a alors :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} F(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} F_0(x) + \int_{c_0}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} G(x) = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} G_0(x) + \int_{c}^{c_0} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par suite,

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} F(x) + \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} G(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} F_0(x) + \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} G_0(x)$$

Ce qui montre que la valeur $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du choix de $c \in I$.

⊠

Remarques :

- *bien entendu, si f est continue par morceaux sur $[a,b[$ avec $b \in \mathbb{R}$, alors $\int_{[a,b[} f = \int_{]a,b[} f$;*
- *de même, si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, alors $\int_{]a,b[} f = \int_{[a,b]} f$;*
- *on retient donc que la convergence d'une intégrale généralisée est donc l'existence d'une limite finie d'une primitive quelconque (ou deux limites si les deux bornes sont ouvertes) et que le calcul de l'intégrale revient « simplement » à faire le calcul de limite pour une primitive de la fonction intégrée.*

Exemple 4.6.1.10 L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente et vaut π puisque :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ ,\ \int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(y) - \arctan(x)$$

Or, arctan admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et en faisant tendre x vers $-\infty$ puis y vers $+\infty$, on obtient la valeur de cette intégrale, à savoir π.

⚠ **Attention :** il faut bien voir que la convergence de l'intégrale $\int_a^b f$ signifie, par définition, que la limite quand x tend vers a et y tend vers b de $\int_{[x,y]} f$ existe et est finie ! Ce sont donc deux variables différentes (ou deux calculs indépendants) ! Ce n'est pas du tout équivalent à choisir $x = -y$ par exemple ! C'est bien pour cela que le théorème définition « dit » que pour étudier la convergence, on doit étudier la convergence de chacune des deux intégrales sur $]a,c]$ et sur $[c,b[$.

Exemple 4.6.1.11 L'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente car la fonction $-\cos$ n'admet pas de limite en $+\infty$ mais $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 0$ car sinus est impaire.

Exemple 4.6.1.12 On veut étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t$. Puisque $t \longmapsto \dfrac{e^{\sin(t)}}{t(1+t)}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, la convergence de cette intégrale est, par définition, équivalente à la convergence de chacune des intégrales :

$$\int_0^1 \frac{e^{\sin(t)}}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $x \in]0,1[$, $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{\sin(t)}}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^1 \frac{1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^1 \frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln(x)$ et de plus, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} -\ln(x) = +\infty$ donc par comparaison, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \int_x^1 \frac{e^{\sin(t)}}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sin(t)}}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t$ diverge et donc, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t$ diverge.

4.6.2 Propriétés élémentaires

Les propriétés suivantes découlent directement des propriétés de l'intégrale sur un segment, des opérations sur les limites et de la compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.6.2.1 *Soient I un intervalle quelconque, f, g deux fonctions continues par morceaux sur I.*

(i) Si $f \geqslant 0$ et $\int_I f$ converge, alors $\int_I f \geqslant 0$.

(ii) Si $f \leqslant g$ et si $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent, alors $\int_I f \leqslant \int_I g$.

(iii) Si $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors $\int_I (\lambda f + \mu g)$ converge et on a :

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$$

Preuve :

Soit $c \in \overset{\circ}{I}$. On pose pour $x \in I$, $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t$, et on note $a = \inf I$ et $b = \sup I$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

• Montrons (iii).

On suppose que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

∗ D'une part,

$$\forall y \in [c, b[\ , \quad \int_{[c,y]} (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda F(y) + \mu G(y)$$

Or, F et G admettent des limites finies en b. Par conséquent, $\lambda F + \mu G$ aussi, c'est-à-dire $y \longmapsto \int_{[c,y]} (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en b, soit encore $\int_{[c,b[} (\lambda f + \mu g)$ converge, et de plus :

$$\lim_{\substack{y \to b \\ y < b}} \int_{[c,y]} (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \lim_{\substack{y \to b \\ y < b}} F(y) + \mu \lim_{\substack{y \to b \\ y < b}} G(y)$$

c'est-à-dire $\displaystyle\int_{[c,b[} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[c,b[} f + \mu \int_{[c,b[} g$.

∗ De même,

$$\forall x \in]a, c]\ , \quad \int_{[x,c]} (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = -\lambda F(x) - \mu G(x)$$

On conclut de la même façon que $\int_{]a,c]} (\lambda f + \mu g)$ converge et :

$$\int_{]a,c]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{]a,c]} f + \mu \int_{]a,c]} g$$

Ainsi, $\int_{]a,c]} (\lambda f + \mu g)$ et $\int_{[c,b[} (\lambda f + \mu g)$ convergent, *i.e.* $\int_{]a,b[} (\lambda f + \mu g)$ converge et :

$$\begin{aligned}
\int_{]a,b[} (\lambda f + \mu g) &= \int_{]a,c]} (\lambda f + \mu g) + \int_{[c,b[} (\lambda f + \mu g) \\
&= \lambda \int_{]a,c]} f + \mu \int_{]a,c]} g + \lambda \int_{[c,b[} f + \mu \int_{[c,b[} g \\
&= \lambda \left(\int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f \right) + \mu \left(\int_{]a,c]} g + \int_{[c,b[} g \right) \\
&= \lambda \int_{]a,b[} f + \mu \int_{]a,b[} g
\end{aligned}$$

• Montrons (i).
Si f est positive, alors pour tout $x, y \in I$ tels que $x < y$, $\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. En passant à la limite quand x tend vers a et y tend vers b (légitime puisque $\int_I f$ converge), on a donc :

$$\lim_{\substack{x \to a^+ \\ y \to b^-}} \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int_I f \geqslant 0$$

• (ii) est une conséquence immédiate de (i) et (iii).

⊠

Remarque : *on peut simplifier la preuve de* (i)*. En effet, il suffit de dire que* $\lambda F + \mu G$ *est une « primitive » de* $\lambda f + \mu g$*. Or,* F *et* G *ont des limites finies en* $a = \inf I$ *et* $b = \sup I$ *donc* $\lambda F + \mu G$ *aussi. Ceci prouve la convergence de l'intégrale de* $\lambda f + \mu g$*. La valeur s'obtient par linéarité de la limite.*

Corollaire 4.6.2.2 *L'ensemble* $\mathcal{A} = \left\{ f \in \mathcal{C}_{0,m}(I, \mathbb{K}) \;/\; \int_I f \;\; \text{converge} \right\}$ *est un espace vectoriel et l'intégrale est une forme linéaire sur* $\mathcal{A}$*.*

Preuve :

On montre que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{0,m}(I, \mathbb{K})$ et ceci est une simple traduction de la propriété (iii) de la proposition précédente (après avoir vérifié que la fonction nulle est d'intégrale convergente).

⊠

⚠ **Attention :** $\mathcal{A}$ n'est pas une algèbre en général :

$$\left(\int_I f \text{ converge et } \int_I g \text{ converge}\right) \not\Longrightarrow \int_I f \times g \text{ converge}$$

et même si toutes ces intégrales convergent : $\displaystyle\int_I (f \times g) \neq \int_I f \times \int_I g$ (en général).

Par exemple, posons $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

- $\displaystyle\int_{]0,1]} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ converge donc $\displaystyle\int_0^1 f$ et $\displaystyle\int_0^1 g$ convergent ;
- mais $\displaystyle\int_0^1 (f \times g) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge.

De même si on pose $\forall x \in [-1,1]$, $f(x) = g(x) = x$, alors :

- f et g sont continues (par morceaux) sur le segment $[-1,1]$ (et donc $f \times g$ l'est aussi) ;
- les intégrales $\displaystyle\int_{-1}^1 f$, $\displaystyle\int_{-1}^1 g$ et $\displaystyle\int_{-1}^1 fg$ sont toutes bien définies ;
- mais $\displaystyle\int_{-1}^1 fg = \frac{2}{3} \neq 0 = \int_{-1}^1 f \times \int_{-1}^1 g$.

Terminons ce paragraphe par une propriété « bête » mais utile dans la pratique. Sa démonstration est laissée en exercice.

Proposition 4.6.2.3 *Soit $f \in \mathcal{C}_{0,m}(I,\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}^\star$. Alors :*

$$\int_I f \text{ converge} \iff \int_I \lambda f \text{ converge}$$

4.6.3 Cas particulier des fonctions positives

Proposition 4.6.3.1 *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I et positive. Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $\displaystyle\int_I f$ *converge ;*

(ii) il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall [a,b] \subset I$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant M$.

Dans ce cas, c'est-à-dire si l'une des conditions est vérifiée, on a : $\displaystyle\int_I f = \sup_{[a,b]\subset I} \int_{[a,b]} f$.

Preuve :

On va voir qu'en réalité ce théorème est évident : c'est une simple conséquence du théorème de la limite monotone pour les fonctions.
On pose $\alpha = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et on prouve le résultat dans le cas où $I =]\alpha, \beta[$.
Tout d'abord, soit $c \in]\alpha, \beta[$. On pose pour $t \in I$, $F(t) = \displaystyle\int_c^t f(u)\,\mathrm{d}u$.

• Montrons $(i) \Longrightarrow (ii)$.
On suppose que $\int_{]\alpha,\beta[} f$ converge. Soit $[a, b] \subset I$. Puisque f est positive, la fonction F est croissante sur I. Par conséquent,

$$\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a) \leqslant \lim_{y\to\beta} F(y) - \lim_{x\to\alpha} F(x) = \int_{]\alpha,\beta[} f$$

Et donc : $\forall\, [a, b] \subset I$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{]\alpha,\beta[} f$ et $\displaystyle\sup_{[a,b]\subset I} \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{]\alpha,\beta[} f$.

• Montrons $(ii) \Longrightarrow (i)$.
On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall\, [a, b] \subset I$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant M$.
Alors, la fonction F est majorée sur $[c, \beta[$ et croissante (car $f \geqslant 0$). D'après le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite finie en β et :

$$\lim_{y\to\beta} F(y) = \sup_{y<\beta} F(y)$$

De même, pour tout $x \in]\alpha, c]$, $[x, c] \subset I$ donc $\displaystyle\int_{[x,c]} f \leqslant M$, ce qui montre que $-F$ est majorée sur $]\alpha, c]$. De plus, $-F$ est décroissante sur $]\alpha, c]$. D'après le théorème de la limite monotone, $-F$ admet donc une limite finie en α et :

$$\lim_{x\to\alpha} -F(x) = \sup_{x>\alpha} -F(x)$$

Ainsi, F admet des limites finies en α et en β, donc $\displaystyle\int_{]\alpha,\beta[} f$ converge.

Par ailleurs, soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, il existe $b \in [c, \beta[$ tel que :

$$\sup_{y<\beta} F(y) - \varepsilon < F(b) \leqslant \sup_{y<\beta} F(y)$$

De même, il existe $a \in]\alpha, c]$ tel que :

$$\sup_{x>\alpha} -F(x) - \varepsilon < -F(a) \leqslant \sup_{x>\alpha} -F(x)$$

On a alors :

$$\lim_{y\to\beta} F(y) - \lim_{x\to\alpha} F(x) - 2\varepsilon < F(b) - F(a) \leqslant \lim_{y\to\beta} F(y) - \lim_{x\to\alpha} F(x)$$

c'est-à-dire

$$\int_{]\alpha,\beta[} f - 2\varepsilon < \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{]\alpha,\beta[} f$$

• Ainsi, les deux conditions sont bien équivalentes et lorsqu'une de ces conditions équivalentes est vérifiée, alors les deux le sont et on a alors :

∗ (i) est vérifiée donc d'après la preuve de $(i) \Longrightarrow (ii)$, on a :

$$\sup_{[a,b]\subset I} \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{]\alpha,\beta[} f$$

∗ (ii) est vérifiée donc d'après la preuve de $(ii) \Longrightarrow (i)$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, [a,b] \subset I\ ,\ \int_{]\alpha,\beta[} f - 2\varepsilon \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{]\alpha,\beta[} f$$

Ce qui montre que : $\displaystyle\int_I f = \sup_{[a,b]\subset I} \int_{[a,b]} f$.

⊠

Remarques :

- *on peut reformuler ce résultat de façon plus concrète pour l'utilisation pratique. Si f est continue par morceaux et positive sur I, alors $\int_I f$ converge si et seulement si la fonction $F : t \longmapsto \int_c^t f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction bornée sur I. L'outil clé est que lorsque $f \geqslant 0$, F est croissante sur I : elle admet une limite finie en $\beta = \sup I$ si et seulement si elle est majorée, et elle admet une limite finie en $\alpha = \inf I$ si et seulement si elle est minorée ;*
- *cette proposition donne une méthode pratique pour prouver la convergence de l'intégrale d'une fonction positive : il faut et il suffit de majorer les intégrales de cette fonction sur tout segment. En revanche, le calcul de l'intégrale à partir de la borne supérieure n'est pas « pratique » et il est très rare qu'on utilise cela pour calculer une intégrale ;*
- *enfin, dans la pratique, pour majorer une intégrale, on essaye de majorer la fonction sur l'intervalle : autrement dit, l'application principale de ce théorème est le théorème de comparaison pour les fonctions positives (paragraphe 5).*

4.6.4 Intégrales de référence

Proposition 4.6.4.1 (Critère de Riemann) *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(i) $\displaystyle\int_{]0,1]} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$.

(ii) $\displaystyle\int_{[1,+\infty[} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Preuve :

C'est évident puisqu'on sait déterminer une primitive de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $]0,+\infty[$. En effet, une primitive est $t \longmapsto \frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}$ si $\alpha \neq 1$ et $t \longmapsto \ln t$ si $\alpha = 1$. Par suite, pour $0 < a < 1$,

$$\int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} -\ln(a) & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - a^{1-\alpha}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

D'où

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ a>0}} \int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Le cas de l'intervalle $[1,+\infty[$ se traite de la même façon et est laissé en exercice. ⊠

Exercice 4.6.4.2 Déduire le deuxième cas du premier à l'aide d'un changement de variable.

Proposition 4.6.4.3 (Critère de Bertrand) *Soit* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Pour $a > 1$, $\displaystyle\int_{[a,+\infty[} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$ *ou* $(\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.

(ii) Pour $b < 1$, $\displaystyle\int_{]0,b]} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$ *ou* $(\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.

Preuve :

La preuve sera faite en exercice d'application des règles de comparaison pour les fonctions positives. ⊠

⚠ **Attention :** il ne faut pas oublier les valeurs absolues pour ln car sur $]0,1[$, $\ln < 0$.

⚠ **Attention :** le critère de Bertrand ne s'applique pas sur $]0,1[$ ou sur $]1,+\infty[$! Pourquoi ?

Proposition 4.6.4.4 *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *Alors :*

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \Re e(z) > 0$$

Dans ce cas, c'est-à-dire lorsque $\Re e(z) > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z}$.

Preuve :

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $a > 0$. Alors,

$$\int_0^a e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} a & \text{si } z = 0 \\ \dfrac{1-e^{-za}}{z} & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

- Premier cas : $\Re e(z) > 0$
  Dans ce cas, $|e^{-za}| = e^{-\Re e(z)a}$ et $\lim\limits_{a\to+\infty} |e^{-za}| = 0$. Par suite, $\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{z}$.
- Deuxième cas : $\Re e(z) = 0$
  Si $z = 0$, il est clair que l'intégrale est divergente. Sinon, en posant $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}^\star$, on a :
  $$\int_0^a e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \frac{1-e^{-iya}}{iy}$$
  Or, la fonction $a \longmapsto e^{-iya}$ n'a pas de limite en $+\infty$. Par suite, l'intégrale est divergente.
- Troisième cas : $\Re e(z) < 0$.
  Alors, en reprenant le calcul précédent,
  $$\left|\int_0^a e^{-zt}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{e^{-za}}{z}\right| = \frac{e^{-\Re e(z)a}}{|z|}$$
  Par suite, $\lim\limits_{a\to+\infty} \left|\int_0^a e^{-zt}\,\mathrm{d}t - \dfrac{1}{z}\right| = +\infty$ ce qui implique que l'intégrale diverge.

⊠

Corollaire 4.6.4.5 *Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$ et :*

$$\forall a > 0\ ,\ \int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}$$

Remarque : *dans les propriétés qui précèdent, dans les cas de convergence, on a calculé la valeur de l'intégrale. Vous devez connaître ces résultats qui sont très utiles dans la pratique.*

4.6.5 Critères de convergence pour les fonctions positives

Théorème 4.6.5.1 *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a,b[$ (avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$), à valeurs positives.*

(i) Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature, c'est-à-dire que l'une converge si et seulement si l'autre converge.

(ii) Si $f \underset{b}{=} o(g)$ et si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge.

(iii) Si $f \underset{b}{=} O(g)$ et si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge.

Preuve :

• Montrons (iii).

On suppose que $f \underset{b}{=} O(g)$ et $\int_a^b g$ converge. Par définition, il existe $M > 0$ et $c \in [a,b[$ tel que, pour tout $x \in [c,b[$, $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$. Puisque f et g sont positives, on a donc :

$$\forall x \in [c,b[\ , 0 \leqslant f(x) \leqslant Mg(x)$$

Par suite, pour tout $x \in [c,b[$:

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent, pour tout segment $J \subset [c,b[$, $\int_J f \leqslant M\int_a^b g$. D'après la proposition 4.6.3.1, $\int_c^b f$ converge, ce qui équivaut à dire que $\int_a^b f$ converge.

• Montrons (ii).

Si $f \underset{b}{=} o(g)$, alors $f \underset{b}{=} O(g)$. D'où le résultat d'après (iii).

• Montrons (i).

On suppose que $f \underset{b}{\sim} g$. On a alors $f \underset{b}{=} O(g)$ et $g \underset{b}{=} O(f)$. D'après (iii), on a alors :

$$\int_a^b g \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^b f \text{ converge } \quad \text{et} \quad \int_a^b f \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^b g \text{ converge}$$

D'où (i).

⊠

Exemple 4.6.5.2 Montrons que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge (intégrale de Gauss).

- Tout d'abord, les fonctions $x \longmapsto e^{-x^2}$ et $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ sont continues par morceaux et positives sur $\mathbb{R}$.
- Ensuite, $e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. De plus, d'après le critère de Riemann, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge. Par comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.
- De même, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.
- Enfin, $x \longmapsto e^{-x^2}$ est continue sur le segment $[-1,1]$ donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Ce qui montre que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Exercice 4.6.5.3 Calcul de la valeur de $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = f(x^2)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\displaystyle\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que g est dérivable et que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) + \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
4. En déduire la valeur de I.

Exemple 4.6.5.4 Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

- Tout d'abord, $f : x \longmapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ est une fonction continue par morceaux et positive sur $]0,+\infty[$.
- Ensuite, $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2}$ et $x \longmapsto \frac{1}{2}$ est continue par morceaux, positive et d'intégrale convergente sur $]0,1]$. Par comparaison, $\displaystyle\int_0^1 f$ converge.
- Enfin, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or, $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est continue par morceaux et positive sur $[1,+\infty[$ et d'intégrale convergente sur $[1,+\infty[$ d'après le critère de Riemann. Par comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Ce qui montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Exercice 4.6.5.5 On veut étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ (intégrale de Dirichlet).

1. Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < a$,
$$\int_{[\varepsilon,a]} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1-\cos(x)}{x}\Big]_{\varepsilon}^{a} + \int_{[\varepsilon,a]} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
2. En utilisant l'exemple précédent, conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
3. En déduire également que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et qu'on a aussi :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Exemple 4.6.5.6 Étudions la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

- Tout d'abord, $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\ln(1+x)}$ est continue par morceaux et positive sur $]0,+\infty[$.
- Ensuite, $\dfrac{e^{-x}}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Or, d'après le critère de Riemann, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge. Par comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x$ diverge.

On en déduit donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x$ diverge.

⚠ **Attention :** il ne faut pas confondre les règles de convergence pour une même fonction et celles pour la somme de deux fonctions ! Si f et g sont continues par morceaux sur $]0,+\infty[$, alors :
$$\int_0^{+\infty} f \text{ converge} \iff \left(\int_0^1 f \text{ converge} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} f \text{ converge}\right)$$
$$\left(\int_0^{+\infty} f \text{ converge} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} g \text{ converge}\right) \Longrightarrow \int_0^{+\infty} (f+g) \text{ converge}$$
En particulier,
$$\int_0^1 f \text{ diverge} \implies \int_0^{+\infty} f \text{ diverge}$$
mais
$$\int_0^{+\infty} f \text{ diverge} \not\Longrightarrow \int_0^{+\infty} (f+g) \text{ diverge}$$

⚠ **Attention :** le théorème de comparaison avec les équivalents, les o et les O ne s'applique pas pour des fonctions qui ne sont pas positives !!! Explication : si $f = O(g)$ alors, $|f| \leqslant M|g|$ au voisinage de b, pour un certain $M > 0$. La convergence de $\int_c^b g$ n'entraîne pas du tout la convergence de $\int_c^b |g|$.

Exemple 4.6.5.7 Contre-exemple dans le cas de fonctions de signe quelconque.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ est convergente.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\sqrt{(n+1)\pi}} \text{ et } \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}$$
3. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$ sont divergentes. Conclusions ?
4. On pose pour $x \geqslant 1$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = f(x) + \frac{|\sin(x)|}{x}$.
Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ et comparer les natures des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} g$.

Exercice 4.6.5.8 En appliquant les règles de comparaison, prouver le critère de Bertrand sur $[2, +\infty[$ en :

1. comparant avec les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{x^\gamma}$ lorsque $\alpha \neq 1$;
2. déterminant directement une primitive lorsque $\alpha = 1$.

Ensuite, à l'aide d'un changement de variable, déduire le critère de Bertrand sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

4.6.6 Parties réelles et imaginaires, absolue convergence et lien avec la convergence

Proposition 4.6.6.1 *Soit $f \in \mathcal{C}_{0,m}(I, \mathbb{C})$. Alors :*

$$\int_I f \text{ converge} \iff \left(\int_I \Re e(f) \text{ converge et } \int_I \Im m(f) \text{ converge}\right)$$

Dans ce cas, $\displaystyle\int_I f = \int_I \Re e(f) + i\int_I \Im m(f)$.

Preuve :

C'est une conséquence immédiate de la définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction complexe et des propriétés de limite des fonctions à valeurs complexes. ⊠

Définition 4.6.6.2 Soient I un intervalle réel et $f \in \mathcal{C}_{0,m}(I, \mathbb{K})$. On dit que f est intégrable sur I ou que l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente si $\displaystyle\int_I |f|$ converge.

Remarques :

- *pour une fonction positive, la convergence ou l'absolue convergence de l'intégrale sont la même chose car* $|f| = f$ *;*
- *lorsque* $\displaystyle\int_I f$ *converge et* $\displaystyle\int_I |f|$ *diverge, on dit parfois que l'intégrale est semi-convergente. C'est le cas par exemple pour* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ *(voir exercice 4.6.5.5 et exemple 4.6.5.7) ;*
- *l'avantage de l'absolue convergence est qu'on manipule une fonction positive, pour laquelle on dispose de plus d'outils et de méthodes pour prouver la convergence de l'intégrale.*

Proposition 4.6.6.3 *Soit* $f \in \mathcal{C}_{0,m}(I, \mathbb{K})$. *Alors :*

$$\int_I |f| \text{ converge } \Longrightarrow \int_I f \text{ converge}$$

Autrement dit, l'absolue convergence de l'intégrale implique la convergence de celle-ci.

⚠ **Attention :** la réciproque est fausse (c'est ce qu'on vient de voir dans la remarque précédente) !

$$\int_I f \text{ converge } \not\Longrightarrow \int_I |f| \text{ converge}$$

Preuve :

• On commence par traiter le cas où f est à valeurs réelles.
On suppose que $\displaystyle\int_I |f|$ converge. Notons f_+ et f_- les parties positives et négatives de f, c'est-à-dire pour tout $x \in I$:

$$f_+(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2} = \max(0, f(x)) \text{ et } f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

Alors :

- f_+ et f_- sont continues par morceaux et positives sur I ;
- $0 \leqslant f_+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f_- \leqslant |f|$;

∗ Or, $\int_I |f|$ converge donc par comparaison pour les fonctions positives, $\int_I f_+$ et $\int_I f_-$ convergent.

Enfin, puisque $f = f_+ - f_-$, $\int_I f$ converge.

• On suppose maintenant que f est à valeurs complexes et $\int_I |f|$ converge.

On a alors :

∗ $0 \leqslant |\Re e(f)| \leqslant |f|$ et $0 \leqslant |\Im m(f)| \leqslant |f|$;

∗ or, $\int_I |f|$ converge donc par comparaison pour les fonctions positives, $\int_I |\Re e(f)|$ et $\int_I |\Im m(f)|$ convergent ;

∗ d'après le cas précédent (fonctions à valeurs réelles), on en déduit que $\int_I \Re e(f)$ et $\int_I \Im m(f)$ convergent ;

∗ on conclut donc que $\int_I f$ converge.

⊠

Exemple 4.6.6.4 Soit $f : x \longmapsto \dfrac{e^{ix\cos(x^2)}}{\sqrt{x}(1+x)}$. On veut étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$.

- Pour commencer, f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- Ensuite, pour tout $x > 0$, $|f(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$. Alors :

  ∗ $|f(x)| \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Or, $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue par morceaux, positive et d'intégrale convergente sur $]0, 1]$ d'après le critère de Riemann. Par comparaison pour les fonctions positives, $\int_0^1 |f|$ converge.

  ∗ De même, $|f(x)| \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ et puisque $\frac{3}{2} > 1$, $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}}}$ converge. Par comparaison pour les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} |f|$ converge.

  Ce qui montre que $\int_0^{+\infty} |f|$ converge.
- Puisque $\int_0^{+\infty} f$ est absolument convergente, elle est *a fortiori* convergente.

4.6.7 Bilan sur les méthodes

Dans ce paragraphe, on donne un petit résumé des méthodes et outils que l'on utilise soit pour prouver la convergence d'une intégrale, soit pour prouver la divergence d'une intégrale.

Méthode pour prouver la convergence d'une intégrale

0) On vérifie que f est continue par morceaux sur l'intervalle (si ce n'est pas le cas, voir le prochain paragraphe) ;

1) on vérifie si on connaît directement une primitive F de f :

- si oui, alors on peut conclure directement en étudiant les limites de F aux bornes de I (et en cas de convergence, on peut donc calculer la valeur de l'intégrale) ;
- si non, on continue ;

2) Si f est positive (ou de signe constant), alors on essaye pour chaque borne ouverte de l'intervalle I :

- de déterminer un équivalent « simple » de f ;
- puis de comparer (au sens $\sim$, o ou O) f avec une fonction de référence. Si l'équivalent ne permet pas de conclure, on essaye souvent de comparer avec « Riemann » (voir le point méthode suivant) ;
- et enfin d'appliquer les règles de comparaison pour les fonctions positives pour déterminer la nature de l'intégrale sur chaque « partie » ;

3) Si f n'est pas positive, alors :

- on commence par étudier si $|f|$ est d'intégrale convergente (et pour cela, on revient à l'étape 2 en utilisant $|f|$ au lieu de f). Si oui, alors on conclut que l'intégrale est absolument convergente donc convergente. Sinon, on continue ;
- on essaye de faire une intégration par parties pour faire apparaître une partie qui est absolument convergente ;
- on essaye de faire un développement asymptotique jusqu'à obtenir un terme de signe constant ou bien absolument convergent.

4) Si on arrive à cette étape, alors il n'y a que trois possibilités :

- soit on s'est trompé ;
- ou bien on n'a pas fait un changement de variable « naturel » qui permet d'obtenir une nouvelle fonction plus simple pour laquelle on peut appliquer la méthode ;
- ou enfin, on doit changer de méthode et prouver que l'intégrale diverge !

Méthode de comparaison

Cadre

- f est une fonction positive et continue par morceaux sur l'intervalle I ;
- on veut étudier la convergence de l'intégrale sur $[c, +\infty[$ (ou $]0, +\infty]$) (on peut toujours se ramener à l'un de ces cas par changement de variable) ;
- l'équivalent de f est trop compliqué ou bien ou ne peut pas trouver d'équivalent « simple ».

Objectif

On veut comparer f avec les fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ (au voisinage de 0 ou de $+\infty$)

Méthode dans le cas $b = +\infty$

1. On fixe α dans $\mathbb{R}$ et on essaye de déterminer la limite $\ell(\alpha) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x)$.

   Si on a réussi à déterminer cette limite :

   (a) s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\ell(\alpha) \in \mathbb{R}^\star$, cela veut dire qu'on n'aurait pas dû appliquer cette méthode car on sait déterminer un équivalent simple de f :

   $$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ell(\alpha)}{x^\alpha}$$

   on conclut alors en appliquant les règles de comparaison pour les fonctions positives et le critère de Riemann.

   (b) s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$, alors :

   $$f(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

   et on applique les règles de comparaison pour montrer que l'intégrale de f est convergente (car ici $\alpha > 1$) ;

   (c) s'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ (en fait dans ce cas, c'est aussi vrai pour $\alpha = 1$), alors :

   $$\frac{1}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x))$$

   on utilise alors les règles de comparaison pour les fonctions positives pour conclure que l'intégrale de f diverge ;

Méthode de comparaison (suite)

(d) si on est à chaque fois dans le cas critique, c'est-à-dire :

* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0 \iff \alpha \leqslant 1$;
* et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty \iff \alpha > 1$.

alors on compare f avec $x \longmapsto \dfrac{1}{x|\ln(x)|^\beta}$ en utilisant une démarche analogue.

2. Si on n'arrive pas à calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x)$, c'est souvent que f est trop « gros » pour rentrer dans l'échelle des comparaisons usuelles. Dans ce cas, on calcule plutôt la limite de :
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(x^\alpha f(x)\right)\right) = L(\alpha)$$
Si on a réussi à déterminer cette limite :

   (a) s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $L(\alpha) \in \mathbb{R}$, alors on n'aurait pas dû appliquer cette méthode car on connaît un équivalent simple de f :
   $$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{L(\alpha)}}{x^\alpha}$$
   et on conclut en utilisant le critère de Riemann et les règles de comparaison pour les fonctions positives ;

   (b) s'il existe $\alpha > 1$ tel que $L_\alpha = -\infty$, alors on justifie que :
   $$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$
   et on conclut comme avant que l'intégrale de f converge ;

   (c) s'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $L(\alpha) = +\infty$ (alors c'est aussi vrai pour $\alpha = 1$), on justifie que :
   $$\frac{1}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(f(x)\right)$$
   et on conclut comme avant que l'intégrale de f diverge.

3. Si on n'a pas réussi à déterminer cette limite parce que les termes sont toujours « trop gros » pour être comparés directement, alors on recommence en reprenant le ln (éventuellement après avoir « supprimé » les termes non significatifs (des o) qui ne contribuent pas au calcul de limite).

Méthode pour montrer qu'une intégrale diverge

Cadre et objectif

- f est continue par morceaux sur $[a,b[$ et on veut prouver que $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ diverge.

Méthode

Pour montrer que l'intégrale diverge, on essaye (dans l'ordre) les étapes suivantes :

1. si on connaît une primitive, alors on montre que cette primitive n'a pas de limite ou bien admet une limite infinie en b ;
2. si la fonction f est positive (ou de signe constant), alors on peut essayer d'appliquer les règles de comparaison et/ou la méthode précédente pour montrer que son intégrale diverge ;
3. si f est à valeurs complexes, regarder s'il est évident que soit la partie réelle soit la partie imaginaire est d'intégrale divergente ;
4. si f n'est pas de signe constant ou si les règles de comparaison n'ont pas permis de conclure alors :
   (a) on essaye de trouver deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite b telles que :
   $$\left(\int_{x_n}^{y_n} f\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas vers } 0$$
   dans la pratique, pour faire cela, on essaye de minorer la valeur absolue par une constante strictement positive ;
   (b) ou bien, on essaye de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (croissante dans la pratique) de limite b telle que :
   $$\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{diverge}$$

Remarque : *ce qui justifie ces méthodes (en tout cas les deux dernières), c'est la caractérisation séquentielle de la limite. En effet, si $F : x \longmapsto \int_{[a,x]} f$, F admet une limite finie en b (c'est-à-dire l'intégrale de f sur $[a,b[$ converge) si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, $(F(x_n))$ converge (et la limite est la même pour toute suite de limite b). Ainsi :*

- *s'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite b telles que $\int_{x_n}^{y_n} f$ ne tend pas vers 0, alors la suite $(F(y_n) - F(x_n))$ ne converge pas vers 0 : F n'a pas de limite finie en b ;*
- *s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite b telle que la série $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f$ diverge, alors la suite (S_n) des sommes partielles diverge, c'est-à-dire $(F(x_n) - F(x_0))$ diverge et donc F n'a pas de limite finie en b.*

Exemple 4.6.7.1 On veut étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{|\ln(x)|}}\,\mathrm{d}x$.

- La fonction $f : x \longmapsto e^{-\sqrt{|\ln(x)|}}$ est bien continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et il est clair que f est positive.
- Au voisinage de 0, un calcul direct de limite donne $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$. Il s'ensuit [1] que $f(x) \underset{x\to 0^+}{=} o(1)$. Or, $x \longmapsto 1$ est d'intégrale convergente sur $]0,1]$ donc par comparaison pour les fonctions positives, f l'est aussi.
- Au voisinage de $+\infty$, on ne peut pas donner d'équivalent simple de f. On va donc appliquer la méthode décrite dans le point méthode. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in [1,+\infty[\ ,\ x^\alpha f(x) = e^{\alpha\ln(x)-\sqrt{\ln(x)}}$$

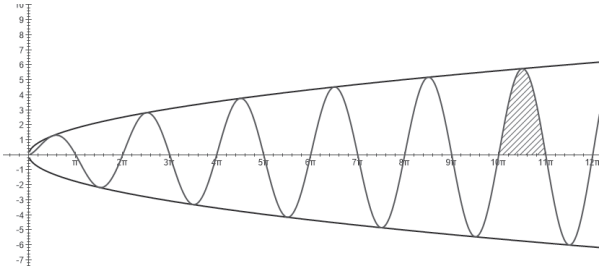
Or, $\sqrt{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{=} o(\ln(x))$. On en déduit (je vous laisse rédiger les détails) donc que :

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ \\ 0 & \text{si } \alpha \leqslant 0 \end{cases}$$

On voit qu'on ne peut pas choisir $\alpha > 1$ tel que la limite soit nulle. En revanche, on voit qu'on peut choisir $\alpha = 1$ et qu'on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = +\infty$. Par suite, $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x))$. Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge (critère de Riemann) donc par comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ diverge. On conclut alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{|\ln(x)|}}\,\mathrm{d}x$ diverge.

Exemple 4.6.7.2 Déterminons la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

- Tout d'abord, $g : x \longmapsto \sqrt{x}\sin(x)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Ensuite, un tracé sommaire de l'allure de la courbe représentative de g permet de deviner que l'intégrale de g diverge car on voit qu'il y a des parties d'aires de plus en plus grandes :



1. attention, si on rédige en prolongeant par continuité en 0, alors il faut dire que f est continue sur $]0,1]$ et se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$! On rappelle qu'un prolongement par continuité en un point d'une fonction continue par morceaux n'est pas nécessairement continue par morceaux.

- On applique donc la méthode pour montrer que l'intégrale diverge et on va montrer qu'il y a des « parties de plus en plus proche de $+\infty$ dont l'aire ne tend pas vers 0 ». Pour cela, on va minorer l'aire sur l'intervalle $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sqrt{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sqrt{2n\pi}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 2\sqrt{2n\pi}$$

On en déduit donc qu'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2n\pi+\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

  * $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$;
  * $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{x_n}^{y_n} g(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ et *a fortiori*, $\left(\displaystyle\int_{x_n}^{y_n} g(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Ceci prouve donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

Exemple 4.6.7.3 On veut étudier la convergence de $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$.

- Tout d'abord, $h : x \longmapsto \frac{\sin(x)}{\ln(x)}$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[3, +\infty[$.
- Pour étudier la convergence, on commence par étudier l'absolue convergence car h n'est pas de signe constant au voisinage de $+\infty$.
  * On ne peut donner d'équivalent plus simple de $|h|$ au voisinage de $+\infty$;
  * Lorsqu'on essaye de comparer avec les fonctions puissances, on constate qu'on ne peut pas conclure car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha |h(x)| = 0$ si $\alpha \leqslant 0$ et sinon, cette fonction n'a pas de limite en $+\infty$.
  * Si on suit la méthode, on s'arrête ici en ce qui concerne l'absolue convergence et on passe directement à l'étape suivante : l'intégration par parties. On va néanmoins (même si ce n'est pas nécessaire ici) prouver que l'intégrale n'est pas absolument convergente. En effet, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{|\ln(x)|}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{\ln(n\pi)}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{\ln(n\pi)} \geqslant \frac{2}{n\pi}$$

  Or, on sait que la série de terme général $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Par comparaison, la série $\sum \displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{|\ln(x)|}\,\mathrm{d}x$ diverge et par suite, $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ diverge.
- On essaye de faire une intégration par parties en intégrant le terme en sin et en dérivant le terme en $\frac{1}{\ln}$ (ce qui va permettre d'obtenir un terme plus petit). On fixe $a > 3$ et on considère $u = -\cos$ et $v = \frac{1}{\ln}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[3, a]$, on peut intégrer par parties, ce qui donne :

$$\int_3^a \frac{\sin(x)}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos(x)}{\ln(x)}\right]_3^a - \int_3^a \frac{\cos(x)}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Or,

∗ d'une part, $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{-\cos(a)}{\ln(a)} = 0$ car $\dfrac{\cos(x)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$;

∗ et d'autre part, $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{x(\ln(x))^2}$ est continue par morceaux sur $[3,+\infty[$ et :

$$\forall x \in [3,+\infty[\ ,\ \left|\frac{\cos(x)}{x(\ln(x))^2}\right| \leqslant \frac{1}{x(\ln(x))^2}$$

avec $x \longmapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^2}$ continue par morceaux, positive et d'intégrale convergente sur $[3,+\infty[$ d'après le critère de Bertrand.

Par comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{|\cos(x)|}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$ converge et par conséquent, $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

∗ Ainsi, dans l'égalité $\displaystyle\int_3^a \frac{\sin(x)}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos(x)}{\ln(x)}\right]_3^a - \int_3^a \frac{\cos(x)}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$, les deux termes du membre de droite ont des limites finies quand a tend vers $+\infty$. Par conséquent, $a \longmapsto \displaystyle\int_3^a \frac{\sin(x)}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ admet également une limite finie quand a tend vers $+\infty$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ converge.

Exemple 4.6.7.4 On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in [1,+\infty[\ ,\ f(x) = \frac{\sin(x^2)e^{x\cos(x)}}{x^2+(\ln(x))^2} + i\frac{e^{\sin(x^2)}}{x+2+\cos(x)}$$

- On vérifie sans peine que f est bien définie et continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.
- Pour tout $x \in [1,+\infty[$,

$$\Im m(f(x)) = \frac{e^{\sin(x^2)}}{x+2+\cos(x)} \geqslant \frac{e^{-1}}{x+1} \geqslant 0$$

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$ diverge (d'après le critère de Riemann). Par comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \Im m(f(x))\,\mathrm{d}x$ diverge.

Ce qui permet directement de conclure que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge (sans avoir à étudier la partie réelle qui semble assez difficile à étudier).

Exemple 4.6.7.5 On veut étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

- Tout d'abord, $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\cos(x)}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Malheureusement, cette fonction n'est pas de signe constant au voisinage de $+\infty$ donc on ne peut pas utiliser directement les règles de comparaison.

- Par ailleurs, $\left|\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\cos(x)}\right| \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{|\sin(x)|}{\sqrt{x}}$ et on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ diverge (voir l'exemple 4.6.5.7). Par comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\cos(x)}\right|\mathrm{d}x$ diverge.
- La technique d'intégration par parties ne semble pas très encourageante car la dérivée de $x\longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}+\cos(x)}$ est « compliquée » et surtout ne permet pas de faire apparaître un terme absolument convergent.
- On arrive donc à la conclusion qu'on va étudier la nature à l'aide d'un développement asymptotique (si vous le devinez de suite, il n'est donc pas nécessaire de rédiger les étapes précédentes). Pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\cos(x)} &= \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{1+\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}}\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\times\left(1-\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}-\frac{\sin(x)\cos(x)}{x}+O\left(\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}-\frac{\sin(2x)}{2x}+O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\end{aligned}$$

  Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ convergent, et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$ converge aussi d'après le critère de Riemann. Par comparaison pour les fonctions positives,

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\cos(x)}-\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}-\frac{\sin(2x)}{2x}\right)\right|\mathrm{d}x \quad \text{converge}$$

  et *a fortiori* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\cos(x)}-\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}-\frac{\sin(2x)}{2x}\right)\right)\mathrm{d}x$ converge. On conclut donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ converge car c'est la somme de trois fonctions d'intégrales convergentes.

Remarque : *si on modifie avec* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$*, alors le développement asymptotique est plus court car on tombe dès le second terme sur un terme de signe constant ! Dans ce cas, on rédige comme suit :*

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)}-\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{\sin^2(x)}{x}$$

Ensuite, on démontre (exercice : le faire en linéarisant $\sin^2$*) que* $\displaystyle\int_1^{+\infty}-\frac{\sin^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ *diverge. On conclut alors que par comparaison pour les fonctions négatives,* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)}-\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$ *diverge. Or,* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ *converge donc* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ *diverge.*

4.6.8 Extension aux fonctions continues sur un intervalle sauf en un nombre fini de points

Théorème 4.6.8.1 (Définition) *Soient I un intervalle, $a = \inf I$ et $b = \sup I$ avec $a < b$ et soit f une fonction définie et continue sur I sauf en un nombre fini de points.*
Soit $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ une subdivision de I telle que f est définie et continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si pour tout entier $0 \leqslant k < n$, $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, dans ce cas, le nombre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée.

Remarques :

- *les fonctions considérées ici ne sont pas nécessairement continues par morceaux. Dans le cadre de la définition, il se peut que f ne soit pas définie en certains points de l'intervalle I (voir exemple suivant) ou bien qu'elle le soit mais que les limites à droite ou à gauche en ce point soient infinies ou tout simplement non définies ;*
- *essentiellement, il s'agit simplement d'étendre la relation de Chasles pour des fonctions qui seraient typiquement définies et continues sur $I \setminus \{a\}$ avec $a \in I$, avec $I \setminus \{a\}$ qui n'est pas intervalle mais la réunion de deux intervalles disjoints ;*
- *c'est aussi pour cette raison qu'il faut bien différencier le cas des fonctions continues ou continues par morceaux sur un intervalle (où il suffit d'étudier le comportement de la fonction aux bornes de l'intervalle) et le cas des fonctions continues sauf en un nombre fini de points (où il faudra découper en plusieurs intervalles et étudier le comportement au voisinage de chacun de ces points) ;*
- *dans la pratique, on ne vous demande pas de justifier que la fonction est continue par morceaux sur l'intervalle : on l'écrit tout simplement comme dans tous les exemples des paragraphes précédents. Mais il faut tout de même s'assurer que la fonction est effectivement continue par morceaux et ne pas oublier de le faire !*

Exemple 4.6.8.2 Étudions la nature de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

- Tout d'abord, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ est continue sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. On doit donc étudier sur chacun de ces intervalles et par définition, l'intégrale I est convergente si $\displaystyle\int_0^1 f$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ sont convergentes.
- Nature de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

∗ La fonction f est continue, positive sur $]0,1[$. De plus, $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{2}$ et la fonction constante égale à $\frac{1}{2}$ est d'intégrale convergente (ou intégrable) sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$. Par comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_{1/2}^{1} f$ est aussi convergente.

∗ De même, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$ et $x \longmapsto \ln(x)$ est d'intégrale convergente sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$. Par conséquent (il s'agit toujours de fonctions positives), $\displaystyle\int_{0}^{1/2} f$ est convergente.

Ceci montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f$ est convergente.

- Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$.

∗ Le raisonnement précédent montre aussi que $\displaystyle\int_1^2 f$ est convergente.

∗ Par ailleurs, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x^2}$. D'après le critère de Bertrand, $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ est d'intégrale convergente ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$) sur $[2,+\infty[$. Par comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ converge.

On conclut donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge et donc, finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

Proposition 4.6.8.3 *Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle I, sauf en un nombre fini de points. On pose $a = \inf I$ et on suppose que $\displaystyle\int_I f$ converge.*
Alors, la fonction F définie pour tout $x \in \overline{I}\cap\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\overline{I}\cap\mathbb{R}$.

Preuve :

Notons $b = \sup I$ et considérons $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ une subdivision de I telle que f est continue sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. Alors F est définie par morceaux par la relation :

$$\forall x \in]a_i, a_{i+1}] \cap \mathbb{R}\ ,\ F(x) = \sum_{k=0}^{i-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a_i}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On conclut alors que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, F est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$. Enfin, par définition de la convergence de l'intégrale, lorsque $\{a_i, a_{i+1}\} \subset \mathbb{R}$, le reste d'une intégrale convergente tend vers 0 et F est donc continue à droite en a_i et à gauche en a_{i+1}.

⊠

4.7 Exercices

Exercice 4.7.1 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1} \quad ; \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} \quad ; \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+ix} \quad ; \quad \int_1^2 \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.7.2 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2+3} \; ; \; \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-4x^2}} \; ; \; \int_0^a \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \; ; \; \int_{2a}^{3a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \; ; \; \int_0^1 x\sqrt[n]{1-x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.7.3 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+\ln t}} \quad ; \quad \int_{e^2}^{e^3} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t\ln(\ln t)} \quad ; \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}\,x}$$

Exercice 4.7.4 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$\int \frac{x^3+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int \frac{3x+5}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int \frac{2x+i}{ix-1}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int (x-i)e^{ix}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.7.5 Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant l'intervalle de validité :

$$\int x^2e^x\sin x\,\mathrm{d}x \; ; \; \int \cos x\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{d}x \; ; \; \int \sin x\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{d}x \; ; \; \int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \; ; \; \int x\tan^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.7.6 Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant l'intervalle de validité :

$$\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int \ln(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int e^{\arccos x}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}$$

Exercice 4.7.7 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x \; ; \; \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x-1}} \; ; \; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4(x)\,\mathrm{d}x \; ; \; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^3(x)}\,\mathrm{d}x \; ; \; \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{4+\sin x}$$

Exercice 4.7.8 À l'aide d'une intégration par parties déterminer les primitives suivantes :

$$\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x \; ; \; \int e^{3x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x \; ; \int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x \; ; \; \int \arctan(2x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.7.9 En posant $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\cos t$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.7.10 Trouver une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}$ à l'aide du changement de variable $x = \mathrm{sh}\,(y)$ et une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$ en posant $x = \varepsilon \mathrm{ch}\,(y)$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Exercice 4.7.11 Soit f la fonction définie par $f(x) = xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. La fonction f est-elle continue par morceaux sur $]0, +\infty[$?
2. Montrer que f se prolonge par continuité en 0. On note $\widetilde{f}$ le prolongement obtenu : $\widetilde{f}$ est-elle continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{2n}$.

Exercice 4.7.12 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

Exercice 4.7.13 Soit f continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On suppose que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\ ,\ \int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur l'intervalle $]a,b[$:

(a) en raisonnant par récurrence sur n ;

(b) puis en raisonnant par l'absurde.

Exercice 4.7.14 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Montrer que f a un point fixe.

Exercice 4.7.15 Soit $f : [0,a] \longrightarrow [0,b]$ une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\displaystyle\int_{[0,a]} f + \int_{[0,b]} f^{-1} = ab$ et interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 4.7.16 Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Montrer que : $\forall x \in [a,b]\ ,\ |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}|f(a)+f(b)| + \displaystyle\int_a^b |f'|$.

Exercice 4.7.17 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[, \mathbb{R}^+)$ telle que $\exists k \in \mathbb{R}\ ,\ \forall x \geqslant 0\ ,\ f(x) \leqslant k\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 4.7.18 Soient f, g deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ telles que $f(a) = g(a) = 0$. Montrer que :

$$\int_a^b |(fg)'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b |g'(x)|\,\mathrm{d}x\right)$$

Exercice 4.7.19 Soit $a > 0$ et $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue telle que, pour tout $x \in [0,a]$, $f(x)f(a-x) = 1$ et $f(x) \neq -1$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

Exercice 4.7.20 On considère la fonction f définie par la relation : $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+t}}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{t^3+t}} \underset{t\to 0^+}{=} \dfrac{1}{\sqrt{t}} + g(t)$, où g est continue en 0 et $g(0) = 0$.
3. En déduire que f se prolonge par continuité en 0.
4. Donner un équivalent de f en 0.
5. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
6. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.
7. Étudier les variations de f puis tracer l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 4.7.21 On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n \,\mathrm{d}t$.

1. Calculer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+2}$.
2. En déduire que (I_n) converge et déterminer sa limite.
3. À l'aide d'une intégration par parties, prouver que pour tout entier n :
$$nI_n = \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t)(\tan t)^n \,\mathrm{d}t$$
4. En déduire un équivalent de I_n.

Exercice 4.7.22 On pose pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, $I_n(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1-2a\cos(t)+a^2} \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I_n(a)$ est bien définie.
2. Pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, exprimer $I_n\left(\dfrac{1}{a}\right)$ en fonction de a et $I_n(a)$.
3. Calculer $I_0(a)$ pour $|a| \neq 1$.
4. Montrer que $2aI_1(a) = (1+a^2)I_0(a) - \pi$. En déduire la valeur de $I_1(a)$.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a(I_{n+1}(a) + I_{n-1}(a)) = (1+a^2)I_n(a)$.
6. En déduire l'expression de $I_n(a)$ en fonction de a et n suivant que $a = 0$, $0 < |a| < 1$ ou $|a| > 1$.

Exercice 4.7.23 Étudier les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) - \ln n \quad ; \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \quad ; \quad w_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$$

Exercice 4.7.24 Déterminer un équivalent des suites suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \;;\; T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}} \;;\; R_n = \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

Exercice 4.7.25 Soit $\alpha > 0$. À l'aide d'une somme de Riemann, déterminer un équivalent de $S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ puis retrouver le résultat à l'aide d'une comparaison série/intégrale.

Exercice 4.7.26 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n}) \sin(\frac{k}{n^2})$.

Exercice 4.7.27 Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b],]0,+\infty[)$ et $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

1. Justifier que $\ell = \displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une unique subdivision $[x_{0,n}, \cdots, x_{n,n}]$ de $[a,b]$ telle que :
$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \;,\; \int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\ell}{n}$$
3. Étudier l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g(x_{k,n})$.

Exercice 4.7.28 Montrer que les intégrales suivantes convergent et calculer leur valeur.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$;
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x}$;
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+t^3}\,\mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t-t^3}\,\mathrm{d}t$;
5. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{t}{t^4-1}\,\mathrm{d}t$;
6. $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$;
7. $\displaystyle\int_2^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$;
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$;
9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$;
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$;
11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^5}{\sqrt{1-t^3}}\,\mathrm{d}t$;
12. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^4}\,\mathrm{d}t$;
13. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-t^2}}$;
14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,(t)}$;
15. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(3t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.7.29 Déterminer la nature (convergente ou divergente) des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1} \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x-1} \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \;;\; \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\ln|x|}{x^2-1}\right| \mathrm{d}x \;;\; \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4.7.30 Déterminer la nature (convergente ou divergente) des intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\ln(1+t^\alpha)}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^1 \ln(t)\ln(1-t^\alpha)\,\mathrm{d}t$$

Pour la troisième et la quatrième intégrale, on discutera suivant les valeurs du réel α.

Exercice 4.7.31 Déterminer la nature (convergente ou divergente) des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t\sqrt{t}\ln(t)}\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ (avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$) ;
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1-\mathrm{th}\,(t))\,\mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha \ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ (avec $\alpha\in\mathbb{R}$).

Exercice 4.7.32 Déterminer la nature (convergente ou divergente) des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}\,(\sqrt{t})}{\sqrt{t}-\sin(t)}\,\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln|t^2-t|}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^\beta}\,\mathrm{d}t$ (on discutera suivant les valeurs des réels α et β) ;
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^\alpha}{t^\beta-1}\,\mathrm{d}t$ (avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\star$) ;
6. $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \left(\ln(\frac{1}{t})\right)^\beta\,\mathrm{d}t$ (on discutera suivant les valeurs des réels α et β).

Exercice 4.7.33 Soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (f(t+1)-f(t))\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 4.7.34 Lemme de Riemann-Lebesgue.

1. Soit $f\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0$.
2. Montrer que ce résultat est aussi vrai si f est en escalier.
3. En déduire que le résultat est encore vrai pour f continue par morceaux sur $[a,b]$.

Exercice 4.7.35 Dans cet exercice, on va calculer de façon « élémentaire » la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

1. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi_n(t) = \dfrac{\sin(nt)}{\sin t}$.
   (a) Montrer que φ_n se prolonge en une fonction continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. *On notera encore φ_n la fonction obtenue.*
   (b) En déduire l'existence de $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.
   (c) Montrer que pour $n \geqslant 2$, $J_n - J_{n-2} = \dfrac{2}{n-1}\sin((n-1)\frac{\pi}{2})$. En déduire une expression de J_n en fonction de n.
   Indication : *on distinguera deux cas suivant la parité de n en dans l'un des cas, on exprimera J_n à l'aide d'une somme.*
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (J_n - J_{n-1}) = 0$ puis en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \dfrac{\pi}{2}$.
   (e) Déduire des questions précédentes l'égalité : $\pi = 4 \times \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
2. On considère l'application f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}t \right)$. *On pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent (lemme de Riemann-Lebesgue).*
4. En déduire que la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.7.36 On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$. Ces intégrales sont appelées les intégrales de Wallis.

1. Étudier les variations de la suite (W_n) et prouver qu'elle converge.
2. Montrer que (W_n) converge vers 0.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre W_{k+2} et W_k.
4. En déduire les expressions de W_{2n} et W_{2n+1} pour $n \in \mathbb{N}$.
5. À l'aide des questions précédentes prouver que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$.
6. Établir que la suite $\Big((n+1)W_nW_{n+1}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer cette constante.
7. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 4.7.37 Le but de cet exercice est de calculer de manière « simple » l'intégrale de Gauss :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

On notera ici $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale définissant le nombre I.
2. Montrer que pour tout réel t, $1 - t^2 \leqslant e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$.
3. En déduire successivement que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$

puis que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x \quad\leqslant\quad \frac{1}{\sqrt{n}}F(\sqrt{n}) \quad\leqslant\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x$$

Indication : *on pourra pour cela, faire des changements de variables (distincts) dans chacune des intégrales.*

4. En utilisant le résultat de l'exercice précédent (sur les intégrales de Wallis), conclure que :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

4.8 Annexe

4.8.1 Démonstration du théorème d'approximation

Théorème d'approximation uniforme : soit $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b],\mathbb{R})$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$$

Preuve :

Avant de rentrer dans les détails techniques, résumons ici les idées principales sans rédiger :

1. si on choisit une subdivision adaptée $[a_i]_{0\leqslant i\leqslant n}$, alors la restriction de f à chaque intervalle se prolonge en une fonction continue sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$;
2. toute fonction continue sur un segment est uniformément continue ;
3. pour une fonction uniformément continue sur un segment, il suffit de fixer $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ un module d'uniforme continuité et de découper le segment en intervalles de longueur α : sur chacun de ces petits segments, la fonction est comprise entre son minimum et son maximum et la différence des 2 est plus petite que ε ;
4. pour les valeurs aux points a_i, il suffit de prendre la valeur de f en ce point.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\sigma = [a_0, \cdots, a_n]$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note f_i l'unique prolongement continu de $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ à $[a_i, a_{i+1}]$, c'est-à-dire l'application définie par :

$$f_i(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to a_i \\ x>a_i}} f(x) & \text{si } x = a_i \\ f(x) & \text{si } x \in]a_i, a_{i+1}[\\ \lim\limits_{\substack{x\to a_{i+1} \\ x<a_{i+1}}} f(x) & \text{si } x = a_{i+1} \end{cases}$$

Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. Puisque f_i est continue sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$, d'après le théorème de Heine, f_i est uniformément continue sur $[a_i, a_{i+1}]$. Par conséquent, il existe $\alpha_i > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [a_i, a_{i+1}]^2 \ , \ (|x-y| \leqslant \alpha_i \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \leqslant \varepsilon)$$

On pose alors $\alpha = \min\limits_{0\leqslant i<n} (\alpha_i) > 0$, $n_i = E(\frac{a_{i+1}-a_i}{\alpha})$ et on définit les applications φ_i et ψ_i sur $]a_i, a_{i+1}[$ par :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \min\limits_{x\in[a_i,a_i+\alpha]} f_i(x) & \text{si } x \in]a_i, a_i+\alpha[\\ \min\limits_{x\in[a_i+k\alpha,a_i+(k+1)\alpha]} f_i(x) & \text{si } x \in [a_i+k\alpha, a_i+(k+1)\alpha[\\ & \qquad (\text{avec } 1 \leqslant k < n_i) \\ \min\limits_{x\in[a_i+n_i\alpha,a_{i+1}]} f_i(x) & \text{si } x \in [a_i+n_i\alpha, a_{i+1}[\end{cases}$$

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \max\limits_{x\in[a_i,a_i+\alpha]} f_i(x) & \text{si } x \in]a_i, a_i+\alpha[\\ \max\limits_{x\in[a_i+k\alpha,a_i+(k+1)\alpha]} f_i(x) & \text{si } x \in [a_i+k\alpha, a_i+(k+1)\alpha[\\ & \qquad (\text{avec } 1 \leqslant k < n_i) \\ \max\limits_{x\in[a_i+n_i\alpha,a_{i+1}]} f_i(x) & \text{si } x \in [a_i+n_i\alpha, a_{i+1}[\end{cases}$$

On peut remarquer que φ_i et ψ_i sont bien définies puisque f_i est continue sur chaque segment $[a_i + k\alpha, a_i + (k+1)\alpha]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes : le maximum et le minimum sont donc parfaitement définis (et sont atteints).
Par ailleurs, φ_i et ψ_i sont des fonctions constantes par morceaux sur $]a_i, a_{i+1}[$ (ce sont des fonctions en escalier) et $\varphi_i \leqslant f \leqslant \psi_i$ sur $]a_i, a_{i+1}[$.

On définit enfin les fonctions φ et ψ sur $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(a_i) & \text{si } x = a_i \text{ avec } 0 \leqslant i \leqslant n \\ \varphi_i(x) & \text{si } x \in]a_i, a_{i+1}[\text{ , avec } 0 \leqslant i < n \end{cases}$$

et

$$\psi(x) = \begin{cases} f(a_i) & \text{si } x = a_i \text{ avec } 0 \leqslant i \leqslant n \\ \psi_i(x) & \text{si } x \in]a_i, a_{i+1}[\text{ , avec } 0 \leqslant i < n \end{cases}$$

• Il est clair que φ et ψ sont des fonctions en escalier sur le segment $[a, b]$ et à valeurs réelles.

• Montrons que $\varphi \leqslant f \leqslant \phi$.
Soit $x \in [a, b]$. On distingue deux cas :

- ∗ s'il existe $i \in [\![0, n]\!]$ tel que $x = a_i$, alors $\varphi(x) = \psi(x) = f(a_i)$ donc $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$;
- ∗ sinon, il existe (un unique) entier $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x \in]a_i, a_{i+1}[$. Alors, par définition :

$$\varphi_i(x) \leqslant f_i(x) \leqslant \psi_i(x) \quad \text{et donc} \quad \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$$

• Enfin, montrons que $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

Soit $x \in [a,b]$. À nouveau, on distingue deux cas :

* s'il existe $i \in [\![0,n]\!]$ tel que $x = a_i$, alors : $\varphi(x) = f(a_i) = \psi(x)$ donc $\psi(x) - \varphi(x) = 0 \leqslant \varepsilon$;
* sinon, il existe un unique $i \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $x \in]a_i, a_{i+1}[$. Puisque f_i est continue sur le segment $I_0 = [a_i, a_i+\alpha]$, sur chacun des segments $I_k = [a_i + k\alpha, a_i + (k+1)\alpha]$ pour $1 \leqslant k < n_i$ et enfin sur le segment $I_{n_i} = [a_i + n_i\alpha, a_{i+1}]$, elle est bornée et atteint des bornes sur chacun de ces segments. Ainsi, pour tout $k \in [\![0,n_i]\!]$, il existe $c_{i,k}, d_{i,k} \in I_k$ tels que : $f_i(c_{i,k}) = \min\limits_{x\in I_k} f_i(x)$ et $f_i(d_{i,k}) = \max\limits_{x\in I_k} f_i(x)$.

  De plus, puisque $|d_{i,k} - c_{i,k}| \leqslant \alpha \leqslant \alpha_i$, on a $|f_i(d_{i,k}) - f_i(c_{i,k})| \leqslant \varepsilon$. Par suite,
  $$0 \leqslant \max_{x\in I_k} f_i(x) - \min_{x\in I_k} f_i(x) \leqslant \varepsilon$$
  et donc
  $$0 \leqslant \psi_i(x) - \varphi_i(x) \leqslant \varepsilon$$
  soit encore,
  $$0 \leqslant \psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon$$

Ce qui prouve que $0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

⊠

4.8.2 Compléments sur les sommes de Riemann

Définition 4.8.2.1 Soit $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b], \mathbb{K})$. Soient $\sigma = [a_i]_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision de $[a,b]$ et $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$.

On appelle somme de Riemann associée à f et à (σ, ξ) le nombre :

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(\xi_k)$$

Le nombre $h(\sigma) = \max\limits_{0\leqslant k<n} |a_{k+1} - a_k|$ est appelé le pas de la subdivision σ.

On dit que (σ, ξ) est une subdivision pointée de $[a,b]$.

Théorème 4.8.2.2 *Soit $f \in \mathcal{C}_{0,m}([a,b], \mathbb{K})$. On note T l'ensemble des subdivisions pointées de $[a,b]$. Alors :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \alpha > 0 \ , \ \forall (\sigma,\xi) \in T \ , \ \left(0 \leqslant h(\sigma) \leqslant \alpha \implies \left| S(f,\sigma,\xi) - \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \varepsilon \right)$$

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$. En reprenant la démonstration du théorème d'approximation, il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $[x, y] \subset [a, b]$, si f est continue sur $[x, y]$, alors $|f(t) - f(s)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $(s, t) \in [x, y]^2$ vérifiant $|s - t| \leqslant \alpha_0$.

Soit alors (σ, ξ) une subdivision pointée de $[a, b]$ telle que $h(\sigma) \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$. On pose $\sigma = [a_i]_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et $\xi = (\xi_o, \cdots, \xi_{n-1})$. On a alors :

$$\begin{aligned}\left| S(f, \sigma, \xi) - \int_{[a,b]} f \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(x) - f(\xi_k)) \, \mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - f(\xi_k)| \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

On considère alors $I = \{k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ f \text{ est continue sur } [a_k, a_{k+1}]\}$ et $J = [\![0, n-1]\!] \setminus I$.

- si $k \in I$, alors pour tout $x \in [a_k, a_{k+1}]$, puisque $\xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$, on a $|x - \xi_k| \leqslant a_{k+1} - a_k \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$. Par suite,

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - f(\xi_k)| \, \mathrm{d}x \leqslant \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varepsilon \, \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon(a_{k+1} - a_k)$$

- si $k \in J$, $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - f(\xi_k)| \, \mathrm{d}x \leqslant 2 \sup_{[a,b]} |f| \times (a_{k+1} - a_k)$.

Puisque f est continue par morceaux sur $[a, b]$, f a un nombre fini $N \in \mathbb{N}$ de points de discontinuité dans $[a, b]$. Par conséquent, J contient au plus $2N$ éléments et on a donc :

$$\begin{aligned}\left| S(f, \sigma, \xi) - \int_{[a,b]} f \right| &\leqslant \sum_{k \in I} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - f(\xi_k)| \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \sum_{k \in J} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - f(\xi_k)| \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

et enfin,

$$\begin{aligned}\left| S(f, \sigma, \xi) - \int_{[a,b]} f \right| &\leqslant \sum_{k \in I} (a_{k+1} - a_k)\varepsilon + 2N \times 2 \sup_{[a,b]} |f| \times (a_{k+1} - a_k) \\ &\leqslant (b - a)\varepsilon + 4N\alpha \sup_{[a,b]} |f|\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in]0, \alpha_0]$ et $\lim\limits_{\alpha \to 0} 4N\alpha \sup\limits_{[a,b]} |f| = 0$, on choisit $\alpha \in]0, \alpha_0]$ tel que $4N\alpha \sup_{[a,b]} |f| \leqslant \varepsilon$. ⊠

Chapitre 5

Séries numériques

Prérequis : dans tout ce chapitre, les notions suivantes sont supposées connues :

- toutes les définitions et propriétés des suites réelles ou complexes (cours de mathématiques supérieures 1). En particulier :
- théorème des suites adjacentes ;
- théorème de la limite monotone (pour les suites) ;
- l'introduction aux séries à termes positifs ;
- relations de comparaisons des suites ;
- la méthode de comparaison série-intégrale ;
- intégrales généralisées (chapitre précédent) ;
- critères de Riemann et de Bertrand pour les intégrales.

Aucune autre connaissance spécifique sur la notion de série n'est supposée connue.

5.1 Généralités sur les séries

Dans tout ce chapitre, on note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1.1 Définitions et vocabulaire des séries

Définition 5.1.1.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit que :

- u_n est le terme d'indice n de la série (ou le terme général) ;
- S_n est la somme partielle d'indice n.

⚠ **Attention :** la série de terme général u_n est notée $\sum u_n$, sans indice sur la somme ! Il ne faut pas confondre cette notation avec :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{ou bien} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad \text{ou encore} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

La première somme désigne la somme partielle d'indice n, la seconde la somme de la série (sous réserve d'existence) et la troisième la somme de la famille (voir dernier paragraphe de ce chapitre sur les familles sommables).

Remarque : *si une suite (u_n) est définie à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on définit la série de terme général u_n par la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ avec :*

$$\forall n \geqslant n_0\ ,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

On note alors souvent la série $(\sum u_n)_{n\geqslant n_0}$. Ceci étant dit, en posant pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n_0+n}$, on est ramené à une suite définie pour tout entier n. Par conséquent, dans ce chapitre, on ne traitera que le cas des séries définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 5.1.1.2 Commençons par certaines séries simples mais de référence :

- **les séries arithmétiques** sont les séries de la forme $\sum u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$, avec $r \in \mathbb{C}$ donné, alors la somme

partielle d'indice n de la série arithmétique de terme général u_n est :

$$S_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r$$

- **les séries géométriques** sont les séries de la forme $\sum u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$, avec $q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ donné, alors la somme partielle d'indice n de la série géométrique de terme général u_n est :

$$S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- **les séries de Riemann** sont les séries dont le terme général est $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Ces séries sont définies à partir du rang $n = 1$;

- **les séries de Bertrand** sont les séries dont le terme général est $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Elles sont définies à partir du rang 2 ;

- **la série exponentielle** est la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$ avec $x \in \mathbb{R}$. Le nom provient du fait que pour tout réel x,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

On verra un peu plus loin que cette définition s'étend au cas des nombres complexes.

Remarque : *connaître la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou connaître la série de terme général u_n sont équivalents. En effet, avec les notations précédentes,*

$$S_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1 \ , \ u_n = S_n - S_{n-1}$$

L'étude d'une suite peut donc aussi être ramenée à l'étude d'une série. Cette remarque pourtant simple est absolument essentielle dans la pratique, en particulier pour les recherches de développement asymptotique.

5.1.2 Convergence, divergence, divergence grossière et convergence absolue

Définition 5.1.2.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que :

- la série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est une suite convergente. Dans ce cas, la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la somme de la série $\sum u_n$ et est notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$;
- la série $\sum u_n$ est divergente si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente ;
- la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est une série convergente.

Exemple 5.1.2.2 Si (u_n) est une suite arithmétique non identiquement nulle, alors la série $\sum u_n$ est une série divergente.

Exemple 5.1.2.3 Soit $q \in \mathbb{C}$. Alors, la série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, la somme de la série est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

On peut aussi remarquer que cette série converge si et seulement si elle converge absolument, ce qui n'est absolument pas le cas en général (on reverra cela un peu plus loin dans le cours).

Remarque : *d'un point de vue pratique, la difficulté principale est qu'on ne sait en général pas calculer les sommes partielles d'une série. Dans les paragraphes suivants, on étudiera donc des méthodes d'étude de convergence qui ne nécessitent pas de calculer les sommes partielles.*

Définition 5.1.2.4 Soit $\sum u_n$ une série convergente. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle reste d'indice n, et on note R_n, le nombre :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

⚠ **Attention :** on parle de reste uniquement lorsqu'on a montré la convergence de la série ! Sinon, cela n'a aucun sens !

Remarques :

- *on ne modifie pas la nature d'une série (c'est-à-dire la convergence ou la divergence de la série) si on modifie un nombre fini de termes. En particulier, pour tout entier N, les séries $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sum_{k=N}^{n} u_k)_{n\geqslant N}$ sont de même nature ;*
- *si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (on dit souvent simplement que le reste tend vers 0) ;*
- *les séries télescopiques permettent directement de ramener l'étude de la convergence d'une suite à celle d'une série :*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \iff \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ est une série convergente}$$

- *lorsque la série $\sum u_n$ converge, la définition du reste n'est pas universelle dans le sens où on trouve souvent les définitions suivantes :*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \text{ou bien aussi} \quad R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$$

Pour cette raison, il convient de bien préciser de « quel reste » on parle, c'est-à-dire de bien préciser la définition choisie (qui n'est d'ailleurs pas forcément la même dans tous les exercices).

Proposition 5.1.2.5 *Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe. Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors la suite (u_n) converge vers 0.*

Preuve :

En effet, si $\sum u_n$ converge, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge. Il en est alors de même pour la suite $(S_{n-1})_{n\geqslant 1}$. Or, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, d'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. ⊠

⚠ **Attention :** la réciproque est très fausse ! On a vu (dans le cours de mathématiques supérieures 1) que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge bien que le terme général $(\frac{1}{n})$ tend vers 0. En effet, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ln(1+\frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{n}$ et par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1)-\ln(k)) = \ln(n+1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

Dans la pratique, on utilise souvent la contraposée de cette propriété, qui porte d'ailleurs un nom bien précis : la divergence grossière.

Corollaire 5.1.2.6 (Divergence grossière) *Si (u_n) ne converge pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge. On dit alors que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

Exemple 5.1.2.7 Si on reprend la série géométrique $\sum q^n$, pour $|q| \geqslant 1$, (q^n) ne converge pas vers 0, ce qui permet de conclure que cette série diverge grossièrement pour $|q| \geqslant 1$.

Proposition 5.1.2.8 *Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors, $\sum z_n$ converge si et seulement si $\sum \Re e(z_n)$ et $\sum \Im m(z_n)$ convergent.*

Preuve :

C'est évident car une suite complexe converge si et seulement si ses parties réelle et imaginaire convergent. ⊠

5.1.3 Opérations sur les séries convergentes

Proposition 5.1.3.1 *Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des séries convergentes (à valeurs dans $\mathbb{K}$).*

(i) L'ensemble $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

(ii) L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \sum u_n & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array}$ *est une application linéaire.*

(iii) Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sum(\lambda u_n + v_n)$ est une série divergente.

Preuve :

• Les deux premiers points sont clairs puisque si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k$$

• Montrons (iii).
On suppose que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge. Montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sum(\lambda u_n + v_n)$ diverge par l'absurde. S'il existe λ tel que $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge, alors d'après (i), $\sum(\lambda u_n + v_n) - \lambda \sum u_n$ converge, c'est-à-dire $\sum v_n$ converge, ce qui contredit l'hypothèse de départ. ⊠

⚠ **Attention :** on ne peut pas déterminer directement la nature de la somme de deux séries divergentes ! Pourquoi ?

Remarques :

- *on montrera plus loin que l'ensemble des séries absolument convergentes est lui aussi un espace vectoriel ;*
- *en revanche, l'ensemble des séries convergentes n'est pas une sous-algèbre de l'ensemble des suites car :*
  - *la suite constante égale à 1 (le neutre pour la multiplication "usuelle" dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de série convergente ;*
  - *ou tout simplement le « produit usuel » de deux séries convergentes n'est pas toujours convergent dans le sens suivant : si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n \times v_n)$ ne converge pas forcément (on le prouvera plus loin).*
- *dans le cours de mathématiques spéciales 1, on introduira un « nouveau produit », le produit de Cauchy de deux séries, qui sera « compatible » (ou presque) avec la convergence (ou plus exactement l'absolue convergence).*

Dans la suite de ce chapitre, on va d'abord s'intéresser dans un premier temps aux séries à termes positifs, puis ensuite aux séries à termes réels, et enfin aux séries à termes complexes.

En fait, il est assez logique de considérer à part les séries à termes positifs. Une explication est que toute suite réelle peut s'écrire comme la différence de deux suites réelles positives. En effet, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$, on a pour tout entier n :

$$u_n = \max(u_n, 0) - \max(-u_n, 0) = \frac{|u_n| + u_n}{2} - \frac{|u_n| - u_n}{2}$$

(ceci est l'analogue « discret » des fonctions f_+ et f_-, parties positives et négatives de f).

5.2 Séries à termes positifs

5.2.1 Convergence, divergence et comparaison des termes généraux

Théorème 5.2.1.1 *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associées. Alors,*

(i) $\sum u_n$ converge $\iff$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

(ii) $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$ $\iff$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Preuve :

Puisque $(u_n) \geqslant 0$, on a pour tout entier n, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$, c'est-à-dire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante. On en déduit immédiatement le résultat (d'après le théorème de la limite monotone pour les suites réelles). ⊠

Exemple 5.2.1.2 La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs. De plus, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star\ ,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$

Par conséquent, les sommes partielles sont majorées et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente.

Exemple 5.2.1.3 On considère la série $\sum \frac{e^{\sin(n)}}{n+1+\cos(n)}$. C'est une série à termes positifs et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star\ ,\ \frac{e^{\sin(n)}}{n+1+\cos(n)} \geqslant \frac{e^{-1}}{n} \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sin(k)}}{k+1+\cos(k)} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-1}}{k}$$

Or, on a déjà vu que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-1}}{k} = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sin(k)}}{k+1+\cos(k)} = +\infty$.

Exercice 5.2.1.4 Soit (a_n) une suite de nombres positifs. On pose pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)\times\cdots\times(1+a_n)} = \frac{a_n}{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)}$$

En introduisant une série télescopique, montrer que $\sum u_n$ converge.

Remarques :

- *en général, lorsqu'on veut majorer (ou minorer) les sommes partielles d'une série à termes positifs, on majore (ou minore) le terme général. On peut parfois majorer par une intégrale : ceci sera détaillé dans le paragraphe sur la comparaison série/intégrale ;*
- *la remarque précédente suggère également qu'on peut appliquer des règles de comparaison O (ou o ou $\sim$) aux termes généraux de deux séries pour étudier la nature. Ce sera l'objet des propriétés suivantes.*

Proposition 5.2.1.5 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles à termes positifs. On suppose que pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n$.*

(i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge vers $+\infty$.

Preuve :

• Montrons (i).
On suppose que $\sum v_n$ converge. Avec les hypothèses de la proposition, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Ce qui montre que les sommes partielles de la série de terme général u_n sont majorées. Par conséquent, $\sum u_n$ converge et on peut passer à la limite dans l'inégalité ci-dessus.

• (ii) est la contraposée de (i) en remarquant qu'une série à termes positifs diverge si et seulement si elle diverge vers $+\infty$. ⊠

⚠ **Attention :** cette proposition est très fausse si l'on retire l'hypothèse à termes positifs. Par exemple, $-\pi \leqslant \frac{1}{n^2}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge alors que la série $\sum(-\pi)$ est une série divergente !

Les trois corollaires suivants, appelés « règles de comparaison pour les séries à termes positifs », sont très utiles dans l'étude pratique de la nature d'une série.

Corollaire 5.2.1.6 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles à termes positifs. On suppose que $(u_n) = O(v_n)$.*

(i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge vers $+\infty$.

Preuve :

On suppose que $(u_n) = O(v_n)$. Par définition, il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant M v_n$. Les natures des séries $\sum u_n$ et $(\sum u_n)_{n\geqslant n_0}$ étant les mêmes, tout comme celles de $\sum v_n$ et $(\sum M v_n)_{n\geqslant n_0}$, on en déduit directement le résultat d'après la proposition précédente.

⊠

Corollaire 5.2.1.7 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles à termes positifs. On suppose que $(u_n) = o(v_n)$.*

(i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge vers $+\infty$.

Preuve :

C'est une conséquence immédiate du corollaire précédent car $(u_n) = o(v_n)$ implique $(u_n) = O(v_n)$.

⊠

Corollaire 5.2.1.8 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles à termes positifs. On suppose que $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)$. Alors, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, c'est-à-dire :*

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge}$$

Preuve :

En effet, $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)$ implique que $(u_n) = O(v_n)$ et $(v_n) = O(u_n)$. D'après le corollaire précédent, les natures des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont donc les mêmes.

⊠

⚠ **Attention :** ce résultat est très faux pour des séries à termes quelconques ! Ce n'est pas parce que $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)$ que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
Par exemple, si on pose pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$, en admettant provisoirement que $\sum u_n$ est convergente, on a $(u_n) \sim (v_n)$ mais $\sum v_n$ diverge puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

⚠ **Attention :** de même, la conclusion de divergence pour les O et o est fausse si les séries ne sont pas à termes positifs. Par exemple, $\frac{1}{n} = o(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$, $\sum \frac{1}{n}$ diverge mais $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

Remarques :

- *bien entendu, ces propriétés restent vraies pour des séries à termes négatifs et donc pour des séries à termes de signe constant ;*
- *puisque la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes, on peut aussi remplacer l'hypothèse « à termes positifs » par « à termes positifs à partir d'un certain rang » ;*
- *en particulier, si $\sum v_n$ est une série à termes positifs et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ est aussi une série à termes positifs à partir d'un certain rang : on peut donc appliquer la règle sur la nature des séries ;*
- *on reverra dans l'étude des séries quelconques que les règles pour prouver la convergence avec les O et o restent valables si $\sum v_n$ est une série à termes positifs et $\sum u_n$ est quelconque.*

Exemple 5.2.1.9 Soit $(u_n) = (\ln(1 + \frac{1}{n}))$ et $(v_n) = (\ln(1 + \frac{1}{n^2}))$. On a directement :

$$(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad (v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

De plus, (u_n) et $(\frac{1}{n})$ (respectivement (v_n) et $(\frac{1}{n^2})$) sont positives donc les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n}$ (respectivement $\sum v_n$ et $\sum \frac{1}{n^2}$) sont de même nature. Par conséquent, $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge.

Exemple 5.2.1.10 On considère la série de terme général $u_n = \frac{\sin^2(\ln(n))}{n^2+\cos(n)\ln(n+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or, $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont deux séries à termes positifs et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

Exemple 5.2.1.11 On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.
On veut montrer que (u_n) est une suite convergente. Or, on a vu que (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge. Pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

Or, la série $\sum \frac{1}{2n^2}$ est une série à termes positifs convergente. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge, c'est-à-dire que la suite (u_n) converge.

Remarques :

- *pour information, la série $\sum \frac{1}{n}$ est appelée la série harmonique (et ses sommes partielles sont souvent notées H_n) et la limite de la suite $(H_n - \ln(n+1))$ est un nombre de référence, noté γ, et appelé constante d'Euler. On a $\gamma \simeq 0,577$;*
- *on verra plus loin que toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente. On peut donc être amené à étudier la convergence de $\sum |u_n|$. Dans ce cas, il s'agit d'une série à termes positifs et on peut donc appliquer les règles de comparaisons. Malheureusement, cette méthode ne permet pas toujours de conclure puisqu'une série peut converger sans converger absolument ;*
- *enfin, notons que ces règles de comparaison ont pour objectif de comparer (u_n) avec (v_n), une suite dont la nature de $\sum v_n$ est connue. C'est en particulier pour cela, comme pour les intégrales, qu'on va introduire des séries de référence dont la nature sera connue.*

Exemple 5.2.1.12 Soit pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{(-1)^n \ln(1+\frac{\cos(n)}{n})}{n}$. On a pour $n \geqslant 1$,

$$|u_n| = \frac{|\ln(1+\frac{\cos(n)}{n})|}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|\cos(n)|}{n^2} = O(\frac{1}{n^2})$$

Ainsi, $(|u_n|) = O(\frac{1}{n^2})$ avec $\sum \frac{1}{n^2}$ une série à termes positifs convergente. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge (et *a fortiori*, $\sum u_n$ converge comme on le verra plus loin).

5.2.2 Comparaison série-intégrale

C'est une méthode qu'on a déjà rencontrée dans le cours de mathématiques supérieures 1 et certainement une des méthodes les plus importantes. On rappelle ici simplement le principe et on donne deux exemples. Pour ceux qui ne se souviennent pas bien des détails, je vous encourage à relire le paragraphe dédié dans le cours de mathématiques supérieures 1.

Exposé du principe : on se donne une fonction continue par morceaux et monotone sur $[a, +\infty[$ avec $a \geqslant 0$. On veut comparer $\displaystyle\sum_{k=a}^{n} f(k)$ avec $\displaystyle\int_{[a,n]} f$.
C'est surtout la méthode qu'il faut retenir, plus que le théorème qu'on énoncera à la fin. La méthode permet souvent d'obtenir des équivalents des sommes partielles ou des restes.

On commence par un exemple.

Exemple 5.2.2.1 On considère la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec ici $\alpha > 0$.

- **Première étape : on encadre les sommes partielles par des intégrales**

  On note $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles associées. La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ et puisque $\alpha > 0$, elle est aussi décroissante sur $[1, +\infty[$. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On a :

  $$\forall x \in [k, k+1] \ , \ f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$$

  Par croissance de l'intégrale, on a alors :

  $$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k)$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On somme ces inégalités :

  $$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

  c'est-à-dire

  $$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S_{n-1}$$

  soit encore

  $$S_n - f(1) \leqslant \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S_n - f(n)$$

  ou encore

  $$(*) \qquad \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(n) \leqslant S_n \leqslant \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(1)$$

- **Deuxième étape : on conclut sur la nature de la série**

  Dans notre exemple, on constate que pour le calcul de l'intégrale, il y a deux cas à considérer :

  * Premier cas : $\alpha > 1$

    Dans ce cas, d'après le critère de Riemann pour les intégrales, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge et puisque f est positive, on a d'après $(\star)$:

    $$S_n \leqslant \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(1) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} + 1$$

    Ce qui prouve que les sommes partielles sont majorées. Puisque f est positive, $\sum f(n)$ est une série à termes positifs. On conclut alors que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum f(n)$ converge.

∗ Deuxième cas : $\alpha \leqslant 1$
Dans ce cas, l'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ est divergente (elle diverge vers $+\infty$). On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$. Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(n)\right) = +\infty$$

Par comparaison, (S_n) diverge aussi vers $+\infty$ donc $\sum f(n)$ diverge.

- **Troisième étape : recherche d'équivalent**

À nouveau, il faut avoir des hypothèses raisonnables pour pourvoir conclure. C'est pourquoi, il faut savoir refaire la méthode et conclure au cas par cas, avec les fonctions qui vous sont données.

Dans notre exemple, on doit distinguer deux cas.

∗ Premier cas : $\alpha > 1$
On a vu dans ce cas que la série $\sum f(n)$ converge. On va donc essayer de déterminer un équivalent du reste. En reprenant la même démarche que précédemment, on a pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier $N > n$:

$$\sum_{k=n}^{N-1} f(k+1) \leqslant \int_n^N f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{N-1} f(k)$$

soit encore

$$\sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leqslant \int_n^N f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{N-1} f(k)$$

Or, on a montré que la série $\sum f(n)$ converge et que l'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ converge. Par suite, chaque membre de l'inégalité précédente admet une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$ et on peut donc passer à la limite, ce qui donne :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$$

En notant R_n le reste d'ordre n, on a donc :

$$R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant R_n + f(n)$$

ou encore

$$\int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n) \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque : *on voit bien que pour conclure quant à l'équivalent, il faut une hypothèse sur $f(n)$ par rapport à $\int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Dans notre exemple,

$$\int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Par suite,

$$f(n) = \frac{1}{n^\alpha} = o\left(\int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc :

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

∗ Deuxième cas : $0 < \alpha \leqslant 1$
En reprenant directement la relation $(\star)$, on a :

$$\forall n \geqslant 2\ ,\ \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x - f(n) \leqslant S_n \leqslant \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(1)$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$, *a fortiori* $f(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)$ et $f(1) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)$. En appliquant le théorème des gendarmes, on obtient :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

Il reste alors à calculer l'intégrale (en distinguant deux cas $\alpha = 1$ et $\alpha < 1$) et on obtient :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)\ \ (\text{si } \alpha = 1) \quad \text{et} \quad S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\ \ (\text{si } \alpha \in]0,1[)$$

Exercice 5.2.2.2 En appliquant la même méthode, traiter le cas $\alpha \leqslant 0$.

Exemple 5.2.2.3 On veut déterminer un équivalent de $\sum \ln(n)$. La nature de la série est évidente car le terme général ne tend pas vers 0 donc on sait que la série diverge grossièrement.

On considère la fonction $x \longmapsto \ln(x)$. Cette fonction est continue (par morceaux) et croissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit donc que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star\ ,\ \ln(k) \leqslant \int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln(k+1)$$

Alors, pour tout entier $n \geqslant 2$, en sommant les inégalités précédentes pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \leqslant \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$$

soit encore

$$\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x + \ln(n)$$

c'est-à-dire

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant n\ln(n) - n + 1 + \ln(n)$$

Or, $(n\ln(n) - n + 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} (n\ln(n) - n + 1 + \ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$$

Remarques :

- *on peut noter qu'ici la conclusion est très maladroite. En effet, l'encadrement obtenu permet de dire que pour tout* $n \geqslant 2$ *:*

$$-n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - n\ln(n) \leqslant -n + 1 + \ln(n)$$

Or, $\ln(n) = o(n)$ *donc* $(-n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} (-n + 1 + \ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$*. Il s'ensuit que :*

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) - n\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = n\ln(n) - n + o(n)$$

Dans cet exemple, la méthode de comparaison série-intégrale permet directement d'obtenir deux termes du développement asymptotique (mais pas 3 *car le terme suivant n'est pas du même ordre de grandeur dans l'encadrement).*

- *En particulier, on a donc montré que* $\ln(n!) = n\ln(n) - n + o(n)$*, ce qui constitue le début de la formule de Stirling (voir cours de mathématiques spéciales 1).*

On retient donc la méthode de comparaison série-intégrale. Le seul résultat que vous pouvez appliquer directement est le théorème suivant :

Théorème 5.2.2.4 (Comparaison série-intégrale) *Soit* f *une fonction continue par morceaux, décroissante et positive sur* $[0, +\infty[$.

(i) La série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n)$ *est une série à termes positifs convergente.*

(ii) La série $\sum f(n)$ *converge si et seulement si* $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} f$ *converge.*

(iii) Si $\sum f(n)$ *diverge, alors on a :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

⚠ **Attention :** sous les hypothèses du théorème, lorsque la série $\sum f(n)$ converge, on ne peut rien dire directement du reste ! Autrement dit,

$$\sum f(n) \text{ converge} \not\Longrightarrow \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour s'en convaincre, il suffit de choisir $f : x \longmapsto e^{-x}$ qui est bien continue (par morceaux), positive et décroissante sur $[0, +\infty[$, $\sum e^{-n}$ converge car c'est une série géométrique de raison $q = e^{-1} \in]-1, 1[$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=n}^{+\infty} e^{-k} = \frac{e^{-n}}{1-e^{-1}} \quad \text{alors que} \quad \int_n^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = e^{-n}$$

Ces deux suites ne sont pas équivalentes. Ceci était prévisible car dans la méthode, on a vu qu'en cas de convergence, on doit avoir $f(n) = o\left(\int_n^{+\infty} f\right)$ pour pouvoir conclure que le reste de la série est équivalent au reste de l'intégrale.

Preuve du théorème :

• Montrons (i).
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\forall x \in [n-1, n]\ ,\ f(n) \leqslant f(x) \leqslant f(n-1)$$

Par conséquent,

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(n-1)$$

et donc

$$0 \leqslant u_n \leqslant f(n-1) - f(n)$$

Ce qui montre pour commencer que $\sum u_n$ est bien une série à termes positifs. Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} (f(k-1) - f(k)) = f(0) - f(n) \leqslant f(0)$$

Ainsi, $\sum u_n$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées. Par conséquent, $\sum u_n$ converge.

• Montrons (ii).
Tout d'abord, puisque f est positive, on sait que $\int_{[0,+\infty[} f$ converge si et seulement si $\left(\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie. Or, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

Et puisque $\sum u_k$ converge d'après (i), on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \text{ converge} \iff \left(\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}$$
$$\iff \int_0^{+\infty} f \text{ converge}$$

• Enfin, montrons (iii).

On suppose que $\sum f(n)$ diverge. Alors, d'après (ii), $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ diverge et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ (puisque f est une fonction positive). On a donc $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 1} = O(1) = o\left(\displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x + o\left(\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

⊠

Remarque : *un des intérêts est qu'on dispose de plus d'outils pour calculer une intégrale que d'outils ou méthodes pour calculer une somme. Autrement dit, il est souvent plus facile de déterminer un équivalent de* $\displaystyle\int_0^n f$ *plutôt que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$.

Exemple 5.2.2.5 On considère la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$. On pose pour $x \in [2,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

• Pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(n) = \dfrac{\ln(n)}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum f(n)$ diverge.

• La fonction f est continue par morceaux, positive sur $[2,+\infty[$. De plus, f est dérivable sur cet intervalle et pour tout $x \geqslant 2$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$. Il s'ensuit que f est décroissante sur $[3,+\infty[$ (en fait sur $[e,+\infty[$). D'après le théorème de comparaison série intégrale, on a alors :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_3^n \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_3^n$$

Et donc finalement $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln(n))^2}{2}$.

Exemple 5.2.2.6 On considère la série $\sum \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n}$.

• $\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n}$ diverge.

• On veut maintenant déterminer un équivalent des sommes partielles. Puisque la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ est continue par morceaux, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$ et puisque $\sum g(n)$ diverge, on a, d'après le théorème de comparaison série-intégrale :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\,\mathrm{d}x$$

• Soit $n \geqslant 2$ un entier. Les fonctions $x \longmapsto \ln(x)$ et $x \longmapsto \exp(\frac{1}{x})$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[1, n]$, on peut intégrer par parties, ce qui donne :

$$\int_1^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x)e^{\frac{1}{x}}\right]_1^n + \int_1^n \frac{\ln(x)e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Or, d'une part, $\left[\ln(x)e^{\frac{1}{x}}\right]_1^n = \ln(n)e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Et d'autre part, $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ (et positive) et $\dfrac{\ln(x)e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge d'après le critère de Bertrand. Par comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. Il s'ensuit que $\left(\displaystyle\int_1^n \frac{\ln(x)e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et *a fortiori* est bornée. Par suite,

$$\int_1^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n) + o(\ln(n)) + O(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \text{ et donc } \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Remarques :

- *dans cet exemple, notez bien que bien qu'on ne sache pas calculer l'intégrale, les outils dont on dispose pour l'intégration nous permettent de trouver un équivalent simple ;*
- *on pouvait aussi « ruser ». Si on devine que le comportement est le même que celui de $\frac{1}{n}$, on pouvait tout simplement écrire :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{1}{k}} - 1}{k}$$

  Or, $\dfrac{e^{\frac{1}{k}}-1}{k} = O(\frac{1}{k^2})$ donc par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum \dfrac{e^{\frac{1}{k}}-1}{k}$ converge. On conclut alors de façon similaire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$;
- *ceci est un cas particulier du théorème de sommation des équivalents qui sera étudié dans le cours de mathématiques spéciales 1.*

5.2.3 Séries positives de référence

Théorème 5.2.3.1 (critère de Riemann) *Soit α un nombre réel. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Preuve :

• Si $\alpha \leqslant 0$, alors la suite $(\frac{1}{n^\alpha})$ ne tend pas vers 0 donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

• Si $\alpha > 0$, la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ et continue par morceaux, décroissante et positive sur $[1, +\infty[$. D'après le théorème de comparaison série-intégrale,

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} &\iff \int_{[1,+\infty[} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \text{ converge} \\ &\iff \alpha > 1 \end{aligned}$$

(la dernière équivalence étant le critère de Riemann pour les intégrales). ⊠

Remarques :

- *attention, ce critère est faux et n'a aucun sens si $\alpha \in \mathbb{C}$;*
- *la fonction $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est appelée fonction zêta de Riemann, notée ζ. C'est une fonction de référence en mathématiques (au même titre que l'exponentielle ou le logarithme). Elle sera étudiée brièvement dans le cours de mathématiques spéciales 1.*

Proposition 5.2.3.2 *Plus exactement,*

(i) si $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$;

(ii) si $\alpha = 1$, alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$;

(iii) si $\alpha < 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Preuve :

C'est ce qu'on a démontré dans l'exemple de comparaison série-intégrale (lorsque $\alpha > 0$) et ce que vous avez fait en exercice lorsque $\alpha \leqslant 0$. ⊠

Proposition 5.2.3.3 *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. *La série de Bertrand* $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$ *ou bien* $(\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.

Preuve :

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

• Pour commencer, si $\alpha < 0$, alors par croissances comparées, la série diverge grossièrement.

• Si $\alpha = 0$, on a directement :

∗ si $\beta \leqslant 0$, la série diverge grossièrement ;

∗ si $\beta > 0$, alors pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(\ln n)^\beta} \geqslant \frac{n-1}{(\ln n)^\beta}$. Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{(\ln n)^\beta} = +\infty$ donc, par comparaison, $\sum \frac{1}{(\ln n)^\beta}$ diverge.

• On est donc ramené au cas $\alpha > 0$. On distingue alors trois cas :

∗ si $\alpha > 1$, alors $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = o(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}})$. Or, $\gamma = \frac{1+\alpha}{2} > 1$ donc $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ converge. Par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge ;

∗ si $\alpha < 1$, $\displaystyle\frac{n^\alpha (\ln n)^\beta}{n} = \frac{(\ln n)^\beta}{n^{1-\alpha}}$. Or, $1 - \alpha > 0$ donc $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}\right)$. De plus, $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge ;

∗ enfin, si $\alpha = 1$, alors la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est continue positive et décroissante sur $[a, +\infty[$ (avec $a = e^{-\beta} > 0$). D'après le critère de comparaison série-intégrale, la série $\sum f(n)$ et $\int_{[2,+\infty[} f$ sont de même nature. Or, pour tout $x \geqslant 2$, on a :

$$\int_2^x \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}t}{t^\beta}$$

D'après le critère de Riemann pour les intégrales, $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Ce qui prouve au final que la série de Bertrand converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou bien $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

⊠

5.2.4 Critère de d'Alembert

Théorème 5.2.4.1 (critère de d'Alembert) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que :*

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$;
2. *la suite* $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ *admet une limite.*

Alors :

(i) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, *la série* $\sum u_n$ *converge ;*

(ii) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *et la série* $\sum u_n$ *diverge grossièrement ;*

(iii) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, *on ne peut pas déterminer directement la nature de la série* $\sum u_n$.

Preuve :

• Montrons (i).
On suppose que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. On fixe $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$. Par définition de la limite, il existe alors un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 \ , \ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

On a alors :

$$\forall n \geqslant n_0 \ , \ 0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1+\ell}{2}$$

En posant $q = \dfrac{1+\ell}{2}$, on en déduit que $(u_n) = O(q^n)$ (comparaison logarithmique). Or, $0 < q < 1$, donc $\sum q^n$ converge et par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

• Montrons (ii).
On suppose que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Posons $v_n = \frac{1}{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors, (v_n) est bien définie (puisque (u_n) ne s'annule jamais), $\sum v_n$ est à termes strictement positifs et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{\ell} < 1$. D'après (i), $\sum v_n$ converge. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

• Pour (iii), il suffit de considérer par exemple $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$. Je vous laisse vérifier que dans les deux cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1$, $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge.

⊠

Remarques :

- *bien entendu, ce critère s'applique si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang puisque la nature d'une série n'est pas modifiée si on change un nombre fini de termes ;*
- *n'oubliez pas que dans ce théorème, on suppose que la limite de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ existe, ce qui n'est pas toujours le cas ;*
- *ce critère est pratique lorsque l'expression de u_n comporte des produits puisqu'en calculant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, il y a des simplifications ;*
- *ce théorème est très faux si on ne suppose pas $u_n > 0$: par exemple, si $(u_n) = ((-1)^n)$, on a pour tout entier n, $u_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = -1 < 1$ et pourtant la série $\sum u_n$ diverge ;*
- *vous pourriez vous demander pourquoi on fait cette comparaison avec des suites géométriques. En fait, c'est assez naturel. Par exemple, lorsque $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \in]0,+\infty[$, l'hypothèse nous dit que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(\ell)$$

D'après le théorème de Césaro, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(\ell)$.

Or, $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est une série télescopique. On en déduit donc que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \ln(\ell)$$

Lorsque $\ell \neq 1$, on peut donc conclure que $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(\ell)$. On ne peut cependant pas directement composer des équivalents et donc on ne peut pas directement donner un équivalent de u_n. Par contre, on peut conclure que $(u_n) = e^{n\ln(\ell)+o(n)} = \ell^n \times e^{o(n)}$.
Ceci permet de voir qu'on pourra comparer (u_n) avec une suite géométrique (q^n) dès que $q \neq \ell$. On pouvait aussi alors tout simplement conclure en comparant avec une série de Riemann. En effet, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$n^\alpha u_n = e^{n\ln(\ell)+o(n)+\alpha\ln(n)}$$

Il s'ensuit que :

- *si $\ell < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$ et donc $(u_n) = o(\frac{1}{n^\alpha})$. On conclut en choisissant n'importe quelle valeur $\alpha > 1$ et en appliquant les règles de comparaison pour les séries à termes positifs ;*
- *si $\ell > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\sum u_n$ diverge grossièrement ;*
- *si $\ell = 1$, on ne peut rien dire car on a alors $n^\alpha u_n = e^{o(n)}$ et le comportement de $o(n)$ n'est pas connu.*

Exemple 5.2.4.2 La série factorielle $\sum \frac{1}{n!}$ est une série convergente. En effet, c'est une série à termes strictement positifs et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Bien entendu, on pouvait aussi directement conclure en remarquant que $\frac{1}{n!} = o(\frac{1}{n^2})$.

Exemple 5.2.4.3 On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(n!)^n} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k$.

- Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n!)^n}{((n+1)!)^{n+1}}(n+1)^{n+1} = \frac{(n!)^n}{(n!)^{n+1}} = \frac{1}{n!}$$
Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$ donc $\sum u_n$ converge.

Exemple 5.2.4.4 Déterminons la nature de $\sum u_n = \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. À nouveau, il s'agit d'une série à termes strictement positifs et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}$$

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{4} < 1$ et la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 5.2.4.5 Montrer que si $\sum u_n$ est une série à termes strictement positifs et si on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$ (c'est-à-dire qu'elle tend vers 1 par valeurs supérieures), alors la série $\sum u_n$ diverge.

Remarques :

- *retenez que même si vous ne vous souvenez plus de la règle, l'hypothèse sur* $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ *permet d'estimer le comportement de* $(\ln(u_n))$ *et donc de comparer avec des suites de référence ;*
- *il existe d'autres règles similaires comme par exemple la règle de Cauchy qui généralise le critère de d'Alembert mais il ne sert à rien de s'encombrer l'esprit avec beaucoup de règles ou de « recettes » alors qu'on peut directement comparer avec des séries de référence, comme les séries Riemann par exemple ;*
- *le lecteur intéressé pourra consulter les exercices pour connaître la règle de Cauchy pour les séries (qu'il ne faut pas confondre avec le critère de Cauchy pour les séries qui s'applique dans des espaces « complets » (voir le chapitre sur les espaces normés du cours de mathématiques spéciales 1), ce qui est le cas de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*).*

5.3 Séries réelles

5.3.1 Séries absolument convergentes et semi-convergentes

Proposition 5.3.1.1 *Soit $\sum u_n$ une série réelle. Alors :*

$$\sum |u_n| \text{ converge } \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

Autrement dit, toute série réelle absolument convergente est convergente.

Preuve :

On suppose que $\sum |u_n|$ converge.

• Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |u_n| - u_n \leqslant 2|u_n|$. Or, $\sum |u_n|$ converge donc par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum(|u_n| - u_n)$ converge.

• L'ensemble des séries convergentes étant un espace vectoriel (proposition 5.1.3.1), on conclut que $\sum |u_n| - \sum |(|u_n| - u_n)$ converge, c'est-à-dire $\sum u_n$ converge. ⊠

Remarques :

- *la réciproque est fausse : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais n'est pas absolument convergente ;*
- *l'avantage d'étudier la convergence absolue est qu'on manipule une série à termes positifs ($\sum |u_n|$) pour laquelle on dispose de plus d'outils ou méthodes pour étudier la convergence.*

Proposition 5.3.1.2 *L'ensemble des séries absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes.*

Preuve :

• On vient de montrer que l'ensemble des séries absolument convergentes est inclus dans l'ensemble des séries convergentes.

• Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ |\lambda u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda| \times |u_n| + |\mu| \times |v_n|$$

Or, $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ convergent donc $\sum(|\lambda| \times |u_n| + |\mu| \times |v_n|)$ converge. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |\lambda u_n + \mu v_n|$ converge, c'est-à-dire $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est absolument convergente. ⊠

Définition 5.3.1.3 Une série réelle (ou complexe d'ailleurs) telle que $\sum u_n$ converge et $\sum |u_n|$ diverge est dîte série semi-convergente.

Exemple 5.3.1.4 On prouvera dans le paragraphe suivant que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série convergente qui n'est pas absolument convergente. C'est donc une série semi-convergente.

Remarque : *on reverra dans le paragraphe sur les familles sommables pourquoi on parle de séries semi-convergentes.*

5.3.2 Critère spécial pour les séries alternées

Définition 5.3.2.1 Soit $\sum u_n$ une série réelle. On dit que $\sum u_n$ est une série alternée si la suite de terme général $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

Remarque : *autrement dit, une série réelle $\sum u_n$ est alternée s'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n = \varepsilon \times (-1)^n |u_n|$$

Théorème 5.3.2.2 (Critère spécial pour les séries alternées ou règle de Leibniz) *Soit $\sum u_n$ une série alternée. On suppose que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. Alors :*

(i) $\sum u_n$ converge ;

(ii) pour tout entier n, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ et u_n sont de même signe et $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_n|$.

Preuve :

• Pour commencer, quitte à travailler avec $(-u_n)$, on peut supposer que pour tout entier n, $u_n = (-1)^n |u_n|$ (en remarquant que $\sum u_n$ est alternée si et seulement si $\sum(-u_n)$ l'est).

• Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrons que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

∗ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = (-1)^{2n+2}|u_{2n+2}| + (-1)^{2n+1}|u_{2n+1}|$$

soit encore,

$$S_{2n+2} - S_{2n} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}|$$

Or, par hypothèse, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par conséquent, $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

∗ De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} + u_{2n+3} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+3}| \geqslant 0$$

Ce qui montre que la suite (S_{2n+1}) est croissante.

∗ Enfin, pour tout entier n, $|S_{2n+1} - S_{2n}| = |u_{2n+1}|$ et par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$.

Ainsi, les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc elles convergent et ont la même limite. Par conséquent, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est-à-dire $\sum u_n$ converge.

• Par ailleurs, puisque (S_{2n}) est décroissante et (S_{2n+1}) est croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ S_{2n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant S_{2n}$$

Il s'ensuit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $R_{2n+1} \geqslant 0$ et $R_{2n} \leqslant 0$, c'est-à-dire $R_{2n+1} = \sum\limits_{k=2n+2}^{+\infty} u_k$ est du même signe que u_{2n+2} et de même, R_{2n} est du même signe que u_{2n+1}.

Enfin, $S_1 \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ montre que la somme de la série est positive, c'est-à-dire du même signe que u_0.

Ceci montre que pour tout entier n, $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$ est du même signe que u_n.

• Enfin, l'inégalité précédente montre que pour tout entier n,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n\right| \leqslant |S_{n+1} - S_n| = |u_{n+1}|$$

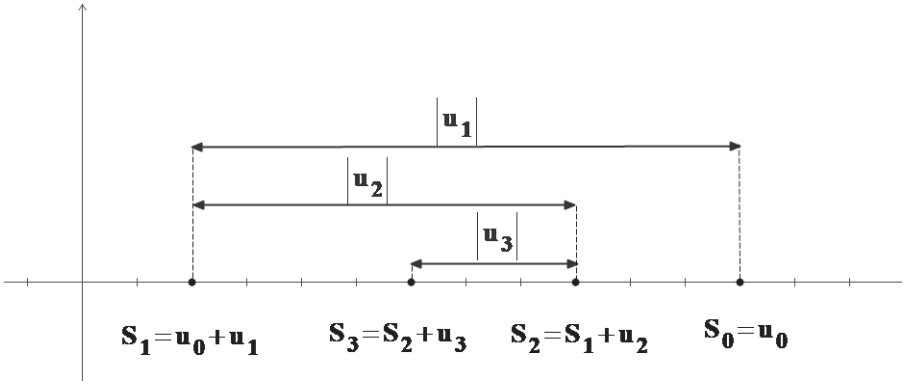
et de même, $S_1 \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant S_0$, donc :

$$0 \leqslant |u_0| - |u_1| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant |u_0|$$

⊠

Remarque sur la preuve : *il est en fait assez naturel de considérer les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ puisqu'on rajoute successivement un terme positif puis un terme négatif. Le grou-*

pement des termes deux par deux est donc parfaitement naturel.
Par ailleurs, sous les hypothèses de la preuve, si on représente les termes de la suite, on voit clairement apparaître les suites adjacentes :



- *à chaque étape, on rajoute ou retire une longueur qui est strictement inférieure à la longueur précédente ;*
- *les étapes d'indice pair on « augmente », les étapes d'indice impair on « diminue ».*

Exemple 5.3.2.3 Montrons que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge.

- On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Il est clair que pour tout entier n, $(-1)^n u_n \geqslant 0$ donc la série $\sum u_n$ est une série alternée.
- La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$: c'est bien une suite décroissante de limite nulle.

D'après le critère spécial pour les séries alternées, $\sum u_n$ converge.

Exercice 5.3.2.4 Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Exemple 5.3.2.5 On considère la série $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ (définie à partir du rang $n = 1$).

- Tout d'abord, $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ est une série alternée.
- Ensuite, une étude rapide de fonction montre que $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.
- Enfin, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

On en déduit donc que $(\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n})_{n\geqslant 3}$ converge, c'est-à-dire $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ converge.

Remarques :

- *ceci prouve bien qu'une série convergente n'est pas toujours absolument convergente ;*
- *n'oubliez pas que ce théorème comporte deux conclusions ! La première est la convergence de la série et la seconde est l'estimation et le signe du reste ;*
- *comme d'habitude pour les séries, le théorème reste valable si la série est alternée à partir d'un certain rang ou si $(|u_n|)$ est décroissante à partir d'un certain rang mais attention, dans ce cas, la seconde conclusion (sur le reste) n'est valable qu'à partir d'un certain rang ;*
- *attention de bien vérifier et justifier que les hypothèses du théorème sont satisfaites ! Dans les situations suivantes, on ne peut pas appliquer le théorème :*
  - *si $u_n = \dfrac{\cos(\frac{n\pi}{6})}{n}$, $\sum u_n$ n'est pas une série alternée ;*
  - *si $u_n = (-1)^n \dfrac{|\cos(\frac{n\pi}{6})|}{n}$, alors $\sum u_n$ est alternée mais la suite $(|u_n|)$ n'est jamais décroissante à partir d'un certain rang car pour tout entier n, $|u_{6n+3}| = 0 < |u_{6n+6}|$;*
- *en particulier, il faut éviter d'affirmer que « la suite $(|u_n|)$ est décroissante à partir d'un certain rang » sans le justifier proprement (en général par une étude de fonction) ;*
- *lorsque la décroissance de $(|u_n|)$ n'est pas « facile » à prouver ou bien lorsque c'est faux, on procède plutôt par développement asymptotique (voir l'exemple suivant et le bilan à la fin du paragraphe sur les séries réelles) ;*
- *enfin, remarquez que si $\sum u_n$ vérifie les hypothèses du critère spécial pour les séries alternées, alors :*
  - *la suite $(R_n) = \left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$ des restes est elle aussi alternée car pour tout entier n, $(-1)^n R_n$ et $(-1)^n u_n$ sont de même signe ;*
  - *$\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ (par définition du reste d'une série convergente).*

Exemple 5.3.2.6 On veut étudier la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}\cos(n)}$. Il s'agit bien d'une série alternée mais l'hypothèse de décroissance de la valeur absolue n'est pas du tout évidente. On va donc procéder autrement, par développement asymptotique.

$$\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}\cos(n)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1+\frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n\cos(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\cos(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

Par suite, en posant $(u_n) = (\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}\cos(n)} - \frac{(-1)^n}{n})$, on a montré que $(|u_n|) = O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$. Or, $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est une série à termes positifs convergente. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge et *a fortiori* $\sum u_n$ converge. De plus, d'après le critère spécial pour les séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Par conséquent, $\sum(u_n + \frac{(-1)^n}{n})$ converge, c'est-à-dire $\sum \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}\cos(n)}$ converge.

5.3.3 Séries et sommes réelles de référence

Parmi les séries réelles de référence, les séries trigonométriques suivantes sont importantes. Le critère suivant est admis mais une démonstration est proposée en annexe.

Théorème 5.3.3.1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$.*

(i) Si $x \not\equiv 0\ [2\pi]$ (ou de façon équivalente $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$) alors :

$$\sum \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \sum \left|\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}\right| \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

(ii) Si $x \not\equiv 0\ [\pi]$ (ou de façon équivalente $x \notin \pi\mathbb{Z}$), alors :

$$\sum \frac{\sin(nx)}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \sum \left|\frac{\sin(nx)}{n^\alpha}\right| \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

Remarque : *en fait, lorsque $\alpha > 1$, ces séries sont absolument convergentes et donc convergentes. De même, si $\alpha \leqslant 0$, alors (sous les hypothèses données) les séries divergent grossièrement. En réalité, la partie « théorème » porte sur le cas $\alpha \in]0, 1]$ et affirme que les séries convergent dans ce cas.*

Théorème 5.3.3.2 (Sommes de référence) *On a les propriétés suivantes :*

(i) pour tout réel x, $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$;

(ii) pour tout réel x, $\sum \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}(x)$;

(iii) pour tout réel x, $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh}(x)$;

(iv) pour tout réel x, $\sum (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$;

(v) pour tout réel x, $\sum (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$;

(vi) pour tout réel $x \in]-1, 1]$, $\sum (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$;

(vii) pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sum (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$.

Remarques :

- *ces formules sont assez faciles à retenir car il s'agit simplement des formules de développement limité mais sans « reste » : c'est ce qu'on appelle des développements en série entière (voir cours de mathématiques spéciales 2) ;*
- *pour retrouver (et non démontrer) les valeurs du réel x pour lesquelles la formule donnée est valable, c'est en fait très simple : il suffit de regarder pour quelles valeurs la série converge et pour quelles valeurs la fonction est bien définie ;*
- *les 5 premières formules proviennent tout simplement de l'exponentielle (en admettant qu'on peut aussi choisir $x \in \mathbb{C}$ et donc ix) et les 3 dernières de la série géométrique (par intégration).*

Preuve :

• Montrons (i).
Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction exponentielle étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on a d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \times \sup_{t \in [0,x] \cup [x,0]} |\exp^{(n+1)}(t)|$$

soit encore,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{|x|}$$

Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = 0$$

c'est-à-dire $\sum \dfrac{x^k}{k!}$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} = e^x$.

• Les propriétés (ii) et (iii) sont alors des conséquences immédiates puisque pour tout réel x, $2\mathrm{ch}\,(x) = e^x + e^{-x}$ et $2\mathrm{sh}\,(x) = e^x - e^{-x}$.

• Montrons (iv).
Pour le moment, on ne peut pas utiliser le développement avec ix car la formule (i) a été prouvée pour x réel. On va donc à nouveau appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \times \sup_{t \in [0,x] \cup [x,0]} |\cos^{(2n+1)}(t)|$$

Or, pour $k \in \mathbb{N}$, $\cos^{(2k)}(0) = \cos(0 + 2k\frac{\pi}{2}) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ et de façon similaire, $\cos^{(2k+1)}(0) = \cos(0 + (2k+1)\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$. Par suite,

$$\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ donc toujours d'après le théorème des gendarmes, $\sum \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)$.

• La preuve de (v) est similaire et laissée en exercice.

• Montrons (vi).
Soit $x \in]-1, 1]$. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

soit encore :

$$\ln(1+x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Or, $\left|(-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} \frac{|t|^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{M_x |x|^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{M_x}{n+1}$
où on a posé $M_x = 1$ si $x \geqslant 0$ et $M_x = \frac{1}{1+x}$ si $-1 < x < 0$. Il s'ensuit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\right) = 0$$

c'est-à-dire $\sum \dfrac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)$.

• La preuve de (vii) est identique à celle de (vi) en écrivant que pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^x (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Les détails de rédaction sont laissés en exercice.

⊠

5.3.4 Bilan des méthodes d'étude des séries réelles

Méthode d'étude d'une série réelle

0. On vérifie (si c'est facile) que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
1. On regarde s'il s'agit d'une série réelle de référence : si oui, on connaît directement la nature (et parfois même la somme).
2. Sinon, on commence par étudier si la série $\sum u_n$ est absolument convergente. $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs et on dispose donc des outils pour de telles séries :
   (a) règle de comparaison avec un équivalent ;
   (b) règle de comparaison avec o ou O (qui suppose qu'on sait ce qu'on veut prouver) ;
   (c) comparaison avec une série de Riemann (méthode identique à la méthode vue en intégration) ;
   (d) règle de d'Alembert (si elle s'applique bien entendu).
3. Si la série n'est pas absolument convergente (ou si on n'a pas réussi « simplement » à prouver qu'elle l'était) :
   (a) on regarde si on peut appliquer le critère pour les séries alternées ;
   (b) on fait un développement asymptotique jusqu'à obtenir :
      - un terme qui est de signe constant ;
      - un terme qui est de série absolument convergente.
4. Si vous arrivez à cette étape, il n'y a que deux possibilités :
   (a) vous vous êtes trompés et l'une des méthodes précédente doit permettre de conclure ;
   (b) votre professeur est méchant (ou bien a une haute opinion de vous) et vous a donné une série pour laquelle les méthodes « usuelles » ne marchent pas. Il faut donc « improviser » en utilisant des méthodes ou techniques inspirées des démonstrations du cours. Bien entendu, ce type d'exercice est beaucoup plus difficile.

Exemple 5.3.4.1 On considère la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^{E(\sqrt{n})}\cos(\ln(n))}{n\sin(n)+\arctan(n\cos(n))+n^2+2}$.

- Malgré l'aspect compliqué, $(|u_n|) = O(\frac{1}{n^2})$. Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge et par conséquent, $\sum u_n$ converge.

Exemple 5.3.4.2 On considère la série $\sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}+\cos(n)}$.

- Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}+\cos(n)} = 0$ donc la série n'est pas grossièrement divergente.
- $\left|\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}+\cos(n)}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|\sin(n)|}{\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{2} \leqslant 1$ donc d'après le théorème 5.3.3.1, $\sum \frac{|\sin(n)|}{\sqrt{n}}$ diverge. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum \left|\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}+\cos(n)}\right|$ diverge et on ne peut donc pas conclure directement quant à la nature de $\sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}+\cos(n)}$.
- L'équivalent du terme général n'est pas de signe constant (et pas absolument convergent). On fait donc un développement asymptotique :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}+\cos(n)} &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}-\frac{\sin(n)\cos(n)}{n}+O\left(\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}-\frac{\sin(2n)}{2n}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\left|\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}+\cos(n)}-\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}+\frac{\sin(2n)}{2n}\right| = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Or, $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge donc par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum \left|\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}+\cos(n)}-\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}+\frac{\sin(2n)}{2n}\right|$ converge et *a fortiori*, $\sum \left(\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}+\cos(n)}-\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}+\frac{\sin(2n)}{2n}\right)$ converge.

  Or, d'après le cours (théorème 5.3.3.1), $\sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{\sin(2n)}{2n}$ convergent. Par conséquent, $\sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}+\cos(n)}$ converge en tant que somme de trois séries convergentes.

Remarques :

- *dans la pratique, on ne rédige pas les deux premiers points puisqu'ils ne permettent pas de conclure ! On rédige directement à partir du développement asymptotique ;*
- *notez bien qu'on a fait le développement limité à trois termes car le second terme n'est pas de signe constant et n'est pas absolument convergent.*

Exemple 5.3.4.3 On considère la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n\ln(n)}$.

- On vérifie (le faire) que le terme général tend vers 0 et que la série n'est pas absolument convergente.
- Cette série est bien alternée mais le terme en $(-1)^n\ln(n)$ au dénominateur laisse deviner qu'étudier les variations sera difficile. On fait donc un développement asymptotique :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n\ln(n)}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

Par suite, $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n\ln(n)}-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{\ln(n)}{n}$. Or, la série $\sum\frac{-\ln(n)}{n}$ est une série à termes négatifs divergente (d'après le critère de Bertrand). Par comparaison pour les séries à termes négatifs, $\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n\ln(n)}-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge. Or, $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge donc $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n\ln(n)}$ diverge (c'est la somme d'une série convergente et d'une série divergente).

Exemple 5.3.4.4 On considère la série $\sum u_n=\sum\frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$.

Cette série n'est pas absolument convergente (mais le terme général tend vers 0), n'est pas alternée (il y a des changements de signe mais $((-1)^nu_n)$ n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang) et on ne peut pas faire de développement asymptotique.
On est donc ici face à un exercice un peu plus difficile. On a vu que la série n'est pas alternée mais qu'il y a des changements de signe tous les « n^2 ». On va donc procéder en s'inspirant des séries alternées en groupant les termes par paquets de signe constant.

Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on note $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{E(\sqrt{k})}}{k}$.

- Pour $n\in\mathbb{N}^\star$ donné, on a :

$$\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{(-1)^{E(\sqrt{k})}}{k}=(-1)^n\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k}$$

  Or, le nombre de termes dans cette somme est $(n+1)^2-n^2=2n+1$ donc en minorant (respectivement majorant) par le plus petit terme (respectivement plus grand terme), on obtient :

$$\frac{2n+1}{(n+1)^2-1}\leqslant\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k}\leqslant\frac{2n+1}{n^2}$$

  Or, d'une part :

$$\frac{2n+1}{(n+1)^2-1}=\frac{2}{n}\times\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{2}{n}\times\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

  et d'autre part, $\dfrac{2n+1}{n^2}=\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{2}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

  Par conséquent, $\displaystyle\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{(-1)^{E(\sqrt{k})}}{k}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{2(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

- La série $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente (critère spécial pour les séries alternées) et $\sum\frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum\left(\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{(-1)^{E(\sqrt{k})}}{k}-\frac{2(-1)^n}{n}\right)$ est absolument convergente et donc convergente.

On conclut donc que la série $\sum \left(\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{(-1)^{E(\sqrt{k})}}{k} \right)$ converge.

- Puisque la série $\sum \left(\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{(-1)^{E(\sqrt{k})}}{k} \right)$ converge, la suite de ses sommes partielles converge, c'est-à-dire avec les notations de cet exercice, $(S_{n^2-1})_{n\geqslant 1}$ converge.

- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\left|S_n - S_{E(\sqrt{n})^2-1}\right| = \left| \sum_{k=E(\sqrt{n})^2}^{n} \frac{(-1)^{E(\sqrt{k})}}{k} \right|$$

Or, $E(\sqrt{n})^2 \leqslant n < (E(\sqrt{n})+1)^2$. Il s'ensuit que pour $k \in [\![E(\sqrt{n})^2, n]\!]$, $E(\sqrt{k}) = E(\sqrt{n})$ et que le nombre de termes dans cette somme est $n+1-E(\sqrt{n})^2$ et est donc inférieur ou égal à $(E(\sqrt{n})+1)^2 - E(\sqrt{n})^2 = 2E(\sqrt{n})+1$. On en déduit alors successivement que :

$$\left| \sum_{k=E(\sqrt{n})^2}^{n} \frac{(-1)^{E(\sqrt{k})}}{k} \right| = \left| \sum_{k=E(\sqrt{n})^2}^{n} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{k} \right| = \left| (-1)^{E(\sqrt{n})} \sum_{k=E(\sqrt{n})^2}^{n} \frac{1}{k} \right|$$

c'est-à-dire

$$\left|S_n - S_{E(\sqrt{n})^2-1}\right| = \sum_{k=E(\sqrt{n})^2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{2E(\sqrt{n})+1}{E(\sqrt{n})^2} \leqslant \frac{3E(\sqrt{n})}{E(\sqrt{n})^2} \leqslant \frac{3}{E(\sqrt{n})}$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|S_n - S_{E(\sqrt{n})^2-1}\right| = 0$.

- Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = S_{E(\sqrt{n})^2-1} + \left(S_n - S_{E(\sqrt{n})^2-1}\right)$. Or, on a montré que la suite $\left(S_n - S_{E(\sqrt{n})^2-1}\right)$ converge vers 0 et on a aussi prouvé que la suite $\left(S_{E(\sqrt{n})^2-1}\right)$ converge. Par conséquent, (S_n) converge, c'est-à-dire $\sum \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$ converge.

Remarques :

- *l'idée de grouper les termes par paquets où le signe est fixe est assez logique et naturelle. La difficulté ici est que c'est compliqué car la taille des paquets n'est pas fixe, contrairement au cas des séries alternées ;*
- *on aurait aussi pu essayer d'appliquer le critère spécial pour les séries alternées à la série* $\sum \left(\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{(-1)^{E(\sqrt{k})}}{k} \right) = \sum (-1)^n \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k}$. *La difficulté majeure est d'étudier les variations de la valeur absolue (on peut en fait montrer que c'est bien une suite décroissante en valeur absolue).*

5.4 Séries complexes

5.4.1 Séries absolument convergentes et semi-convergentes

Proposition 5.4.1.1 *Soit $\sum z_n$ une série complexe. Alors,*

$$\sum |z_n| \text{ converge } \Longrightarrow \sum z_n \text{ converge}$$

Autrement dit, toute série complexe absolument convergente est convergente, la réciproque étant fausse.

Preuve :

On suppose que $\sum |z_n|$ converge.

• Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\Re e(z_n)| \leqslant |z_n|$ et $|\Im m(z_n)| \leqslant |z_n|$ et $\sum |z_n|$ converge, les séries $\sum |\Re e(z_n)|$ et $\sum |\Im m(z_n)|$ convergent (par comparaison pour les séries à termes positifs).

• Les séries réelles $\sum \Re e(z_n)$ et $\sum \Im m(z_n)$ étant absolument convergentes, elles sont également convergentes.

• Ainsi, $\sum \Re e(z_n)$ et $\sum \Im m(z_n)$ convergent, c'est-à-dire $\sum z_n$ converge.

⊠

Remarque : *comme pour les séries réelles, une série complexe $\sum z_n$ qui converge mais qui ne converge pas absolument est dite semi-convergente.*

Exemple 5.4.1.2 Soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^2}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, $|u_n| = \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann. Par suite, $\sum |u_n|$ converge et donc $\sum u_n$ converge.

Remarque : *dans la pratique, on commence toujours par étudier la convergence absolue de la série. Pour cela, on peut appliquer toutes les méthodes vues pour les séries à termes positifs. En particulier, la méthode d'étude est parfaitement similaire à la différence près qu'on peut découper l'étude de la série en deux : l'étude de la partie réelle et l'étude de la partie imaginaire.*

⚠ **Attention :** si $(u_n) \sim (v_n)$, on peut dire que les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ sont de même nature mais on ne peut absolument pas conclure quant à la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

5.4.2 Séries complexes de référence

Proposition 5.4.2.1 *Soit $q \in \mathbb{C}$. Alors, la série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.*

Proposition 5.4.2.2 *Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est une série absolument convergente et sa somme vaut $\exp(z)$.*

Preuve :

• La convergence absolue est évidente à partir de la convergence pour la série exponentielle réelle.

• Montrons que la somme est bien $\exp(z) = e^{\Re e(z)} \times e^{i\Im m(z)}$.
On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \exp(tz)$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on peut donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à tout ordre. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 1^k \right| \leqslant \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!} \times \sup_{t\in[0,1]} |f^{(n+1)}(t)|$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(t) = z^k \exp(tz)$ et $|e^{tz}| = e^{t\Re e(z)}$.
Par suite,

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|\Re e(z)|} \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|z|}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|z|} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$.

⊠

Remarque : *on reverra dans la fin de ce chapitre avec l'étude des familles sommables que cette fonction vérifie bien :*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!}$$

Ceci permettra de retrouver que la somme vaut exponentielle en le déduisant des sommes pour l'exponentielle réelle, cosinus et sinus.

Remarque : *vous pouvez aussi revoir plus de détails dans le cours de mathématiques spéciales 1 où ceci est prouvé à partir des produits de Cauchy.*

5.5 Familles sommables et théorèmes de Fubini

5.5.1 Notion de dénombrabilité

Définition 5.5.1.1 Un ensemble non vide I est dit dénombrable s'il existe une bijection d'une partie non vide D de $\mathbb{N}$ dans I.

Remarques :

- *la définition ci-dessus est parfois appelée définition d'un ensemble « au plus dénombrable ». Dans ce cas, un ensemble est « dénombrable » s'il est dénombrable et infini ;*
- *de façon équivalente, I (non vide) est dénombrable si et seulement si il existe une partie non vide $D \subset \mathbb{N}$ et une bijection de I dans D ;*
- *la notion d'ensemble dénombrable est en fait simple à comprendre : un ensemble est dénombrable si on peut « numéroter » ses éléments. Toute bijection φ de $D \subset \mathbb{N}$ dans I est une « numérotation » des éléments de I. C'est tout à fait analogue au cas des ensembles finis.*

Exemple 5.5.1.2 On commence par des exemples simples :

- tout ensemble fini non vide est dénombrable car un ensemble fini non vide est en bijection avec un certain $[\![1, n]\!] \subset \mathbb{N}$;
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^\star$ et plus généralement toute partie non vide de $\mathbb{N}$ sont dénombrables ;
- toute partie non vide d'un ensemble dénombrable est elle aussi dénombrable ;
- $\mathbb{Z}$ est un ensemble dénombrable. En effet, on peut montrer (exercice : le faire) que l'application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \varphi(2n) = n \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \varphi(2n+1) = -(n+1)$$

  est une bijection ;

- on prouvera plus loin que $\mathbb{Q}$ est dénombrable mais que $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

Le but ici est de pouvoir étendre la notion de somme (infinie) à une famille dont les indices ne sont plus forcément des entiers naturels, mais par exemple des indices $n \in \mathbb{Z}$ (en particulier pour les séries de Fourier, les coefficients de Fourier complexes forment une famille indexée par $\mathbb{Z}$), ou bien des couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ ou $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ ou ... Pour cela, on a besoin de quelques outils technique qu'on va admettre en partie.

Théorème 5.5.1.3 *Soit D une partie non vide et infinie de $\mathbb{N}$. Alors, il existe une unique bijection croissante de $\mathbb{N}$ dans D.*

Preuve :

Exercice ! En fait, il suffit de vous inspirer de la démonstration de la propriété équivalente pour les ensembles finis : si E est un ensemble fini non vide de cardinal $n \geqslant 1$, alors il existe une unique bijection croissante de $[\![1, n]\!]$ dans E.

On donne ici les idées principales : les détails sont laissés au lecteur.

- Existence
  On construit l'application φ par récurrence forte en posant :
  $$\varphi(0) = \min D \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \varphi(n+1) = \min\{D \setminus \varphi([\![0, n]\!])\}$$
  et on démontre que φ est bien définie, strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans D et surjective.
- Unicité
  S'il existe φ et ψ deux telles applications, alors $f = \psi^{-1} \circ \varphi$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et bijective. On conclut successivement que :
  * $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \leqslant f(n)$;
  * $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ f^{-1}(n) \leqslant n$;
  * $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ f^{-1}(n) = n$;
  * $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

⊠

Corollaire 5.5.1.4 *Soit I un ensemble infini. Alors I est dénombrable si et seulement si il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans I.*

L'inconvénient de la définition d'un ensemble dénombrable est qu'elle nécessite de construire une bijection et ceci n'est pas toujours facile. En revanche, on dispose d'une caractérisation importante et assez pratique pour montrer qu'un ensemble est dénombrable : c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 5.5.1.5 (Caractérisation de la dénombrabilité) *Soit I un ensemble non vide. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) I est dénombrable ;

(ii) il existe une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I, croissante (pour l'inclusion), telle que $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$.

Preuve :

• Montrons $(i) \Longrightarrow (ii)$.

On suppose que I est dénombrable. Soient $D \subset \mathbb{N}$ (non vide) et $f : D \longrightarrow I$ une bijection. Puisque $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D \cap [\![0, n]\!]$ et f est bijective,

$$I = f(D) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(D \cap [\![0, n]\!])$$

En posant pour $n \in \mathbb{N}$, $D_n = D \cap [\![0, n]\!]$ et $J_n = f(D_n)$, il est clair que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n est un ensemble fini donc $J_n = f(D_n)$ est une partie finie de I ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n \subset J_{n+1}$;
- $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$.

Ce qui prouve (ii).

• Réciproquement, on suppose (ii). Soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties finies de I telle que $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$. On distingue alors deux cas :

- Premier cas : $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire

  Alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0$, $J_n = J_{n_0}$. Alors,

  $$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = J_{n_0}$$

  donc I est fini (et non vide par hypothèse) donc I est dénombrable.

- Deuxième cas : la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire

  Par définition, on a donc : $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n \geqslant n_0$, $J_{n_0} \subsetneq J_n$. On construit alors par récurrence une sous-suite $(H_n) = (J_{\varphi(n)})$ strictement croissante pour l'inclusion de parties finies non vides de I.

  L'idée est alors simple : I est la réunion disjointe des $H_{n+1} \setminus H_n$ et de H_0. On « numérote donc les éléments de I en commençant par les éléments dans H_0, puis ceux dans $H_1 \setminus H_0$, puis ... ». La seule difficulté est la rédaction propre.

  On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n = |H_n| \geqslant 1$.

  - H_0 est fini non vide de cardinal c_0 donc il existe une bijection $\varphi_0 : [\![1, c_0]\!] \longrightarrow H_0$;
  - Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $H_{n+1} \setminus H_n$ est un ensemble fini de cardinal $c_{n+1} - c_n$, tout comme l'ensemble $[\![c_n + 1, c_{n+1}]\!]$. Il existe donc une bijection $\varphi_n : [\![c_n + 1, c_{n+1}]\!] \longrightarrow H_{n+1} \setminus H_n$.

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers donc elle tend vers $+\infty$. Par conséquent, pour tout entier $k \geqslant c_0 + 1$, il existe un unique entier $n(k)$ tel que :

$$c_{n(k)} < k \leqslant c_{n(k)+1}$$

Ceci permet de définir une application de $\mathbb{N}^\star$ dans I en posant :

$$\varphi(k) = \begin{cases} \varphi_0(k) & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant c_0 \\ \varphi_{n(k)}(k) & \text{si } c_{n(k)} < k \leqslant c_{n(k)+1} \end{cases}$$

Ainsi définie, il est clair que φ est surjective puisque si $x \in I$, soit $x \in H_0$ ou bien il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in H_{n+1} \setminus H_n$ et φ_0 et chaque φ_n est surjective. De plus, φ est aussi injective puisque les φ_n $(n \in \mathbb{N})$ le sont et que les images de chaque φ_n sont deux à deux disjointes. Ce qui prouve qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}^\star \subset \mathbb{N}$ dans I, c'est-à-dire I est dénombrable.

⊠

Définition 5.5.1.6 Soit I un ensemble quelconque. On appelle suite exhaustive de I toute suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n \in \mathcal{P}_f(I)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n est une partie finie de I) ;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n \subset J_{n+1}$ ($(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante) ;

(iii) $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$.

Remarque : *le théorème précédent affirme donc qu'un ensemble I est dénombrable si et seulement si il admet au moins une suite exhaustive.*

Corollaire 5.5.1.7 *Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.*

Preuve :

Si I et J sont dénombrables, il existe des suites croissantes $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I et J respectivement telles que $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$. En posant pour $n \in \mathbb{N}$, $K_n = I_n \times J_n$, il est clair que $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de $I \times J$.

⊠

Corollaire 5.5.1.8 *La réunion de deux ensembles dénombrables est dénombrable.*

Plus généralement, une réunion finie d'ensembles dénombrables est dénombrable. La démonstration est laissée en exercice. On peut encore généraliser :

Corollaire 5.5.1.9 *Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Preuve :

Soient I un ensemble non vide dénombrable et pour $i \in I$, A_i un ensemble dénombrable. On veut montrer que $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ est dénombrable.

- Si I est une partie finie (non vide), alors c'est le corollaire précédent (dont la preuve a été laissée en exercice).
- Si I est infini, alors il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow I$ et on veut donc montrer que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\varphi(n)}$ est dénombrable.

  Pour $n \in \mathbb{N}$, puisque $A_{\varphi(n)}$ est dénombrable, il existe une suite exhaustive $(J_k(n))_{k \in \mathbb{N}}$ de $A_{\varphi(n)}$. On pose alors :

  $$\forall k \in \mathbb{N} \ , \ J_k = \bigcup_{p=0}^{k} J_k(p)$$

  * Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J_k \subset \bigcup_{p=0}^{k} A_{\varphi(p)} \subset A$.
  * Pour tout $k \in \mathbb{N}$, J_k est une réunion finie d'ensembles finis donc J_k est un ensemble fini.
  * Soit $k \in \mathbb{N}$.

    $$J_k = \bigcup_{p=0}^{k} J_k(p) \subset \bigcup_{p=0}^{k} J_{k+1}(p) \subset \bigcup_{p=0}^{k+1} J_{k+1}(p) = J_{k+1}$$

    Ce qui montre que $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.
  * Enfin, si $x \in A$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_{\varphi(n)}$. Par ailleurs, puisque $(J_k(n))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de $A_{\varphi(n)}$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in J_{k_0}(n)$. En posant $k = \max(k_0, n)$, on a alors :

    $$x \in J_{k_0}(n) \subset J_k(n) \subset \bigcup_{p=0}^{k} J_k(p) = J_k$$

    Ce qui prouve que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k = A$.

⊠

Remarque : *dans la pratique, on utilise plutôt les réunions finis d'ensembles dénombrables, et même la réunion de deux ensembles dénombrables.*

Corollaire 5.5.1.10 $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.*

Preuve :

En effet, en posant pour $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ / \ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star \text{ et } |p| + q \leqslant n+1\}$$

il est clair que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties finies de $\mathbb{Q}$ dont la réunion est $\mathbb{Q}$.

⊠

Théorème 5.5.1.11 $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Preuve :

On **admet** ce résultat. Pour ceux qui sont intéressés, une méthode « simple » pour prouver ce résultat est de raisonner par l'absurde en utilisant l'existence et l'unicité du développement décimal de tout nombre réel (voir cours de mathématiques spéciales 1).
On raisonne donc par l'absurde et on suppose que $\mathbb{R}$ est dénombrable. Alors $]0,1[$ est aussi dénombrable et on peut donc écrire $]0,1[= \{x_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ (on a vu qu'un ensemble infini et dénombrable est en bijection avec $\mathbb{N}$: si « x » est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $]0,1[$, alors $\mathrm{Im}(x) = \{x(n) \ , \ n \in \mathbb{N}\} =]0,1[$). Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on écrit le développement décimal de x_n :

$$x_n = 10^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k(n) 10^{-k}$$

où $(d_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $[\![0,9]\!]$ qui n'est pas stationnaire égale à 9 (autrement dit, cette suite n'est jamais constante égale à 9 à partir d'un certain rang). On choisit un entier $c_n \in [\![0,9]\!] \setminus \{0, d_n(n), 9\}$. Ceci définit alors une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[\![1,8]\!] \subset [\![0,9]\!]$, non stationnaire en 9 (puisqu'aucun terme ne vaut 9) et telle que $c_0 \neq 0$. On pose alors :

$$x = 10^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}$$

Puisque par définition, pour tout entier n, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \neq (d_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ et puisque l'écriture décimale d'un réel est unique, $x \neq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ce qui est absurde puisque $x \in]0,1[= \{x_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$.

⊠

5.5.2 Familles sommables de nombres réels positifs

Dans tous les paragraphes suivants, I est un ensemble dénombrable. On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

Définition 5.5.2.1 Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si l'ensemble $\left\{ \sum_{j\in J} u_j \ , \ J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$ est majoré. Dans ce cas, on appelle somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$, et on note $\sum_{i\in I} u_i$, le nombre :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_{J\in\mathcal{P}_f(I)} \left(\sum_{j\in J} u_j \right)$$

Remarques :

- *tout d'abord, si I est un ensemble fini (et non vide), alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est toujours sommable et sa somme est la somme finie de tous les u_i pour $i \in I$;*
- *lorsque I est infini, cette définition est parfaitement en accord avec le critère pour les séries à termes positifs (à la fois pour la « convergence » et la « somme ») ;*
- *notez bien que la différence est que contrairement aux séries, ici, on fait des sommes finies arbitraires (pas d'ordre dans les termes choisis). On verra que pour les séries positives, cela ne change rien mais pour les familles quelconques, cela aura son importance.*

Théorème 5.5.2.2 *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable ;

(ii) pour toute suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I dont la réunion est I, $\left(\sum_{i\in J_n} u_i \right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (ou converge) ;

(iii) il existe une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I, dont la réunion est I et telle que la suite $\left(\sum_{i\in J_n} u_i \right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée (ou converge).

Lorsque l'une des conditions précédentes est réalisée, on a pour toute suite exhaustive $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in J_n} u_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} u_i$$

Preuve :

• Montrons $(i) \Longrightarrow (ii)$.

On suppose que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. Par définition, $M = \sup\limits_{J\in\mathcal{P}_f(I)} \sum\limits_{i\in J} u_i$ est bien défini et :

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(I)\ ,\ \sum_{i\in J} u_i \leqslant M = \sum_{i\in I} u_i$$

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties finies de I, dont la réunion est I. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ S_n = \sum_{i\in K_n} u_i \leqslant M$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante (puisque $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres positifs) et par hypothèse, elle est aussi majorée et par conséquent, elle converge : ce qui prouve (ii). Par ailleurs, puisque (S_n) converge, on a en passant à la limite dans l'inégalité précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in K_n} u_i = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in K_n} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

• Montrons $(ii) \Longrightarrow (iii)$.

Cette propriété est toujours vraie car il existe au moins une suite exhaustive de I (on a supposé I dénombrable). Attention, il ne faut pas oublier de préciser cela car la propriété :

$$(\forall x \in X\ ,\ P(x)) \Longrightarrow (\exists x \in X\ ,\ P(x))$$

est une implication fausse si $X = \emptyset$ et vraie sinon.

• Montrons $(iii) \Longrightarrow (i)$.
On suppose qu'il existe $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de I telle que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sum\limits_{i\in J_n} u_i)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée. Alors, cette suite est croissante et majorée donc elle converge et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \sum_{i\in J_n} u_i = S_n \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} S_k = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i\in J_k} u_i$$

Soit J une partie finie de I. Puisque $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$ et puisque $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $J \subset J_{n_0}$. Par suite,

$$\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in J_{n_0}} u_i \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} u_i$$

Ce qui prouve que $\left\{ \sum\limits_{i\in J} u_i\ ,\ J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$ est majoré par $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i\in J_n} u_i$

Ceci prouve que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et :

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} u_i$$

(puisque par définition, la borne supérieure est le plus petit des majorants).

• On a donc montré que les trois propriétés sont équivalentes. Par ailleurs, si l'une est vérifiée, alors les trois sont vérifiées. Par suite, si on fixe $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de I, alors :

∗ d'après $(i) \Longrightarrow (ii)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

∗ d'après $(iii) \Longrightarrow (i)$ appliquée à cette suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} u_i$$

Ce qui prouve que la limite de la suite $(S_{J_n}(u)) = \left(\sum_{i\in J_n} u_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne dépend pas du choix de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et est égale à la somme de la famille sommable $(u_i)_{i\in I}$.

⊠

Remarques : *en général,*

- *pour montrer qu'une famille de réels positifs est sommable, c'est souvent la propriété* (iii) *qu'on utilise ;*
- *en revanche, lorsqu'on sait que la famille est sommable c'est surtout* (ii) *qu'on utilise.*

Corollaire 5.5.2.3 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. De plus dans ce cas, on a :* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Preuve :

C'est une conséquence du théorème précédent car $(J_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\llbracket 0, n\rrbracket)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de $\mathbb{N}$ et une série à termes positifs converge si et seulement si ses sommes partielles sont majorées.

⊠

Corollaire 5.5.2.4 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres positifs indexée par $\mathbb{Z}$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est sommable ;*

(ii) la suite $\left(\sum_{k=-n}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée (ou converge) ;*

(iii) les séries $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\sum u_{-n})_{n\geqslant 1}$ *convergent.*

Lorsque l'une de ces conditions équivalentes est vérifiée, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$$

Preuve :

- (i) équivaut à (ii) car $(\llbracket -n, n\rrbracket)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de $\mathbb{Z}$.
- Ensuite, (iii) implique (ii) est évident.
- Enfin, (ii) implique (iii) car la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille de nombres positifs donc pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=-n}^{n} u_k$ et $\sum_{k=1}^{n} u_{-k} \leqslant \sum_{k=-n}^{n} u_k$.

⊠

Exemple 5.5.2.5 Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on pose pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x$.

On admet ici que l'application $(f, g) \longmapsto (f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f}g$ définit un « produit scalaire complexe » (c'est ce qu'on appelle un produit hermitien) et on note $\|.\|$ la « norme associée » (définie par $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$).

On note pour $k \in \mathbb{Z}$, $e_k : x \longmapsto e^{ikx}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n(f) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} (e_k|f)e_k$, alors on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $f - S_n(f)$ est orthogonal à $\mathrm{Vect}(e_k, k \in \llbracket -n, n\rrbracket)$, c'est-à-dire :
$$\forall p \in \llbracket -n, n\rrbracket\ ,\ (f - S_n(f)|e_p) = 0$$
- puisque $S_n(f) \in \mathrm{Vect}(e_k, k \in \llbracket -n, n\rrbracket)$, on a alors :
$$\|f\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 + \|S_n(f)\|^2 \quad \text{et donc} \quad \|S_n(f)\|^2 \leqslant \|f\|^2$$

Or, la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale (c'est-à-dire pour tout k, p, $(e_k|e_p) = \delta_{k,p}$). Il s'ensuit que :

$$\|S_n(f)\|^2 = \|\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k\|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$$

Ce qui prouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

D'après le corollaire précédent, on en déduit que la famille $(|c_n(f)|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

Ce résultat est connu sous le nom d'inégalité de Bessel. On verra dans le cours de mathématiques spéciales 2 (séries de Fourier) qu'en fait c'est une égalité (théorème de Parseval).

5.5.3 Séries doubles à termes positifs

Théorème 5.5.3.1 (Fubini pour les familles positives) *Soit $u = (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels positifs indexée par $\mathbb{N}^2$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) u est sommable ;

(ii) pour tout $q \in \mathbb{N}$, la série $\left(\sum u_{p,q}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et la série $\sum\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge ;

(iii) pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\left(\sum u_{p,q}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ converge et la série $\sum\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge.

Lorsque l'une de ces conditions est vérifiée, on a alors l'égalité :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$$

Remarques :

- *on retient souvent le théorème de Fubini pour les familles positives en disant que « si ça marche dans un sens, alors ça marche dans les deux sens et on peut permuter » ;*
- *en fait, pour des familles de nombres positifs, on a toujours l'égalité :*

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$$

Mais c'est une égalité dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ si on ne rajoute pas la condition « famille sommable ». En revanche, on verra que pour des familles de nombres réels quelconques (ou de complexes), on ne peut pas permuter les deux sommes infinies sans conditions.

Preuve :

• Montrons $(i) \Longrightarrow (ii)$.

On suppose que u est sommable et on pose :

$$S = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sup_{J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N}^2)} \sum_{(p,q)\in J} u_{p,q}$$

∗ Soit $q_0 \in \mathbb{N}$ fixé. Alors pour tout entier N, $J = [\![0, N]\!] \times \{q_0\}$ est une partie finie de $\mathbb{N}^2$, par suite :

$$\sum_{(p,q)\in J} u_{p,q} \leqslant S \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{p=0}^{N} u_{p,q_0} \leqslant S$$

On en déduit donc que la suite $(\sum_{p=0}^{N} u_{p,q_0})_{N\in\mathbb{N}}$ est majorée. Par conséquent, la série $(\sum u_{p,q_0})_{p\in\mathbb{N}}$ converge (c'est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées). Ce qui prouve pour commencer que pour tout entier $q \in \mathbb{N}$, la série $(\sum u_{p,q})_{p\in\mathbb{N}}$ converge. Posons alors :

$$\forall q \in \mathbb{N}\ ,\ v_q = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$$

∗ Soient N, M deux entiers naturels. L'ensemble $J = [\![0, N]\!] \times [\![0, M]\!]$ est une partie finie de $\mathbb{N}^2$. Par conséquent,

$$\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{M} u_{p,q} \leqslant S \quad \text{soit encore} \quad \sum_{q=0}^{M}\sum_{p=0}^{N} u_{p,q} \leqslant S$$

Or, pour tout $q \in [\![0, M]\!]$, la série $(\sum u_{p,q})_{p\geqslant 0}$ converge. On peut donc passer à la limite quand N tend vers l'infini dans l'inégalité précédente, ce qui donne :

$$\sum_{q=0}^{M}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \leqslant S \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{q=0}^{M} v_q \leqslant S$$

Ainsi, la série de terme général v_q est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées. Par conséquent, cette série converge, ce qui prouve (ii). De plus, on peut alors passer à la limite quand M tend vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, ce qui donne :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} v_q \leqslant S \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\star) : \quad \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \leqslant \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$$

• Montrons $(ii) \Longrightarrow (iii)$.

On suppose (ii).

∗ Soit $p_0 \in \mathbb{N}$. Puisque u est une famille de nombres positifs et puisqu'on suppose (ii), on a pour tout entier $q \in \mathbb{N}$:

$$u_{p_0,q} \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = v_q$$

Par suite, pour tout entier N, on a :

$$\sum_{q=0}^{N} u_{p_0,q} \leqslant \sum_{q=0}^{N} v_q \leqslant \sum_{q=0}^{+\infty} v_q$$

Ce qui prouve que la série à termes positifs $(\sum u_{p_0,q})_{q\geqslant 0}$ converge. Ainsi, on a montré que pour tout entier p, la série $(\sum u_{p,q})_{q\in\mathbb{N}}$ converge. On pose alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ w_p = \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$$

∗ Soient N et M deux entiers naturels. On a alors :

$$\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{M} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{M}\sum_{p=0}^{N} u_{p,q} \leqslant \sum_{q=0}^{M} v_q \leqslant \sum_{q=0}^{+\infty} v_q$$

Or, pour tout $p \in [\![0, N]\!]$, la série $(\sum u_{p,q})_{q\in\mathbb{N}}$ converge (c'est ce qu'on vient de prouver), on peut donc passer à la limite (quand M tend vers $+\infty$) dans l'inégalité précédente, ce qui donne :

$$\sum_{p=0}^{N} w_p \leqslant \sum_{q=0}^{+\infty} v_q$$

Ceci étant vrai pour tout entier N, on en déduit que la série de terme général w_p est une série à termes positifs convergente : ce qui prouve (iii). De plus, on a alors en passant à la limite dans l'inégalité précédente :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} w_p \leqslant \sum_{q=0}^{+\infty} v_q$$

c'est-à-dire

$$(\star\star) : \quad \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \leqslant \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$$

• Montrons enfin $(iii) \Longrightarrow (i)$.

On suppose (iii). Montrons que u est sommable.
Soit J une partie finie de $\mathbb{N}^2$. Alors, il existe N et M, deux entiers naturels, tels que $J \subset [\![0, N]\!] \times [\![0, M]\!]$. On a alors :

$$\sum_{(p,q)\in J} u_{p,q} \leqslant \sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{M} u_{p,q} \leqslant \sum_{p=0}^{N}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \leqslant \sum_{p=0}^{N} w_p \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} w_p$$

Les inégalités précédentes sont justifiées dans la mesure où u est une famille de nombres positifs et d'après (iii), les séries en question sont toutes convergentes. On obtient donc finalement :

$$\sum_{(p,q)\in J} u_{p,q} \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} w_p$$

Ainsi, on a montré que :

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}^2)\ ,\ \sum_{(p,q)\in J} u_{p,q} \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} w_p$$

Ce qui prouve que u est sommable (et donc (i)) et de plus, on a alors :

$$\sup_{J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N}^2)} \sum_{(p,q)\in J} u_{p,q} \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} w_p$$

c'est-à-dire

$$(\star\star\star) : \qquad \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$$

Ainsi, on a montré que (i), (ii) et (iii) sont équivalentes et que lorsque l'une de ces propriétés est vérifiée, on a par $(\star), (\star\star)$ et $(\star\star\star)$:

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \leqslant \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \leqslant \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$$

c'est-à-dire que ces trois nombres sont égaux. ⊠

Exemple 5.5.3.2 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

On veut montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature et qu'en cas de convergence, les sommes sont les mêmes.

• Concrètement, on veut justifier que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{ku_k}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{ku_k}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} ku_k \sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

Ceci peut peut-être vous paraître difficile en première lecture mais il faut simplement comprendre qu'on fait une somme pour tous les entiers n, k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$. Avec la seconde somme, il est peut être plus difficile de voir qu'on veut appliquer le théorème de Fubini mais avec la troisième, on voit bien apparaître une somme double (infinie à chaque fois).

• En fait, il y a ici une « remarque » simple mais pourtant essentielle : « une somme finie peut toujours être écrite comme une somme infinie, en complétant par des zéros ». En clair, on va définir une famille $(a_{n,k})$ telle que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{ku_k}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k}\right)$$

De cette façon, on pourra essayer d'appliquer directement le théorème de Fubini.

• Suivant la remarque précédente, on pose :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star \ , \ a_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{ku_k}{n(n+1)} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

∗ $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^\star\times\mathbb{N}^\star}$ est une famille de nombre réels positifs (puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive).

∗ Par construction, si $k \in \mathbb{N}^\star$ est donné, on a :

$$a_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{ku_k}{n^2}$$

Or, $(\sum \frac{ku_k}{n^2})_{n\geqslant 1}$ est une série à termes positifs convergente. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $(\sum a_{n,k})_{n\geqslant 1}$ converge.

∗ D'après le point précédent, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{ku_k}{n(n+1)} = ku_k \sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = u_k$$

D'après le théorème de Fubini pour les familles positives,

$$\begin{aligned} \sum u_k \text{ converge} &\iff (a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^\star\times\mathbb{N}^\star} \text{ est sommable} \\ &\iff \begin{cases} (i) & \forall n \in \mathbb{N}^\star \ , \ (\sum a_{n,k})_{k\geqslant 1} \text{ converge} \\ (ii) & \sum \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k}\right) \text{ converge} \end{cases} \end{aligned}$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé, il est évident que $(\sum a_{n,k})_{k\geqslant 1}$ converge car tous les termes de cette série sont nuls à partir d'un certain rang et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{ku_k}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_k = v_n$$

Par conséquent,

$$\sum u_k \text{ converge } \iff (a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^\star\times\mathbb{N}^\star} \text{ est sommable } \iff \sum v_n \text{ converge}$$

Dans ce cas, toujours d'après le théorème de Fubini :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

Remarque : *on peut aussi démontrer ce résultat à l'aide de la transformation d'Abel (voir l'annexe) et du théorème de Césaro mais c'est moins élégant et certainement plus long à rédiger.*

Exemple 5.5.3.3 On rappelle que la fonction ζ de Riemann est définie par :

$$\forall x > 1 \ , \ \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Montrons que $S = \sum_{q=2}^{+\infty} (\zeta(q) - 1)$ est bien défini et que $S = 1$. On pose :

$$\forall (n,q) \in [\![2, +\infty[\![^2 \ , \ u_{n,q} = \frac{1}{n^q}$$

Par définition de ζ, on a donc (sous réserve d'existence) :

$$S = \sum_{q=2}^{+\infty} (\zeta(q) - 1) = \sum_{q=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^q} = \sum_{q=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} u_{n,q}$$

Il s'agit donc de prouver que $u = (u_{n,q})_{n\geqslant 2, q\geqslant 2}$ est une famille sommable de nombres positifs.

Soit $n \geqslant 2$ fixé. La série à termes positifs $(\sum \frac{1}{n^q})_{q\geqslant 2}$ est une série géométrique convergente puisque $|\frac{1}{n}| < 1$. De plus,

$$v_n = \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{n^q} = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Par ailleurs, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ donc $\sum v_n$ converge. Ainsi, u est une famille sommable et :

$$S = \sum_{q=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^q} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{n^q} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

puisque pour tout entier $N \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{N} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{N}$.

Exercice 5.5.3.4 Montrer que la série $\sum \dfrac{\zeta(p)-1}{p}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 5.5.3.5 À quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) sur α la famille

$$\left(\frac{1}{(p+q)^{\alpha}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star}\times\mathbb{N}^{\star}}$$

est-elle sommable ?

5.5.4 Familles sommables de nombres complexes

Définition 5.5.4.1 On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est sommable si la famille de nombres réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est une famille sommable.

Remarque : *autrement dit, une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est sommable si :*

$$\left\{\sum_{i\in J}|u_i|\ ,\ J\in\mathcal{P}_f(I)\right\}\quad \textit{est une partie majorée de } \mathbb{R}$$

En revanche, on ne peut pas définir la somme aussi facilement que pour les familles positives car d'une part dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas d'ordre naturel et d'autre part, pour une famille de réels quelconques, on voit bien que le « sup » ne donne en général pas du tout la somme (par exemple, si on ne prend que des termes négatifs, ce serait la borne inférieure qui donnerait la somme).

Théorème 5.5.4.2 (Définition) *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Alors :*

(i) pour toute suite exhaustive $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I, la suite définie par $(S_{J_n})_{n\in\mathbb{N}}=(\sum_{i\in J_n}u_i)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente ;

(ii) la limite de la suite $(S_{J_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est indépendante du choix de la suite exhaustive $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cette limite est appelée la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$, et on la note $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i$.

Preuve :

• Montrons (i).

Soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de I. Montrons que $(S_{J_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pour cela, on va montrer que $\sum(S_{J_{n+1}}-S_{J_n})$ converge. S'agissant d'une série à termes complexes, il suffit de prouver que cette série est absolument convergente.

Pour simplifier les notations, on note $(\tilde{S}_{J_n}) = \left(\sum_{i\in J_n} |u_i|\right)$. On a alors pour tout entier n :

$$\begin{aligned}\left|S_{J_{n+1}} - S_{J_n}\right| &= \left|\sum_{i\in J_{n+1}\setminus J_n} u_i\right| \\ &\leqslant \sum_{i\in J_{n+1}\setminus J_n} |u_i| \\ &\leqslant \sum_{i\in J_{n+1}} |u_i| - \sum_{i\in J_n} |u_i| \\ &\leqslant \tilde{S}_{J_{n+1}} - \tilde{S}_{J_n}\end{aligned}$$

Ces inégalités étant valables car $J_n \subset J_{n+1}$. Or, par hypothèse la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable. D'après les propriétés des familles sommables de nombres réels positifs, la suite $(\tilde{S}_{J_n})$ converge, c'est-à-dire la série $\sum(\tilde{S}_{J_{n+1}} - \tilde{S}_{J_n})$ converge. Par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum \left|S_{J_{n+1}} - S_{J_n}\right|$ converge, et *a fortiori* $\sum(S_{J_{n+1}} - S_{J_n})$ converge.

• Montrons que la limite ne dépend pas du choix de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $(J'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite exhaustive de I. On pose $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} = (J_n \cup J'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est aussi une suite exhaustive de I qui vérifie $J_n \subset K_n$ et $J'_n \subset K_n$.
On a alors pour tout entier n,

$$|S_{K_n} - S_{J_n}| = \left|\sum_{i\in K_n\setminus J_n} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in K_n\setminus J_n} |u_i| = \sum_{i\in K_n} |u_i| - \sum_{i\in J_n} |u_i|$$

Or, d'après le théorème 5.5.2.2, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i\in K_n} |u_i| = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i\in J_n} |u_i|$. D'après le théorème des gendarmes, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} |S_{K_n} - S_{J_n}| = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{n\to+\infty} S_{J_n} = \lim_{n\to+\infty} S_{K_n}$$

puisqu'on a déjà montré juste avant que les suites $(S_{J_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Les rôles de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant symétriques, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{J'_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{K_n}$ et par conséquent, on a donc montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{J'_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{J_n}$.

⊠

Remarques :

- *en fait, il faut comprendre ce théorème de la façon suivante : lorsque la famille est sommable, on peut grouper les termes de n'importe quelle façon et dans n'importe quel ordre, et la série obtenue est convergente et la valeur de la somme est indépendante de la méthode de « groupement ». Le choix de chaque « paquet de termes » correspond à $J_{n+1} \setminus J_n$*

et on voit bien que dans le choix de J_n il n'est pas nécessaire de choisir les termes de la famille dans un ordre précis donné ;

- *la notion de sommabilité correspond donc à dire que « les calculs » avec cette famille « se passent bien » : quelle que soit la façon dont on fait la somme, « ça marche » et on « trouve la même valeur » ;*
- *ceci n'est pas vrai de toute famille ! Par exemple, si on choisit la famille $(\frac{(-1)^{n-1}}{n})_{n\geqslant 1}$ et on pose pour $n \in \mathbb{N}$:*

$$J_n = [\![1, n]\!] \quad \text{et } K_n = \bigcup_{k=0}^{n} \{2k+1, 4k+2, 4k+4\}$$

On vérifie que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites exhaustives de $\mathbb{N}^\star$ et avec les notations de la preuve précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \ , \ S_{J_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} S_{J_n} = \ln(2)$$

(pour la valeur de la somme, voir le théorème 5.3.3.2 (sommes de référence), propriété (vi)). Par ailleurs, en notant $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, on a pour $n \geqslant 2$:

$$S_{K_{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2k+1} + u_{4k+2} + u_{4k+2}) = \sum_{k=0}^{n-1} u_{2k+1} + \sum_{k=0}^{2n-1} u_{2k+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2k+2}$$

soit encore :

$$S_{K_{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{k+1} = H_{2n} - \frac{1}{2} H_n - \frac{1}{2} H_{2n}$$

Finalement,

$$S_{K_{n-1}} = \frac{1}{2} \left(H_{2n} - H_n \right) = \frac{1}{2} \left(\ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n) - \gamma + o(1) \right) = \frac{\ln(2)}{2} + o(1)$$

On conclut donc que $\lim_{n\to+\infty} S_{K_n} = \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} S_{J_n}$! Autrement dit, pour cette famille, quand on a changé l'ordre dans lequel on choisit les termes, on conserve la convergence mais on modifie la somme !

- *l'exemple ci-dessus montre que le cadre « agréable » est donc bien celui des familles sommables pour lesquels « tout va bien » et il n'y a pas de « mauvaises surprises » ;*
- *les plus curieux pourront consulter à ce sujet le théorème de réarrangement de Riemann qui affirme que si $\sum u_n$ est une série réelle convergente mais pas absolument convergente, alors on peut toujours modifier l'ordre des termes pour obtenir une série qui diverge vers $+\infty$, mais aussi modifier l'ordre des termes pour obtenir une série qui diverge vers $-\infty$ et encore pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, modifier l'ordre des termes pour obtenir une série qui converge vers ℓ.*

Corollaire 5.5.4.3 *Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $\sum u_n$ est absolument convergente. Dans ce cas,*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Preuve :

C'est clair : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille sommable de nombres positifs, si et seulement si $\sum |u_n|$ converge. Dans ce cas, en choisissant $(J_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\llbracket 0, n\rrbracket)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in J_n} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

⊠

Corollaire 5.5.4.4 *Une famille complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{-n}$ sont absolument convergentes. Dans ce cas,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$$

Preuve :

• L'équivalence est évidente. En effet, par définition $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. Or, d'après le corollaire 5.5.2.4, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si $\sum |u_n|$ et $\sum |u_{-n}|$ convergent.

• Ensuite, pour l'égalité, on choisit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\llbracket -, n, n\rrbracket)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_{-k}$$

Le calcul est licite car lorsque la famille est sommable, chacune des séries $\sum u_n$ et $\sum u_{-n}$ est convergente (car absolument convergente).

⊠

⚠ **Attention :** ce n'est pas parce que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} u_k$ existe que la famille est sommable !

En effet, si $u_k = \sin(k)$, pour tout entier n, $\sum_{k=-n}^{n} u_k = 0$ donc cette suite admet une limite qui est nulle mais pourtant les séries $\sum u_k$ et $\sum u_{-k}$ divergent !

Remarque : *ainsi, dans le cas des familles indexées par $\mathbb{N}$, la notion de famille sommable est la même que la notion de série absolument convergente.*

5.5.5 Séries doubles complexes

Théorème 5.5.5.1 (Fubini) *Soit $u = (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) u est sommable ;

(ii) pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(\sum |u_{p,q}|)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et $\sum \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right)$ converge ;

(iii) pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(\sum |u_{p,q}|)_{q\in\mathbb{N}}$ converge et $\sum \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right)$ converge.

Lorsque l'une de ces trois conditions équivalentes est vérifiée, on a alors :

(1) pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(\sum u_{p,q})_{p\in\mathbb{N}}$ converge et la série $\sum \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge ;

(2) pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(\sum u_{p,q})_{q\in\mathbb{N}}$ converge et la série $\sum \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge ;

(3) et enfin,

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$$

Preuve :

• L'équivalence des trois propriétés est claire : c'est une simple traduction du théorème de Fubini pour les familles de réels positifs.

• Supposons à présent que l'une de ces propriétés équivalentes soit vérifiée, alors elles le sont toutes et :

∗ pour tout $q \in \mathbb{N}$, $(\sum u_{p,q})_{p\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente d'après (i) donc convergente. De plus, d'après l'inégalité triangulaire et par continuité du module :

$$\left|\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right| \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$$

Or, d'après (i), $\sum \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$ converge. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum \left|\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right|$ converge et *a fortiori*, $\sum \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge, ce qui prouve (1).

∗ En échangeant p et q dans le raisonnement précédent, on conclut de même que (2) est vérifiée.

∗ Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = [\![0, n]\!]^2$ et :

$$S_{J_n} = \sum_{(p,q)\in J_n} u_{p,q} \quad \text{et} \quad \tilde{S}_{J_n} = \sum_{(p,q)\in J_n} |u_{p,q}|$$

La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de $\mathbb{N}^2$ donc d'après le théorème-définition de la somme d'une famille complexe sommable et le théorème pour les familles de nombres positifs, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_{J_n} = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{S}_{J_n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{(p,q)\in J_n} |u_{p,q}| = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} |u_{p,q}|$$

Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, d'après l'inégalité triangulaire et par continuité du module, on a :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} - S_{J_n}\right| &= \left|\sum_{q=0}^{n}\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_{p,q}\right| \\ &\leqslant \sum_{q=0}^{n}\sum_{p=n+1}^{+\infty} |u_{p,q}| \\ &\leqslant \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} |u_{p,q}| - \tilde{S}_{J_n}\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} |u_{p,q}| - \tilde{S}_{J_n}\right) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\sum\limits_{q=0}^{n}\sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} - S_{J_n}\right| = 0$, et puisque $(S_{J_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$$

On démontre la seconde égalité de la même façon, en échangeant les rôles de p et q.

⊠

Remarques :

- *dans le cas des familles de nombres complexes, le théorème de Fubini donne des conditions suffisantes pour pouvoir permuter les deux sommes infinies ! Autrement dit, si les hypothèses du théorème ne sont pas satisfaites, il se peut qu'on puisse néanmoins permuter les deux sommes infinies mais on ne peut pas l'affirmer directement ;*
- *en général, on retient le théorème sous la forme suivante : « si ça marche dans un sens avec les valeurs absolues, alors ça marche dans les deux sens avec et sans valeurs absolues et on peut permuter » ;*
- *dans la pratique, quand on applique ou énonce le théorème, on conclut que la famille est sommable et d'après le théorème de Fubini, on a :*

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)=\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)$$

  Autrement dit, on omet les conclusions (1) *et* (2) *du théorème qui disent simplement que ce qui est écrit après a un sens ;*
- *enfin, notez que le théorème de Fubini est le premier théorème de permutation de limites appris jusqu'ici :*

$$\lim_{N\to+\infty}\lim_{M\to+\infty}\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{M}u_{p,q}=\lim_{M\to+\infty}\lim_{N\to+\infty}\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{M}u_{p,q}$$

  Ce thème de permutation de limites sera largement étudié dans les cours de mathématiques spéciales 1 et 2. Pour le moment, le point important est de vous sensibiliser à ce type de problème et de bien comprendre que l'échange n'est pas toujours possible. C'est ce que les deux exemples suivants montrent dans le cas des séries doubles.

Exemple 5.5.5.2 Considérons la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ définie par :

$$\forall p,q\in\mathbb{N}^2\ ,\ u_{p,q}=\begin{cases}\dfrac{-1}{2^p} & \text{si } p\geqslant 1\\[2ex] 1 & \text{si } p=0\end{cases}$$

Soit $q\in\mathbb{N}$ fixé. La série $(\sum u_{p,q})_{p\geqslant 0}$ converge et on a :

$$v_q=\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}=1-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{2^p}=0$$

Par conséquent, la série $\sum v_q$ converge et on a :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)=0$$

En revanche, pour tout $p\in\mathbb{N}$, la série $(\sum u_{p,q})_{q\geqslant 0}$ diverge grossièrement (puisque le terme est constant égal à 1 ou bien $-\frac{1}{2^p}$). Dans cet exemple, on a donc une série double qui converge et l'autre qui diverge.

Exemple 5.5.5.3 On considère maintenant la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ définie par :

$$\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2\ ,\ u_{p,q}=\begin{cases} -\frac{1}{2^{q-p}} & \text{si } p<q \\ 1 & \text{si } p=q \\ 0 & \text{si } p>q \end{cases}$$

- Soit $q\in\mathbb{N}$. La série $(\sum u_{p,q})_{p\geqslant 0}$ est convergente car le terme général de cette série est nul à partir du rang $q+1$ et :
$$\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}=\sum_{p=0}^{q} u_{p,q}=1-\sum_{p=0}^{q-1}\frac{1}{2^{q-p}}=1-\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{2^q}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^q}$$
- La série $\sum\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}\in\,]-1,1[$. Par conséquent, elle converge et :
$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{2^q}=2$$
- Soit $p\in\mathbb{N}$. La série $(\sum u_{p,q})_{q\geqslant 0}$ converge car pour $q\geqslant p+1$, $u_{p,q}=-\dfrac{1}{2^{q-p}}$ et $|\frac{1}{2}|<1$. De plus,
$$\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}=1-\sum_{q=p+1}^{+\infty}\frac{1}{2^{q-p}}=1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=0$$
- Pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\sum\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge (car le terme général de cette série est nul) et :
$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)=0$$
- On conclut donc ici que les deux séries doubles sont convergentes mais :
$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)\neq\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$$

⚠ **Attention :** pour une famille quelconque $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$:

$$\begin{cases} \forall p\in\mathbb{N}\ ,\ \sum u_{p,q} \quad \text{converge} \\ \sum\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \text{ converge} \end{cases} \not\Longrightarrow \begin{cases} \forall q\in\mathbb{N}\ ,\ \sum u_{p,q} \quad \text{converge} \\ \sum\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \text{ converge} \end{cases}$$

Autrement dit, il ne faut pas confondre les théorèmes de Fubini pour les familles positives et pour les familles quelconques ! Pour une famille quelconque, « si ça marche dans un sens, on ne peut pas conclure que ça marche dans les deux sens et même si ça marche dans les deux sens, on ne peut pas conclure qu'on peut permuter ».

Exemple 5.5.5.4 Soient $|a|<1$ et $|b|<1$. Montrons que la famille $(a^pb^q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et déterminons sa somme.

• Soit $p\in\mathbb{N}$. La série $(\sum|a^pb^q|)$ converge car $|b|<1$ (critère pour les séries géométriques) et on a :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}|a^pb^q|=\frac{|a|^p}{1-|b|}$$

• La série $\displaystyle\sum\frac{|a|^p}{1-|b|}$ est également convergente car $|a|<1$.

D'après le théorème de Fubini, la famille $(a^pb^q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}a^pb^q=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}a^pb^q\right)=\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}a^pb^q\right)=\frac{1}{(1-a)(1-b)}$$

Plus généralement, je vous laisse montrer le résultat suivant en exercice qui concerne les séries « à variables séparées ».

Proposition 5.5.5.5 *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries complexes. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas identiquement nulles. Alors :*

$$(u_pv_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\text{ est sommable }\iff\left(\sum|u_n|\text{ et }\sum|v_n|\text{ convergent}\right)$$

Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}u_{p,q}=\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}v_q\right)$.

Remarque : *notez bien qu'on met l'hypothèse « non identiquement nulle » car si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=0$ alors $(u_pv_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}=0$ est donc sommable et cela ne dépend pas du fait que $\sum|v_n|$ converge ou pas.*

Exemple 5.5.5.6 On considère la fonction f définie pour $z\in\mathbb{C}$ par $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$.

Montrons que pour tout $z,z'\in\mathbb{C}$, $f(z+z')=f(z)\times f(z')$. Soient $z,z'\in\mathbb{C}$. On a :

$$f(z+z')=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+z')^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^kz'^{(n-k)}}{k!(n-k)!}$$

On pose alors pour $(n,k)\in\mathbb{N}^2$:

$$u_{n,k}=\begin{cases}\frac{z^kz'^{(n-k)}}{k!(n-k)!} & \text{si } 0\leqslant k\leqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Pour tout entier n fixé, la série $(\sum |u_{n,k}|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge (c'est en fait une somme finie). Sa somme est $v_n = \frac{(|z|+|z'|)^n}{n!}$ qui est le terme général d'une série convergente (série exponentielle réelle). D'après le théorème de Fubini, la famille est sommable et :

$$f(z+z') = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{z^k z'^{(n-k)}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z'^m}{m!} = f(z)\times f(z')$$

Exercice 5.5.5.7 On reprend la fonction f précédente.

1. Calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Calculer $f(iy)$ pour $y \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \exp(z)$.

En réalité, ceci est la définition mathématique de la fonction exponentielle.

Exemple 5.5.5.8 Montrons que la série $\sum (-1)^{p-1}\frac{\zeta(p)}{p}$ converge et calculons sa somme.

• Puisque ζ est définie comme la somme d'une série, l'énoncé ici demande de prouver l'existence puis de calculer :

$$\sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{pn^p}$$

On voit bien que « dans l'autre sens », c'est plus facile à calculer car :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{pn^p} \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p}\left(\frac{1}{n}\right)^p = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right)$$

Il est donc logique d'essayer de justifier la permutation mais on voit [1] tout de suite, que la famille ne sera pas sommable à cause du cas $n = 1$ car pour cette valeur, $\sum \left|\frac{(-1)^{p-1}}{p}\left(\frac{1}{n}\right)^p\right| = \sum \frac{1}{p}$ diverge. On pouvait aussi le comprendre en remarquant que $\zeta(p) = 1 + o(1)$ donc la série $\sum (-1)^{p-1}\frac{\zeta(p)}{p}$ n'est pas absolument convergente (et donc la famille ne peut pas être sommable).

Pas de panique à ce stade ! Il n'y a qu'une seule valeur de « n » qui pose problème : on va donc simplement isoler cette valeur et appliquer le théorème de Fubini aux autres valeurs. Concrètement, on pose :

$$\forall (n,p) \in [\![2,+\infty[\![^2 \ , \ u_{n,p} = \frac{(-1)^{p-1}}{pn^p}$$

Montrons que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in[\![2,+\infty[\![^2}$ est sommable.

- Soit $n \geqslant 2$. $\sum |u_{n,p}| = \sum \frac{1}{pn^p}$ est une série de référence convergente car $-\frac{1}{n} \in]-1,1]$ et :

$$\sum_{p=2}^{+\infty} |u_{n,p}| = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{pn^p} = -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$$

1. sinon, vous essayez de prouver la sommabilité et vous devez vous rendre compte qu'il y a un problème lorsque $n = 1$.

- $\left(-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. Or, $\sum \frac{1}{2n^2}$ est une série à termes positifs convergente. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum\left(-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)$ converge.

D'après le théorème de Fubini, la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in[\![2,+\infty[\![^2}$ est sommable et :

* pour $p \geqslant 2$, $\sum u_{n,p}$ converge et $\sum\left(\sum_{n=2}^{+\infty} u_{n,p}\right)$ converge, *i.e.* $\sum(-1)^{p-1}\frac{\zeta(p)-1}{p}$ converge ;
* pour $n \geqslant 2$, $\sum u_{n,p}$ converge et $\sum\left(\sum_{p=2}^{+\infty} u_{n,p}\right)$ converge, *i.e.* $\sum(\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n})$ converge ;
* enfin, $\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} u_{n,p}$, c'est-à-dire $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}\right) = \sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^{p-1}\frac{\zeta(p)-1}{p}$.

Or, $\sum \frac{(-1)^{p-1}}{p}$ est une série convergente (soit par application du critère spécial pour les séries alternées, ou bien c'est une somme de référence). Il s'ensuit que :

* $\sum(-1)^{p-1}\frac{\zeta(p)}{p}$ converge car c'est la somme de deux séries convergentes ;
* et $\sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^{p-1}\frac{\zeta(p)}{p} = \sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^{p-1}\frac{\zeta(p)-1}{p} + \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p}$, soit encore :

$$\sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^{p-1}\frac{\zeta(p)}{p} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}\right) + \ln(2) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}\right)$$

Or, pour $N \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\ln(n+1)-\ln(n)\right)-\frac{1}{n}\Big) \\ &= \ln(N+1)-\ln(1)-H_N \\ &= \ln(N)+o(1)-H_N \\ &= -\gamma+o(1)\end{aligned}$$

Ce qui prouve que : $\sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^{p-1}\frac{\zeta(p)}{p} = -\gamma$.

Remarque : *dans la pratique, lorsqu'on demande de calculer une somme d'une série double, on essaye souvent de montrer que la famille est sommable et qu'on eut permuter. Pour le faire, on fait toujours (ou presque) le calcul dans le sens contraire à celui donné : si on demande de calculer* $\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$*, alors pour montrer que la famille est sommable, on montre que pour tout* $q \in \mathbb{N}$, $\sum |u_{p,q}|$ *converge et* $\sum \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$ *converge.*

Exemple 5.5.5.9 On veut prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+n^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+n^2}$.

• Bien entendu, ce qui semble naturel est d'essayer de montrer que la famille en question est sommable. Or, pour $n\in\mathbb{N}^\star$ donné, il est évident que $\sum|\frac{(-1)^k}{k^2+n^2}|$ converge. En revanche, on va montrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k^2+n^2}\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2n}$$

Ce qui permet de conclure, par comparaison pour les séries à termes positifs, que $\sum\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k^2+n^2}\right|$ diverge. Il s'ensuit que dans cet exemple, on ne peut donc pas appliquer le théorème de Fubini.

Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, la fonction $f:t\longmapsto\dfrac{1}{t^2+n^2}$ est continue par morceaux et décroissant sur $[1,+\infty[$. Il s'ensuit que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^\star\ ,\ f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant f(k)$$

Or, $\sum f(k)$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\sum\int_k^{k+1}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, chaque terme de l'inégalité précédente est le terme général d'une série convergente. Par conséquent, on peut sommer les inégalités, ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}f(k+1)\leqslant\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}f(k)$$

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{n}\arctan(\frac{t}{n})\right]_1^{+\infty}=\frac{\pi}{2n}-\frac{\arctan(\frac{1}{n})}{n}$. Par suite,

$$\frac{\pi}{2n}-\frac{\arctan(\frac{1}{n})}{n}\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k^2+n^2}\right|\leqslant\frac{\pi}{2n}-\frac{\arctan(\frac{1}{n})}{n}+\frac{1}{n^2}$$

Or, $\left(\dfrac{\pi}{2n}-\dfrac{\arctan(\frac{1}{n})}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\dfrac{\pi}{2n}-\dfrac{\arctan(\frac{1}{n})}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$. Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k^2+n^2}\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2n}$$

• On est ici dans un cas où la famille n'est pas sommable et contrairement à l'exemple précédent, ce n'est pas en retirant une valeur de « n » ou « k » que la famille sera sommable. Il va donc falloir tout faire « à la main ». Pour raccourcir les écritures, on pose ici pour $(n,k)\in(\mathbb{N}^\star)^2$, $u_{n,k}=\dfrac{(-1)^k}{k^2+n^2}$.

∗ On a déjà vu que pour $n\in\mathbb{N}^\star$, la série $\sum|u_{n,k}|$ converge donc $\sum u_{n,k}$ converge.

∗ Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé, $(\sum u_{n,k})_{k\geqslant 1}$ est une série alternée, $(|u_{n,k}|)_{k\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers 0. D'après le critère spécial pour les séries alternées :

$$\forall N \in \mathbb{N}^\star\ ,\ \left|\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+n^2}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^N}{N^2+n^2}\right| \leqslant \frac{1}{N^2+n^2}$$

En particulier,

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+n^2}\right| \leqslant\leqslant \frac{1}{1^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+n^2}\right|$ converge et *a fortiori*, $\sum \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+n^2}\right)$ converge.

Ceci prouve l'existence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k}\right)$.

∗ Soit $k \in \mathbb{N}^\star$, $|u_{n,k}| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ donc par comparaison pour les séries à termes positifs, $(\sum u_{n,k})_{n\geqslant 1}$ est absolument convergente et donc convergente.

∗ Il nous reste donc à montrer que la série $\sum \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k}\right)$ converge et que sa somme est $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k}\right)$, c'est-à-dire il reste à montrer que :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k}\right)$$

Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} - \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k}\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{N} u_{n,k} - \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k}\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=N+1}^{+\infty} u_{n,k}\right|$$

Notez bien que la première permutation est une permutation entre somme finie et somme infinie : c'est simplement la linéarité de l'application qui, à une série convergente, associe sa somme. Par ailleurs, on a déjà montré que :

$$\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} u_{n,k}\right| \leqslant \frac{1}{(N+1)^2+n^2} \leqslant \frac{1}{N^2+n^2}$$

Il s'ensuit que $\sum \left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} u_{n,k}\right|$ converge et on en déduit donc que :

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=N+1}^{+\infty} u_{n,k}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} u_{n,k}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{N^2+n^2}$$

c'est-à-dire

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} - \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{N^2+n^2}$$

Or, a on aussi prouvé au début de cet exemple que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{N^2+n^2} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2N}$ donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{N^2+n^2} = 0$$

Il s'ensuit que :

$$\lim_{N\to+\infty} \left|\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} - \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k}\right| = 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k}$$

Remarques : *lorsque la famille n'est pas sommable (ou bien lorsque vous n'avez pas réussi à prouver qu'elle l'est), on essaye de prouver « à la main » que l'on peut permuter. Pour cela, il faut montrer que :*

- *pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $(\sum u_{p,q})_{q\in\mathbb{N}}$ *converge ;*
- $\displaystyle\sum\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$ *converge ;*
- *pour tout* $q \in \mathbb{N}$, $(\sum u_{p,q})_{p\in\mathbb{N}}$ *converge ;*
- *puis enfin, que :*

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{q=0}^{N}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \lim_{N\to+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=N+1}^{+\infty} u_{p,q} = 0$$

Pour le moment, la méthode principale que vous devez retenir est celle du « contrôle du reste », ce qui est typiquement le cas pour des séries alternées (comme dans l'exemple précédent). Dans le cours de mathématiques spéciales 1 (chapitre sur les séries de fonctions), on verra une autre méthode (le théorème de la double limite) permettant de justifier que :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=N+1}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty} \sum_{q=N+1}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} 0 = 0$$

Avant de faire tout cela, vérifier bien qu'on n'est pas dans le cas de l'exemple précédent, c'est-à-dire le cas où il suffit de retirer un nombre fini de valeurs de « p » ou « q » pour obtenir une famille sommable ! C'est bien plus rapide.
Enfin, lorsque la somme double est de la forme $\sum S_n$ *ou* $\sum R_n$ *(*S_n *et* R_n *désignant la somme partielle ou le reste d'une série convergente), mais la famille double n'est pas sommable, il est souvent plus rapide de faire une transformation d'Abel (voir l'annexe).*

5.6 Exercices

Exercice 5.6.1 Déterminer la nature des séries dont le terme général est donné ci-dessous :

(1) $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (2) $\cos\left(\frac{10}{n}\right)$ (3) $\sin(10\,e^{-n})$

(4) $\ln\left(\frac{1+n^2}{n^2}\right)$ (5) $\frac{\pi}{2} - \arctan(n)$ (6) $-\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

(7) $e^{\mathrm{ch}\,(1/n)} - e^{\cos(1/n)}$ (8) $\frac{n^\alpha}{n!}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ (9) $\dfrac{n!}{n^n}$

(10) $\exp(-n^2)$ (11) $\exp(-\sqrt{n})$ (12) $\exp(-n^\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

(13) $\left(1 + \dfrac{1}{\ln n}\right)^n$ (14) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (15) $e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

(16) $\left(n \sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} - \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$ (17) $\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}}$ (18) $\frac{(\ln n)^n}{n!}$

(19) $\arccos\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ (20) $\alpha^{\ln(\ln(n))}$ $(\alpha > 0)$ (21) $\alpha^{\sqrt{\ln n}}$ $(\alpha > 0)$

(22) $\left(\cos(\frac{1}{n})\right)^{n^\alpha}$ (23) $\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)$ (24) $\frac{(2n)!}{n\sqrt{n}}$

Exercice 5.6.2 Déterminer la nature des séries de terme général :

(a) $\dfrac{n^a}{\prod_{k=1}^n (1+a^k)}$ $(a > 0)$ (b) $(n!)^n \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2^k}}$ (c) $\left(1 - \frac{\ln n}{n^2}\right)^{(n \ln n)^\alpha}$

Exercice 5.6.3 Montrer que pour entier n, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$ est convergente puis déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \int_0^1 x^n \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5.6.4 Déterminer la nature des séries de terme général :

$$\frac{1}{n^\alpha}\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \;\;;\;\; a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}} \text{ (avec } a>0) \;\;;\;\; \frac{1}{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}$$

Exercice 5.6.5 On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k^2} e^{\frac{n}{k}}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, u_n est bien défini.
2. Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5.6.6 Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par $u_1 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{n}e^{-u_n}$.

Exercice 5.6.7 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $\alpha > 0$.

1. Montrer que $\sum u_n$, $\sum \ln(1+u_n)$, $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ et $\sum \int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha}$ sont de même nature.
2. Le résultat est-il encore vrai si on retire l'hypothèse $(u_n) \geqslant 0$?

Exercice 5.6.8 Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Discuter, suivant la valeur de $\alpha > 0$, la nature de la série $\sum \frac{u_n}{R_{n-1}^\alpha}$ où R_n désigne le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$.
2. On suppose que $\sum u_n$ diverge. Discuter, suivant la valeur de $\beta > 0$, la nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\beta}$ où S_n désigne la somme partielle d'indice n de $\sum u_n$.

Exercice 5.6.9 Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ admet une limite $\ell \in [0, +\infty]$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ en fonction de ℓ.

Exercice 5.6.10 Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. Montrer que la suite $(n^\alpha u_n)$ converge.
2. En déduire la nature de la série $\sum u_n$ en fonction de α.

Exercice 5.6.11 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Déterminer la nature de la série $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$.

Exercice 5.6.12 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Montrer que $(u_n) = o(\frac{1}{n})$.
2. Montrer que c'est faux si on ne suppose plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

Exercice 5.6.13 Prouver l'existence puis calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} \;;\; \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2-4} \;;\; \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right) \;;\; \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right) \quad (0 < \theta < \pi/2)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right) \;;\; \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

Indication : on pourra montrer que $\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right) = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

Exercice 5.6.14 Déterminer la nature des séries dont le terme général est donné ci-dessous :

(1) $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\ln(n)}$ (2) $\exp((-1)^n\frac{\ln(n)}{n})-1$ (3) $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin(x)e^{-\sqrt{\ln(x)}}\,\mathrm{d}x$

(4) $\sin(\pi e n!)$ (5) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+in^{\frac{1}{4}}}$ (6) $\dfrac{(-1)^n\ln(n)}{\sqrt{n}+\frac{\cos(n)}{\ln(n)}}$

(7) $\dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}+\cos(n)}$ (8) $\dfrac{(-1)^{E(\sqrt{n})}\cos(n^2)}{\sin^2(n)+\ln(n)+n^3}$ (9) $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$

Exercice 5.6.15 Soient $\alpha>0$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^\star$, $u_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k^\alpha}\right)$.

1. Étudier la convergence de la suite (u_n).
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 5.6.16 Soit pour $n\in\mathbb{N}^\star$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sqrt{k}$.

1. Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{2}$ (*on pourra étudier S_{2n} puis S_{2n+1}*).
2. Montrer que la suite $(S_n+S_{n+1})_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite $\ell>0$.
3. En considérant $S_{2k}^{-1}+S_{2k+1}^{-1}$, déterminer la nature de la série $\sum S_n^{-1}$.

Exercice 5.6.17 Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $\ell=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

1. Montrer que la suite de terme général $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$ converge. On rappelle que sa limite est notée γ et appelée constante d'Euler.
2. On pose pour $n\in\mathbb{N}^\star$, $b_n=\frac{\ln n}{n}$.
   (a) Quelle est la nature de la série $\sum b_n$. *Justifier la réponse.*
   (b) Démontrer que $B_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k \underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}(\ln n)^2$.
   (c) On pose alors pour $n\in\mathbb{N}^\star$, $u_n=B_n-\frac{1}{2}(\ln n)^2$. Démontrer que la suite (u_n) converge.
3. Justifier la convergence de la série $\sum(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$.
4. On note $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$.
   (a) Démontrer que pour tout entier $n\geqslant 1$, $S_{2n}=a_n\ln 2+u_n-u_{2n}-\dfrac{(\ln 2)^2}{2}$.
   (b) En déduire la valeur de $\ell=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

Exercice 5.6.18 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $[1,+\infty[$ dans lui-même. On veut montrer que :

$$\sum \frac{1}{f(n)} \text{ converge } \iff \sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2} \text{ converge}$$

1. Montrer que $\sum \frac{1}{f(n)}$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
3. Prouver que pour tout $x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} - \int_{f(1)}^{f(x)} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{f(x)} - \frac{1}{f(1)}$.
4. Montrer que la convergence d'une des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f^{-1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ implique que $\frac{1}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.
5. Conclure.

Exercice 5.6.19

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_{n+1} = o(u_n)$. Montrer que $\sum u_n$ est absolument convergente et que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
2. En déduire la nature de la série de terme général $n!\left[\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) - 1\right]$.

Exercice 5.6.20 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles convergentes et $\sum w_n$ une série réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$$

Que dire de $\sum w_n$? À quel théorème ce résultat vous fait-il penser ?

Exercice 5.6.21 Comparaison série-intégrale et application.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$. On suppose que f' est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star\ ,\ \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) En déduire que $\sum \left(\int_{n-1}^{n} f - f(n)\right)$ est absolument convergente.
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum \frac{\cos(\ln n)}{n}$ diverge.

Exercice 5.6.22 Soient $a > 0$ et $b > 0$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\left(\dfrac{1}{a^n + b^p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ soit sommable.

Exercice 5.6.23 Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. On pose pour $n \geqslant 2$:

$$v_n = \frac{1}{n\ln(n)\ln(n+1)} \sum_{k=1}^{n} u_k \ln(k+1)$$

Prouver que $\sum v_n$ converge.

Exercice 5.6.24 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs tel que $\sum u_n$ converge.

1. Prouver que $\sum \dfrac{u_n}{n(n+1)}$ converge.
2. Prouver l'existence de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{u_n}{n(n+1)}$ et exprimer sa valeur à l'aide de la somme de la série de terme général u_n.

Exercice 5.6.25 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

1. Établir que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$.
2. En déduire que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}$.

Exercice 5.6.26 Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et tout $(a, b, c) \in]0, +\infty[^3$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1+z^{na+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{nc}}{1-z^{na+b}}$$

Exercice 5.6.27 Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\zeta(4p+2)}{2p+1}$.

Exercice 5.6.28 Montrer que la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ converge et calculer sa somme.

5.7 Annexe

5.7.1 Transformation d'Abel et critère pour les séries trigonométriques

La transformation d'Abel est l'équivalent pour les suites de l'intégration par parties pour les fonctions. Il y a une analogie importante à garder à l'esprit :

Fonctions	Suites
fonction f	suite (u_n)
dérivée de f : fonction f'	« suite dérivée de (u_n) » : suite $\Delta(u_n) = (u_{n+1} - u_n)$
primitive de f : fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$	« suite primitive » : série $\displaystyle\sum u_n = (S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Compte tenu de cette analogie, il est logique de trouver un équivalent du théorème d'intégration par parties. Voici ce que vous devez retenir de la méthode.

Objectif :	• on veut étudier la nature d'une série de la forme $\sum u_n v_n$
Contexte :	• la série n'est pas absolument convergente ; • les sommes partielles de la série de terme général u_n sont bornées (attention, ceci ne veut pas dire que $\sum u_n$ converge) ; • le terme $v_{n+1} - v_n$ est « petit ».
Méthode :	• on remplace u_n par $S_n - S_{n-1}$ (avec $S_{-1} = 0$) et on découpe la somme en deux parties, puis on regroupe pour avoir une seule somme avec S_n en facteur.

On va appliquer cette méthode pour prouver le théorème 5.3.3.1 :

Théorème 5.3.3.1 : *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$.*

(i) Si $x \not\equiv 0\ [2\pi]$ (ou de façon équivalente $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$) alors :

$$\sum \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \sum \left|\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}\right| \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

(ii) Si $x \not\equiv 0\ [\pi]$ (ou de façon équivalente $x \notin \pi\mathbb{Z}$), alors :

$$\sum \frac{\sin(nx)}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \sum \left|\frac{\sin(nx)}{n^\alpha}\right| \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1} = e^{ix}\frac{e^{\frac{inx}{2}}2i\sin(\frac{nx}{2})}{e^{\frac{ix}{2}}2i\sin(\frac{x}{2})} = \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}e^{\frac{i(n+1)x}{2}}$$

D'où $|T_n(x)| \leqslant \dfrac{|\sin(\frac{nx}{2})|}{|\sin(\frac{x}{2})|} \leqslant \dfrac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$ et donc $(T_n(x))_{n\geqslant 1}$ est bornée.

• Montrons (i).

∗ Premier cas : $\alpha > 1$.
Dans ce cas $\left|\dfrac{\cos(nx)}{n^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ une série à termes positifs convergente d'après le critère de Riemann. Par comparaison, $\sum \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$ est absolument convergente (et donc convergente).

∗ Deuxième cas : $\alpha \leqslant 0$.
Dans ce cas, la suite $(\frac{\cos(nx)}{n^\alpha})$ ne tend pas vers 0 et $\sum \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

∗ Troisième cas : $0 < \alpha \leqslant 1$.
C'est ici que nous allons appliquer la méthode (appelée transformation d'Abel). Pour tout entier $n \geqslant 1$, en notant $T_0(x) = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^\alpha} &= \Re e\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\left(T_k(x) - T_{k-1}(x)\right)\right) \\
&= \Re e\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}T_k(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}T_{k-1}(x)\right) \\
&= \Re e\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}T_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha}T_k(x)\right)
\end{aligned}$$

En regroupant maintenant les termes, et sachant que $T_0(x) = 0$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^\alpha} = \Re e\left(\frac{T_n(x)}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) T_k(x)\right)$$

Or, on a montré que $(T_n(x))$ est bornée. Par suite,

$$\frac{T_n(x)}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{T_n(x)}{n^\alpha} = 0 \text{ (car } \alpha > 0)$$

et de même :

$$\left|\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) T_k(x)\right| \underset{k\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) \underset{k\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right)$$

Or, $\alpha + 1 > 1$ donc la série $\sum \frac{1}{k^{\alpha+1}}$ converge. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) T_k(x)$ est absolument convergente, *a fortiori* convergente.

On en déduit donc que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) T_k(x)\right)_{n\geqslant 1}$ converge et par conséquent, $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ converge car c'est la partie réelle de la somme de deux suites convergentes.

Finalement, on a montré que $\sum \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Par ailleurs, dans la preuve, on a montré que si $\alpha > 1$, alors cette série est absolument convergente. Réciproquement, si $\alpha \leqslant 1$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\frac{|\cos(nx)|}{n^\alpha} \geqslant \frac{|\cos(nx)|}{n} \geqslant \frac{\cos^2(nx)}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{\cos(2nx)}{2n}$$

* Si $x \in \pi\mathbb{Z}$, alors $\sum \frac{|\cos(nx)|}{n^\alpha} = \sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge puisque $\alpha \leqslant 1$;
* Si $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, alors d'après ce qui précède, $\sum \frac{\cos(2nx)}{n}$ converge et d'après le critère de Riemann, $\sum \frac{1}{n}$ converge. Alors $\sum(\frac{1}{2n} + \frac{\cos(2nx)}{2n})$ diverge. Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum \frac{|\cos(nx)|}{n^\alpha}$ diverge.

• Montrons (ii). Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

∗ De même qu'avant, si $\alpha > 1$, $\sum \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ est absolument convergente.

∗ Si $\alpha \leqslant 0$, puisque $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $\sum \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

∗ Si $\alpha \in]0, 1]$, le calcul précédent montre que pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha} = \Im m \left(\frac{T_n(x)}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) T_k(x) \right)$$

Or, d'après la preuve de la propriété (i), on a déjà montré que la suite $\left(\frac{T_n(x)}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) T_k(x) \right)_{n \geqslant 1}$ converge. Il s'ensuit que sa partie imaginaire converge, ce qui permet de conclure que $\sum \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ converge.

∗ La preuve du critère pour l'absolue convergence est identique et laissée en exercice. ⊠

Remarques :

- *notez bien que dans ce théorème, on suppose d'abord $x \not\equiv 0[2\pi]$ car dans ce cas, la série $\sum \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} = \sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann et le critère de convergence n'est pas du tout le même ;*
- *de même dans le second cas, si $x \equiv 0[\pi]$, alors $\sum \frac{\sin(nx)}{n^\alpha} = \sum 0$ est convergente quelle que soit la valeur de α ;*
- *dans la preuve, on a mis en place « l'intégration par parties » (c'est-à-dire la transformation d'Abel) avec le remplacement de e^{inx} par $T_n - T_{n-1}$. Plus que le théorème qu'on va énoncer juste après, c'est la méthode qu'il faut connaître.*

Plus généralement, on dispose des deux résultats suivants qui, combinés, donnent un outil important dans l'étude des séries.

Théorème 5.7.1.1 (Transformation d'Abel) *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) b_k = (a_n b_n - a_0 b_0) - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k)$$

Preuve :

C'est évident car :

$$\sum_{k=0}^{n-1} ((a_{k+1} - a_k) b_k + a_{k+1}(b_{k+1} - b_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k)$$

⊠

Dans le cas des séries, on reformule plutôt cette égalité sous la forme suivante :

Corollaire 5.7.1.2 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries complexes et soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles associées. Alors pour tout entier $n \geqslant 1$:*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_{n+1}V_n - \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)V_k$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer la transformation d'Abel (le théorème précédent) avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ b_k = u_k \ \text{ et } \ a_k = V_{k-1}$$

avec la convention que $V_{-1} = 0$ (c'est une somme vide).

⊠

Théorème 5.7.1.3 (Critère d'Abel) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On suppose que :*

(i) la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée ;*

(ii) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante de limite nulle.

Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Preuve :

On conserve les notations du corollaire précédent.

• Puisque $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $((u_{k+1}-u_k)V_k) = O(u_k - u_{k+1})$. Or, $\sum(u_k - u_{k+1})$ est une série à termes positifs (puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante) convergent (puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge). Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum(u_{k+1}-u_k)V_k$ converge.

• De même, $(u_{n+1}V_n) = O(u_{n+1}) = o(1)$ donc $(u_{n+1}V_n)$ converge (vers 0).

• D'après le corollaire précédent, on conclut donc que $(\sum_{k=0}^{n} u_k v_k)$ converge, c'est-à-dire $\sum u_n v_n$ converge.

⊠

Remarque : *on peut aussi remplacer la condition (ii) par les conditions « moins forte » $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $\sum |u_{n+1}-u_n|$ converge.*

Exercice 5.7.1.4 Soit $\sum u_n$ une série convergente. Montrer que $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.

5.7.2 Théorème d'associativité pour les familles sommables

Les théorèmes de Fubini sont en fait des cas particuliers d'un théorème un peu plus général : il s'agit du théorème d'associativité dont on va donner deux versions, une pour les familles positives puis une pour les familles quelconques.

Théorème 5.7.2.1 (Associativité) *Soit $u = (u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs. On suppose que $I = \bigsqcup_{\alpha\in K} I_\alpha$ où K est dénombrable. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $(u_i)_{i\in I}$ est sommable ;

(ii) pour tout $\alpha \in K$, $(u_i)_{i\in I_\alpha}$ est sommable et la famille $\left(\sum_{i\in I_\alpha} u_i\right)_{\alpha\in K}$ est sommable.

De plus, lorsque l'une des ces conditions équivalentes est satisfaite, on a alors :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{\alpha\in K}\left(\sum_{i\in I_\alpha} u_i\right)$$

Remarque : *notez que ceci généralise le théorème de Fubini pour les familles positives. En effet, il suffit de choisir $I = \mathbb{N}^2$, $K = \mathbb{N}$ et pour $p \in K$, $I_p = \{p\} \times \mathbb{N}$ (respectivement $I_p = \mathbb{N} \times \{p\}$).*

Preuve :

• Tout d'abord, pour $\alpha \in K$, I_α est aussi dénombrable puisque I l'est.

• Montrons que $(i) \Longrightarrow (ii)$.
On suppose que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. Par définition, on a alors :

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(I)\ ,\ \sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

∗ Soit $\alpha \in K$. Montrons que $(u_i)_{i\in I_\alpha}$ est sommable.
Soit $J \in \mathcal{P}_f(I_\alpha)$. Alors $J \in \mathcal{P}_f(I)$ et donc $\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.
Ce qui montre que l'ensemble $\left\{\sum_{i\in J} u_i\ ,\ J \in \mathcal{P}_f(I_\alpha)\right\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$. On conclut donc que la famille des nombres positifs $(u_i)_{i\in I_\alpha}$ est sommable.

∗ Notons $v_\alpha = \sum_{i\in I_\alpha} u_i$ pour $\alpha \in K$ (somme qui est bien définie d'après le point précédent). On veut montrer que $(v_\alpha)_{\alpha\in K}$ est sommable.

Soit J une partie finie de K. Pour $\alpha \in J$ fixé, soit $(J_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de I_α. Alors, pour tout entier n, $\bigcup_{\alpha\in J} J_n(\alpha)$ est une partie finie de I (c'est une réunion finie d'ensembles finis) donc :

$$\sum_{i\in \bigcup_{\alpha\in J} J_n(\alpha)} \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

Or, les ensembles I_α pour $\alpha \in K$ sont deux à deux disjoints donc :

$$\sum_{\alpha\in J} \sum_{i\in J_n(\alpha)} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

Or, pour $\alpha \in J$, la famille $(u_i)_{i\in I_\alpha}$ est sommable et $(J_n(\alpha))$ est une suite exhaustive de I_α. Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n(\alpha)} u_i = \sum_{i\in I_\alpha} u_i$$

Ainsi, chaque terme de l'inégalité précédente admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$. On peut donc passer à la limite, ce qui donne :

$$\sum_{\alpha\in J} \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n(\alpha)} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\alpha\in J} \left(\sum_{i\in I_\alpha} u_i \right) \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

Ceci étant vrai pour toute partie finie J de K, on conclut que :

- ▷ la famille $\left(\sum_{i\in I_\alpha} u_i\right)_{\alpha\in K}$ est sommable ;
- ▷ et de plus,

$$(\star) \quad : \quad \sum_{\alpha\in K} \left(\sum_{i\in I_\alpha} u_i \right) \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

• Montrons $(ii) \Longrightarrow (i)$.
On suppose donc que la propriété (ii) est vraie et on veut montrer que u est sommable.
Soit J une partie finie de I. Alors, il existe A une partie finie de K telle que :

$$J \subset \bigsqcup_{\alpha\in A} I_\alpha$$

Alors, $J \subset \bigsqcup_{\alpha\in A} J \cap I_\alpha$. Or, pour tout $\alpha \in A$, $J \cap I_\alpha$ est une partie finie de I_α et $(u_i)_{i\in I_\alpha}$ est sommable. Par conséquent,

$$\sum_{i\in J\cap I_\alpha} u_i \leqslant \sum_{i\in I_\alpha} u_i$$

Et ainsi,

$$\sum_{\alpha\in A}\sum_{i\in J\cap I_\alpha} u_i \leqslant \sum_{\alpha\in A}\left(\sum_{i\in I_\alpha} u_i\right)$$

Or, d'une part, $\bigsqcup_{\alpha\in A} J\cap I_\alpha$ est une union disjointe donc :

$$\sum_{i\in \bigsqcup_{\alpha\in A} J\cap I_\alpha} u_i = \sum_{\alpha\in A}\sum_{i\in J\cap I_\alpha} u_i$$

d'autre part, $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres positifs et $J \subset \bigsqcup_{\alpha\in A} J\cap I_\alpha$ donc :

$$\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in \bigsqcup_{\alpha\in A} J\cap I_\alpha} u_i$$

Et enfin, la famille $\left(\sum_{i\in I_\alpha} u_i\right)_{\alpha\in K}$ est sommable et A est une partie finie de K, donc :

$$\sum_{\alpha\in A}\left(\sum_{i\in I_\alpha} u_i\right) \leqslant \sum_{\alpha\in K}\left(\sum_{i\in I_\alpha} u_i\right)$$

Ceci permet donc de conclure que :

$$\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{\alpha\in K}\left(\sum_{i\in I_\alpha} u_i\right)$$

Ceci étant vrai pour toute partie finie J de I, on conclut que :

- ▷ la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable ;
- ▷ et de plus,

$$(\star\star) \quad : \quad \sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{\alpha\in K}\left(\sum_{i\in I_\alpha} u_i\right)$$

• On a donc montré que (i) et (ii) sont équivalents. De plus, si l'une des propriétés est vérifiée, alors les deux le sont et d'après $(\star)$ et $(\star\star)$, on a alors :

$$\sum_{\alpha\in K}\left(\sum_{i\in I_\alpha} u_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{\alpha\in K}\left(\sum_{i\in I_\alpha} u_i\right)$$

Ce qui prouve l'égalité voulue.

⊠

Théorème 5.7.2.2 (Associativité pour les familles quelconques) *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille (dénombrable) de nombres complexes. On suppose que $I = \bigsqcup_{\alpha\in K} I_\alpha$ où K est dénombrable. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $(u_i)_{i\in I}$ est sommable ;

(ii) pour tout $\alpha \in K$, $(|u_i|)_{i\in I_\alpha}$ est sommable et la famille $\left(\sum_{i\in I_\alpha} |u_i|\right)_{\alpha\in K}$ est sommable.

De plus, lorsque l'une des ces conditions équivalentes est satisfaite, on a alors :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{\alpha\in K}\left(\sum_{i\in I_\alpha} u_i\right)$$

Preuve :

• L'équivalence des deux propriétés est évidente : c'est une conséquence du théorème précédent pour les familles positives.

• On suppose que les conditions équivalentes sont vérifiées. Montrons l'égalité des sommes.

∗ Tout d'abord, puisque pour tout $\alpha \in K$, $(u_i)_{i\in I_\alpha}$ est sommable, la somme $\sum_{i\in I_\alpha} u_i$ est bien définie.

∗ D'après l'inégalité triangulaire et par continuité du module :

$$\forall \alpha \in K\ ,\ \left|\sum_{i\in I_\alpha} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I_\alpha} |u_i|$$

Or, $\left(\sum_{i\in I_\alpha} |u_i|\right)_{\alpha\in K}$ est sommable donc $\left(\sum_{i\in I_\alpha} u_i\right)_{\alpha\in K}$ l'est aussi.

∗ Soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de K. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{\alpha\in J_n}\sum_{i\in I_\alpha} u_i\right| = \left|\sum_{i\in I\setminus \bigsqcup_{\alpha\in J_n} I_\alpha} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I}|u_i| - \sum_{\alpha\in J_n}\sum_{i\in I_\alpha}|u_i|$$

et d'après le cas des familles positives, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{\alpha\in J_n}\sum_{i\in I_\alpha} |u_i| = \sum_{i\in I}|u_i|$.

Par suite, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{\alpha\in J_n}\sum_{i\in I_\alpha} u_i = \sum_{i\in I} u_i$, *i.e.* $\sum_{\alpha\in K}\sum_{i\in I_\alpha} u_i = \sum_{i\in I} u_i$. ⊠

Chapitre 6

Probabilités discrètes

Prérequis : dans tout ce chapitre, les notions suivantes sont supposées connues :

- le cours de probabilités sur un univers fini ;
- tout le cours sur les suites réelles ou complexes, les séries et les familles sommables ;
- images directes et réciproques et leurs propriétés : en particulier, opérations ensemblistes sur les images réciproques.

Aucune autre connaissance spécifique sur la notion de probabilité n'est supposée connue.

6.1 Notion de tribu et définition d'une probabilité

On rappelle les définitions et propriétés suivantes :

Rappels de cours : soit Ω un ensemble fini (non vide).

- **Définition :** un événement A est un sous-ensemble de Ω, c'est-à-dire $A \in \mathcal{P}(\Omega)$;
- **Propriétés :** Ω est un événement ; si A est un événement, alors $\overline{A} = \Omega \setminus A$ est aussi un événement ; si $A_1, \cdots, A_n$ sont des événements, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est un événement.
- **Définition :** une probabilité sur Ω est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :
  (i) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) \in [0,1]$;
  (ii) $P(\Omega) = 1$;
  (iii) $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $(A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B))$.
- **Propriété :** si P est une probabilité sur Ω, alors pour toutes parties $A_1, \cdots, A_n$ deux à deux disjointes,
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Si maintenant, on considère un ensemble quelconque, c'est-à-dire qui n'est plus nécessairement fini, on doit adapter (c'est-à-dire modifier) les définitions : il faudra rajouter des conditions de « compatibilité par passage à la limite ».
Dans la pratique, si on réalise une expérience aléatoire, on doit se donner une collection d'ensembles observables qui seront les événements : cette « collection d'événements » est ce qu'on appelle une tribu (ou σ-algèbre pour les anglo-saxons).

Définition 6.1.0.1 Soit Ω un ensemble. On dit qu'une partie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu si elle vérifie les 3 propriétés suivantes :

P1 : $\Omega \in \mathcal{T}$;

P2 : $\forall A \in \mathcal{T}$, $\overline{A} \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire) ;

P3 : $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable).

Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est alors appelé un espace probabilisable et les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les événements de Ω.

Exemple 6.1.0.2 On peut toujours choisir $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$: c'est une tribu sur Ω, appelée tribu discrète.

Exemple 6.1.0.3 Si $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, alors $\mathcal{T}$ est aussi une tribu sur Ω, appelé tribu grossière.

Remarque : *on peut se demander pourquoi on ne prend pas toujours $\mathcal{P}(\Omega)$ comme tribu, c'est-à-dire pourquoi toute partie de Ω n'est pas un événement. Tout d'abord, cet ensemble est « trop grand » et contient en général beaucoup trop d'éléments. Ensuite, l'idée derrière est qu'un événement doit correspondre à un « phénomène observable » mais tout n'est pas « observable » : c'est pour cela qu'on se restreint à une collection « plus petite ». Prenons un exemple : on lance un dé parfaitement équilibré et on continue de lancer le dé tant qu'on n'a pas obtenu un 6. Dès qu'on obtient un 6, on s'arrête. On peut alors considérer que l'univers Ω est constitué des suites finies (qui correspondent au cas où on obtient un 6 après un nombre fini de lancers) et des suites infinies (ce qui correspond au cas théorique où on n'obtient jamais le 6). Dans cet exemple, le singleton constitué par la suite finie $(1,1)$ n'est pas un événement. En fait, l'idée principale est que lorsqu'on réalise une expérience aléatoire, en fonction de ce qu'on cherche à analyser, on va privilégier certaines issues : ces issues possibles seront appelées les événements.*

Proposition 6.1.0.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Alors :*

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (A_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{T}^{n+1}$, $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{n} A_i \in \mathcal{T}$;

(iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$;

(iv) $\forall A, B \in \mathcal{T}$, $A \setminus B \in \mathcal{T}$.

Preuve :

• Montrons (i).
Par définition, $\Omega \in \mathcal{T}$. Or, $\mathcal{T}$ est stable par complémentaire donc $\emptyset = \overline{\Omega} \in \mathcal{T}$.

• Montrons (ii).
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(A_1, \cdots, A_n) \in \mathcal{T}^{n+1}$. On pose pour $i > n$, $A_i = \emptyset$. Alors, $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ et puisque $\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable,

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{T} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \bigcup_{i=0}^{n} A_i \in \mathcal{T}$$

• Montrons (iii).
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. Alors, $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. Par suite, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \in \mathcal{T}$, et $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}} \in \mathcal{T}$.

• Enfin, la preuve de (iv) est laissée en exercice.

⊠

Proposition 6.1.0.5 *Soient Ω un ensemble et $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille non vide de tribus de Ω. Alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une tribu de Ω.*

Preuve :

On pose $\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$. Montrons que c'est une tribu.

• Tout d'abord, puisque pour tout $i \in I$, $\Omega \in \mathcal{T}_i$, on en déduit que $\Omega \in \mathcal{T}$.

• Par ailleurs, soit $A \in \mathcal{T}$ et soit $i \in I$. On a $A \in \mathcal{T}_i$. Or, $\mathcal{T}_i$ est une tribu donc $\overline{A} \in \mathcal{T}_i$. Par suite, $\overline{A} \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$, c'est-à-dire $\overline{A} \in \mathcal{T}$.

• Enfin, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$. Soit $i \in I$. Alors, pour tout entier n, $A_n \in \mathcal{T}_i$ et puisque $\mathcal{T}_i$ est une tribu, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}_i$. Ceci étant vrai pour tout $i \in I$, on en déduit que $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i = \mathcal{T}$.

Ce qui prouve que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une tribu de Ω.

⊠

Corollaire 6.1.0.6 *Soient Ω un ensemble non vide et $X \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Alors, il existe une unique tribu $\mathcal{T}(X)$, minimale au sens de l'inclusion, contenant X. On dit que $\mathcal{T}(X)$ est la tribu engendrée par X.*

Preuve :

En effet, on pose $\mathcal{T}(X) = \bigcap_{\substack{\mathcal{T} \text{ tribu de } \Omega \\ X\subset\mathcal{T}}} \mathcal{T}$. Alors, $\mathcal{T}(X)$ est une intersection non vide de tribus de Ω (puisque $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu qui contient X), c'est donc une tribu d'après la proposition précédente.
De plus, si $\mathcal{T}_0$ est une tribu de Ω qui contient X, alors $\mathcal{T}(X) \subset \mathcal{T}_0$ par définition. Ce qui prouve que $\mathcal{T}(X)$ est minimale au sens de l'inclusion.
Enfin, si $\mathcal{T}_0$ est aussi minimale au sens de l'inclusion, l'inclusion précédente est une égalité, ce qui prouve l'unicité.

⊠

Remarque : *la définition posée est analogue à celle vue dans les espaces vectoriels pour l'espace vectoriel engendré par X (qui est défini comme l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant X).*

Exemple 6.1.0.7 Soient Ω un ensemble non vide, $A \subset \Omega$ et $X = \{A\}$. Alors, on peut vérifier (le faire) que $\mathcal{T}(X) = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.

Exercice 6.1.0.8 Soit Ω un univers quelconque non vide. Déterminer la tribu engendrée par $X = \{\{\omega\} \ , \ \omega \in \Omega\}$.

Remarque : *en général, on ne peut pas décrire de façon « simple » ce qu'est un élément de $\mathcal{T}(X)$, contrairement aux espaces vectoriels ou l'espace vectoriel engendré par X est caractérisé par l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.*

Définition 6.1.0.9 On appelle tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ la tribu engendrée par la collection des segments de $\mathbb{R}$. Cette tribu est notée $\mathcal{B}^1(\mathbb{R})$.

Remarques :

- *par définition, la tribu borélienne est la plus petite tribu de $\mathbb{R}$ qui contient tous les segments $[a, b]$ avec $a \leqslant b$;*
- *la tribu des boréliens contient tous les singletons puisque pour tout $a \in \mathbb{R}$, $[a, a] = \{a\}$;*
- *cette tribu contient aussi tous les intervalles ouverts $]a, b[$, avec $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ et donc aussi tous les intervalles de $\mathbb{R}$ (ouverts, fermés, ouverts à droite...). En effet, si a et b sont deux réels, alors en convenant que $[x, y] = \emptyset$ si $x > y$:*

$$]a, b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \ ; \ [a, +\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a, n] \ ; \ ]-\infty, b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} \left[-n, b - \frac{1}{n}\right]$$

- *on verra dans le cours de mathématiques spéciales 2 qu'en fait c'est aussi la tribu engendrée par les « ouverts » de $\mathbb{R}$ ou encore la tribu engendrée par les « parties fermées » de $\mathbb{R}$;*
- *on peut de même définir la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^\star$) : c'est la plus petite tribu de $\mathbb{R}^n$ qui contient tous les pavés, c'est-à-dire qui contient tous les ensembles de la forme :*

$$\prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$$

Cette tribu est notée $\mathcal{B}^n(\mathbb{R})$ et est importante lorsqu'on étudie des vecteurs aléatoires, en particulier pour des couples (X, Y) de variables aléatoires ;

- *à ce stade, il serait logique de se poser la question de savoir si $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}^1(\mathbb{R})$: la réponse est bien entendu non (sinon on ne donnerait pas un nom à cette tribu) mais la preuve dépasse de loin les objectifs de ce livre ;*
- *ce que vous devez retenir c'est que dans la pratique, « toutes les parties de $\mathbb{R}$ sont des boréliens » mais qu'en théorie c'est faux. La bonne nouvelle est qu'il est très difficile de construire des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des boréliens de $\mathbb{R}$;*
- *enfin, si tout ce qui est écrit avant vous paraît incompréhensible, et bien ce n'est pas grave... Pour ce chapitre, la notion de tribu et en particulier la notion de borélien est un cadre formel pour la théorie des probabilités. Ce cadre formel ne doit pas vous empêcher de comprendre l'essentiel : on manipule des événements qui doivent vérifier un certain nombre de règles de calculs, c'est tout.*

Définition 6.1.0.10 Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle mesure de probabilité sur $\mathcal{T}$ toute application $P : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(i) $\forall A \in \mathcal{T}$, $P(A) \in [0,1]$;

(ii) $P(\Omega) = 1$;

(iii) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, deux à deux incompatibles (ou disjoints),

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé.

Remarques :

- *tout d'abord, on peut remarquer que cette notion généralise celle vue dans le cadre des probabilités sur les ensembles finis. En effet, si Ω est un ensemble fini et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties deux à deux incompatibles est nécessairement stationnaire : à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geqslant N$, $A_n = \emptyset$.*
  Dans ce cas,
  $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=0}^{N} A_n \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = \sum_{n=0}^{N} P(A_n)$$
- *il faut interpréter la propriété (iii) comme une propriété de continuité. En clair, si les A_n sont des événements deux à deux incompatibles :*
  $$P\left(\lim_{n\to+\infty} \bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(A_k) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigsqcup_{k=0}^{n} A_k\right)$$

Exemple 6.1.0.11 Si on se donne Ω, muni de la tribu discrète $\mathcal{P}(\Omega)$, et un élément $\omega_0 \in \Omega$, alors l'application :

$$\begin{array}{rcl} \delta_{\omega_0} : \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \omega_0 \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

est une mesure de probabilité appelée mesure de Dirac en ω_0. En effet,

- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\delta_{\omega_0}(A) \in \{0,1\} \subset [0,1]$;
- $\delta_{\omega_0}(\Omega) = 1$ (car $\omega_0 \in \Omega$) ;
- enfin, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de Ω deux à deux disjointes, alors :
  - soit $\omega_0 \in \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et dans ce cas, il existe un unique $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\omega_0 \in A_{n_0}$. Par suite, $\delta_{\omega_0}(A_n) = \delta_{n,n_0}$ et ainsi : $\delta_{\omega_0}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{\omega_0}(A_n)$;
  - ou bien $\omega_0 \notin \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et dans ce cas, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\omega_0 \notin A_n$ et $\delta_{\omega_0}(A_n) = 0$. Il s'ensuit que : $\delta_{\omega_0}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{\omega_0}(A_n)$.

Proposition 6.1.0.12 *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Alors,*

(i) $P(\emptyset) = 0$;

(ii) si $n \in \mathbb{N}$ *et* $A_0, \cdots, A_n$ *sont des événements deux à deux incompatibles, alors :*

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$$

(iii) pour tout $A \in \mathcal{T}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

(iv) pour tout $(A, B) \in \mathcal{T}^2$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

(v) si $A, B \in \mathcal{T}$ *et* $A \subset B$, *alors :* $P(A) \leqslant P(B)$ *et* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Preuve :

• Montrons (i).
On pose $A_0 = \Omega$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geqslant 1$. Alors (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, deux à deux incompatibles. Par suite,

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} P(\emptyset)$$

Il s'ensuit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(\emptyset) = 0$. Or, par définition d'une probabilité, $P(\emptyset) \geqslant 0$.
Il s'ensuit que $0 \leqslant P(\emptyset) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} P(\emptyset) = 0$, c'est-à-dire $P(\emptyset) = 0$.

• Pour (ii), on pose $A'_k = A_k$ si $0 \leqslant k \leqslant n$ et $A'_k = \emptyset$ sinon. Alors $(A'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints. Sachant que $P(\emptyset) = 0$ d'après (i), on obtient (ii).

• Les preuves des autres propriétés sont identiques à celles vues dans le cadre des univers finis. ⊠

Théorème 6.1.0.13 (de la limite monotone) *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.*

(i) Pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, on a :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

(ii) Pour toute suite décroissante $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, on a :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$$

Preuve :

• Montrons (i).
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}$. On peut commencer par remarquer que l'énoncé a un sens puisque $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.
L'idée est de se ramener à une suite (A'_n) d'événements deux à deux incompatibles telle que pour tout entier n, $\bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigcup_{k=0}^{n} A'_k$. Pour cela, on définit la suite (A'_n) par $A'_0 = A_0$ et pour $n \geqslant 1$, $A'_n = A_n \setminus A_{n-1}$.
Tout d'abord, il est clair que si $i \neq j$, $A'_i \cap A'_j = \emptyset$. En effet, si $i < j$, alors $A'_i \subset A_i \subset A_{j-1}$ et $A'_j = A_j \setminus A_{j-1} = A_j \cap \overline{A_{j-1}}$ donc $A'_i \cap A'_j = \emptyset$.
Par ailleurs, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \bigcup_{k=0}^{n} A_k = A_n$. Si $x \in A_0$, alors $x \in A'_0 \subset \bigcup_{k=0}^{n} A'_k$. Sinon, l'ensemble $\{k \in [\![0, n]\!] \,/\, x \notin A_k\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus grand élément : notons le p. Alors $p < n$ puisque $x \in A_n$ et par définition, $x \notin A_p$ mais $x \in A_{p+1}$. Par suite, $x \in A_{p+1} \setminus A_p = A'_{p+1} \subset \bigcup_{k=0}^{n} A'_k$.
On a alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A'_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A'_n)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) &= \lim_{n\to+\infty} \left(P(A_0) + \sum_{k=1}^{n} (P(A_k) - P(A_{k-1}))\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} P(A_n) \end{aligned}$$

• Montrons (ii).
Si (B_n) est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $(\overline{B_n})$ est une suite croissante. D'après (i) et les propriétés des probabilités :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &= 1 - P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}\right) \\ &= 1 - \lim_{n\to+\infty} P(\overline{B_n}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(1 - P(\overline{B_n})\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} P(B_n) \end{aligned}$$

⊠

Corollaire 6.1.0.14 *Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements. Alors :*

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

6.2 Mesure de probabilité conditionnelle et formule des probabilités totales

Théorème 6.2.0.1 (Définition) *Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $B \in \mathcal{T}$ un événement tel que $P(B) \neq 0$. Alors l'application :*

$$\begin{array}{rccc} P_B & : & \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & A & \longmapsto & \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{array}$$

est une mesure de probabilité, appelée probabilité conditionnelle sachant B. Cette application est aussi notée $P(.|B)$ (autrement dit, pour $A \in \mathcal{T}$, $P_B(A) = P(A|B)$ et on dit probabilité de A sachant B).

Preuve :

La preuve est immédiate et est laissée en exercice. ⊠

Corollaire 6.2.0.2 *Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, alors :*

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$$

Théorème 6.2.0.3 (Formule des probabilités totales) *Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements vérifiant :*

(i) $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $(i \neq j \Longrightarrow B_i \cap B_j = \emptyset)$ *(les événements sont deux à deux incompatibles) ;*

(ii) $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \Omega$ *;*

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(B_n) > 0$.

Alors, pour tout événement $A \in \mathcal{T}$, $P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) \times P(A|B_n)$.

Remarques :

- *cette formule est ce qu'on utilise quand on fait un calcul de probabilité à l'aide d'un arbre de probabilité ;*
- *on peut remplacer (ii) par la condition moins forte* $P\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = 1$.

Preuve :

Soit $A \in \mathcal{T}$. On a alors, compte tenu des hypothèses (i) et (ii),

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \right) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap B_n$$

Or, P est une mesure de probabilité et la suite $(A \cap B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles. Par suite,

$$P(A) = P\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap B_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A \cap B_n)$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $P(B_n) \neq 0$, $P(A \cap B_n) = P(B_n) \times P(A|B_n)$. En remplaçant, on obtient donc la formule des probabilités totales, à savoir :

$$P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) \times P(A|B_n)$$

⊠

Remarque : *si on suppose seulement que* $P(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 1$*, on conclut en remarquant qu'en notant* $B = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ *:*

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

et par croissance de P*,* $0 \leqslant P(A \cap \overline{B}) \leqslant P(\overline{B}) = 0$*.*

Théorème 6.2.0.4 (Formule de Bayes) *Soient* $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé.*

(i) Si A *et* B *sont de probabilités non nulles, alors* $P(A|B) = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$*.*

(ii) Plus généralement, si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'événements deux à deux incompatibles et de probabilités non nulles et de réunion égale à l'univers, et si* A *est aussi un événement de probabilité non nulle, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n) \times P(B_n)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(B_k) \times P(A|B_k)}$$

Preuve :

• (i) est une conséquence du corollaire 6.2.0.2.

• Pour (ii), avec les hypothèses données, on sait déjà d'après (i) que pour $n \in \mathbb{N}$, $P(B_n|A) = \dfrac{P(A|B_n)P(B_n)}{P(A)}$. Ensuite, il suffit de remplacer $P(A)$ par le calcul donné par la formule des probabilités totales. ⊠

6.3 Variable aléatoire réelle et loi de probabilité

Définition 6.3.0.1 Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}) \ , \ X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$$

L'inconvénient de cette définition est qu'on ne possède pas de représentation simple d'un borélien. On va donc admettre le résultat suivant (qui est assez logique puisque les boréliens sont engendrés par les segments) qui donne une caractérisation « plus simple ». Le lecteur plus curieux pourra consulter le cours de mathématiques spéciales 2 où cette propriété est prouvée et d'autres notions sur les variables aléatoires sont introduites.

Théorème 6.3.0.2 (Admis) *Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable et X une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) X est une variable aléatoire réelle ;

(ii) pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $X^{-1}([a, b]) \in \mathcal{T}$.

De même, on va admettre les règles usuelles de calcul avec les variables aléatoires.

Proposition 6.3.0.3 (Admis) *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisé.*

(i) L'ensemble des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre. Autrement dit, si $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des variables aléatoires et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $X + Y$, λX, $X \times Y$ sont encore des variables aléatoires.

(ii) Si X est une variable aléatoire sur Ω et si X ne s'annule pas sur Ω, alors $\frac{1}{X}$ est aussi une variable aléatoire.

(iii) Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T})$, alors $|X|$, $\sup(X, Y)$ et $\inf(X, Y)$ sont aussi des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Remarques :

- *en particulier, toute application constante de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle ;*
- *toute combinaison linéaire de variables aléatoires (définies sur un même espace probabilisé) est une variable aléatoire ;*
- *en particulier, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace*

probabilisé, et si on pose pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \ ; \ M_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \ ; \ m_n = \min_{1\leqslant k\leqslant n} X_k$$

alors S_n, M_n et m_n sont des variables aléatoires.

Exercice 6.3.0.4 Montrer que si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$, alors λX (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) et $|X|$ sont des variables aléatoires réelles.

Notations et abréviations :

- dans le cadre des probabilités, on dira souvent variable aléatoire au lieu de variable aléatoire réelle et on écrira « soit X une v.a.r. » ou bien « soit X une v.a. » ;
- si X est une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{T})$, on utilise les notations suivantes :

$$X^{-1}([a,b]) = \{X \in [a,b]\} \quad \text{ou encore} \quad X^{-1}([a,b]) = \{a \leqslant X \leqslant b\}$$

De même,

$$X^{-1}(]-\infty, a]) = \{X \leqslant a\}$$

Vous trouverez aussi souvent l'écriture $X^{-1}(]-\infty, a]) = (X \leqslant a)$ dans les ouvrages de probabilités. C'est une notation moins lourde mais qui peut induire en erreur. Je vous conseille de toujours noter avec les accolades $\{.\}$ pour vous rappeler qu'il s'agit bien d'un ensemble.

Exemple 6.3.0.5 Si Ω est un univers fini (non vide) et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle. On retrouve donc, dans le cas d'un univers fini avec pour tribu $\mathcal{P}(\Omega)$, la définition de variable aléatoire que vous aviez apprise : c'est une application de Ω dans $\mathbb{R}$;

Exemple 6.3.0.6 En revanche, si Ω est non vide et $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, alors les variables aléatoires de Ω dans $\mathbb{R}$ sont exactement les applications constantes.

Remarque : *dans la pratique, quand on réalise une expérience aléatoire, on « admet » que le phénomène que l'on veut observer est bien une variable aléatoire au sens mathématique et il est en fait assez rare de préciser l'univers de départ. Par exemple,*

- *la durée de vie d'un élément radioactif (c'est-à-dire le temps au bout duquel il se désintègre) est une variable aléatoire réelle ;*
- *lorsqu'on réalise une « marche aléatoire », la position après n itérations est une variable aléatoire ;*
- *si on lance un dé équilibré autant de fois que nécessaire pour obtenir une première fois « pile », alors l'application qui associe le nombre de lancer nécessaire est une variable aléatoire.*

Théorème 6.3.0.7 (Définition) *Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle. Alors l'application P_X définie par :*

$$\forall I \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}) \ , \ P_X(I) = P(X^{-1}(I))$$

est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}))$. Cette mesure est appelée la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Preuve :

• Tout d'abord, on peut noter que P_X est bien une application bien définie de l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (puisque pour tout borélien I, $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$) et que de plus, pour tout borélien I, $P_X(I) \in [0,1]$ (puisque P est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$).

• Par ailleurs, $P_X(\mathbb{R}) = P(\{X \in \mathbb{R}\}) = P(\Omega) = 1$.

• Enfin, soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boréliens deux à deux incompatibles. On a alors :

$$X^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(I_n) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(I_n)$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_X\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\Big) &= P\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(I_n)\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X^{-1}(I_n)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_X(I_n) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que P_X est bien une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}))$.$\boxtimes$

Remarques : *la notion de loi de probabilité est absolument essentielle pour deux raisons.*

- *Tout d'abord, on peut noter que pour toute mesure de probabilité P_0 sur l'ensemble des boréliens, il existe au moins un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et une variable aléatoire réelle X définie sur Ω tels que $P_X = P_0$ (il suffit de choisir $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}^1(\mathbb{R})$ et $X = Id_{\mathbb{R}}$).*
- *On peut donc parler de variable aléatoire de loi P_X sans préciser $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. L'étude de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}), P_X)$ est alors faite de façon « indépendante » (c'est-à-dire sans tenir compte de la façon dont X a été définie) et provient des valeurs observées de X. Toutes les principales informations probabilistes sur X sont données par la loi P_X.*

6.4 Indépendance d'événements ou de variables aléatoires

Dans ce paragraphe, on rappelle les principales définitions et propriétés élémentaires concernant l'indépendance (notions déjà étudiées dans le cadre des univers finis).

Définition 6.4.0.1 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On dit que deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. On note alors $A \perp B$.

Corollaire 6.4.0.2 *Si* $P(B) > 0$ *alors :* $A \perp B \iff P(A|B) = P(A)$.

Définition 6.4.0.3 On dit qu'une famille quelconque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements sont mutuellement indépendants si :

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \ , \ P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j)$$

⚠ **Attention :** la notion d'indépendance n'est pas aussi simple à manipuler que ce qu'on aurait pu espérer.

- $A \perp B$ et $A \perp C$ n'entraînent pas forcément $A \perp (B \cap C)$;
- bien que A, B et C soient deux à deux indépendants, ils ne sont pas forcément mutuellement indépendants : on n'a pas forcément $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$.

Autrement dit, la notion d'événements mutuellement indépendants est bien différente de la notion d'événements deux à deux indépendants.

Exercice 6.4.0.4 Si on lance deux dés à six faces (les lancers sont indépendants) parfaitement équilibrés, et si on note A l'événement « le premier dé est pair », B « le second dé est pair » et C « les deux dés ont la même parité ». Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Définition 6.4.0.5 On dit que deux variables aléatoires X et Y, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, sont indépendantes si, pour tous boréliens A et B, on a :

$$P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\}) \times P(\{Y \in B\})$$

Puisque les boréliens sont engendrés par les segments, on peut montrer la proposition suivante (la démonstration étant un peu technique, on admet le résultat).

Proposition 6.4.0.6 *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) X et Y sont indépendantes ;

(ii) $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $P(\{X \in [a,b]\} \cap \{Y \in [c,d]\}) = P(\{X \in [a,b]\}) \times P(\{Y \in [c,d]\})$.

Définition 6.4.0.7 Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. indépendantes (ou mutuellement indépendantes) si pour toute partie finie $J \subset \mathbb{N}$, et toute famille $(B_j)_{j\in J}$ de boréliens, on a :

$$P\left(\bigcap_{j\in J} \{X_j \in B_j\}\right) = \prod_{j\in J} P(\{X_j \in B_j\})$$

Proposition 6.4.0.8 *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Alors la suite (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes si et seulement si :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall B_0, \cdots, B_n \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}) \ , \ P\left(\bigcap_{i=0}^{n} \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i=0}^{n} P(\{X_i \in B_i\})$$

Preuve :

Le sens direct est évident puisque pour tout entier n, $[\![0,n]\!]$ est une partie finie de $\mathbb{N}$. Pour la réciproque, si J est une partie finie de $\mathbb{N}$, alors J est majorée : soit n un majorant de J. On applique alors la propriété avec $B_i = \mathbb{R}$ si $i \in [\![0,n]\!] \setminus J$.

⊠

Comme pour le cas de deux variables aléatoires, on peut montrer que :

Proposition 6.4.0.9 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ;

(ii) pour tout entier n, pour toute famille $([a_i, b_i])_{0\leqslant i\leqslant n}$ de segments de $\mathbb{R}$, on a :

$$P\left(\bigcap_{i=0}^{n} \{X_i \in [a_i, b_i]\}\right) = \prod_{i=0}^{n} P(\{X_i \in [a_i, b_i]\})$$

6.5 Définition d'une probabilité discrète

Théorème 6.5.0.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un univers probabilisable et soit $\omega_0 \in \Omega$. Alors l'application :*

$$\begin{array}{rccl} \delta_{\omega_0} : & \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \delta_{\omega_0}(A) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si\ \omega_0 \in A \\ 0 & sinon \end{array} \right. \end{array}$$

est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ appelée mesure de Dirac en ω_0.

Preuve :

La démonstration est identique à celle de l'exemple 6.1.0.11, en remplaçant $\mathcal{P}(\Omega)$ par $\mathcal{T}$ ici.

⊠

Remarque : *on retrouve donc la définition (et la preuve) du Dirac lorsque l'univers Ω est un univers fini et $\mathcal{T}$ la tribu discrète.*

Dans le cas des univers finis, vous avez beaucoup utilisé qu'une combinaison « convexe » (une combinaison linéaire dont les coefficients sont positifs et de somme 1) de Dirac est une mesure de probabilité. Ceci se généralise de la façon suivante.

Théorème 6.5.0.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable et soit I un ensemble dénombrable. On se donne $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de Ω. On suppose que :*

(i) $\forall i \in I\ ,\ \alpha_i \geqslant 0$;

(ii) la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} \alpha_i = 1$.

Alors l'application $P = \sum_{i\in I} \alpha_i \delta_{x_i}$ est une mesure de probabilité sur l'espace $(\Omega, \mathcal{T})$.

Preuve :

• Montrons pour commencer que P est bien définie et à valeurs dans $[0, 1]$.

Soit $A \in \mathcal{T}$ un événement. Pour tout $i \in I$, $0 \leqslant \delta_{x_i}(A) \leqslant 1$. Par suite, pour toute partie finie $J \subset I$, on a :

$$\sum_{i\in J} \alpha_i \delta_{x_i}(A) \leqslant \sum_{j\in J} \alpha_i \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i = 1$$

On en déduit que la famille $(\alpha_i\delta_{x_i}(A))_{i\in I}$ est une famille de nombres positifs sommable et :

$$0 \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i\delta_{x_i}(A) \leqslant 1$$

Ce qui prouve que $P(A)$ est bien défini (la somme infinie est bien définie) et $P(A) \in [0,1]$.

• Prenons $A = \Omega$. On a alors :

$$P(\Omega) = \sum_{i\in I} \alpha_i\delta_{x_i}(\Omega) = \sum_{i\in I} \alpha_i = 1$$

• Enfin, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. On a alors :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{i\in I} \alpha_i\delta_{x_i}\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{i\in I}\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_i\delta_{x_i}(A_n)$$

Soit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et considérons la famille double $(\alpha_i\delta_{x_i}(A_n))_{(i,n)\in I\times\mathbb{N}}$.

* $(\alpha_i\delta_{x_i}(A_n))_{(i,n)\in I\times\mathbb{N}}$ est une famille de réels positifs.
* Soit $i \in I$. Puisque δ_{x_i} est une mesure de probabilité, la famille $(\alpha_i\delta_{x_i}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_i\delta_{x_i}(A_n) = \alpha_i\delta_{x_i}(A)$$

* Enfin, la famille $(\alpha_i\delta_{x_i}(A))_{i\in I}$ est sommable (d'après le premier point).

Par suite, la famille double est sommable et on peut permuter les sommes :

$$P(A) = \sum_{i\in I}\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_i\delta_{x_i}(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in I} \alpha_i\delta_{x_i}(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$

Ce qui prouve que P est une mesure de probabilité. ⊠

Définition 6.5.0.3 Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle mesure de probabilité discrète sur Ω toute mesure de probabilité de la forme précédente.

Remarque importante : *par hypothèse I est dénombrable. Si I est fini non vide, on dit que P est une mesure de probabilité finie. Sinon, si I est infini, on sait qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans I. Par suite, $(\alpha_i)_{i\in I} = (\alpha_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. On peut donc remplacer I par $\mathbb{N}$. C'est ce qu'on fera par la suite. Lorsque I est fini, c'est encore vrai puisqu'il suffit de poser $\alpha_n = 0$ à partir d'un certain rang.*

6.6 Variables aléatoires discrètes

Définition 6.6.0.1 On dit qu'une variable aléatoire réelle est discrète si P_X est une mesure de probabilité discrète.

Exemple 6.6.0.2 Une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ est une variable aléatoire discrète (en fait finie). Je vous rappelle que cette loi est notée $\mathcal{B}(1,p)$ et que dans ce cas :

$$P_X = \mathcal{B}(1,p) = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$$

Autrement dit,

$$P(\{X=1\}) = p \text{ et } P(\{X=0\}) = 1-p$$

Exemple 6.6.0.3 Une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in [0,1]$ est une v.a.r. discrète. Je vous rappelle que dans ce cas :

$$P_X = \mathcal{B}(n,p) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$$

Autrement dit, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P(\{X=k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Exemple 6.6.0.4 On lance une pièce (avec probabilité p d'obtenir pile) jusqu'à obtenir une première fois pile. La variable aléatoire X qui donne le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pile est une variable aléatoire discrète.

Proposition 6.6.0.5 *Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega)$ soit dénombrable. Alors X est une variable aléatoire discrète. Plus précisément,*

(i) Si $X(\Omega) = \{x_0, \cdots, x_n\}$ est fini, alors P_X est discrète finie :

$$P_X = \sum_{k=0}^{n} P(\{X = x_k\})\delta_{x_k}$$

(ii) Si $X(\Omega) = \{x_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$, alors P_X est discrète et :

$$P_X = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(\{X = x_n\})\delta_{x_n}$$

Preuve :

Traitons le cas où $X(\Omega)$ est infini. Montrons que :

$$P_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(\{X = x_n\})\delta_{x_n}$$

Soit B un borélien de $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} P_X(B) &= P(\{X \in B\}) \\ &= P\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{X \in (B \cap \{x_n\})\}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(\{X \in (B \cap \{x_n\})\}) \end{aligned}$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, $\{X \in (B \cap \{x_n\})\} = \begin{cases} \{X = x_n\} & \text{si } x_n \in B \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$.

Par suite,

$$\begin{aligned} P(\{X \in (B \cap \{x_n\})\}) &= \begin{cases} P(\{X = x_n\}) & \text{si } \delta_{x_n}(B) = 1 \\ P(\emptyset) & \text{si } \delta_{x_n}(B) = 0 \end{cases} \\ &= P(\{X = x_n\}) \times \delta_{x_n}(B) \end{aligned}$$

D'où le résultat en remplaçant dans l'expression de $P_X(B)$. ⊠

Remarques :

- *on retrouve que toute variable aléatoire sur un univers fini est discrète (finie). Les lois usuelles étudiées dans le cadre des univers finis sont donc des cas particuliers de variable discrète ;*
- *une variable aléatoire peut être discrète même si Ω n'est pas dénombrable (par exemple, lorsque X est constante) ou $X(\Omega)$ n'est pas dénombrable (par exemple $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}^1(\mathbb{R})$, $P = \delta_0$ et $X = Id_{\mathbb{R}}$). Autrement dit, la condition sur Ω ou $X(\Omega)$ est suffisante mais pas nécessaire pour que X soit discrète. Ceci étant dit, dans la pratique, lorsqu'on travaillera avec des v.a.r. discrètes, on sera toujours dans le cas où $X(\Omega)$ est dénombrable, voire même Ω dénombrable.*

Théorème 6.6.0.6 (Loi de Poisson) *Soit $\lambda > 0$. Alors l'application :*

$$\pi_\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\delta_n$$

est une mesure de probabilité discrète (infinie) sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}))$, appelée loi de Poisson de paramètre λ.

Preuve :

Il est clair que pour tout entier n, $\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \geqslant 0$. De plus, la série de terme général $\frac{\lambda^n}{n!}$ est convergente et sa somme est e^{λ}. Par suite,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = 1$$

Ce qui prouve que π_λ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}))$. ⊠

Notation : on note souvent $\mathcal{P}(\lambda)$ la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Définition 6.6.0.7 On dit qu'une variable aléatoire réelle suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si $P_X = \pi_\lambda$. On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Théorème 6.6.0.8 (Loi géométrique) *Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Alors l'application :*

$$G(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1}\delta_n$$

est une mesure de probabilité discrète (infinie) sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}))$, appelée loi géométrique de paramètre p.

Preuve :

C'est une conséquence directe du théorème 6.5.0.2 puisque la famille $(pq^n)_{n\geqslant 1}$ est une famille sommable de nombres positifs et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

⊠

Remarques :

- *en toute rigueur, on peut aussi choisir $p = 1$ mais dans ce cas, on retrouve une mesure de Dirac car $G(1) = \delta_1$ et on ne parle pas de loi géométrique dans ce cas ;*
- *attention, pour $p = 0$, ce n'est pas une mesure de probabilité car tous les termes pq^{n-1} sont nuls (et la somme ne vaut donc pas 1) ;*
- *les lois géométriques sont utilisées pour modéliser les « temps d'arrêt » : on répète une épreuve de Bernoulli jusqu'à obtenir un succès, la variable aléatoire qui donne le nombre de tirages nécessaires suit une loi géométrique.*

Théorème 6.6.0.9 (Transformation de v.a.r. discrète) *Soit X une v.a.r discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable. Alors, pour toute fonction g définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$ et à valeurs réelles, l'application $Y = g \circ X$ est une variable aléatoire discrète. De plus, si $P_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$, alors :*

$$P_Y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{g(x_n)}$$

Preuve :

Notons $P_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$.

• Montrons pour commencer que Y est une variable aléatoire réelle.
Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ $(a < b)$. Alors :

$$Y^{-1}([a,b]) = \{w \in \Omega \ / \ g(X(\omega)) \in [a,b]\} = \{w \in \Omega \ / \ X(\omega) \in g^{-1}([a,b])\}$$

Par suite, en notant $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in g^{-1}([a,b])\}$, on a :

$$Y^{-1}([a,b]) = \bigcup_{n\in A} X^{-1}(\{x_n\})$$

Or, X est une variable aléatoire donc pour tout entier n, $X^{-1}(\{x_n\}) \in \mathcal{T}$ et la réunion précédente est dénombrable (puisque A est une partie de $\mathbb{N}$). Par conséquent, $Y^{-1}([a,b]) \in \mathcal{T}$, prouvant ainsi que Y est une variable aléatoire.

• Ensuite, on constate que pour tout entier n et tout borélien B,

$$\delta_{x_n}(g^{-1}(B)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_n \in g^{-1}(B) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } g(x_n) \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{g(x_n)}(B)$$

On en déduit donc que :

$$P_Y(B) = P(\{g \circ X \in B\}) = P_X(g^{-1}(B)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}(g^{-1}(B))$$

c'est-à-dire

$$P_Y(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{g(x_n)}(B)$$

⊠

Remarque : *si X est discrète mais on ne suppose plus que $X(\Omega)$ est dénombrable, on ne peut plus prendre une fonction g quelconque. Pour obtenir une variable aléatoire, on met la condition g « mesurable », c'est-à-dire que l'image réciproque par g de tout borélien est un borélien. Toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est automatiquement mesurable donc en particulier, le théorème s'appliquera lorsque g est continue. Ceci est abstrait. Dans la pratique, on sera toujours dans le cas où $X(\Omega)$ est dénombrable et donc on ne se posera pas ces questions sur la « régularité » de g.*

6.7 Espérance, variance et moments

Définition 6.7.0.1 Soit X une variable aléatoire discrète, de loi

$$P_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$$

On dit X admet une espérance mathématique si la série de terme général $\alpha_n x_n$ est absolument convergente. Dans ce cas, on appelle espérance mathématique de X, le nombre $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x_n$$

Remarques :

- *dans cette écriture, on n'a pas du tout supposé que les x_n sont distincts ! La seule hypothèse qui est sous-entendue dans la phrase « de loi $P_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$ » est que la famille $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille sommable de nombres positifs dont la somme vaut 1 ;*
- *si X admet une espérance mathématique, la famille $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable (puisque la série est absolument convergente). Il s'ensuit que si on permute les termes, la valeur de la somme est la même. De même, si on note $(y_i)_{i\in I}$ les valeurs distinctes prises par X et β_i les probabilités associées, on a aussi $P_X = \sum_{i\in I} \beta_i \delta_{y_i}$. Mais alors :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x_n = \sum_{i\in I} \left(\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ x_n = y_i}} \alpha_n \right) y_i = \sum_{i\in I} \beta_i y_i$$

Par conséquent, l'espérance de X ne dépend pas de l'écriture de P_X : elle ne dépend que de X. C'est pour cette raison qu'on impose l'hypothèse de sommabilité dans la définition, plutôt que la seule convergence de la série.

Exemple 6.7.0.2 Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors X admet une espérance (la série est en fait une somme finie) et

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

Remarque : *plus généralement, comme dans l'exemple précédent, on montre que toute variable aléatoire discrète finie admet une espérance et on retrouve la définition que vous aviez vue dans le cadre des univers finis.*

Exemple 6.7.0.3 Si $X \hookrightarrow G(p)$ avec $p \in]0,1[$, alors X admet une espérance car la série à termes positifs $\sum npq^{n-1}$ converge (et donc est absolument convergente) et :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1} = p\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

Pour les détails des calculs, voire la preuve de la proposition 6.7.0.14.

Théorème 6.7.0.4 (Admis) *L'espérance est linéaire, c'est-à-dire que pour toutes variables aléatoires discrètes X et Y définies sur un même univers probabilisé, et pour toutes constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si X et Y admettent une espérance, alors $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et :*

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

Remarque : *remarquez que le souci ici est que la connaissance des lois de X et de Y ne permet pas de déterminer la loi de $X+Y$. On ne peut donc pas, avec la définition donnée, vérifier si $X+Y$ admet ou non une espérance puisque P_{X+Y} n'est pas connue.*

On a néanmoins un cas particulier où cette propriété est évidente.

Théorème 6.7.0.5 (Transfert) *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un univers probabilisé. On suppose que Ω est dénombrable. Alors toute variable aléatoire X sur Ω est une v.a.r. discrète et on a :*

$$X \text{ admet une espérance } \iff (X(\omega)P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega} \text{ est sommable}$$

Dans ce cas, on dispose de la relation :

$$E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$$

Preuve :

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur Ω. Puisque Ω est dénombrable, $X(\Omega)$ est dénombrable. Il s'ensuit que X est discrète (proposition 6.6.0.5). On note $X(\Omega) = \{x_n\ ,\ n \in K\}$ où K est dénombrable et les x_n sont deux à deux distincts. Alors :

$$P_X = \sum_{n\in K} P(\{X = x_n\})\delta_{x_n}$$

Par définition, X admet une espérance si la famille $(P(\{X = x_n\})x_n)_{n\in K}$ est sommable. Posons alors :

$$\forall n \in K \ , \ A_n = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = x_n\} = X^{-1}(\{x_n\})$$

Alors, $(A_n)_{n\in K}$ est une partition dénombrable de Ω, c'est-à-dire que K est dénombrable et $\Omega = \bigsqcup_{n\in K} A_n$. D'après le théorème d'associativité (théorème 5.7.2.1 dans les annexes du chapitre sur les séries), la famille $(P(\{\omega\})X(\omega))_{\omega\in\Omega}$ est sommable si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in K \ , \ (P(\{\omega\})X(\omega))_{\omega\in A_n} \text{ est sommable} \\ \left(\sum_{\omega\in A_n} P(\{\omega\})|X(\omega)|\right)_{n\in K} \text{ est sommable} \end{array} \right.$$

Dans ce cas (c'est-à-dire si l'une de ces conditions équivalentes est vérifiée), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega) &= \sum_{n\in K}\left(\sum_{\omega\in A_n} P(\{\omega\})X(\omega)\right) \\ &= \sum_{n\in K}\left(\sum_{\omega\in A_n} P(\{\omega\})x_n\right) \\ &= \sum_{n\in K}\left(x_n \sum_{\omega\in A_n} P(\{\omega\})\right) \\ &= \sum_{n\in K} x_n P(A_n) \\ &= \sum_{n\in K} x_n P(\{X = x_n\}) \\ &= E(X) \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in K$, il est évident que la famille $(P(\{\omega\})X(\omega))_{\omega\in A_n}$ est sommable (définition d'une mesure de probabilité) et :

$$\sum_{\omega\in A_n} |P(\{\omega\})X(\omega)| = |x_n| \sum_{\omega\in A_n} P(\{\omega\}) = |x_n|P(\{X = x_n\})$$

On conclut donc que $(P(\{\omega\})X(\omega))_{\omega\in\Omega}$ est sommable si et seulement si $(|x_n|P(\{X = x_n\}))_{n\in K}$ est sommable, c'est-à-dire si et seulement si X admet une espérance. ⊠

Remarque : *en fait, on a tout simplement étendu le théorème de transfert aux univers dénombrables infinis. Dans le cadre des univers finis, cette propriété a déjà été vue. Notez que la preuve est identique à la différence près qu'on manipule des sommes infinies et qu'il faut donc justifier le « réarrangement des termes », c'est-à-dire la sommabilité de la famille. Notez aussi que si K est fini (notations de la preuve - qui correspond au cas où X ne prend qu'un nombre fini de valeurs), alors la seconde condition est toujours vérifiée, i.e. X admet toujours une espérance.*

Exercice 6.7.0.6 On suppose Ω dénombrable. Montrer la linéarité de l'espérance.

Définition 6.7.0.7 Soit X une v.a.r. discrète. On dit que X admet une variance (ou un écart-type) si X admet une espérance et si $(X - E(X))^2$ admet une espérance. Dans ce cas, on appelle variance de X et on note $V(X)$ le nombre :

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Si X admet une variance, on définit alors l'écart-type de X par $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Exemple 6.7.0.8 Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors X admet une variance et $V(X) = np(1-p)$.

Théorème 6.7.0.9 (Transfert) *Soient X une v.a.r. discrète de loi $P_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$ avec $X(\Omega) = \{x_n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors :*

(i) $Y = \varphi \circ X$ est une v.a.r. discrète ;

(ii) Y admet une espérance mathématique si et seulement si la série $\sum \alpha_n \varphi(x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas,

$$E(\varphi(X)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \varphi(x_n)$$

Preuve :

• D'après le théorème 6.6.0.9, on sait déjà que Y est une variable aléatoire discrète de loi :

$$P_Y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{\varphi(x_n)}$$

• La seconde propriété est alors claire par définition de l'espérance. ⊠

Corollaire 6.7.0.10 *Si X est une variable aléatoire discète de loi $P_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$ qui admet une espérance, notée m, alors :*

$$X \text{ admet une variance } \iff \sum \alpha_n (x_n - m)^2 \text{ converge}$$

Dans ce cas, $V(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n (x_n - m)^2$.

Preuve :

Il suffit d'appliquer le théorème de transfert avec $\varphi : x \longmapsto (x-m)^2$. ⊠

Définition 6.7.0.11 Soit X une v.a.r. discrète. On dit que X admet un moment d'ordre $p \geqslant 1$ si la variable aléatoire discrète X^p admet une espérance. Dans ce moment, le moment d'ordre p de X est le nombre $M_p(X) = E(X^p)$.

Corollaire 6.7.0.12 *Avec les notations précédentes, X admet un moment d'ordre p si et seulement si la série $\sum \alpha_n x_n^p$ converge absolument.*

Preuve :

C'est une conséquence directe du théorème de transfert. ⊠

Remarques :

- *toute variable aléatoire (discrète) admet un moment d'ordre* 0. *En effet, $X^0 = 1$ est une variable aléatoire constante et donc elle admet une espérance qui est $E(X^0) = E(1) = 1$;*
- *par définition, X admet un moment d'ordre* 1 *si et seulement si X admet une espérance. Dans ce cas, $M_1(X) = E(X)$;*
- *une variable aléatoire peut ou non admettre des moments, à certains ordre mais pas d'autres, ou à tout ordre. Par exemple, si $P_X = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{1}{n(n+1)}\delta_{x_n}$ (je vous laisse vérifier que ceci définit bien une loi de probabilité discrète), alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,*

$$X \text{ a un moment d'ordre } p \iff \sum \frac{x_n^p}{n(n+1)} \quad \text{converge}$$

Par suite,

  - *si on choisit $x_n = n$ pour tout $n \geqslant 1$, alors X n'admet pas de moment d'ordre $p \geqslant 1$;*
  - *si on choisit $x_n = \sqrt{n}$ pour $n \geqslant 1$, alors X admet un moment d'ordre* 1 *mais pas de moment d'ordre $p \geqslant 2$;*
  - *si on choisit $x_n = n^{\frac{1}{k}}$ avec $k \geqslant 2$ fixé, alors X admet un moment d'ordre p si et seulement si $p \leqslant k - 1$;*
  - *si on choisit $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$, alors, X admet un moment à tout ordre.*

Proposition 6.7.0.13 *Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre* 2. *Alors :*

(i) X admet une espérance ;

(ii) X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Preuve :

Notons $P_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$ avec $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable de somme 1. Puisque X admet un moment d'ordre 2, $\sum \alpha_n x_n^2$ converge (corollaire précédent).

• Montrons (i), c'est-à-dire que $\sum \alpha_n x_n$ converge absolument.
Soient $n \in \mathbb{N}$, $I = \{k \in [\![0,n]\!] \ / \ |x_k| \leqslant 1\}$ et $J = \{k \in [\![0,n]\!] \ / \ |x_k| > 1\}$.
On a donc $I \cup J = [\![0,n]\!]$. Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k x_k| &= \sum_{k\in I} \alpha_k |x_k| + \sum_{k\in J} \alpha_k |x_k| \\ &\leqslant \sum_{k\in I} \alpha_k + \sum_{k\in J} \alpha_k |x_k|^2 \\ &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k + \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k x_k^2 \\ &\leqslant 1 + E(X^2)\end{aligned}$$

Ce qui prouve que les sommes partielles de la série de terme général $\alpha_k|x_k|$ sont majorées. Par conséquent, cette série converge (c'est une série à termes positifs), c'est-à-dire X admet une espérance.

• Prouvons alors la seconde relation. $Y = (X - E(X))^2$ est une variable aléatoire discrète et on a vu juste avant que Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum \alpha_n (x_n - E(X))^2$ converge.
Or, pour tout entier N,

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n (x_n - E(X))^2 = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n x_n^2 - 2E(X) \sum_{n=0}^{N} \alpha_n x_n + E(X)^2 \sum_{n=0}^{N} \alpha_n$$

On reconnaît la somme de trois sommes partielles de séries absolument convergentes et donc convergentes. Par suite, la série de terme général $\alpha_n (x_n - E(X))^2$ est convergente (et donc Y admet une espérance, c'est-à-dire X admet une variance) et on peut passer à la limite quand N tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x_n - E(X))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x_n^2 - 2E(X) \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x_n + E(X)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$$

c'est-à-dire

$$E(Y) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

⊠

Remarque : *la formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ est appelée formule de Huyguens.*

Proposition 6.7.0.14 *Soit X une v.a.r. qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors X admet une espérance mathématique et une variance qui sont :*

$$E(X) = \lambda \quad et \quad V(X) = \lambda$$

Preuve :

• Tout d'abord, X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\sum \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} n^2$ converge.

Or, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} n^2 > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$. D'après le critère de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.
Ainsi, X admet un moment d'ordre 2 donc d'après la proposition précédente, X admet une espérance et une variance.

• Il reste donc à calculer les sommes. Or, d'une part :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \times n = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = \lambda$$

Et de façon analogue,

$$E(X^2) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\lambda^n}{(n-1)!}$$

soit encore

$$E(X^2) = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(n-1)\lambda^n}{(n-1)!} + \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \right)$$

c'est-à-dire

$$E(X^2) = e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \right) = \lambda^2 + \lambda$$

On conclut alors d'après la formule de Huyguens que :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

⊠

Proposition 6.7.0.15 *Soit X une v.a.r. qui suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Alors X admet une espérance et une variance qui sont :*

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad et \quad V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Preuve :

• Il est évident que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\sum n^k pq^{n-1}$ converge (absolument) car $|q| < 1$. Par suite, X admet un moment à tout ordre $k \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que X admet une espérance et une variance.

• Il reste donc à faire les calculs de somme :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} pnq^{n-1} \quad \text{et} \quad E(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} pn^2q^{n-1}$$

Or,

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} nq^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n - \sum_{n=1}^{+\infty} nq^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1-n)q^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \\ &= \frac{1}{1-q}\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$ et donc $E(X) = \dfrac{p}{p^2} = \dfrac{1}{p}$.

Pour le calcul du moment d'ordre 2, on procède de façon similaire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2q^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)q^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$$

La seconde somme vient d'être calculée. Pour la première, de même qu'avant :

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)q^{n-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)q^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)q^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)nq^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)q^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2nq^n\end{aligned}$$

D'où $E(X^2) = p\dfrac{2q}{(1-q)^3} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2q}{p^2} + \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{2q}{p^2} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$. ⊠

6.8 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 6.8.0.1 (Inégalité de Markov) *Soit X une v.a.r. discrète qui admet une espérance. Alors :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ P(\{|X| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{E(|X|)}{\varepsilon}$$

Preuve :

Notons $P_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse X admet une espérance (ce qui équivaut à dire que $|X|$ admet une espérance), donc :

$$\begin{aligned} E(|X|) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n |x_n| \\ &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ |x_n|\leqslant\varepsilon}} \alpha_n |x_n| \ + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ |x_n|\geqslant\varepsilon}} \alpha_n |x_n| \\ &\geqslant \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ |x_n|\leqslant\varepsilon}} \alpha_n |x_n| + \varepsilon \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ |x_n|\geqslant\varepsilon}} \alpha_n \\ &\geqslant \varepsilon \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ |x_n|\geqslant\varepsilon}} \alpha_n \\ &\geqslant \varepsilon P(\{|X| \geqslant \varepsilon\}) \end{aligned}$$

⊠

Théorème 6.8.0.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) *Soit X une v.a.r. discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors X admet une espérance et une variance et on a :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ P(\{|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Preuve :

On a déjà montré que si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance et une variance. Considérons la v.a.r. discrète $Y = |X - E(X)|$. Par définition de la variance, Y^2 admet une espérance et $E(Y^2) = V(X)$. Alors,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \ , \ P(\{|Y| \geqslant \varepsilon\}) &= P(\{Y^2 \geqslant \varepsilon^2\}) \\ &\leqslant \frac{E(Y^2)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

⊠

Proposition 6.8.0.3 *Soit X une variable aléatoire discrète.*

(i) Si X admet une espérance et $E(|X|) = 0$, alors $P(\{X = 0\}) = 1$.

(ii) Si X admet une variance et si $V(X) = 0$, alors $P(\{X = E(X)\}) = 1$.

Remarques :

- *les réciproques sont vraies et évidentes ! C'est l'implication donnée par la proposition qui est moins évidente ;*
- *moralement, « si $V(X) = 0$, alors X est constante ». Mathématiquement c'est incorrect car la propriété dit que X est constante sur un ensemble de probabilité 1 qui n'est pas nécessairement égal à Ω, mais c'est comme cela qu'il faut penser à cette proposition.*

Preuve de la proposition :

• Montrons (i). X admet une espérance donc d'après l'inégalité de Markov :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ 0 \leqslant P(\{|X| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{E(|X|)}{\varepsilon} = 0$$

Il s'ensuit que pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(\{|X| \geqslant \frac{1}{n}\}) = 0$. Or,

$$\{|X| > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} \{|X| \geqslant \frac{1}{n}\}$$

et la suite $(\{|X| \geqslant \frac{1}{n}\})_{n \geqslant 1}$ est croissante. D'après le théorème de la limite monotone :

$$P(\{|X| > 0\}) = \lim_{n \to +\infty} P_n(\{|X| \geqslant \frac{1}{n}\}) = 0$$

On conclut que $P(\{X = 0\}) = 1 - P(\{X \neq 0\}) = 1 - P(\{|X| > 0\}) = 1$.

• La propriété (ii) se déduit de (i) car si X admet une variance et $V(X) = 0$, alors $Y = (X - E(X))^2$ admet une espérance et $E(|Y|) = 0$. D'après (i), $P(\{Y = 0\}) = 1$, c'est-à-dire $P(\{X = E(X)\}) = 1$. ⊠

6.9 Sommes de variables aléatoires discrètes usuelles et indépendantes

Théorème 6.9.0.1 *Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes (définies sur le même univers probabilisé) suivant les lois binomiales $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ respectivement. Alors $X + Y$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n + m, p)$.*

Preuve :

Tout d'abord, il est clair que $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$. De plus, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\{X+Y=k\} = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} \{X=i\} \cap \{Y=k-i\}$$

X et Y étant indépendantes, on a alors en posant $\binom{i}{j} = 0$ si $j > i$:

$$\begin{aligned} P(\{X+Y=k\}) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} P(\{X=i\}) \times P(\{Y=k-i\}) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \times \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-(k-i)} \\ &= \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \right) p^k (1-p)^{n+m-k} \\ &= \binom{m+n}{k} p^k (1-p)^{n+m-k} \end{aligned}$$

La dernière égalité provenant de la relation de Vandermonde (propriété des coefficients binomiaux). D'où le résultat. ⊠

Remarque : *attention, en revanche, si on additionne deux lois binomiales avec des paramètres « p » différents, on ne retombe pas sur une loi binomiale.*

Corollaire 6.9.0.2 *Soient $X_1, \cdots, X_n$ des v.a.r. mutuellement indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n_i, p)$ avec pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $n_i \in \mathbb{N}^\star$. Alors $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$.*

Preuve :

Il suffit par exemple de faire une récurrence sur n. ⊠

Exercice 6.9.0.3 En interprétant les loi binomiales comme le nombre de « succès », expliquer pourquoi le corollaire est « évident ».

Théorème 6.9.0.4 *Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Alors $X+Y$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.*

Preuve :

On reprend la même démarche. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(\{X+Y=n\}) &= \sum_{k=0}^{n} P(\{X=k\} \cap \{Y=n-k\}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(\{X=k\}) \times P(\{Y=n-k\}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \times \frac{e^{-\mu}\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \times (\lambda+\mu)^n \end{aligned}$$

Par suite, $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. ⊠

Corollaire 6.9.0.5 *Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des v.a.r. mutuellement indépendantes, de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.*

Remarque : *notez que dans les preuves par récurrence, on utilise une propriété « intuitivement évidente » mais qui n'est en fait pas si « évidente ». Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, X_{n+1} et $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$ sont indépendantes.*

Exercice 6.9.0.6 Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes (définies sur le même univers) et suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de $X+Y$.

6.10 Calculs d'espérance ou de variance pour des variables aléatoires indépendantes

Théorème 6.10.0.1 (Admis) *Soient X et Y deux v.a.r. discrètes. On suppose que :*

(i) X et Y admettent une espérance ;

(ii) X et Y sont indépendantes.

Alors $X \times Y$ admet une espérance et $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$.

Corollaire 6.10.0.2 *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes et admettant toutes une espérance, alors pour tout entier n, $\prod_{k=0}^{n} X_k$ admet une espérance et :*

$$E\left(\prod_{k=0}^{n} X_k\right) = \prod_{k=0}^{n} E(X_k)$$

Preuve :

Il suffit de procéder par récurrence en remarquant que puisque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. mutuellement indépendantes, $\prod_{i=0}^{n} X_i \perp X_{n+1}$.

⊠

Corollaire 6.10.0.3 *Si X et Y sont des v.a.r. discrètes, indépendantes et admettant des variances, alors $X+Y$ admet une variance et :*

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Preuve :

Tout d'abord, $(X+Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY$. Or,

- X et Y ont un moment d'ordre 2 ;
- puisque X et Y ont une espérance et $X \perp Y$, XY a une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Alors $(X+Y)^2$ a une espérance et donc $X+Y$ admet une variance avec :

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 \\ &= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - (E(X) + E(Y))^2 \\ &= V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y)) \\ &= V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

⊠

Corollaire 6.10.0.4 *Si $X_0, \cdots, X_n$ sont des v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes (ou tout simplement deux à deux indépendantes), et admettant chacune une variance, alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$ admet une variance et on a :*

$$V\left(\sum_{k=0}^{n} X_k\right) = \sum_{k=0}^{n} V(X_k)$$

6.11 Exercices

Exercice 6.11.1 On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1. En remarquant que $M = \dfrac{1}{6}(3I + J)$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = \dfrac{1}{2^n} I + \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) J$.
2. Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des trois sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si à l'instant n il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $n+1$, soit il y reste avec probabilité $\frac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets et ceci avec la même probabilité. On note :
   — A_n l'événement « le mobile se trouve en A à l'instant n » ;
   — B_n l'événement « le mobile se trouve en B à l'instant n » ;
   — C_n l'événement « le mobile se trouve en C à l'instant n ».
   On pose aussi pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $a_n + b_n + c_n$.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (c) On suppose, dans cette question seulement, que le mobile se trouve en A à l'instant 0. En utilisant la matrice M, calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   (d) Expliquer comment traiter les autres cas.

Exercice 6.11.2 Soient $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire réelle, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ P\left(\{X = n\}\right) = \frac{a}{2^n n!}$$

1. Déterminer a.
2. X admet-elle une espérance mathématique ? Si oui, la calculer.
3. X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Exercice 6.11.3 Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant la loi géométrique $G(p)$ avec $p \in]0,1[$. On définit alors 3 nouvelles variables aléatoires :

$$T = \min(X, Y) \ \ ; \ \ Z = |X - Y| \ \ ; \ \ G = \frac{Z}{T}$$

1. Démontrer que : $\forall x \in [0,1[\ , \ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.
2. Déterminer la loi de T et calculer $E(\frac{1}{T})$.
3. Calculer pour $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, $P(\{T \geqslant k\} \cap \{Z = n\})$.
4. En déduire la loi de Z et $E(Z)$.
5. Démontrer que Z et T sont indépendantes.
6. G admet-elle une espérance ? Si oui, la déterminer.

Exercice 6.11.4 Soient X et Y deux variables aléatoires telles que :

(i) $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$;

(ii) si $X = 0$, alors $Y = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^\star$, sachant $\{X = n\}$, Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p \in [0, 1]$.

1. Traduire l'hypothèse (ii) mathématiquement.
2. Déterminer la loi du vecteur aléatoire $Z = (X, Y)$, c'est-à-dire calculer pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$.
3. En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer la loi de Y.

Exercice 6.11.5 Soient X et Y deux v.a.r. définies sur le même espace probabilisé. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ et que X et Y sont indépendantes.

1. Quelle est la loi de probabilité de $S = X + Y$?
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{S = s\}$ avec $s \in \mathbb{N}$.
3. Calculer pour $s \in \mathbb{N}$ donné, l'espérance de X sachant $\{S = s\}$. Ceci définit donc une nouvelle variable aléatoire $E(X|S)$.
4. Quelle est la loi de probabilité de $E(X|S)$?
5. Montrer que $E(X|S)$ admet une espérance et calculer $E(E(X|S))$. Comparer le résultat avec $E(X)$.

Exercice 6.11.6 Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} kP(\{X = k\}) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\{X > k\}) \quad - nP(\{X > n\})$$
2. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} (nP(\{X > n\})) = 0$ et que $\sum P(\{X > n\})$ est une série convergente. Montrer que X admet une espérance et que :
$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{X > n\})$$
3. Réciproquement, montrer que si X admet une espérance, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (nP(\{X > n\})) = 0$, $\sum P(\{X > n\})$ est une série convergente, et :
$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{X > n\})$$

Exercice 6.11.7 On lance une pièce équilibrée et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier « pile ». Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées $1, 2, \ldots, k$, puis on tire au hasard une boule de cette urne. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.
2. On veut déterminer la loi de X.
   (a) Pour $(i,k) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$, déterminer la probabilité $P_{\{Z=k\}}(X=i)$.
   (b) En déduire que : $\forall i \in \mathbb{N}^\star$, $P(X=i) = \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.
   (c) Vérifier que $\sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i) = 1$.
3. Étude de l'espérance.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, $iP(X=i) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$.
   (b) En déduire que X possède une espérance.
   (c) Montrer que $E(X) = \frac{3}{2}$.
4. Étude de la variance.
   (a) Montrer que X a un moment d'ordre 2.
   (b) Établir que : $E(X^2) = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k$.
   (c) En déduire $E(X^2)$ et vérifier que $V(X) = \dfrac{11}{12}$.
5. Déduire des questions précédentes que $P(X \geqslant 3) \leqslant \dfrac{11}{27}$.

Exercice 6.11.8 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ respectivement. Quelle est la probabilité que la matrice M suivante soit inversible ?

$$M = \begin{pmatrix} X & 2 & 1 \\ 3 & Y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.11.9 Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose qu'il existe $I \subset \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I \ , \ P(\{X = x\}) > 0$$

Montrer que I est dénombrable.

Exercice 6.11.10 Soit $r \in \mathbb{N}$ et $r \geqslant 2$. On lance une pièce dont la probabilité d'obtenir « pile » est p. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaire pour obtenir pour la première fois r piles. Déterminer la loi de X.

Exercice 6.11.11 Soit X une variable aléatoire réelle discrète et f une application définie sur $X(\Omega)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $X \perp f(X)$.

Exercice 6.11.12 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles (définies sur le même univers), à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telles que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \ , \ P(\{X=n\} \cap \{Y=p\}) = \frac{a}{n!p!}$$

1. Déterminer la valeur du réel a.
2. Déterminer les lois de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6.11.13 On considère un avion A ayant 4 moteurs et un avion B ayant 2 moteurs. On suppose que la probabilité qu'un moteur tombe en panne est p et on suppose aussi que les moteurs sont mutuellement indépendants. Un avion arrive à sa destination si au moins la moitié de ses moteurs fonctionne. Quel avion vaut-il mieux choisir ?

Exercice 6.11.14 On considère une pièce truquée avec probabilité $\frac{2}{3}$ d'obtenir pile. On suppose que les lancers sont indépendants et on note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs. On note $p_n = P(\{X=n\})$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Déterminer p_1, p_2, p_3 et p_4.
2. Montrer que pour $n \geqslant 4$, $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$.
3. En déduire l'expression de p_n pour $n \geqslant 1$.
4. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Chapitre 7

Fonctions convexes

Prérequis : dans tout ce chapitre, les notions suivantes sont supposées connues :

- continuité, dérivation ;
- fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle ;
- formules de Taylor.

Aucune connaissance spécifique sur la notion de fonction convexe n'est supposée connue.

7.1 Fonctions convexes

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

7.1.1 Définition et interprétation graphique

Définition 7.1.1.1 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si :

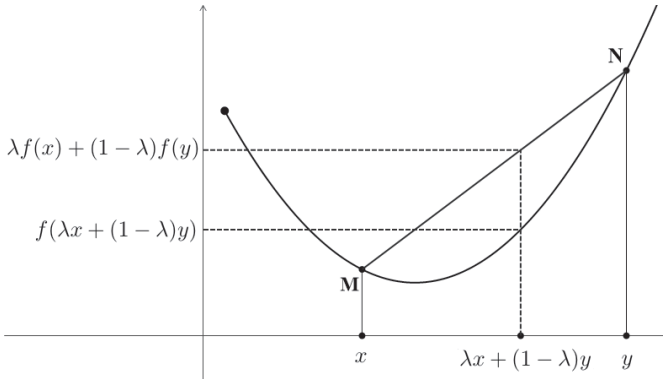
$$\forall (x,y) \in I^2 \ , \forall \lambda \in [0,1] \ , \ f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Définition 7.1.1.2 On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est concave si :

$$\forall (x,y) \in I^2 \ , \forall \lambda \in [0,1] \ , \ f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Remarque : *cela signifie en fait que f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.*

Interprétation graphique : *une fonction est convexe si et seulement si tout sous-arc est en-dessous de la corde :*



Exemple 7.1.1.3 Les fonctions affines sont des fonctions convexes et concaves. En effet, si $\forall x \in I \ , \ f(x) = ax + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors pour tout $(x,y) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = a\lambda x + (1-\lambda)y + b = a\lambda x + (1-\lambda)y + \lambda b + (1-\lambda)b = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Exercice 7.1.1.4 Montrer que les fonctions affines sont les seules fonctions convexes et concaves à la fois.

Exemple 7.1.1.5 La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$. En effet, pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$:

$$\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 = \lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \geqslant 0$$

Remarquez que c'est plutôt difficile à prouver alors que graphiquement cela paraît évident. On peut également traduire la définition d'une fonction convexe en terme d'épigraphe, mais pour cela il manque deux définitions.

Définition 7.1.1.6 Soit $n \geqslant 1$. On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}^n$ est convexe si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in C^2 \ , \ \forall t \in [0,1] \ , \ tx + (1-t)y \in C$$

Autrement dit, $\forall (x,y) \in C^2 \ , \ [x,y] \subset C$.

Remarque : *l'ensemble vide est convexe.*

Exemple 7.1.1.7 On a prouvé dans le chapitre sur les nombres réels (voir cours de mathématiques supérieures 1) que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$.

Exemple 7.1.1.8 Dans $\mathbb{R}^3$, la boule unité fermée

$$\overline{B} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ \|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leqslant 1\}$$

est une partie convexe. En effet, si $u = (x,y,z) \in \overline{B}$ et $v = (x',y',z') \in \overline{B}$ et $t \in [0,1]$, alors :

$$\|tu + (1-t)v\| \leqslant |t| \times \|u\| + |1-t| \times \|v\| \leqslant t + (1-t) \leqslant 1$$

Exemple 7.1.1.9 En revanche, $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ n'est pas convexe car si $x \in C$, $y = -x \in C$ et le segment $[-x,x]$ n'est pas inclus dans C car il contient $(0,0)$.

Définition 7.1.1.10 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On appelle épigraphe de f, et on note $Epi(f)$, le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$Epi(f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \ / \ y \geqslant f(x)\}$$

On a alors la caractérisation suivante qui découle des définitions et dont la preuve est laissée en exercice.

Proposition 7.1.1.11 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors f est convexe si et seulement si $Epi(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.*

7.1.2 Caractérisation de la convexité par la pente des cordes

Théorème 7.1.2.1 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

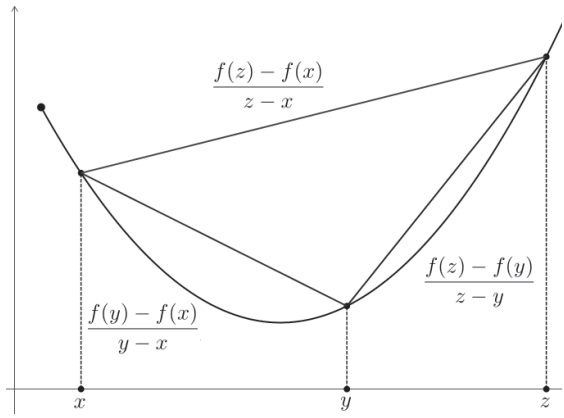
(i) f est convexe sur I

(ii) f vérifie l'inégalité des trois cordes (ou trois pentes), c'est-à-dire pour tout $x, y, z \in I$,

$$x < y < z \Longrightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

(iii) pour tout $a \in I$, la fonction $T_{f,a} : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $T_{f,a}(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Interprétation graphique :



Preuve :

• Montrons que $(i) \Longrightarrow (ii)$.
On suppose f convexe. Soient $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$. Soit $\lambda \in]0, 1[$ tel que $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$. On a donc $\lambda = \dfrac{y - z}{x - z}$. f étant convexe, on a :

$$f(y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(z)$$

En soustrayant successivement $f(x)$ ou bien $f(z)$, on obtient :

$$f(y) - f(x) \leqslant (1 - \lambda)(f(z) - f(x)) \text{ et } f(y) - f(z) \leqslant \lambda(f(x) - f(z))$$

En remarquant que $1 - \lambda = \dfrac{x - y}{x - z}$, on en déduit que :

$$f(y)-f(x)\leqslant\frac{y-x}{z-x}(f(z)-f(x))\ \text{ et }\ f(y)-f(z)\leqslant\frac{z-y}{z-x}(f(x)-f(z))$$

D'où le résultat en divisant respectivement par $y-x>0$ et $y-z<0$.

• Montrons $(ii)\Longrightarrow(iii)$
On suppose que f vérifie l'inégalité des trois pentes. Soit $a\in I$. On montre que $T_{f,a}$ est croissante sur $I\setminus\{a\}$. Soient $x,y\in I\setminus\{a\}$ tels que $x<y$. On distingue alors trois cas.

∗ Premier cas : $x<a<y$
D'après l'inégalité des trois pentes, on a :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant\frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

Par conséquent, $T_{f,a}(x)\leqslant T_{f,a}(y)$.

∗ Deuxième cas : $x<y<a$
Toujours d'après l'inégalité des trois pentes :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant\frac{f(a)-f(x)}{a-x}\leqslant\frac{f(a)-f(y)}{a-y}$$

et donc, à nouveau, $T_{f,a}(x)\leqslant T_{f,a}(y)$.

∗ Troisième cas : $a<x<y$
On procède de même et on montre que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant\dfrac{f(y)-f(a)}{y-a}$.

• Montrons enfin que $(iii)\Longrightarrow(i)$.
On suppose (iii) et on montre que f est convexe. Soient $x,y\in I$ et $\lambda\in[0,1]$. Si $\lambda=0$ ou $\lambda=1$, l'inégalité à démontrer est claire. On suppose donc $\lambda\in]0,1[$. Quitte à échanger les noms (et à échanger λ par $1-\lambda$), on peut toujours supposer que $x<y$: on pose alors $a=\lambda x+(1-\lambda)y\in]x,y[$. D'après (iii), $T_{f,a}$ est croissante sur $I\setminus\{a\}$. D'où :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant\frac{f(y)-f(a)}{y-a}\ \text{ soit encore }\ \frac{f(x)-f(a)}{(1-\lambda)(x-y)}\leqslant\frac{f(y)-f(a)}{\lambda(y-x)}$$

D'où

$$\lambda(f(x)-f(a))\geqslant(1-\lambda)(f(a)-f(y))$$

c'est-à-dire

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\geqslant(1-\lambda+\lambda)f(a)$$

soit encore, compte tenu de la définition de a,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Ce qui prouve que f est convexe. ⊠

7.1.3 Caractérisation de la convexité lorsque f est dérivable

Théorème 7.1.3.1 *Soit f dérivable sur l'intervalle I. Alors :*

$$(i)\ f \text{ est convexe sur } I \iff (ii)\ f' \text{ est croissante sur } I$$

Preuve :

• $(i) \Longrightarrow (ii)$
On suppose que f est convexe. Montrons que f' est croissante sur I. Soient $x < y$. Alors, pour tout $z \in]x, y[$, d'après l'inégalité des trois pentes, on a :

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \text{et} \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

En passant à la limite dans la première inégalité lorsque z tend vers x (licite puisque f est dérivable en x), on obtient :

$$\lim_{\substack{z\to x\\ z>x}} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \text{c'est-à-dire} \quad f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

En passant à la limite dans la seconde, lorsque z tend vers y, on obtient : $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y)$. D'où $f'(x) \leqslant f'(y)$ et f' est croissante.

• $(ii) \Longrightarrow (i)$
On suppose f' croissante sur I. Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. Quitte à échanger les noms, on peut toujours supposer que $x < y$ et de plus, on peut supposer $\lambda \in]0,1[$ (puisque si $x = y$ ou $\lambda \in \{0,1\}$, l'inégalité est en fait une égalité). Posons :

$$\forall t \in [x,y]\ ,\ \varphi(t) = \lambda f(t) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda t + (1-\lambda)y)$$

φ est dérivable sur $[x,y]$ et :

$$\forall t \in [x,y]\ ,\ \varphi'(t) = \lambda\big(f'(t) - f'(\lambda t + (1-\lambda)y)\big)$$

Puisque f' est croissante, $\varphi' \leqslant 0$ sur $[x,y]$. Il s'ensuit que φ est décroissante sur $[x,y]$. Or, $\varphi(y) = 0$ donc $\varphi \geqslant 0$ sur $[x,y]$. En particulier, $\varphi(x) \geqslant 0$. ⊠

Exercice 7.1.3.2 On suppose que f est croissante sur I. Soient $x < y$ dans I et $\lambda \in]0,1[$. On pose $a = \lambda x + (1-\lambda)y$. Montrer qu'il existe c, d tels que $x < c < a < d < y$ et :

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(a) = \lambda(1-\lambda)(y-x)(f'(d) - f'(c))$$

Conclure que f est convexe.

Le corollaire suivant est le plus utile dans les exercices concrets ayant pour but de prouver une inégalité par convexité, où l'on considère en général une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Corollaire 7.1.3.3 *Si f est deux fois dérivable sur I, alors :*

$$f \text{ convexe sur } I \iff f'' \geqslant 0$$

Exemple 7.1.3.4 Exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ et ln est concave sur $]0, +\infty[$.

Exemple 7.1.3.5 La fonction sinus est concave sur $I = [0, \pi]$ car elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\sin'' = -\sin \leqslant 0$ sur I. En revanche, sinus est convexe sur $[\pi, 2\pi]$.

Proposition 7.1.3.6 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur I et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f est convexe ;

(ii) $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de chacune de ses tangentes, c'est-à-dire :

$$\forall a \in I \ , \ (\forall x \in I \ , \ f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a))$$

Preuve :

• $(i) \Longrightarrow (ii)$.
On suppose que f est convexe. D'après le théorème précédent, f' est alors croissante. Soit $a \in \mathbb{R}$. La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. On pose pour $x \in I$,

$$\varphi(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$$

Alors φ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$. On en déduit que φ est décroissante sur $]-\infty, a] \cap I$ et croissante sur $[a, +\infty[\cap I$. Par suite, φ admet un minimum en a qui vaut $\varphi(a) = 0$. Ce qui montre que φ est positive sur I, d'où (ii).

• $(ii) \Longrightarrow (i)$
On suppose (ii). Montrons que f' est croissante sur I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. On a alors :

$$\begin{cases} \forall x \in I \ , \ f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a) & \text{donc} \quad f(b) \geqslant f'(a)(b-a) + f(a) \\ \forall x \in I \ , \ f(x) \geqslant f'(b)(x-b) + f(b) & \text{donc} \quad f(a) \geqslant f'(b)(a-b) + f(b) \end{cases}$$

Par suite, $f'(a) \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} \leqslant f'(b)$, et f' est croissante. ⊠

Remarques :

- *dans la pratique, cette proposition s'utilise dans le sens* $(i) \Longrightarrow (ii)$*. Autrement dit, on montre que* f *est convexe pour en déduire que sa courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes ;*
- *en particulier, on obtient les inégalités suivantes qui sont très utiles dans la pratique (et que vous devez connaître) :*
  - $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1+x$ *(convexité de* exp *et tangente en (0,1)) ;*
  - $\forall x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$ *(concavité de* ln *et tangente au point* $(0,1)$ *ou bien on prend l'image par* ln *de l'inégalité précédente) ;*
  - $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant |\mathrm{sh}\,(x)|$ *(convexité de* sh *sur* $[0,+\infty[$ *et tangente à l'origine, puis imparité de* sh *et* $x \longmapsto x$*) ;*
  - $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$ *(concavité de sinus sur* $[0,\pi]$*, évident pour* $x \geqslant \pi$ *et imparité de sinus et* $x \longmapsto x$*) ;*
  - $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x)$ *(concavité de sinus sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *et corde reliant les points d'abscisses* 0 *et* $\frac{\pi}{2}$*) ;*
  - $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x \leqslant \tan(x)$ *(convexité de* tan *sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *et tangente à l'origine).*
- *Il peut aussi être utile de parler de fonction « strictement convexe » qui permet d'avoir des inégalités strictes. Une fonction est strictement convexe si elle vérifie l'inégalité de convexité et que l'inégalité est stricte dès que* $x \neq y$ *et* $\lambda \in]0,1[$*. On vérifie (exercice : le faire) que ceci correspond à dire que la courbe est située strictement en-dessous de ses cordes (sauf aux extrémités de la corde) et si* f *est dérivable, la courbe est située strictement au-dessus de ses tangentes, sauf au point de tangence. Ceci étant dit, on peut généralement prouver les inégalités (strictes ou larges) en faisant une étude de fonction, même si c'est souvent un peu plus long.*

7.1.4 Régularité des fonctions convexes

Proposition 7.1.4.1 *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction convexe.*

(i) Pour tout $a \in \overset{\circ}{I}$*,* f *est dérivable à droite et à gauche en* a *et on a* $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$*.*

(ii) f *est continue sur* $\overset{\circ}{I}$*.*

⚠ **Attention :** cela ne veut pas dire que f est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$! L'existence des dérivées à droite et à gauche ne permet pas de conclure que f est dérivable puisqu'on ne sait pas si les deux nombres dérivées sont égaux.

Exemple 7.1.4.2 La fonction $x \longmapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

Preuve :

• Montrons (i).
Soit $a \in \overset{\circ}{I}$. Puisque f est convexe sur I, la fonction $T_{f,a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$. D'après le théorème de la limite monotone, $T_{f,a}$ admet des limites finies à droite et à gauche en a et :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} T_{f,a}(x) = \sup_{\substack{x \in I \\ x<a}} T_{f,a}(x) \leqslant \inf_{\substack{x \in I \\ x>a}} T_{f,a}(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} T_{f,a}(x)$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (et ces limites sont finies).
Ce qui montre que f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.

• Montrons (ii).
Soit $a \in \overset{\circ}{I}$. D'après le chapitre sur la dérivation, puisque f est dérivable à droite en a, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$. En effet, pour $x \in I$ et $x > a$,

$$f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a) + f(a)$$

et on passe à la limite quand x tend a^+. De même, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = f(a)$.

Par suite, f est continue en a.

⊠

7.2 Inégalités de convexité

7.2.1 Inégalité généralisée de convexité

Théorème 7.2.1.1 *Soient f une fonction convexe sur I, $n \geqslant 1$, $x_1, \cdots, x_n \in I$ et $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des réels strictement positifs tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Alors :*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

De plus, il y a égalité si et seulement si f est affine sur $[\inf x_i, \sup x_i]$.

Remarque : *l'inégalité est vraie si on suppose seulement $\lambda_i \geqslant 0$ (au lieu de $\lambda_i > 0$) mais dans ce cas, le cas d'égalité n'est pas vrai car lorsque $\lambda_i = 0$, en fait le « x_i » n'intervient pas dans le calcul.*

Preuve :

Pour $n = 1$, c'est évident. On procède alors par récurrence pour $n \geqslant 2$.

Initialisation :
Pour $n = 2$, l'inégalité est évidente : c'est la définition d'une fonction convexe. Il reste donc à traiter le cas d'égalité. On suppose donc que $x_1, x_2 \in I$ et (quitte à échanger les noms) $x_1 < x_2$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1+\lambda_2 = 1$ et $f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$. Posons $a = \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$. Alors, $a \in]x_1, x_2[$ et on a : $\lambda_1 = \dfrac{x_2 - a}{x_2 - x_1}$ et $\lambda_2 = 1 - \lambda_1 = \dfrac{a - x_1}{x_2 - x_1}$. Il s'ensuit que :

$$\lambda_1 f(a) + \lambda_2 f(a) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

soit encore

$$\lambda_1(f(a) - f(x_1)) = \lambda_2(f(x_2) - f(a))$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(a) - f(x_1)}{a - x_1} = \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a}$$

Puisque f est convexe, la fonction $T_{f,a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$. Or, le calcul précédent montre que $T_{f,a}(x_1) = T_{f,a}(x_2)$. Par suite, $T_{f,a}$ est constante sur $[x_1, x_2] \setminus \{a\}$. En notant α cette constante, on a donc :

$$\forall x \in [x_1, x_2] \setminus \{a\} \ , \ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha$$

c'est-à-dire $\forall x \in [x_1, x_2] \setminus \{a\}$, $f(x) = \alpha(x-a)+f(a)$, égalité encore valable pour $x = a$. Ce qui prouve que f est affine sur $[x_1, x_2]$.

Hérédité :
On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 2$ et on montre qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soient $x_1, \cdots, x_{n+1} \in I$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$ des réels strictement positifs dont la somme vaut 1. L'idée est d'utiliser l'associativité du barycentre (si vous êtes familiers avec cette notion).
Soit $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ (barycentre des (x_i, λ_i)) et $g' = \dfrac{1}{1 - \lambda_{n+1}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.
Alors :

$$\begin{aligned} f(g) &= f(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1}) g') \\ &\leqslant (1 - \lambda_{n+1}) f(g') + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) \end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant de l'hypothèse de récurrence.

De plus, on peut supposer que $x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ (quitte à échanger les noms) : dans ce cas, il y a égalité si et seulement si f est affine sur $[x_1, x_n]$ (hypothèse de récurrence) et sur $[g', x_{n+1}]$ (cas $n = 2$). Or, $g' < x_n$ d'où il y a égalité si et seulement si f est affine sur $[x_1, x_n]$. ⊠

7.2.2 Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique

Définition 7.2.2.1 Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1, \cdots, x_n$ des réels.

- On définit la moyenne arithmétique des (x_i), notée m_a, par :
$$m_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
- Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i > 0$, on définit la moyenne géométrique des x_i, notée m_g, par :
$$m_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$
- Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i > 0$, on définit la moyenne harmonique des x_i, notée m_h, par :
$$\frac{1}{m_h} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$$

Proposition 7.2.2.2 *Soient $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs. Alors :*
$$m_h \leqslant m_g \leqslant m_a$$
avec égalité si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $x_i = x_j$.

Preuve :

• Montrons pour commencer que $m_g \leqslant m_a$.
La fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$. D'après l'inégalité généralisée de convexité, on a alors :
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\ln(x_i) \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right) \qquad i.e. \qquad \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant \ln(m_a)$$
En prenant les images par l'exponentielle, on conclut donc que $m_g \leqslant m_a$. De plus, il y a égalité si et seulement si il y a égalité dans l'inégalité généralisée. La fonction ln n'étant affine sur aucun intervalle non réduit à un point, on a donc égalité si et seulement si $\max x_i = \min x_i$.

• La seconde inégalité et le cas d'égalité s'obtiennent en appliquant le premier résultat aux inverses.

⊠

7.3 Exercices

Exercice 7.3.1 Montrer que toute fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante.

Exercice 7.3.2 Montrer que pour tout $x, y \geqslant 1$, $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}$.

Exercice 7.3.3 Quelques opérations sur les fonctions convexes.

1. Soient f et g deux applications convexes telle que g soit croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+\star}$ telle que $\ln f$ est convexe. Montrer que f est convexe.

Exercice 7.3.4 Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite finie ou bien $+\infty$ pour limite en $+\infty$.
2. On suppose $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto f(x) - \ell x$ admet une limite en $+\infty$.

Exercice 7.3.5 Soit f continue sur I telle que : $\forall (x, y) \in I^2$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.
Montrer successivement que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall (x, y) \in I^2$, $\forall p \in [\![0, 2^n]\!]$, $f\left(\dfrac{p}{2^n}x + \left(1 - \dfrac{p}{2^n}\right)y\right) \leqslant \dfrac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \dfrac{p}{2^n}\right)f(y)$.
2. f est convexe sur I.

Exercice 7.3.6 Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et p, q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tout $x, y \in [0, +\infty[$, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.
2. En déduire l'inégalité de *Hölder* : pour tout $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, Y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{C}^n$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

   Indication : considérer les nombres $a_k = \dfrac{|x_k|}{||X||_p}$ *et* $b_k = \dfrac{|y_k|}{||Y||_q}$.

   Remarque : *pour information, on pose* $||X||_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. *On peut en fait démontrer que* $||\ ||_p$ *est une norme sur* $\mathbb{C}^n$. *Et ici, on vient de prouver que* $|X \cdot Y| \leqslant ||X||_p ||Y||_q$.
3. En écrivant que pour tout entier k, $|x_k + y_k|^p \leqslant |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + |y_k||x_k + y_k|^{p-1}$ et en utilisant l'inégalité précédente, montrer l'inégalité de Minkowski :

$$||X + Y||_p \leqslant ||X||_p + ||Y||_p \quad \textit{i.e.} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Chapitre 8

Déterminants et systèmes linéaires

Prérequis : dans tout ce chapitre, les notions suivantes sont supposées connues :

- espaces vectoriels, applications linéaires ;
- familles libres, génératrices, bases ;
- théorie de la dimension ;
- matrices, matrice d'un endomorphisme dans une base ;
- sous-espace affine d'un espace vectoriel.

Aucune connaissance spécifique sur les déterminants n'est supposée connue.

8.1 Définition du déterminant

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif inclus dans $\mathbb{C}$. Pour les plus curieux, tout reste valable dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ quelconque (sauf l'équivalence entre forme alternée et forme antisymétrique où l'on doit supposer que $1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$, c'est-à-dire que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2).

8.1.1 Formes n-linéaires, formes alternées et antisymétriques

Définition 8.1.1.1 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et n un entier non nul. On appelle forme n-linéaire sur E toute application :

$$f : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_1, \cdots, u_n) & \longmapsto & f(u_1, \cdots, u_n) \end{array}$$

telle que « f est linéaire par rapport à chaque variable », c'est-à-dire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et tout $(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots u_n) \in E^{n-1}$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(u_1, \cdots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, \cdots, u_n) \end{array} \quad \text{est linéaire}$$

On convient que pour $i = 1$ et $i = n$, il s'agit des applications $x \longmapsto f(x, u_2, \cdots, u_n)$ et $x \longmapsto f(u_1, \cdots, u_{n-1}, x)$ et que si $n = 1$, il s'agit simplement de $f : x \longmapsto f(x)$ est linéaire.

Vocabulaire : lorsque $n = 2$, on parle de forme bilinéaire sur E et lorsque $n = 3$, on dit aussi forme trilinéaire sur E. À partir de $n = 4$, on dit toujours n-linéaire.

Exemple 8.1.1.2 L'application $f : \mathbb{K}[X]^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ qui à $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ associe $P(0)Q(0)$ est une forme bilinéaire. En effet, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, l'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$\forall Q \in \mathbb{K}[X] \ , \ \varphi(Q) = f(P, Q) = P(0)Q(0)$$

est linéaire puisque pour tout $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda Q_1 + \mu Q_2) &= P(0) \times (\lambda Q_1 + \mu Q_2)(0) \\ &= P(0) \times (\lambda Q_1(0) + \mu Q_2(0)) \\ &= \lambda P(0)Q_1(0) + \mu P(0)Q_2(0) \\ &= \lambda \varphi(Q_1) + \mu \varphi(Q_2) \end{aligned}$$

De même, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $P \longmapsto f(P, Q)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 8.1.1.3 L'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à $((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n))$ associe $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 8.1.1.4 L'application $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_{[a,b]} fg$ est une forme bilinéaire sur l'ensemble $\mathcal{C}^0_m([a,b],\mathbb{K})$. En effet, c'est la composée de :

- $(f,g) \longmapsto f \times g$ qui est bilinéaire (règles de calcul dans une algèbre) ;
- et de $f \longmapsto \displaystyle\int_{[a,b]} f$ qui est linéaire.

Exemple 8.1.1.5 L'application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ qui à $(x_1,\cdots,x_n)$ associe $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i$ est une forme n-linéaire sur $\mathbb{K}$.

⚠ **Attention :** une forme bilinéaire sur E n'est en général pas une application linéaire de E^2 dans $\mathbb{K}$! En effet, si f est une forme bilinéaire sur E (avec $\mathbb{K} \neq \{0,1\}$)), on a :

$$\forall x,y \in E\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ ,\ f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x,y)$$

Ce qui n'est pas égal à $\lambda f(x,y)$ lorsque $\lambda^2 \neq \lambda$ et $f(x,y) \neq 0$. Ainsi, si f est une forme bilinéaire non identiquement nulle et si $\mathbb{K} \neq \{0,1\}$, alors f n'est pas linéaire de E^2 dans $\mathbb{K}$.

Remarque : *attention au vocabulaire ! Il ne faut pas confondre forme bilinéaire et application bilinéaire !*

- $(P,Q) \longmapsto P'Q + QP'$ *est une application bilinéaire mais n'est pas une forme bilinéaire ;*
- $(f,g) \longmapsto f \circ g$ *est une application bilinéaire de* $L(E)^2$ *dans* $L(E)$ *mais n'est pas une forme bilinéaire.*

Définition 8.1.1.6 Soit $f : E^n \longmapsto \mathbb{K}$ une forme n-linéaire (avec $n \geqslant 2$). On dit que :

(i) f est alternée si pour tout $(u_1,..,u_n) \in E^n$,

$$\big((\exists i,j \in [\![1,n]\!]\ ,\ i \neq j \text{ et } u_i = u_j) \Longrightarrow f(u_1,\cdots,u_n) = 0\big)$$

(ii) f est antisymétrique si pour tout $(u_1,..,u_n) \in E^n$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\Big(i < j \Longrightarrow f(u_1,\cdots,u_{i-1},u_j,u_{i+1},\cdots,u_{j-1},u_i,\cdots,u_n) = -f(u_1,\cdots,u_n)\Big)$$

Remarque : *en clair,*

- *« f est alternée lorsque $f(u_1,\cdots,u_n) = 0$ dès que deux vecteurs sont égaux » ;*
- *« f est antisymétrique si quand on échange deux vecteurs, la valeur de f est remplacée par la valeur opposée ».*

Exemple 8.1.1.7 L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui à $((x,y),(x',y'))$ associe $xy' - x'y$ est une forme bilinéaire alternée et antisymétrique.

Proposition 8.1.1.8 *Soit f une forme n-linéaire sur E. Alors f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.*

Preuve :

• Montrons f alternée $\Longrightarrow$ f antisymétrique.
On suppose f alternée. Soient $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i < j$. On a alors :

$$f(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_i + u_j, u_{i+1}, \cdots, u_{j-1}, u_i + u_j, u_{j+1}, \cdots, u_n) = 0$$

puisque par hypothèse, f est alternée. De plus, puisque f est n-linéaire, on a donc :

$$\begin{aligned} 0 = & \underbrace{f(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \cdots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \cdots, u_n)}_{0 \text{ puisque } f \text{ est alternée}} \\ & + f(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \cdots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \cdots, u_n) \\ & + f(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \cdots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \cdots, u_n) \\ & + \underbrace{f(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \cdots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \cdots, u_n)}_{0 \text{ puisque } f \text{ est alternée}} \end{aligned}$$

D'où

$$f(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \cdots, u_{j-1}, u_i, \cdots, u_n) = -f(u_1, \cdots, u_n)$$

ce qui prouve que f est antisymétrique.

• Montrons f antisymétrique $\Longrightarrow$ f alternée.
On suppose f antisymétrique. Soit $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$. On suppose qu'il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i \neq j$ et $u_i = u_j$. Quitte à échanger les noms, on peut toujours supposer que $i < j$. Alors,

$$\begin{aligned} f(u_1, \cdots, u_n) &= f(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \cdots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \cdots, u_n) \\ &= f(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \cdots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \cdots, u_n) \\ &= -f(u_1, \cdots, u_n) \end{aligned}$$

Par suite, $2f(u_1, \cdots, u_n) = 0$ et puisque $2 \neq 0_{\mathbb{K}}$, on a donc :

$$f(u_1, \cdots, u_n) = 0$$

Ce qui prouve que f est alternée.

⊠

8.1.2 Caractérisation des formes n-linéaires alternées et dimension de l'espace $\Lambda_n(E)$

Proposition 8.1.2.1 *Soit $\mathcal{L}_n(E,\mathbb{K})$ l'ensemble des formes n-linéaires sur E et $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées. Alors $\mathcal{L}_n(E)$ et $\Lambda_n(E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(E^n,\mathbb{K})$.*

Preuve :

• Il est évident que l'application nulle de E^n dans $\mathbb{K}$ est n-linéaire et qu'elle est alternée.

• Puisque l'ensemble des formes linéaires sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il est clair qu'une combinaison linéaire d'applications n-linéaires est n-linéaire.

• Enfin, si f,g sont alternées et $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda f+g$ est encore alternée.

Ces propriétés sont évidentes.

⊠

Proposition 8.1.2.2 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie $p\geqslant 1$, $(e_1,\cdots,e_p)$ une base de E et f une forme n linéaire sur E. Soit $(x_1,\cdots,x_n)\in E^n$ et pour $1\leqslant i\leqslant n$, soit $(\lambda_{j,i})_{1\leqslant j\leqslant p}\in\mathbb{K}^p$ tel que :*

$$x_i=\sum_{j=1}^{p}\lambda_{j,i}e_j$$

Alors :

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in[\![1,p]\!]^n}\left(\prod_{k=1}^{n}\lambda_{i_k,k}\right)f(e_{i_1},\cdots,e_{i_n})$$

Preuve :

Il s'agit simplement d'un calcul brutal en développant successivement et en utilisant la n-linéarité. Pour être plus rigoureux, on peut aussi le démontrer par récurrence sur n.

⊠

Proposition 8.1.2.3 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie $p\geqslant 1$ et $n\geqslant 1$. Alors toute forme n-linéaire est parfaitement caractérisée par l'image des n-uplets de vecteurs d'une base. Autrement dit, si $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_p)$ est une base de E et f est une forme n-linéaire sur E, alors f est parfaitement déterminée par la donnée des $f(e_{i_1},\cdots,e_{i_n})$ avec $(i_1,\cdots,i_n)\in[\![1,p]\!]^n$.*

Preuve :

Il s'agit de montrer que la donnée des $f(e_{i_1},\cdots,e_{i_n}) = a_{i_1,\cdots,i_n}$ (pour les $(i_1,\cdots,i_n)\in[\![1,p]\!]^n$) détermine de façon unique l'application n-linéaire f.

• D'après la proposition précédente, et en conservant les mêmes notations, pour $(x_1,\cdots,x_n)\in E^n$:

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in[\![1,p]\!]^n}\left(\prod_{k=1}^{n}\lambda_{i_k,k}\right) f(e_{i_1},\cdots,e_{i_n})$$

Ce qui montre l'unicité de f sous réserve d'existence.

• Réciproquement, si on pose pour $(x_1,\cdots,x_n)\in E^n$,

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in[\![1,p]\!]^n}\left(\prod_{k=1}^{n}\lambda_{i_k,k}\right) a_{i_1,\cdots,i_n}$$

où $(\lambda_{j,i})_{1\leqslant j\leqslant p}$ sont les coordonnées de x_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ dans la base $\mathcal{B}$, alors :

- f est clairement n-linéaire car :
  - ▷ pour tout $(i_1,\cdots,i_n)\in[\![1,p]\!]^n$, l'application qui à $(x_1,\cdots,x_n)$ associe $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\lambda_{i_k,k}$ est une forme n-linéaire sur E ;
  - ▷ $\mathcal{L}_n(E,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.
- Par construction, pour tout $(i_1,\cdots,i_n)\in[\![1,p]\!]^n$,

$$f(e_{i_1},\cdots,e_{i_n}) = a_{i_1,\cdots,i_n}$$

Ce qui prouve l'existence.

⊠

Remarque : *si dans la preuve précédente, on suppose en plus que la forme est alternée, alors les $f(e_{i_1},\cdots,e_{i_n})$ sont tous nuls sauf si $i_1,\cdots i_n$ sont deux à deux distincts. Ceci n'est pas possible si $n>p$ et lorsque $n=p$, ceci est possible si et seulement si $\{i_1,\cdots,i_p\}=[\![1,p]\!]$ et dans ce cas, $(i_1,\cdots,i_p)$ est une permutation de $[\![1,p]\!]$. Mais puisque f est aussi antisymétrique, la valeur de $f(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})$ est donc déterminée par $f(e_1,\cdots,e_p)$ et « le nombre d'échanges » dans la permutation. Autrement dit, f sera parfaitement déterminée par l'image de la base. Tout ceci sera développé en détails dans le cours de mathématiques spéciales 1.*

Théorème 8.1.2.4 (Admis) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 1$, alors $\Lambda_n(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim\Lambda_n(E)=1$. De plus, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, l'application* $\begin{array}{ccc}\Lambda_n(E) & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ f & \longmapsto & f(\mathcal{B})\end{array}$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

8.1.3 Définition du déterminant dans une base $\mathcal{B}$ et propriétés élémentaires

Théorème 8.1.3.1 (Définition) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Alors, pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, il existe un unique élément de $\Lambda_n(E)$ (c'est-à-dire une unique forme n-linéaire alternée), noté $\det_{\mathcal{B}}$, tel que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \cdots, e_n) = 1$.*
La forme n-linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ est appelée le déterminant dans la base $\mathcal{B}$.

Preuve :

D'après le théorème 8.1.2.4, $\mathcal{B}$ étant une base fixée de E, l'application qui à $f \in \Lambda_n(E)$ associe $f(\mathcal{B}) \in \mathbb{K}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Par conséquent, il existe un unique $f \in \Lambda_n(E)$ tel que $f(\mathcal{B}) = 1$.

⊠

À retenir : le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ est donc mathématiquement défini par « sa valeur sur $\mathcal{B}$ et ses règles de calcul », c'est-à-dire par le fait que c'est la seule forme n-linéaire alternée sur E vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. En revanche, le calcul pratique de déterminant d'une famille de vecteurs n'est pas toujours facile à faire : dans le paragraphe 3, on verra quelques outils pratiques pour le calcul effectif.

Exemple 8.1.3.2 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E et soient $u_1 = ae_1 + be_2$ et $u_2 = ce_1 + de_2$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) &= \det_{\mathcal{B}}(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\
&= ac\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_1) + ad\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) + bc\det_{\mathcal{B}}(e_2, e_1) + bd\det_{\mathcal{B}}(e_2, e_2) \\
&= ad\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) + bc\det_{\mathcal{B}}(e_2, e_1) \quad \text{(puisque } \det_{\mathcal{B}} \text{ est alternée)} \\
&= ad\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) - bc\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) \quad \text{(puisque } \det_{\mathcal{B}} \text{ est antisymétrique)} \\
&= ad - bc \quad \text{(puisque par définition, } \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1)
\end{aligned}$$

On retrouve donc la « formule » que vous avez probablement vue dans $\mathbb{R}^2$ ou dans un cours de géométrie plane.

Remarque : *la différence avec le déterminant étudié en géométrie plane est qu'ici il n'y a pas d'hypothèses sur la base : c'est une base quelconque de E alors que dans le cours de géométrie plane, c'était en base orthonormée directe. On reverra dans le chapitre suivant (espaces euclidiens) la définition formelle d'une base orthonormée (et directe) et on montrera que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées directes, alors le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ et le déterminant dans la base $\mathcal{B}'$ sont égaux, c'est ce qui explique pourquoi on parlait de déterminant de deux vecteurs, sans préciser la base.*

Dans toute la suite de ce chapitre, E désignera toujours un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

8.1.4 Caractérisation des bases de E par le déterminant

Théorème 8.1.4.1 *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. Plus précisément, on a :*

$$\lambda = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$$

En particulier, $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$ et donc $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \neq 0$.

Preuve :

• Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée de E qui n'est pas identiquement nulle (puisque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$). Or, d'après le théorème 8.1.2.4, $\Lambda_n(E)$ est de dimension 1 : par suite, $(\det_{\mathcal{B}})$ est une base de $\Lambda_n(E)$.

• Puisque $\mathcal{B}'$ est aussi une base de E, $\det_{\mathcal{B}'} \in \Lambda_n(E)$ et donc il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. Par ailleurs, puisque $\det_{\mathcal{B}'}$ n'est pas identiquement nulle, on a $\lambda \neq 0$. Ce qui montre le premier point du théorème.

• Enfin, en partant de l'égalité $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$ (égalité dans $\Lambda_n(E)$) et en évaluant ces deux formes n-linéaires sur la base $\mathcal{B}$ puis sur la base $\mathcal{B}'$, on obtient :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda \quad \text{et} \quad 1 = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

Par conséquent, on a bien $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \neq 0$ et $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$. ⊠

Remarque : *en particulier, on a donc pour toutes bases $\mathcal{B}$,$\mathcal{B}'$ de E et tout $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$:*

$$\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$$

Théorème 8.1.4.2 *Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E telle que $|\mathcal{F}| = \dim E$. Alors :*

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \iff \det{}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$$

Preuve :

• Montrons $\Longrightarrow$
Si $\mathcal{F}$ est une base, alors d'après le théorème précédent, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in \mathbb{K}^\star$.

• Montrons $\Longleftarrow$
On raisonne par contraposée et on suppose donc que $\mathcal{F}$ n'est pas une base de E. Alors $\mathcal{F} = (u_1, \cdots, u_n)$ est une famille liée (puisque $|\mathcal{F}| = \dim E$). Il existe donc $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_j \neq 0$. Alors $u_j = \sum_{i \neq j} \frac{-\lambda_i}{\lambda_j} u_i$ et donc :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \sum_{i \neq j} \frac{-\lambda_i}{\lambda_j} \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \cdots, u_n) = 0$$

puisque le déterminant est une forme alternée.

⊠

8.2 Déterminant d'un endomorphisme

8.2.1 Définition

Théorème 8.2.1.1 *Soient E de dimension $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :*

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n \ , \ \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \cdots, f(x_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$$

De plus, le nombre λ est indépendant du choix de la base : on l'appelle le déterminant de f, et on le note $\det(f)$ ou $\det f$.

Preuve :

• Tout d'abord, puisque $f \in \mathcal{L}(E)$ et puisque le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ est n-linéaire alterné, il est clair que l'application :

$$\varphi_{\mathcal{B}}(f) : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \end{array}$$

est une forme n-linéaire alternée sur E. Par suite, il existe bien un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\varphi_{\mathcal{B}}(f) = \lambda \det_{\mathcal{B}}$.

• Montrons à présent que λ ne dépend pas du choix de la base. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$. D'après le théorème 8.1.4.1 :

$$\begin{array}{rcl} \det_{\mathcal{B}'}(f(x_1), \cdots, f(x_n)) & = & \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(f(x_1, \cdots, f(x_n)) \\ & = & \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) \\ & = & \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \lambda \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \cdots, x_n) \\ & = & (\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})) \times \lambda \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \cdots, x_n) \end{array}$$

Or, toujours d'après le théorème 8.1.4.1, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$. Par conséquent,

$$\det_{\mathcal{B}'}(f(x_1), \cdots, f(x_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \cdots, x_n)$$

Ce qui prouve que λ est indépendant du choix de la base de E.

⊠

Remarques :

- *on a donc pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E :*

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$$

  Le choix de la base $\mathcal{B}$ n'est pas important pour la valeur de $\det(f)$ *mais par contre, on verra qu'avec un choix « astucieux », on peut faire le calcul beaucoup plus simplement ;*
- *il ne faut pas confondre le déterminant d'un endomorphisme (qui ne dépend pas du choix de la base) et le déterminant d'une famille de vecteurs qui lui dépend du choix de la base !* $\det_{\mathcal{B}}$ *est une forme n-linéaire alternée sur E alors que* det *(l'application qui à $f \in \mathcal{L}(E)$ associe son déterminant) n'est pas une fonction « d'une seule variable » et il n'y a donc aucun sens à dire qu'elle est multilinéaire.*

Exemple 8.2.1.2 On a toujours $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$. En effet, si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors :

$$\det(\mathrm{Id}_E) = \det_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$$

Exemple 8.2.1.3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, x - 3y)$. Calculons le déterminant de f. Pour cela, on peut considérer $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\det(f) &= \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2)) \\
&= \det_{\mathcal{B}}(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2) \\
&= -6 \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) + \det_{\mathcal{B}}(e_2, e_1) + 0 + 0 \\
&= -6 \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) - \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) \\
&= -7
\end{aligned}$$

Exemple 8.2.1.4 Si s est une symétrie de E, alors en notant $p = \dim(\ker(s + \mathrm{Id}_E))$, on a $\det(s) = (-1)^p$. Dans cet exemple, si on choisit une base quelconque de E, il est *a priori* impossible de calculer le déterminant de s. En revanche, puisque $\ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E) = E$, si on choisit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_{p+1}, \cdots, e_n)$ une base de $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E et :

$$\begin{aligned}
\det(s) &= \det_{\mathcal{B}}(s(e_1), \cdots, s(e_p), s(e_{p+1}), \cdots, s(e_n)) \\
&= \det_{\mathcal{B}}(-e_1, \cdots, -e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n) \\
&= (-1)^p \det_{\mathcal{B}}(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n) \\
&= (-1)^p \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) \\
&= (-1)^p
\end{aligned}$$

Ceci confirme ce qui a été dit dans la remarque : le choix de la base pour faire le calcul du déterminant est important !

8.2.2 Propriétés du déterminant et caractérisation des isomorphismes

Proposition 8.2.2.1 *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors en notant $n = \dim(E)$,*

$$\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$$

Preuve :

En effet, soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On a alors :

$$\begin{aligned} \det(\lambda f) &= \det_{\mathcal{B}}((\lambda f)(e_1), \cdots, (\lambda f)(e_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(\lambda f(e_1), \cdots, \lambda f(e_n)) \\ &= \lambda^n \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) \quad (\det_{\mathcal{B}} \text{ est } n\text{-linéaire}) \\ &= \lambda^n \det(f) \end{aligned}$$

⊠

Proposition 8.2.2.2 *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Alors* $\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f)$.

Preuve :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Alors, par définition du déterminant d'un endomorphisme, on a successivement :

$$\begin{aligned} \det(g \circ f) &= \det_{\mathcal{B}}\Big(g(f(e_1)), \cdots, g(f(e_n))\Big) \\ &= \det(g) \times \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) \\ &= \det(g) \times \det(f) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) \\ &= \det(g) \times \det(f) \end{aligned}$$

⊠

Exemple 8.2.2.3 Si f est nilpotent, alors $\det(f) = 0$ car il existe $p \geqslant 1$ tel que $f^p = 0$. D'après la proposition précédente, $0 = \det(f^p) = (\det(f))^p$ et puisque $\mathbb{K}$ est intègre $\det(f) = 0$.

⚠ **Attention :** le déterminant d'endomorphisme n'est pas linéaire et n'est pas additif si $n \geqslant 2$! En général :

$$\det(f + g) \neq \det(f) + \det(g)$$

Il suffit par exemple de choisir $f = g = \mathrm{Id}_E$, $2^n = \det(2\mathrm{Id}_E) \neq 2 = \det(\mathrm{Id}_E) + \det(\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 8.2.2.4 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$. Montrer que la dimension de E est paire.

Remarque : *puisqu'une application linéaire est parfaitement caractérisée par l'image d'une base, on conclut que le déterminant va aussi caractériser les automorphismes.*

Proposition 8.2.2.5 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.*

(i) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors : $f \in GL(E) \iff \det f \neq 0$.

(ii) L'application φ : $\begin{array}{ccc} GL(E) & \longrightarrow & \mathbb{K}^\star \\ f & \longmapsto & \det(f) \end{array}$ *est un morphisme de groupes.*

(iii) En particulier, on a donc : $\forall f \in GL(E)$, $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

(iv) On définit $SL(E) = \{f \in GL(E) \ / \ \det(f) = 1\}$. Alors, $SL(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$, appelé groupe spécial linéaire de E.

Preuve :

• Montrons (i).
Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors :

$$f \in GL(E) \iff f(\mathcal{B}) \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \neq 0$$

Par définition du déterminant d'un endomorphisme, on a donc

$$f \in GL(E) \iff \det(f) \neq 0$$

• Montrons (ii), (iii) et (iv).
D'après (i), φ est bien définie et d'après la proposition précédente, φ est un morphisme de groupes. Ce qui montre (ii).
Puisque φ est un morphisme de groupes, (iii) est évident (propriété des morphismes de groupes) et $SL(E) = \ker(\varphi)$ est donc un sous-groupe de $GL(E)$. ⊠

8.3 Déterminant d'une matrice carrée

8.3.1 Définition et propriétés « simples »

Définition 8.3.1.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A. Soit $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On définit le déterminant de la matrice A, noté $\det A$, ou encore $\det(A)$ ou encore $|A|$, par :

$$\det A = \det{}_{\mathcal{B}_n}(C_1, \cdots, C_n)$$

Remarque : *ainsi, si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors en notant $\mathcal{B} = (E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a :*

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}E_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i,2}E_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}E_i\right)$$

Proposition 8.3.1.2 *Pour tout* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ *:*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

et pour tout $M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$*, on a :*

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} \\ &= x_{11}x_{22}x_{33} + x_{21}x_{32}x_{13} + x_{12}x_{23}x_{31} - x_{11}x_{23}x_{32} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31} \end{aligned}$$

Preuve :

• Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. En notant $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = (E_1, E_2)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$. Par suite,

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(aE_1 + cE_2, bE_1 + dE_2) = ad - bc$$

(voir l'exemple 8.1.3.2 pour les calculs).

• Dans le cas de la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on développe brutalement en utilisant la trilinéarité du déterminant. En notant cette fois $\mathcal{C} = (E_1, E_2, E_3)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, on a :

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det_{\mathcal{C}}\left(\sum_{i=1}^{3} x_{i,1}E_i, \sum_{j=1}^{3} x_{j,2}E_j, \sum_{k=1}^{3} x_{k,3}E_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_{i,1}x_{j,2}x_{k,3} \det_{\mathcal{C}}(E_i, E_j, E_k) \end{aligned}$$

Ensuite, il suffit d'écrire explicitement les termes de cette somme (27 termes) et de constater que seuls 6 termes ne sont pas directement nuls puisque le déterminant est alterné (on a trois choix pour i ; pour i fixé, il ne reste plus que 2 choix pour j, puis la valeur de k est alors fixée). Dans ces 6 termes, on fait le calcul en « remettant » les vecteurs de la base dans le bon ordre et en utilisant l'antisymétrie du déterminant dans la base $\mathcal{C}$. Par exemple :

$$\det_{\mathcal{C}}(E_2, E_3, E_1) = -\det_{\mathcal{C}}(E_1, E_3, E_2) = -(-\det_{\mathcal{C}}(E_1, E_2, E_3)) = 1$$

Je vous laisse faire les calculs par vous-même. ⊠

Remarque : *pour le calcul du déterminant d'ordre 3, on peut utiliser la règle de Sarrus : on fait tous les produits de 3 termes sur chacune des 6 « diagonales » : les diagonales « montantes » ↗ sont comptées − et les diagonales « descendantes » ↘ sont comptées +.*

Exemple 8.3.1.3 Calculons le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant la règle de Sarrus.

• Il y a ici trois « diagonales descendantes » :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 1 \\ -1 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 1 \\ 2 & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{1} \\ \boxed{2} & 1 & 1 \\ -1 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne $1 \times 1 \times 1 + (-1) \times 2 \times 1 + 2 \times 1 \times 1 = 1$.

• De même, il y a trois « diagonales montantes » :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{1} \\ 2 & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 1 \\ \boxed{2} & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \boxed{1} \\ -1 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne : $(-1) \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 = 4$.

• On conclut donc que $\det(A) = 1 - 4 = -3$.

Théorème 8.3.1.4 *Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det({}^tA) = \det(A)$.*

Preuve :

On admet le cas général. Pour $n = 2$ ou $n = 3$, c'est évident à partir des formules données ci-dessus. Le lecteur curieux pourra consulter le cours de mathématiques spéciales 1 pour le cas général. ⊠

Exercice 8.3.1.5 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{A}_{2n+1}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(A) = 0$.

Remarque : *terminons ce paragraphe avec une remarque sur les notations. En toute rigueur, il faudrait noter* det *le déterminant d'un endomorphisme et* Det *le déterminant d'une matrice : il s'agit de deux applications distinctes. Mais comme vous pouvez vous en doutez, la même notation signifie qu'on pourra identifier le déterminant d'un endomorphisme et celui de sa matrice dans une base. Ceci explique la notation identique utilisée.*

Dans le paragraphe qui suit, on va étudier des méthodes « pratiques » de calcul de déterminant. Les théorèmes sont majoritairement admis dans ce cours et l'objectif de ce chapitre est plutôt la maîtrise des méthodes calculatoires. La partie plus théorique ainsi que les preuves de propriétés admises seront étudiées plus en détails dans le cours de mathématiques spéciales 1.

8.3.2 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Définition 8.3.2.1 Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on définit :

- le mineur (i,j) de la matrice A, noté $\Delta_{i,j}$, comme le déterminant d'ordre $n-1$ de la matrice $A'_{i,j}$, obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne ;
- le cofacteur de $a_{i,j}$, noté $A_{i,j}$, par : $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A'_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

On admet qu'on peut obtenir le déterminant de A en développant par rapport à une ligne ou une colonne. Formellement, c'est le théorème suivant :

Théorème 8.3.2.2 (Admis) *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$. Avec les notations précédentes :*

- *On peut développer par rapport à la j-ème colonne :*

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\ ,\ \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\det A'_{i,j}$$

- *On peut développer par rapport à la i-ème ligne :*

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\det A'_{i,j}$$

À retenir : *la règle est qu'on fait la somme (soit sur i, soit sur j) des $(-1)^{i+j}a_{i,j}$ (indice de ligne + colonne) fois le déterminant de la matrice où l'on a retiré la i-ème ligne et la j-ème colonne.*

Exemple 8.3.2.3 Pour calculer le déterminant de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, il est plus astucieux de développer par rapport à la deuxième ligne (puisqu'il y a plus de 0). On obtient alors :

$$\det A = (-1)\times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Exercice 8.3.2.4 Calculer le déterminant de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

8.3.3 Opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes

Par définition, le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de la famille des vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Mais le déterminant dans une base $\mathcal{B}$ donnée est n-linéaire et alterné : on en déduit donc que les opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice sont « compatibles » avec le calcul de déterminant.

Proposition 8.3.3.1 *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$.*

- *Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, en notant M la matrice obtenue par l'opération $C_i \longleftarrow C_i + \alpha C_j$ sur A, on a :*
$$\det(M) = \det(A)$$
- *En notant N la matrice obtenue par l'opération $C_i \longleftrightarrow C_j$ sur A, on a :*
$$\det(N) = -\det(A)$$
- *Enfin, si $\alpha \in \mathbb{K}^\star$, on note P la matrice obtenue par l'opération $C_i \longleftarrow \alpha C_i$ sur A. Alors :*
$$\det(P) = \alpha \det(A)$$

Preuve :

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on conserve les notations de la proposition. Pour le premier point,

$$\begin{aligned}\det(M) &= \det_{\mathcal{B}}(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i + \alpha C_j, C_{i+1}, \cdots, C_n)\\ &= \det_{\mathcal{B}}(C_1, \cdots, C_n) + \alpha \det_{\mathcal{B}}(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \cdots C_n)\\ &= \det_{\mathcal{B}}(C_1, \cdots, C_n)\\ &= \det(A)\end{aligned}$$

Les autres propriétés sont évidentes car $\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique et linéaire par rapport à la i-ème place. ⊠

Remarques :

- *dans la pratique, on n'utilise pas les opérations (ii) et (iii) qui modifient la valeur du déterminant ;*
- *on retient surtout la première propriété qui est très utile pour le calcul pratique de déterminant et qui se généralise de la façon suivante : si on remplace une colonne C_i par C_i à laquelle on rajoute une combinaison linéaire des autres colonnes de la matrice, alors le déterminant est le même. Ceci sera particulièrement efficace lorsque couplé avec le calcul de déterminant de matrices triangulaires ;*
- *puisque $\det(A) = \det({}^tA)$, les règles sont valables pour les opérations sur les lignes de A.*

8.3.4 Cas particulier : cas des matrices triangulaires

Corollaire 8.3.4.1 *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire. Alors :*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Preuve :

Tout d'abord, puisque $\det(A) = \det({}^tA)$, il suffit de prouver le résultat pour une matrice triangulaire supérieure.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ que :

$$\forall A \in T_{n,s}(\mathbb{K}),\ \det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

où l'on note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Initialisation :
Pour $n = 1$, c'est clair.

Hérédité :
On suppose la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in T_{n+1,s}(\mathbb{K})$. On développe le déterminant par rapport à la $n+1$-ème ligne, ce qui donne

$$\det(A) = a_{n+1,n+1} \det(A')$$

où A' est obtenue en supprimant la $n+1$-ème ligne et la $n+1$-ème colonne de A, c'est-à-dire $A' = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in T_{n,s}(\mathbb{K})$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\det(A') = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Ce qui donne en remplaçant dans le déterminant de A :

$$\det(A) = a_{n+1,n+1} \det(A') = \prod_{i=1}^{n+1} a_{i,i}$$

Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$ et achève la démonstration par récurrence.

⊠

Remarque : *ce résultat est tout à fait cohérent avec ce qu'on a vu sur les matrices triangulaires. En effet, on sait qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls et on montrera dans le paragraphe suivant qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*

Exemple 8.3.4.2 On veut calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Au lieu de développer brutalement par rapport à une ligne ou une colonne puis de recommencer pour chacun des déterminants obtenus, on va effectuer des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, de façon à faire apparaître « beaucoup » de zéros et si ce n'est pas long, transformer A en une matrice triangulaire. Ceci permet de conclure directement sur la valeur du déterminant.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - L_1 \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} && C_3 \longleftarrow C_3 - C_4 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} && C_2 \longleftarrow C_2 + C_3 \\
&= 1 \times (-1) \times 1 \times 2 && \text{(matrice triangulaire)} \\
&= -2
\end{aligned}$$

Notez qu'on aurait aussi pu s'arrêter après la première série d'opérations élémentaires sur les lignes et développer par rapport à la première colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Puis pour le déterminant restant, il suffit d'appliquer la règle de Sarrus (3 termes sur les six sont nuls à cause des deux zéros dans la matrice).

8.3.5 Lien avec le déterminant de l'application linéaire associée et conséquences

Proposition 8.3.5.1 *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E, et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Alors :*

$$\det(f) = \det(A)$$

Preuve :

En effet, en notant $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $A = [a_{i,j}]$, on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$. Par suite, en notant $\mathcal{B}_n = (E_1, \cdots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det_{\mathcal{B}_n}(C_1, \cdots, C_n) \\
&= \det_{\mathcal{B}_n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} E_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} E_i\right) \\
&= \det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} e_i\right) \\
&= \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) \\
&= \det(f)
\end{aligned}$$

⊠

Remarque importante : *ainsi, on retrouve ici que le déterminant de f est égal au déterminant de la matrice de f dans n'importe quelle base, c'est-à-dire que le déterminant de f ne dépend pas du choix de la base.*

Corollaire 8.3.5.2 *On en déduit les propriétés suivantes :*

(i) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ *;*

(ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$ *;*

(iii) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0)$.
Dans ce cas,
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

(iv) L'application déterminant est un morphisme de groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^\star$;

(v) $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \ / \ \det(A) = 1\}$ *est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.*

Preuve :

C'est une simple conséquence des résultats vus pour les endomorphismes en considérant les endomorphismes canoniquement associés aux matrices. ⊠

⚠ **Attention :** en revanche, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ en général !

Exercice 8.3.5.3 En utilisant les formules de changement de bases et les propriétés du déterminant d'une matrice, retrouver que le déterminant de la matrice d'un endomorphisme dans une base $\mathcal{B}$ ne dépend pas du choix de la base.

8.4 Systèmes d'équations linéaires

8.4.1 Définitions et structure des solutions

Définition 8.4.1.1 Soient n, p deux entiers non nuls. On appelle système linéaire à n équations et p inconnues $x_1, \cdots, x_p$ dans $\mathbb{K}$, tout système de la forme :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{i,p}x_p & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

où pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $a_{i,j} \in \mathbb{K}$.

Définition 8.4.1.2 Soit (S) un système linéaire à n équations et p inconnues. Avec les notations précédentes, on pose $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = [b_i] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- La matrice A est appelée la matrice du système linéaire ;
- B est appelé le second membre du système ;
- le système s'écrit matriciellement sous la forme $AX = B$ avec $X = [x_i] \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$;
- l'ensemble des solutions du système (S) est noté

$$E_{(S)} = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \ , \ AX = B\}$$

Proposition 8.4.1.3 *L'ensemble des solutions d'un système linéaire est soit vide, soit un espace affine de direction* $\ker(A)$.

Preuve :

En effet, $\varphi : X \longmapsto AX$ est linéaire donc l'équation $AX = B$ est une équation linéaire. On sait alors (voir cours de mathématiques supérieures 1 : espaces vectoriels et applications linéaires) que l'ensemble des solutions est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\ker(\varphi) = \ker(A)$.

⊠

8.4.2 Rang d'un système linéaire et dimension de l'espace homogène associé

On peut interpréter le système en disant que si $C_1, \cdots, C_p$ sont les colonnes de A, on cherche $x_1, \cdots, x_p \in \mathbb{K}$ tels que $x_1C_1 + \cdots + x_pC_p = B$, autrement dit, on cherche si $B \in \mathrm{Im}(A)$.

Définition 8.4.2.1 Soient (S) un système linéaire, A la matrice associée, et $C_1, \cdots, C_p$ les colonnes de A. On définit :

- le rang du système (S) par $\mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}(A) = \dim\left(Vect(C_1, \cdots, C_p)\right)$;
- le système homogène (ou sans second membre) associé à (S), noté (S_0), par $(S_0) : AX = 0$.

Proposition 8.4.2.2 *Soient (S) un système linéaire, A la matrice associée et E_0 l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (S_0). Alors E_0 est un espace vectoriel de dimension finie et* $\dim(E_0) = p - rg(A)$.

Preuve :

C'est une simple application du théorème du rang :

$$\dim(E_0) = \dim(\ker(A)) = \dim(\mathbb{K}^p) - \mathrm{rg}(A) = p - \mathrm{rg}(A)$$

⊠

Définition 8.4.2.3 On dit que le système (S) est compatible si $E_{(S)} \neq \emptyset$.

Remarque : *ainsi, le système (S) est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{Im}(A)$.*

8.4.3 Cas des systèmes de Cramer et formules de Cramer

Définition 8.4.3.1 Un système $AX = B$ est dit de Cramer si $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Dans ce cas, il admet alors une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

Proposition 8.4.3.2 (Formules de Cramer) *Soient $AX = B$ un système de Cramer et $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A. Alors l'unique solution $X = [x_i]$ de (S) est donnée par :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ x_i = \frac{1}{\det(A)} \det\left(C_1, \cdots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \cdots, C_n\right)$$

Preuve :

• Tout d'abord, puisque (S) est un système de Cramer, A est inversible et (S) admet bien une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

• Ensuite, en posant $X = [x_i]$, puisque $AX = B$, on a $B = \sum_{i=1}^{n} x_i C_i$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On note :

$$M_k = \det(C_1, \cdots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \cdots, C_n)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} M_k &= \det(C_1, \cdots, C_{k-1}, \sum_{i=1}^{n} x_i C_i, C_{k+1}, \cdots, C_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \det(C_1, \cdots, C_{k-1}, C_i, C_{k+1}, \cdots, C_n) \\ &= x_k \det(C_1, \cdots, C_{k-1}, C_k, C_{k+1}, \cdots C_n) \\ &= x_k \det(A) \end{aligned}$$

D'où le résultat puisque $\det(A) \neq 0$. ⊠

Exemple 8.4.3.3 Soit le système (S) : $\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & a' \\ cx + dy & = & b' \end{array} \right.$. On suppose que $ad - bc \neq 0$. Alors d'après les formules de Cramer, la solution (x, y) du système est donnée par :

$$x = \frac{1}{ad - bc} \begin{vmatrix} a' & b \\ b' & d \end{vmatrix} = \frac{da' - bb'}{ad - bc} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{ad - bc} \begin{vmatrix} a & a' \\ c & b' \end{vmatrix} = \frac{ab' - ca'}{ad - bc}$$

On retrouve donc que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

Autrement dit, on retrouve que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et A est inversible (c'est-à-dire $\det(A) \neq 0$), alors $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple 8.4.3.4 On veut résoudre le système suivant :

$$(S):\ \begin{cases} x+y+z+t &= 1\\ 2x-y+z+2t &= 3\\ -x+2y+2z-2t &= 3\\ -3x+2y+4z+3t &= 0 \end{cases}$$

Dans la pratique, pour résoudre un système (et/ou déterminer s'il admet une solution), on peut procéder en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes (car pour toute matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $AX = B \iff (PA)X = PB$) ou parfois par substitution (c'est-à-dire remplacer une des inconnues par une combinaison linéaires des autres dans les autres équations) ou encore en combinant ces deux méthodes. Dans notre exemple, on peut rédiger de la façon suivante :

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 1\\ 2x-y+z+2t &= 3\\ -x+2y+2z-2t &= 3\\ -3x+2y+4z+3t &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z+t &= 1 & L_1\\ -3y-z &= 1 & L_2 \longleftarrow L_2-2L_1\\ 3y+3z-t &= 4 & L_3 \longleftarrow L_3+L_1\\ 5y+7z+6t &= 3 & L_4 \longleftarrow L_4+3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z+t &= 1\\ z &= -1-3y\\ -6y-t &= 7\\ -16y+6t &= 10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z+t &= 1 & L_1\\ z &= -1-3y & L_2\\ -6y-t &= 7 & L_3\\ -52y &= 52 & L_4 \longleftarrow L_4+6L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 1-y-z-t\\ z &= -1-3y\\ t &= -6y-7\\ y &= -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 1\\ z &= 2\\ t &= -1\\ y &= -1 \end{cases}$$

La solution du système est donc $(x, y, z, t) = (1, -1, 2, -1)$ (attention à l'ordre).

Bien entendu, la méthode ci-dessus est souvent beaucoup plus rapide que d'appliquer les formules de Cramer. Dans cet exemple, pou pouvoir appliquer les formules de Cramer, on doit calculer 5 déterminants de taille 4 (celui de la matrice A, puis un pour chaque inconnue du système) : ce calcul est *a priori* bien plus long que la résolution proposée ici. À titre d'exercice, je vous encourage à faire ces calculs par vous-même pour vous rendre compte de cette différence de temps.
En revanche, bien que souvent peu « pratique » dans les exercices pratiques, les formules de Cramer sont assez importantes dans un cadre plus « théorique » et il est donc important de les connaître.

Définition 8.4.3.5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$. On appelle comatrice de A, et on note $Com(A)$, ou encore $\widetilde{A}$, la matrice dont les coefficients sont les cofacteurs de A.
Autrement dit, si $A = (a_{i,j})$ et si $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A'_{i,j}$ avec $A'_{i,j}$ la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A, alors :

$$Com(A) = (A_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

Proposition 8.4.3.6 *Si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\widetilde{A}$.*

Preuve :

On suppose que $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible.
Soient $Y = (y_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors :

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y$$

Or, d'après les formules de Cramer, $AX = Y$ si et seulement si pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$,

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} \times \det(C_1, \cdots, C_{j-1}, Y, C_{j+1}, \cdots, C_n)$$

avec $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de la matrice A. En développant ce déterminant par rapport à la j-ème colonne, on a alors :

$$\begin{aligned} \det(A) \times x_j &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} y_i \det A'_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} y_i \end{aligned}$$

Ce qui montre que $Y = AX$ si et seulement si $\det(A)X = {}^tCom(A)Y$, c'est-à-dire

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^tCom(A)$$

⊠

Exercice 8.4.3.7 Montrer plus généralement que pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A {}^tCom(A) = {}^tCom(A) A = \det(A) I_n$$

8.4.4 Méthode du pivot de Gauss pour résoudre un système

Dans l'exemple précédent (exemple 8.3.4.3), on a déjà remarqué qu'on pouvait faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice du système pour résoudre. Ces calculs sont similaires à la méthode du pivot de Gauss pour déterminer le rang. En revanche, pour éviter les confusions, on ne fait pas d'opérations élémentaires sur les colonnes (qui reviennent à faire des changements d'inconnues) pour résoudre un système : seulement sur les lignes.
Enfin, notez que ces résolutions sont similaires aux recherches d'équations paramétriques de droites ou plan vues en géométrie et dans les espaces vectoriels (cours de mathématiques supérieures 1).

Exemple 8.4.4.1 Déterminer suivant les valeurs de a et b (deux réels), la ou les solutions de :

$$(S)\ \left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 1 \\ 2x+y-z & = & 4 \\ ax+2y+z & = & b \end{array}\right.$$

On applique la méthode décrite ci-dessus.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 1 \\ 2x+y-z & = & 4 \\ ax+2y+z & = & b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcll} 3x+2y & = & 5 & L_1 \longleftarrow L_1+L_2 \\ 2x+y-z & = & 4 & L_2 \\ (a+2)x+3y & = & b+4 & L_3 \longleftarrow L_3+L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcll} 3x+2y & = & 5 & L_1 \\ 2x+y-z & = & 4 & L_2 \\ (2a-5)x & = & 2b-7 & L_3 \longleftarrow 2L_3-3L_1 \end{array}\right.$$

Notez qu'on a en fait ici « trigonalisé », c'est-à-dire en changeant l'ordre des variables et en posant $Z=(z,y,x)$, le dernier système s'écrit $TZ=C$ avec T triangulaire supérieure. La résolution est alors simple et se fait en « remontant les équations une par une en remplaçant par les valeurs trouvées ».

Compte tenu de la dernière équation, on considère deux cas :

- Premier cas : $a \neq \frac{5}{2}$
  Dans ce cas, on a :
$$(S) \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & \frac{5}{2}-\frac{3}{2}x \\ z & = & 2x+y-4 \\ x & = & \frac{2b-7}{2a-5} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & \frac{5a-3b-2}{2a-5} \\ z & = & \frac{-3a+b+4}{2a-5} \\ x & = & \frac{2b-7}{2a-5} \end{array}\right.$$
- Deuxième cas : $a = \frac{5}{2}$
  Dans ce cas, on doit à nouveau distinguer deux cas :
  - si $b \neq \frac{7}{2}$, alors le système (S) n'est pas compatible (autrement dit, il n'y a pas de solution) ;
  - si $b = \frac{7}{2}$, alors :
$$(S) \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & \frac{5}{2}-\frac{3}{2}x \\ z & = & 2x+y-4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & \frac{5}{2}-\frac{3}{2}x \\ z & = & -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x \end{array}\right.$$
    Et l'ensemble des solutions de (S) est donc $\{\left(x, \frac{5}{2}-\frac{3}{2}x, -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x\right)\ , x \in \mathbb{R}\}$.

Remarques :

- *si vous n'avez pas confiance en vos capacités de calcul, vous pouvez aussi commencer par calculer le déterminant de la matrice A du système, ce qui va faire apparaître naturellement les cas à distinguer suivant les valeurs de a (autrement dit, on saura pour quelles valeurs de a, A est inversible - et il y a donc existence et unicité de la solution - ou ne l'est pas - et il y aura donc aucune solution ou une infinité de solutions). Dans cet exemple, le calcul direct donne :*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2a - 5$$

Ce qui permet de distinguer directement les deux cas. Notez que pour $2a - 5 \neq 0$, on peut aussi appliquer les formules de Cramer mais ce n'est pas plus rapide que de faire la résolution du système.

- *Bien entendu, on retrouve aussi les méthodes géométriques dans le sens où les deux premières équations sont des équations de plans dont on connaît un vecteur normal pour chacun. La condition $2a - 5$ est la condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur normal du dernier plan soit proportionnel au produit vectoriel des deux autres vecteurs normaux.*

Exemple 8.4.4.2 On veut résoudre $\left\{ \begin{array}{lcl} y - 2z + 3t & = & a \\ -x + 3y + 5t & = & b \\ x - y - 4z + t & = & c \end{array} \right.$.

• Première méthode

On ne se pose pas de questions sur les solutions ou bien comment les trouver : on applique « bêtement » la méthode du pivot de Gauss (pour les lignes).

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y - 2z + 3t & = & a \\ -x + 3y + 5t & = & b \\ x - y - 4z + t & = & c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcll} x - y - 4z + t & = & c & \\ -x + 3y + 5t & = & b & \\ y - 2z + 3t & = & a & \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcll} x - y - 4z + t & = & c & \\ 2y - 4z + 6t & = & c + b & L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ y - 2z + 3t & = & a & \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcll} x - y - 4z + t & = & c & \\ y - 2z + 3t & = & a & L_2 \longleftrightarrow L_3 \\ 2y - 4z + 6t & = & c + b & \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcll} x - y - 4z + t & = & c & \\ y - 2z + 3t & = & a & L_2 \longleftrightarrow L_3 \\ 0 & = & c + b - 2a & L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \right.$$

On distingue alors deux cas :

∗ si $b + c - 2a \neq 0$, alors le système n'a pas de solution ;

∗ si $b+c-2a=0$, alors :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x-y-4z+t & = & c \\ y-2z+3t & = & a \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & c+y+4z-t \\ y & = & a+2z-3t \end{array} \right.$$

d'où en remplaçant y par son expression en fonction de z et t dans la première équation :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a+c+6z-4t \\ y & = & a+2z-3t \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions est donc $E_S = \{(a+c+6z-4t, a+2z-3t, z, t) \ , (z,t) \in \mathbb{R}^2\}$.

• Seconde méthode

La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

∗ On calcule le rang de A et on trouve (le faire) : $\mathrm{rg}(A) = 2$.

∗ Les deux premières colonnes de A sont indépendantes : elles forment donc une base de l'image. Le système sera compatible si et seulement si $B \in \mathrm{Im}(A) =< C_1, C_2 >$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ b & -1 & 3 \\ c & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{soit encore} \quad -2a+b+c=0$$

(en développant par rapport à la première colonne).

∗ Lorsque le système est compatible, puisque le rang de A est 2, et puisque (par exemple) les deux premières lignes de A sont indépendantes, on sait que la troisième ligne du système est une combinaison linéaire des deux premières, autrement dit :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y-2z+3t & = & a \\ -x+3y+5t & = & b \end{array} \right.$$

En effet, la condition de compatibilité signifie que $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$ donc :

$$\mathrm{rg}(C_1, C_2, C_3, C_4, B) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, C_3, C_4)$$

c'est-à-dire

$$2 = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & a \\ -1 & 3 & 0 & 5 & b \\ 1 & -1 & -4 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Les deux premières lignes de cette nouvelle matrice étant clairement non colinéaires, elles forment une base de l'espace engendré par les lignes. On conclut donc que la troisième ligne est bien une combinaison linéaire des deux premières.

∗ Enfin, puisque $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, le système admet « une unique solution en (z,t) » et d'après les formules de Cramer (ou ici ce n'est pas utile on peut simplement substituer) :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3a - b + 6z - 4t \\ y & = & a + 2z - 3t \end{array} \right.$$

On conclut donc que l'ensemble des solutions est :

$$E' = \{(3a - b + 6z - 4t, a + 2z - 3t, z, t) \ , (z,t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Il s'agit bien du même ensemble trouvé avec la première méthode (il suffit de remplacer b par $2a - c$ pour obtenir exactement la même forme).

Remarques :

- *notez bien que l'ensemble des solutions est unique mais que la forme des solutions ne l'est pas ! Cela dépend du choix des « paramètres » (ou de façon équivalente, du choix de la base de* $\ker(A)$*) ;*
- *la seconde méthode proposée est en fait « générale » et fait appel aux notions de déterminant principal, d'équations et d'inconnues principales. Le lecteur intéressé pourra consulter n'importe quel ouvrage de licence et se référer au théorème de Rouché-Fonténé.*

Exercice 8.4.4.3 Soit

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} ay + bz & = & u \\ bx + az & = & v \\ ax + by & = & w \end{array} \right.$$

où a, b, u, v, w sont des paramètres dans $\mathbb{K}$. Déterminer une (des) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) pour que (S) soit de Cramer ; le résoudre dans ce cas.

8.5 Exercices

Exercice 8.5.1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Calculer $\det_{\mathcal{B}}(e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_1 + e_2)$.
2. Calculer pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det_{\mathcal{B}}(e_1 + \lambda e_2, e_2 + \lambda e_3, e_3 + \lambda e_1)$.

Exercice 8.5.2 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

Exercice 8.5.3 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{bmatrix}$$

Exercice 8.5.4 Montrer que les systèmes suivants sont de Cramer et les résoudre en utilisant les formules de Cramer (on suppose $a \in \mathbb{K}^\star$ pour le dernier) :

$$(S_1) : \begin{cases} 3x + y - z &= 1 \\ x - 3y + 2z &= 1 \\ x - 3z &= 2 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= 3 \end{cases} \quad (S_3) : \begin{cases} ax - y + z &= 1 \\ x + ay - z &= 0 \\ -x + y + az &= 1 \end{cases}$$

Exercice 8.5.5 Résoudre les systèmes suivants d'inconnues x, y, z, t :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z &= 5 \\ x - 2y + 3z &= 2 \\ 4x - y + 4z &= \lambda \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x - y - z - t &= 1 \\ x + y - z - t &= -1 \\ x + y + z - t &= 0 \\ x - y - z + t &= 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x - 2y + z + 3t &= 2 \\ x + y + z + t &= 1 \\ x - y + t &= 1 \end{cases}$$

Exercice 8.5.6 Déterminer les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 &= 0 \\ x_2 + \alpha x_3 &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1} + \alpha x_n &= 0 \\ x_n + \alpha x_1 &= 0 \end{cases}$$

Exercice 8.5.7 Soient $n \in \mathbb{N}$ ($n \geqslant 2$) et $A_1, \cdots, A_n$ n points du plan complexe. À quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) existe-t-il $M_1, \cdots, M_n$ tels que A_i est le milieu de $[M_i M_{i+1}]$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et A_n est le milieu de $[M_n M_1]$?

Exercice 8.5.8 Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $B^2 \neq 0$ et $B^3 = 0$.

1. Déterminer un exemple très simple de matrice vérifiant cette propriété.
2. Montrer que $I_3 + B$ est inversible. *(Indication : penser aux séries géométriques...)*
3. Montrer que $\det(I_3 + B) = 1$. *(si b désigne l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à B, on pourra calculer le déterminant de b dans une base bien choisie...)*
4. Montrer que si A commute avec B, alors $\det(A+B) = \det(A)$. *On pourra distinguer deux cas, suivant que A est inversible ou non.*

Exercice 8.5.9 On veut déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice suivante soit inversible :

$$M(x_1, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

1. Traiter à la main le cas $n = 2$, puis le cas $n = 3$.
2. *Première méthode : interprétation avec les polynômes d'interpolation de Lagrange*
   (a) Montrer que s'il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i = x_j$, alors la matrice c'est pas inversible.
   (b) On suppose maintenant que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $x_i = x_j \Longrightarrow i = j$.
      i. Rappeler ce que sont les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux (x_i).
      ii. Montrer que ces polynômes forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
      iii. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans la base $\mathcal{B}$.
      iv. Donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
      v. Conclure que $M(x_1, \cdots, x_n)$ est inversible.
3. *Seconde méthode : en calculant le déterminant*
   (a) En effectuant successivement, pour i variant de n à 2, $L_i \longleftarrow L_i - x_1 L_{i-1}$, obtenir une relation de récurrence sur le déterminant de M, appelé déterminant de Vandermonde.
   (b) En déduire la valeur du déterminant de $M(x_1, \cdots, x_n)$ et conclure.
4. *Troisième méthode : avec le déterminant et des fonctions*
   On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \det M(x_1, \cdots, x_{n-1}, x)$.
   (a) Justifier que P appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   (b) Montrer que P admet $n-1$ racines « évidentes ».
   (c) Quel est le coefficient dominant de P ? Conclure.

Exercice 8.5.10 On souhaite déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ , \ \det(A+M) = \det(A) + \det(M)$$

1. Donner une matrice A vérifiant cette relation.
2. Soit A une matrice non nulle vérifiant la propriété précédente.
   (a) Montrer que, mis à part un cas particulier que l'on traitera, A n'est pas inversible.
   (b) Montrer, à l'aide du théorème de la base incomplète, que l'on peut construire M inversible telle que $A+M$ ne soit pas inversible.
   (c) Conclure.

Exercice 8.5.11 Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.

On rappelle que $j = \mathrm{e}^{\frac{i2\pi}{3}}$.

1. Calculer $\det(J)$. On exprimera le résultat comme puissance de $(1-j)$.
2. Que peut-on en déduire concernant la matrice J ?
3. En utilisant la règle de Sarrus, calculer $\det(M)$.
4. Calculer le produit MJ.
5. Calculer $\det(MJ)$ sous forme factorisée, à l'aide d'opérations élémentaires.
6. À l'aide des questions précédentes, calculer $\det(M)$ sous forme d'un produit de trois termes de la forme $\alpha a + \beta b + \gamma c$ avec $(\alpha,\beta,\gamma) \in \{1, j, j^2\}^3$.

Chapitre 9

Espaces euclidiens

Prérequis : dans tout ce chapitre, les notions suivantes sont supposées connues :

- espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, groupes et sous-groupes ;
- dimension finie, familles libres, génératrices, bases ;
- application linéaire, matrice d'une application linéaire ;
- application bilinéaire ;
- déterminant d'un endomorphisme ou d'une famille de vecteurs ;
- géométrie élémentaire dans le plan et dans l'espace.

Aucune connaissance spécifique sur la notion de produit scalaire ou d'espace euclidien n'est supposée connue.

9.1 Produit scalaire

Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

9.1.1 Définition d'un produit scalaire et exemples

Définition 9.1.1.1 On appelle produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E toute application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(i) f est bilinéaire ;

(ii) f est symétrique : $\forall x, y \in E\ ,\ f(x,y) = f(y,x)$;

(iii) f est positive : $\forall x \in E\ ,\ f(x,x) \geqslant 0$;

(iv) f est définie : $\forall x \in E\ ,\ (f(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0)$.

On note en général $f(x,y) = (x|y)$ ou encore $x \cdot y$, ou encore $< x, y >$.

Remarques :

- *en général, les propriétés (iii) et (iv) se lisent en une seule phrase. On dit que f est définie-positive si :*

$$\forall x \in E\ ,\ (f(x,x) \geqslant 0 \text{ et } (f(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0))$$

- *il ne faut pas oublier qu'il y a en réalité une propriété « (0) » à vérifier qui est que f est bien une application. Dans les cas « simples » on ne l'écrit pas mais dans des cas un peu moins évident (par exemple faisant intervenir une somme infinie ou une intégrale généralisée), il faudra le justifier ;*
- *on retient la phrase courte en français (que vous devez savoir traduire mathématiquement) : un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique définie-positive.*

Exemple 9.1.1.2 On a déjà vu que « le produit scalaire usuel » dans le plan ou dans l'espace est bien un produit scalaire : c'est d'ailleurs à partir de ce « modèle » qu'on a donné la définition formelle d'un produit scalaire.

Exemple 9.1.1.3 Dans le chapitre d'intégration, on a vu que $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_a^b fg$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Exemple 9.1.1.4 On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ par la relation :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]\ ,\ f(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Montrons que f est un produit scalaire.

- Contrairement aux exemples précédents, on doit ici commencer par justifier que f est une application (autrement dit que l'intégrale généralisée est convergente pour tous polynômes P et Q). Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. La fonction $g : x \longmapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$. De plus, par croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 P(x)Q(x)e^{-x} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

(en effet, si $n, p \in \mathbb{N}$ sont tels que $\deg(P) \leqslant n$ et $\deg(Q) \leqslant p$, alors $P(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x^n)$ et donc $P(x)Q(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(x^{n+p}\right)$). Or, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est continue (par morceaux), positive et d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$ (critère de Riemann). Par comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} |g(x)|\,\mathrm{d}x$ converge, et *a fortiori* $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge. De plus, puisque g est continue sur le segment $[0, 1]$, $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Ce qui prouve que $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et montre donc que l'application f est bien définie.

- Il est évident que f est symétrique car pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} Q(x)P(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

- Puisque le produit de deux fonctions est bilinéaire et puisque l'intégrale est linéaire, f est bilinéaire.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Puisque la fonction continue (par morceaux) $x \longmapsto P(x)^2e^{-x}$ est positive (et d'intégrale convergente), $f(P, P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)^2e^{-x}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

De plus, si $f(P, P) = 0$, alors pour $a > 0$, $0 \leqslant \displaystyle\int_{[0,a]} P(x)^2e^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} P(x)^2e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$.

Par conséquent, $\displaystyle\int_{[0,a]} P(x)^2e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$. Or, $x \longmapsto P(x)^2e^{-x}$ est une fonction continue et positive sur le segment $[0, a]$. D'après la proposition 4.2.6.1,

$$\forall x \in [0, a]\ ,\ P(x)^2e^{-x} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall x \in [0, a]\ ,\ P(x) = 0$$

On conclut donc que le polynôme P a une infinité de racines (tous les réels de l'intervalle $[0, a]$) et par conséquent $P = 0$, prouvant que f est bien définie-positive.

Dans la pratique, on peut « réduire » le nombre de propriétés à vérifier de la façon suivante :

Proposition 9.1.1.5 *Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On suppose que f est symétrique. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f est bilinéaire ;

(ii) f est linéaire à droite ;

(iii) f est linéaire à gauche.

Preuve :

• L'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ est évidente.

• Montrons $(ii) \Longrightarrow (iii)$.
On suppose que f est linéaire à droite. Montrons que f est linéaire à gauche.
Soient $y \in E$, $(x, x') \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{array}{rcll} f(\lambda x + \mu x', y) & = & f(y, \lambda x + \mu x') & (\text{car } f \text{ est symétrique}) \\ & = & \lambda f(y, x) + \mu f(y, x') & (\text{car } f \text{ est linéaire à droite}) \\ & = & \lambda f(x, y) + \mu f(x', y) & (\text{car } f \text{ est symétrique}) \end{array}$$

• On montre de même que $(iii) \Longrightarrow (i)$, autrement dit que si f est linéaire à gauche, alors f est linéaire à droite (et donc bilinéaire).

⊠

Proposition 9.1.1.6 *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. L'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:*

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ (appelé produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$).

Preuve :

• Le produit est commutatif dans $\mathbb{R}$, donc $(.|.)$ est symétrique.

• Pour $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$, l'application qui à $y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$ associe $(x|y)$ est bien une forme linéaire (exercice : le rédiger).
Puisque $(.|.)$ est linéaire à droite et symétrique, $(.|.)$ est bilinéaire.

• Montrons enfin que $(.|.)$ est définie-positive. Soit $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.

∗ D'une part, $(x|x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 0$ (puisque les x_k sont des réels).

∗ D'autre part, si $(x|x) = 0$, alors la somme précédente nulle.

Ainsi $(x|x)$ une somme de termes positifs qui est nulle, par conséquent, tous les termes sont nuls, c'est-à-dire pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k^2 = 0$ soit encore $x_k = 0$. Ce qui montre que $x = 0$.

Ceci prouve donc que $(.|.)$ est définie positive.

⊠

Corollaire 9.1.1.7 *En identifiant $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$, l'application $(X, Y) \longmapsto {}^tXY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

Preuve :

C'est une simple traduction matricielle du fait que le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est bien un produit scalaire.

⊠

Exercice 9.1.1.8 On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles bornées. Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note φ_a l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tous $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ par :

$$\varphi_a(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n v_n$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que φ_a soit une application bien définie. **On suppose par la suite que cette condition est vérifiée.**
2. À quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) φ_a est-elle un produit scalaire ?

Exercice 9.1.1.9 (Plus difficile) On considère de même $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et on fixe ω une fonction continue sur $[0, 1]$. On pose alors :

$$\forall (f, g) \in E \ , \ \psi_\omega(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que ψ_ω est bien définie et qu'elle est bilinéaire symétrique.
2. Montrer que ψ_ω est positive si et seulement si $\omega \geqslant 0$.
3. On note $Z(\omega) = \{x \in [0, 1] \ / \ \omega(x) = 0\}$. Montrer que ψ_ω est définie-positive si et seulement si $\omega \geqslant 0$ et $Z(\omega)$ ne contient aucun intervalle.

9.1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz, norme euclidienne et distance associée

Théorème 9.1.2.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit $(.|.)$ un produit scalaire sur E. Pour tout $(x, y) \in E^2$:*

$$|(x|y)| \leqslant \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}$$

De plus, il y a égalité si et seulement si (x, y) est liée.

Preuve :

Soient $x \in E$ et $y \in E$.
Si $y = 0$, le résultat est clair (et on a alors égalité). Supposons donc $y \neq 0$.
On pose alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ \ P(t) = \|x + ty\|^2 = (x + ty|x + ty)$$

• Tout d'abord, puisque le produit scalaire est bilinéaire et symétrique :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ P(t) = (y|y)t^2 + 2(x|y)t + (x|x)$$

P est donc un polynôme du second degré puisque $y \neq 0$ implique que $(y|y) \neq 0$. De plus, par positivité du produit scalaire,

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ P(t) = (x + ty|x + ty) \geqslant 0$$

Ainsi, P est un polynôme du second degré qui garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, son discriminant Δ est négatif ou nul, c'est-à-dire :

$$(x|y)^2 - (x|x)(y|y) \leqslant 0$$

D'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

• Pour le cas d'égalité, on remarque que :

$$\begin{aligned}
(x|y)^2 = (x|x)(y|y) &\iff y = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta = 0 \\
&\iff y = 0 \quad \text{ou} \quad \exists t \in \mathbb{R} \ , \ P(t) = 0 \\
&\iff y = 0 \quad \text{ou} \quad \exists t \in \mathbb{R} \ , \ (x + ty|x + ty) = 0 \\
&\iff y = 0 \quad \text{ou} \quad \exists t \in \mathbb{R} \ , \ x + ty = 0 \\
&\iff (x, y) \text{ est liée}
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve.

⊠

Remarque : *en particulier, en reprenant les produits scalaires usuels déjà vus, on obtient les inégalités suivantes :*

- *pour tout* $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *et tout* $(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

- *pour toutes fonctions* f *et* g, *continues sur le segment* $[a, b]$,

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x} \times \sqrt{\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x}$$

Définition 9.1.2.2 Soit E un espace vectoriel. On dit qu'une application N de E dans $\mathbb{R}$ est une norme sur E si :

(i) $\forall x \in E$, $N(x) \geqslant 0$ et $\forall x \in E$, $(N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0)$ (N est définie-positive) ;

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (N est homogène) ;

(iii) $\forall x, y \in E$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (N vérifie l'inégalité triangulaire).

On note souvent $N(x) = \|x\|$ qu'on appelle la norme du vecteur x.

Proposition 9.1.2.3 *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* $(.|.)$ *un produit scalaire sur* E. *Alors,* $x \longmapsto ||x|| = \sqrt{(x|x)}$ *est une norme sur* E. *On dit qu'il s'agit d'une norme euclidienne.*

Preuve :

• Tout d'abord, pour tout $x \in E$, $(x|x) \geqslant 0$ (puisque le produit scalaire est une forme positive), donc $\|.\|$ est bien définie.

• Le fait que $\|.\|$ est définie positive est évident (cela découle des mêmes propriétés du produit scalaire).

• Montrons l'homogénéité. Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x|x)} = |\lambda| \sqrt{(x|x)} = |\lambda| \times \|x\|$$

• Montrons enfin l'inégalité triangulaire. Soient $x, y \in E$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y|x + y) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \times \|y\| \quad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &\leqslant (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

D'où le résultat puisque $\|x + y\| \geqslant 0$. ⊠

Remarque : *on verra dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés (cours de mathématiques spéciales 1) qu'une norme n'est pas toujours euclidienne, c'est-à-dire qu'elle ne provient pas toujours d'un produit scalaire.*

Proposition 9.1.2.4 (Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire) *Soit* $(.|.)$ *un produit scalaire sur* E *et* $\|.\|$ *la norme associée. Alors, pour tout* $(x,y) \in E^2$ *:*

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si $y = 0$ *ou il existe* $t \in [0, +\infty[$ *,* $x = ty$ *(on dit alors que* (x,y) *est positivement liée).*

Preuve :

• L'inégalité triangulaire a été prouvée dans la preuve de la proposition précédente.

• De plus, d'après le calcul dans la preuve de l'inégalité, $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ si et seulement si $(x|y) = \|x \mid \times \|y\|$.

∗ Par suite, s'il y a égalité, alors on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc $y = 0$ ou bien, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = ty$. Mais dans ce cas, on a :

$$t\|y\|^2 = (ty|y) = (x|y) = \|x\| \times \|y\| = |t| \times \|y\|^2$$

et puisque $y \neq 0$, $\|y\| \neq 0$ et par conséquent, $t = |t| \geqslant 0$.

∗ Réciproquement, si $y = 0$ ou si $x = ty$ avec $t \geqslant 0$, alors on a bien égalité, c'est-à-dire $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. En effet, lorsque $y \neq 0$, $x = ty$ avec $t \geqslant 0$ et donc :

$$\|x+y\| = \|(1+t)y\| = |1+t| \times \|y\| = (1+t)\|y\| = t\|y\| + \|y\|$$

et puisque $t \geqslant 0$, $\|x+y\| = |t| \times \|y\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|$. ⊠

9.1.3 Propriétés remarquables

Proposition 9.1.3.1 (Identités remarquables) *Soient* $(.|.)$ *un produit scalaire sur* E *et* $\|.\|$ *la norme associée. Alors, pour tout* $(x,y) \in E^2$ *:*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$$
$$\|x\|^2 - \|y\|^2 = (x+y|x-y)$$

Proposition 9.1.3.2 (Identité du parallélogramme) *Pour tout* $(x, y) \in E^2$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Preuve :

Il suffit d'utiliser la bilinéarité (et la symétrie) du produit scalaire pour obtenir les résultats précédents.

⊠

Exercice 9.1.3.3 Interpréter graphiquement l'identité du parallélogramme et justifier le choix du nom de cette propriété.

Proposition 9.1.3.4 (Identités de polarisations) *Soient* $(.|.)$ *un produit scalaire sur* E *et* $\|.\|$ *la norme associée. Alors, pour tout* $(x, y) \in E^2$,

(i) $(x|y) = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$;

(ii) $(x|y) = \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$.

Autrement dit, la connaissance de $\|.\|$ *permet de retrouver le produit scalaire.*

Preuve :

C'est clair à l'aide des identités remarquables ou de l'identité du parallélogramme énoncée ci-dessus.

⊠

9.2 Orthogonalité

9.2.1 Définitions

Définition 9.2.1.1 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.|.)$. On dit que :

(i) deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$ sont orthogonaux si $(x|y) = 0$;

(ii) un vecteur $x \in E$ est unitaire (ou normé) si $\|x\| = 1$;

(iii) un vecteur $x \in E$ est orthogonal à une partie $A \subset E$ si : $\forall a \in A$, $(x|a) = 0$;

(iv) deux parties $A \subset E$ et $B \subset E$ sont orthogonales si : $\forall (a, b) \in A \times B$, $(a|b) = 0$.

Notations : soient $(x, y) \in E^2$, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(E)$ (A et B sont des parties quelconques de E). On note :

- $x \perp y$ lorsque x et y sont orthogonaux ;
- $x \perp A$ lorsque x est orthogonal à A ;
- $A \perp B$ lorsque A et B sont orthogonales.

Exemple 9.2.1.2 Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique,

- $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, -1, 0)$ sont orthogonaux car $(u|v) = 1 \times 1 + 1 \times -1 + 1 \times 0$;
- $u = (1, 1, 1)$ est orthogonal au plan A d'équation cartésienne $x + y + z = 0$ (logique car x est un vecteur « normal » au plan). En effet, si $a = (x, y, z) \in A$, alors :

$$(u|a) = 1 \times x + 1 \times y + 1 \times z = x + y + z = 0$$

Exemple 9.2.1.3 Dans $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $(f, g) \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} fg$,

- l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires (et continues) et l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires (et continues) sont orthogonaux car pour tout $(f, g) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$, $f \times g$ est impaire donc :

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

- $f : x \longmapsto \sqrt{|x|}$ est unitaire car $\|f\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x\,\mathrm{d}x = 1$.

Définition 9.2.1.4 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque muni d'un produit scalaire $(.|.)$ et $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs de E. On dit que :

(i) $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale (de vecteurs de E) si :

$$\forall (i, j) \in I^2\ ,\ (i \neq j \Longrightarrow (x_i|x_j) = 0)$$

(ii) $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormale (ou orthonormée) si $\mathcal{F}$ est orthogonale et si tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont unitaires, c'est-à-dire si :

$$\forall (i, j) \in I^2\ ,\ (x_i|x_j) = \delta_{i,j}$$

Exemple 9.2.1.5 La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel. En effet, en notant $\mathcal{B}_c = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a pour $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i = (\delta_{i,k})_{1\leqslant k\leqslant n}$. Par suite, pour $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$(e_i|e_j) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}\delta_{k,j} = \delta_{i,j}$$

Exemple 9.2.1.6 La famille $(x \mapsto \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}^0([0,2\pi])$. En effet, soient $n,p \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq p$. Alors, en notant $C_n : x \longmapsto \cos(nx)$:

$$\begin{aligned}(C_n|C_p) &= \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(px)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos((n-p)x)+\cos((n+p)x)}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{\sin((n-p)x)}{n-p}+\frac{\sin((n+p)x)}{n+p}\right]_0^{2\pi} \qquad (\text{car } n \neq p) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ce qui montre que la famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une famille orthogonale. En revanche, elle n'est pas orthonormée puisque pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $(C_n|C_n) = \pi$.

Remarque : *la famille vide (c'est-à-dire $I = \emptyset$) est une famille orthonormée car la propriété :*

$$\forall i \in \emptyset \ , \ \forall j \in \emptyset \ , \ (x_i|x_j) = \delta_{i,j}$$

est toujours vraie (proposition logique commençant par « $\forall i \in \emptyset$ »).

Exercice 9.2.1.7 On considère l'application $(.|.)$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] \ , \ (P|Q) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \cos(nx) = P_n(\cos(x))$$
3. Comment s'appellent ces polynômes ?
4. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $(\mathbb{R}[X],(.|.))$.

Définition 9.2.1.8 Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On dit qu'une famille $\mathcal{B}$ est une base orthogonale (respectivement orthonormée) de E si c'est une base de E et une famille orthogonale (respectivement orthonormée).

Exemple 9.2.1.9 D'après ce qui précède, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Remarque : *la famille vide est une famille orthonormée. C'est donc une base orthonormée de $E = \{0\}$ (et le seul produit scalaire sur $E = \{0\}$ est l'application nulle de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$).*

9.2.2 Propriétés des familles orthogonales

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.|.)$.

Proposition 9.2.2.1 *Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale de E dont tous les vecteurs sont non nuls. Alors, $\mathcal{F}$ est libre.*

Preuve :

• Si $I = \emptyset$, le résultat est vrai car la famille vide est orthogonale et libre.

• On suppose donc que $I \neq \emptyset$. Montrons que $(x_i)_{i\in I}$ est libre, c'est-à-dire que toute sous-famille finie est libre.
Soit J une partie finie de I avec $|J| = n \geqslant 1$. Notons $J = \{i_1, \cdots, i_n\}$. Montrons que $(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n})$ est libre. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k} = 0$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On a alors :

$$0 = (x_{i_j}|0) = \left(x_{i_j} \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k} \right.\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_{i_j}|x_{i_k})$$

Or, $\mathcal{F}$ est orthogonale donc : $0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{j,k} (x_{i_j}|x_{i_k}) = \lambda_j \|x_{i_j}\|^2$.
Puisque les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont non nuls par hypothèse, $\|x_{i_j}\|^2 \neq 0$. Par suite, $\lambda_j = 0$, ce qui prouve que la famille $(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n})$ est libre.

⊠

Remarque : *on retrouve ici de façon immédiate que la famille $\mathcal{C} = (x \longmapsto \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est libre puisqu'elle est orthogonale pour un produit scalaire (le produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$) et chacune de ces fonctions n'est pas identiquement nulle.*

Corollaire 9.2.2.2 *Toute famille orthonormale est libre.*

Preuve :

Une famille orthonormale est une famille orthogonale dont tous les vecteurs sont normés et donc non nuls.

⊠

Théorème 9.2.2.3 (Pythagore) *Soit $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille orthogonale, alors :*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

Preuve :

En effet,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \middle| \sum_{j=1}^{n} x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i | x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i | x_i) \quad \text{(puisque } \mathcal{F} \text{ est orthogonale)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \end{aligned}$$

⊠

Remarque : *pour deux vecteurs, on a la réciproque du théorème de Pythagore :*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Longrightarrow (x|y) = 0$$

En revanche, ceci ne se généralise pas au cas de trois vecteurs ou plus comme le montre l'exemple simple suivant dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique :

- *si $x = (1, 1, 0)$, $y = (1, 0, 1)$ et $z = (0, 1, -2)$, alors $\|x\|^2 = 2$, $\|y\|^2 = 2$ et $\|z\|^2 = 5$;*
- *$x + y + z = (2, 2 - 1)$ donc $\|x + y + z\|^2 = 9 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2$;*
- *en revanche, $(x|y) = 1 \neq 0$, $(x|z) = 1 \neq 0$ et $(y|z) = -2 \neq 0$ donc les trois vecteurs sont deux à deux non orthogonaux.*

Proposition 9.2.2.4 *Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de E et si x et y sont deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$. Alors :*

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Preuve :

C'est clair : il suffit de développer en utilisant la bilinéarité et de constater que $(e_i|e_j) = \delta_{i,j}$. Je vous laisse faire la preuve formelle par vous-même. ⊠

9.3 Espaces euclidiens

9.3.1 Définition

Définition 9.3.1.1 Soit E un espace vectoriel. On dit que :

- E est un espace préhilbertien réel si E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire ;
- E est un espace vectoriel euclidien si E est un espace préhilbertien réel de dimension finie, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Remarques :

- *le terme « préhilbertien » est à mettre en relation avec les espaces hilbertiens qui sont des espaces préhilbertiens « complets » ;*
- *la notion d'espace préhilbertien complexe sera étudiée dans le cours de mathématiques spéciales 2.*

Exemple 9.3.1.2 $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire habituel est un espace euclidien.

Exemple 9.3.1.3 $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel est un espace préhilbertien réel mais n'est pas un espace euclidien puisqu'il n'est pas de dimension finie.

9.3.2 Orthogonal d'une partie et existence de bases orthonormées

Dans ce paragraphe, on va rapidement se restreindre au cas des espaces euclidiens (c'est-à-dire de dimension finie) mais les premières définitions sont générales et valables dans un espace préhilbertien.

Définition 9.3.2.1 Soit E un espace préhilbertien et soit $A \subset E$ une partie quelconque de E (autrement dit, A n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel). On appelle orthogonal de A, et on note $A^\perp$ l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E \ / \ x \perp A\} = \{x \in E \ / \ \forall a \in A \ , \ (a|x) = 0\}$$

Proposition 9.3.2.2 *Soient E un espace préhilbertien et $A \subset E$ une partie de E. Alors :*

(i) $A^\perp$ *est un sous-espace vectoriel de E ;*

(ii) $A^\perp = (Vect(A))^\perp$ *;*

(iii) $E^\perp = \{0\}$ *et* $\{0\}^\perp = E$.

Remarque : *on retient que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel et que le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de l'espace est le vecteur nul.*

Preuve :

• Montrons (i).

∗ Tout d'abord, $0 \in A^\perp$ car $\forall x \in A$, $(0|x) = 0$.

∗ Par ailleurs, si $(x, y) \in A^\perp \times A^\perp$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\forall a \in A \ , \ (\lambda x + \mu y|a) = \lambda(x|a) + \mu(y|a) = 0$$

Ce qui montre que $(\lambda x + \mu y) \in A^\perp$.

Ceci prouve que $A^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

• Montrons (ii).

Si $A = \emptyset$, alors $\text{Vect}(A) = \{0\}$ et $A^\perp = E = \{0\}^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$. On suppose donc par la suite que $A \neq \emptyset$.

∗ L'inclusion $(\text{Vect}(A))^\perp \subset A^\perp$ est claire car $A \subset \text{Vect}(A)$ donc :

$$\forall x \in E \ , \ ((\forall a \in \text{Vect}(A) \ , \ (a|x) = 0) \Longrightarrow (\forall a \in A \ , \ (a|x) = 0))$$

∗ La réciproque est aussi simple car le produit scalaire est bilinéaire. Soit $x \in A^\perp$. Montrons que $x \in (\text{Vect}(A))^\perp$, c'est-à-dire :

$$\forall y \in \text{Vect}(A) \ , \ (x|y) = 0$$

Soit $y \in \text{Vect}(A)$. Puisque A est une partie non vide de E, il existe $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \cdots, a_n) \in A^{n+1}$ et $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$y = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k$$

Alors $(x|y) = \left(x \left| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k \right. \right) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (x|a_k) = 0$ (puisque $x \in A^\perp$ donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(x|a_k) = 0$). Ainsi $x \in (\text{Vect}(A))^\perp$ prouvant donc l'inclusion $A^\perp \subset (\text{Vect}(A))^\perp$.

• Montrons (iii).

La propriété $\{0\}^\perp = E$ (déjà utilisée pour la preuve de (ii) lorsque A est vide) est évidente. Ensuite, puisque $E^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, on a déjà l'inclusion $\{0\} \subset E^\perp$. Réciproquement, si $x \in E^\perp$, alors :

$$\forall y \in E \ , \ (x|y) = 0$$

En particulier, en choisissant $y = x \in E$, on a $(x|x) = 0$ et donc $x = 0$ puisque le produit scalaire est défini-positif. Ce qui montre que $E^\perp \subset \{0\}$.

⊠

Corollaire 9.3.2.3 *Si E est préhilbertien et $a \in E \setminus \{0\}$, alors $< a >^{\perp}$ est un hyperplan.*

Preuve :

C'est évident car $< a >^{\perp} = \ker(f_a)$ où $f_a : x \longmapsto (a|x)$ est une forme linéaire non nulle (puisque $f_a(a) = (a|a) \neq 0$). ⊠

Théorème 9.3.2.4 *Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormée.*

Preuve :

On procède par récurrence sur $n = \dim E$.

Initialisation :

Pour $n = 0$, la famille vide est une base orthonormée de $\{0\}$.

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un certain entier n, c'est-à-dire que tout espace euclidien de dimension n admet une base orthonormée. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$. Alors $\dim E \geqslant 1$ et il existe $x_{n+1} \in E \setminus \{0\}$. On pose alors $e_{n+1} = \dfrac{x_{n+1}}{\|x_{n+1}\|}$ (qui est donc bien défini). C'est un vecteur unitaire de E. On pose $F =< e_{n+1} >^{\perp}$. D'après le corollaire précèdent, F est un hyperplan de E donc F est de dimension finie et de plus, $\dim F = n+1-1 = n$. Par ailleurs, la restriction à F du produit scalaire sur E est encore un produit scalaire sur F. Par conséquent, F est un espace euclidien de dimension n : par hypothèse de récurrence, il existe $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de F.
La famille $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{n+1})$ est alors une famille orthonormée de E, c'est donc une famille libre et son cardinal est $n+1 = \dim E$. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E. Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$ et achève la récurrence. ⊠

Remarques :

- *on verra un peu plus loin qu'on peut en fait faire mieux que dans la démonstration. On peut « orthonormaliser » toute base de E (procédé d'orthonormalisation de Schmidt) ;*
- *l'inconvénient de cette démonstration est que dans la pratique elle est « difficile » à mettre en place car il faut déterminer l'orthogonal de $< e_{n+1} >$ puis recommencer à chaque étape. L'avantage du procédé de Schmidt est qu'il donne une méthode constructive « algorithmique » et simple pour construire une base orthonormée connaissant déjà une base.*

Théorème 9.3.2.5 *Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*

$$F \oplus F^{\perp} = E$$

Preuve :

• Le fait que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ est clair puisque si $x \in F \cap F^{\perp}$, alors $(x|x) = 0$ et donc $x = 0$.

• Puisque E est euclidien, F est aussi euclidien. D'après le théorème précédent, F admet une base orthonormée : soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base orthonormée de F et soit $x \in E$. Alors,

$$y = x - \sum_{k=1}^{p} (x|e_k)e_k \text{ appartient à } F^{\perp}$$

En effet, $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $(y|e_i) = (x|e_i) - \sum_{k=1}^{p} (x|e_k)(e_k|e_i) = (x|e_i) - (x|e_i) = 0$, l'avant dernière égalité provenant du fait que $(e_1, \cdots, e_p)$ est une famille orthonormée). Ainsi, $y \in \{e_i \ , \ i \in [\![1, p]\!]\}^{\perp} = < e_i \ , \ 1 \leqslant i \leqslant p >^{\perp} = F^{\perp}$. Ce qui montre que :

$$x = \sum_{k=1}^{p} (x|e_k)e_k + \left(x - \sum_{k=1}^{p} (x|e_k)e_k \right)$$

avec $\sum_{k=1}^{p} (x|e_k)e_k \in F$ et $(x - \sum_{k=1}^{p} (x|e_k)e_k) \in F^{\perp}$. D'où $E = F + F^{\perp}$. ⊠

⚠ **Attention :** vous verrez dans le cours de mathématiques spéciales 2 que ce résultat n'est pas toujours vrai si E est seulement préhilbertien réel mais n'est pas de dimension finie ! On peut avoir $F^{\perp} = \{0\}$ sans que $F = E$!

Remarque : *en fait la démonstration donne des informations supplémentaires. Elle permet de déterminer la décomposition d'un vecteur $x \in E$ en tant que somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de l'orthogonal. Autrement dit, elle fournit le calcul de la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$, qui s'appelle le projection orthogonale sur F (voir le paragraphe 9.3.3).*

Corollaire 9.3.2.6 *Si E est un espace euclidien et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors :* $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$.

Preuve :

C'est évident car $F^{\perp}$ est un supplémentaire de F dans E. ⊠

Proposition 9.3.2.7 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E.*

(i) $(F^\perp)^\perp = F$;
(ii) $F \subset G \iff G^\perp \subset F^\perp$;
(iii) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;
(iv) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Preuve :

• Montrons (i).
$F \subset (F^\perp)^\perp$ car si $x \in F$ et $y \in F^\perp$, $(x|y) = 0$ donc $x \in (F^\perp)^\perp$. Par ailleurs,

$$\dim((F^\perp)^\perp) = \dim(E) - \dim(F^\perp) = \dim(F)$$

Par conséquent, $(F^\perp)^\perp = F$.

• Montrons (ii).
On commence par montrer l'implication directe. On suppose que $F \subset G$. Soit $y \in G^\perp$. Alors, pour tout $x \in F$, $x \in G$ et donc $(x|y) = 0$. Par suite, $y \in F^\perp$. Ce qui montre que $G^\perp \subset F^\perp$.
Réciproquement, si $G^\perp \subset F^\perp$, alors d'après l'implication directe (appliquée aux sous-espaces vectoriels $F^\perp$ et $G^\perp$), $(F^\perp)^\perp \subset (G^\perp)^\perp$, c'est-à-dire d'après (i), $F \subset G$.

• Montrons (iii).
Pour commencer, $F \subset F+G$ donc d'après (ii), $(F+G)^\perp \subset F^\perp$. De la même façon, $(F+G)^\perp \subset G^\perp$ et donc finalement, $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
Réciproquement, si $x \in F^\perp \cap G^\perp$, alors pour tout $(y,z) \in F \times G$,

$$(x|y+z) = (x|y) + (x|z) = 0 + 0 = 0$$

Par suite, $x \in (F+G)^\perp$.

• Montrons (iv). On a d'après (iii) et (i) :

$$(F \cap G)^\perp = ((F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp)^\perp = ((F^\perp + G^\perp)^\perp)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

⊠

9.3.3 Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales

Définition 9.3.3.1 Soit E un espace euclidien et soit F un sous-espace vectoriel de E.

- La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. Elle est en général notée p_F.
- La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$. Elle est en général notée s_F.

Remarque : *ces applications sont bien définies puisque d'après le théorème 9.3.2.5, $F \oplus F^\perp = E$ lorsque E est euclidien.*

Proposition 9.3.3.2 (Expression de la projection orthogonale) *Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E et $(e_1, \cdots, e_p)$ une base orthonormée de F. Alors :*

$$\forall x \in E \ , \ p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} (e_k|x) e_k$$

Preuve :

C'est ce qu'on a démontré pour établir que $F + F^\perp = E$ lorsque E est euclidien. ⊠

Corollaire 9.3.3.3 *Si s_F désigne la symétrie orthogonale par rapport à F, alors pour tout $x \in E$,*

$$s_F(x) = 2 \sum_{k=1}^{p} (e_k|x) e_k - x$$

où $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base orthonormée de F.

Preuve :

C'est évident car $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$. ⊠

Exercice 9.3.3.4 $\mathbb{R}^3$ étant muni du produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x - y + z = 0$.

Définition 9.3.3.5 Soient E un espace préhilbertien réel, A une partie quelconque non vide de E et $x \in E$. On appelle distance de x à A et on note $d(x, A)$ le nombre :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

Remarques :

- *cette définition a un sens puisque $\{\|x - a\| \ , \ a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (puisque A est non vide) et elle est minorée (par 0). Par suite, elle admet bien une borne inférieure ;*
- *en général les calculs de distance sont des problèmes difficiles. Dans le cadre des espaces euclidiens, lorsque A est un sous-espace vectoriel, c'est « simple ».*

Théorème 9.3.3.6 *Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. On note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F. Alors, pour tout $y \in F$,*

$$\|x - p_F(x)\| \leqslant \|x - y\|$$

avec égalité si et seulement si $y = p_F(x)$. En particulier, on a donc :

$$d(x, F) = ||x - p_F(x)|| = \min_{y \in F} ||x - y||$$

Preuve :

• Puisque $p_F(x) \in F$, on a déjà $||x - p_F(x)|| \geqslant d(x, F)$.

• Par ailleurs, pour tout $y \in F$, $\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x) - (y - p_F(x))\|^2$. Or, $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $y - p_F(x) \in F$ donc $(x - p_F(x)) \perp (y - p_F(x))$. Par suite,

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|y - p_F(x)\|^2$$

d'où l'inégalité voulue, avec égalité si et seulement si $||y - p_F(x)||^2 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $y = p_F(x)$. ⊠

Exemple 9.3.3.7 Déterminons $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2 - ax - b)^2 \, \mathrm{d}x$.

- *Première méthode : calcul du projeté orthogonal*

  ∗ On montre d'abord que $(.|.) : (P, Q) \longmapsto \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} \, \mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ (voir exemple 9.1.1.4).

  ∗ On en déduit que $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2 - ax - b)^2 \, \mathrm{d}x = \inf_{P\in\mathbb{R}_1[X]} \|X^2 - P\|^2$.
  D'après le théorème précédent, cette borne inférieure est un minimum, qui est atteint pour $P = p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)$. On pose $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \alpha X + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On détermine α et β par les conditions suivantes :

  $$\left\{ \begin{array}{rcl} (X^2 - \alpha X - \beta|1) & = & 0 \\ (X^2 - \alpha X - \beta|X) & = & 0 \end{array} \right. \text{ c'est-à-dire } \left\{ \begin{array}{rcl} (X^2|1) & = & \alpha(X|1) + \beta(1|1) \\ (X^2|X) & = & \alpha(X|X) + \beta(X|1) \end{array} \right.$$

  Je vous laisse faire les calculs, résoudre le système et vérifier que $\alpha = 4$ et $\beta = -2$.

  ∗ Enfin, on conclut, d'après le théorème de Pythagore, que :

  $$\|X^2 - p(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|p(X^2)\|^2 = 4$$

- *Seconde méthode : en utilisant une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$*

  Une autre méthode consiste à déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ (voir le paragraphe suivant) puis appliquer la formule de projection orthogonale.

Dans cet exemple, si on a trouvé que $P_0 = 1$, $P_1 = X - 1$ et (P_0, P_1) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$, alors :

$$p(X^2) = (X^2|P_0)P_0 + (X^2|P_1)P_1 = \left(\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x\right) 1 + \left(\int_0^{+\infty} x^2(x-1)e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)(X-1)$$

On obtient donc $p(X^2) = 2 + 4(X-1) = 4X - 2$ et on conclut alors de même qu'avant pour la valeur de la distance.

- *Troisième méthode : en étudiant une fonction de deux variables*

On pose : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2 - ax - b)^2\,\mathrm{d}x = 2a^2 + 2ab + b^2 - 12a - 4b + 24$.

Les fonctions de plusieurs variables et le calcul différentiel seront étudiées en détail dans le cours de mathématiques spéciales 1 dans lequel on montrera que si f admet un extremum en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (un « ouvert »), alors la « différentielle de f » en (a,b) est nulle, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 0$$

Ce qui permet de trouver $a = 4$ et $b = -2$. Ensuite, pour déterminer si ce point critique (point où la différentielle est nulle) est un minimum, un maximum ou rien du tout, ou peut essayer d'utiliser la matrice Hessienne au point (a,b) :

$$H(a,b) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a,b) \end{pmatrix}$$

L'idée est simple à comprendre. Si la dérivée d'une fonction f est nulle en un point, f admet un minimum en ce point si la dérivée seconde est strictement positive, admet un maximum si la dérivée seconde est strictement négative, et on ne peut pas conclure si la dérivée seconde est nulle. Ici, c'est la matrice Hessienne qui remplace la dérivée seconde. Le fait que « H soit positive » ou « H est négative » est alors une propriété simple à étudier, mais il nous manque quelques outils pour le moment. Tout cela sera traité en détail dans le cours de mathématiques spéciales 1.

Remarque : *pour cet exercice, vous pouvez aussi simplement appliquer le cours sur les coniques (et les courbes du second degré). Je vous laisse vérifier que la courbe est de type ellipse et donc qu'il « suffit » de trouver une équation réduite pour déterminer le minimum de f.*

Définition 9.3.3.8 Soit E un espace euclidien. On appelle réflexion de E toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

Exemple 9.3.3.9 Dans $\mathbb{R}^2$, les réflexions sont les symétries orthogonales par rapport à une droite et dans $\mathbb{R}^3$, les réflexions sont les symétries orthogonales par rapport à un plan.

9.3.4 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Le théorème suivant est absolument fondamental : en fait, c'est surtout la preuve qu'il faut retenir puisqu'elle donne la méthode pratique d'application.

Théorème 9.3.4.1 (Procédé d'orthonormalisation de Schmidt) *Soient E un espace préhilbertien réel et $\mathcal{L} = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille libre de E. Alors, il existe une famille $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_p)$ telle que :*

(i) $\mathcal{F}$ est orthonormée ;

(ii) Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, Vect$(x_1, \cdots x_k) =$ Vect$(e_1, \cdots, e_k)$

De plus, la famille $\mathcal{F}$ est unique si l'on impose en plus la condition :

(iii) $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $(e_k|x_k) > 0$.

On dit que $\mathcal{F}$ est obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille $\mathcal{L}$.

Remarques :

- *attention, on suppose que $\mathcal{L}$ est libre ! La famille $\mathcal{F}$ obtenue contient alors le même nombre de vecteurs que $\mathcal{L}$;*
- *ceci donne une méthode explicite pour transformer une base en une base orthonormée.*

Preuve :

On prouve l'existence (et l'unicité en imposant (iii)) par récurrence forte finie.

Initialisation :
On suppose ici que $k = 1$.

• Analyse.
Si e_1 existe, on doit avoir Vect(e_1) = Vect(x_1) donc $e_1 = \lambda x_1$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or, $x_1 \neq 0$ puisque $\mathcal{L}$ est libre. On obtient alors $|\lambda| = \|x_1\|^{-1}$ (puisque e_1 est normé), c'est-à-dire $e_1 = \pm \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$. La condition $(e_1|x_1) > 0$ impose alors $e_1 = +\dfrac{x_1}{\|x_1\|}$.

• Réciproquement, $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ est bien défini et par construction, il vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii) au rang $k = 1$.

Hérédité :

Supposons construits, et de façon unique, les vecteurs $e_1, \cdots, e_k$ avec $k < p$ vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) (jusqu'à l'ordre k).

• Analyse
Si e_{k+1} existe, alors $e_{k+1} \in < e_1, \cdots, e_{k+1} > = < x_1, \cdots, x_{k+1} >$. Par suite, il existe $a \in \mathbb{R}$ et $u \in \text{Vect}(x_1, \cdots, x_k) = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ tels que :

$$e_{k+1} = ax_{k+1} + u$$

Si $a = 0$, alors e_{k+1} appartient à $\text{Vect}(x_1, \cdots, x_k) = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ et la famille $(e_1, \cdots, e_{k+1})$ ne peut pas être libre (ce qui est absurde puisqu'elle est supposée orthonormée). On a donc :

$$e_{k+1} = a\left(x_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i\right)$$

avec $a \in \mathbb{R}^\star$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$. Puisque $(e_1, \cdots, e_{k+1})$ est orthonormée, $(e_j | e_{k+1}) = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$. Ce qui donne :

$$0 = a\left((e_j|x_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (e_j|e_i)\right) = a\left((e_j|x_{k+1}) + \lambda_j\right)$$

Or, $a \neq 0$ donc $\lambda_j = -(x_{k+1}|e_j)$ et donc $e_{k+1} = a\left(x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (e_i|x_{k+1})e_i\right)$.
Le vecteur e_{k+1} devant également être normé, on a nécessairement :

$$|a| \times \|x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (e_i|x_{k+1})e_i\| = 1 \;\; i.e. \;\; e_{k+1} = \pm \frac{x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|e_i)e_i}{\left\|x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|e_i)e_i\right\|}$$

Or, $(e_{k+1}|x_{k+1}) > 0$, d'où $e_{k+1} = \dfrac{x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|e_i)e_i}{\left\|x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|e_i)e_i\right\|}$.

• Synthèse
Réciproquement, puisque $(x_1, \cdots, x_{k+1})$ est libre (c'est une sous-famille de la famille libre $\mathcal{L}$) $x_{k+1} \notin \text{Vect}(x_1, \cdots x_k) = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$. On en déduit donc que :

$$x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|e_i)e_i \neq 0$$

Ainsi, e_{k+1} défini comme dans l'analyse, est bien défini, $(e_1, \cdots, e_{k+1})$ est une famille orthonormée telle que $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1}) = \text{Vect}(x_1, \cdots, x_{k+1})$ et $(e_{k+1}|x_{k+1}) > 0$. Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $k+1$ et achève la récurrence. ⊠

Remarque : *en fait, il faut retenir la méthode de construction :*

$$e_{k+1} = \frac{x_{k+1} - p_{<e_1,\cdots,e_k>}(x_{k+1})}{\|x_{k+1} - p_{<e_1,\cdots,e_k>}(x_{k+1})\|}$$

Exemple 9.3.4.2 On reprend l'exemple précédent (exemple 9.3.3.7) et on construit une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \ , \ (P|Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Soit $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour commencer, on montre (exercice : le faire) que l'intégrale suivante converge et on calcule sa valeur par récurrence (à l'aide d'une intégration par parties) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!$$

On applique maintenant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

- $\|1\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$. Donc, on pose $P_0 = 1$.
- Ensuite, $Q_1 = X - p_{<P_0>}(X) = X - \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x\right) P_0 = X - 1$.

  Or, $\|Q_1\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} (x-1)^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$ donc on pose $P_1 = \dfrac{Q_1}{\|Q_1\|} = X - 1$.
- Enfin, on pose $Q_2 = X^2 - (X^2|P_1)P_1 - (X^2|P_0)P_0$. On a :

  $$(X^2|1) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = 2$$

  $$(X^2|P_1) = (X^2|X-1) = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = 3! - 2! = 4$$

  Par suite, $Q_2 = X^2 - 4P_1 - 2P_0 = X^2 - 4(X-1) - 2 = X^2 - 4X + 2$.
  Enfin,

  $$\|Q_2\|^2 = \|X^2\|^2 - \|4P_1 + 2P_0\|^2 = \|X^2\|^2 - (4^2 + 2^2) = 4! - 20 = 4$$

  Ainsi, $\|Q_2\| = 2$ et on pose $P_2 = \frac{1}{2}Q_2 = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1$.

Ainsi, $\mathcal{F} = (1, X-1, \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$: par conséquent, elle est libre. Or, $|\mathcal{F}| = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ donc $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

Corollaire 9.3.4.3 *Soit E un espace euclidien. Alors, toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale de E.*

Preuve :

Il suffit d'appliquer le théorème de la base incomplète puis le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base considérée. ⊠

9.3.5 Isomorphisme naturel entre E et son dual

Théorème 9.3.5.1 (Riesz) *Soient E un espace euclidien et $E^\star = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace dual de E (les formes linéaires de E). Pour tout $a \in E$, on définit l'application f_a par :*

$$\begin{array}{rccc} f_a : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (a|x) \end{array}$$

Alors, d'une part $f_a \in E^\star$ et d'autre part, $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^\star \\ a & \longmapsto & f_a \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve :

• Tout d'abord, il est clair que pour tout $a \in E$, $f_a \in E^\star$ (puisque le produit scalaire est linéaire à droite).

• Par ailleurs, puisque le produit scalaire est linéaire à gauche, φ est linéaire. En effet, soient $a, b \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in E$,

$$f_{\lambda a+\mu b}(x) = (\lambda a + \mu b|x) = \lambda(a|x) + \mu(b|x) = \lambda f_a(x) + \mu f_b(x)$$

Par suite, $\varphi(\lambda a + \mu b) = f_{\lambda a+\mu b} = \lambda f_a + \mu f_b = \lambda\varphi(a) + \mu\varphi(b)$.

• Montrons que φ est injective. soit $a \in \ker(\varphi)$. Alors, pour tout $x \in E$, $(a|x) = 0$ (puisque $f_a = 0$). En particulier, en prenant $x = a$, on obtient $(a|a) = 0$, c'est-à-dire $a = 0$.
Ce qui prouve que φ est injective. De plus, E est de dimension finie donc $E^\star$ l'est aussi et $\dim E^\star = \dim E$. Ce qui permet de conclure que φ est un isomorphisme.

⊠

Remarques :

- *en clair, toute forme linéaire sur un espace euclidien « s'écrit comme un produit scalaire » (ceci sera utilisé dans le cours de mathématiques spéciales 1 pour définir le gradient d'une fonction de plusieurs variables et dans la suite pour définir « proprement » le produit vectoriel) ;*
- *on retrouve donc dans le cas particulier où E est euclidien que tout hyperplan admet une équation de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ avec $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $n = \dim E$. En effet, on sait qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle et on vient de montrer que si f est une forme linéaire non nulle, il existe $a \in E \setminus \{0\}$ tel que $f = f_a$;*
- *ceci permet également de retrouver que si $A \subset E$, alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E puisque par définition :*

$$A^\perp = \{x \in E \ / \ \forall a \in A \ , \ (a|x) = 0\} = \bigcap_{a \in A} \ker(f_a)$$

9.4 Automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien

Dans tout ce paragraphe, E est un espace euclidien et le produit scalaire sur E est noté $(.|.)$.

9.4.1 Définition et exemples

Définition 9.4.1.1 Soit f une application de E dans E. On dit que f est un automorphisme orthogonal de E si « f conserve le produit scalaire », c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in E^2 \ , \ (f(x)|f(y)) = (x|y)$$

Exemple 9.4.1.2 L'identité de E est un automorphisme orthogonal de E.

Exemple 9.4.1.3 Dans le plan, les rotations sont des automorphismes orthogonaux : géométriquement c'est évident car « on sait » qu'une rotation conserve les angles et les distances donc le produit scalaire. On reverra tout cela de façon plus formelle dans la section suivante avec l'étude précises des rotations.

Exemple 9.4.1.4 En revanche, un projecteur orthogonal p (qui n'est pas l'identité) n'est pas un automorphisme orthogonal car si $x \in \ker(p) \setminus \{0\}$, on a pour $y = x$:

$$(p(x)|p(y)) = (0|0) = 0 \neq (x|x) = (x|y)$$

Théorème 9.4.1.5 *Soit $f \in \mathcal{F}(E,E)$ (c'est-à-dire f est une application quelconque de E dans E). Si f conserve le produit scalaire, alors f est linéaire et bijective, c'est-à-dire f est bien un automorphisme de E.*

Preuve :

On suppose que f est une application de E dans E qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x,y) \in E^2 \ , \ (f(x)|f(y)) = (x|y)$$

• Tout d'abord, puisque f conserve le produit scalaire, alors f conserve la norme. En effet,

$$\forall x \in E \ , \ \|f(x)\| = \sqrt{(f(x)|f(x))} = \sqrt{(x|x)} = \|x\|$$

• Montrons à présent que f est linéaire. Soient $(x,y) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On veut montrer que $f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y) = 0$, ce qui équivaut à :

$$\|f(\lambda x + \mu y) - (\lambda f(x) + \mu f(y))\|^2 = 0$$

Notons $M = \|f(\lambda x + \mu y) - (\lambda f(x) + \mu f(y))\|^2$. Alors en développant,

$$M = \|f(\lambda x + \mu y)\|^2 + \|\lambda f(x) + \mu f(y)\|^2 - 2\Big(f(\lambda x + \mu y)|\lambda f(x) + \mu f(y)\Big)$$

* Pour le premier terme, compte tenu de la première remarque :

$$\|f(\lambda x + \mu y)\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2$$

* Pour le second terme, en développant à nouveau, on a :

$$\begin{aligned}\|\lambda f(x) + \mu f(y)\|^2 &= \lambda^2\|f(x)\|^2 + \mu^2\|f(y)\|^2 + 2\lambda\mu(f(x)|f(y)) \\ &= \lambda^2\|x\|^2 + \mu^2\|y\|^2 + 2\lambda\mu(x|y) \\ &= \|\lambda x + \mu y\|^2\end{aligned}$$

* Enfin, pour le troisième,

$$\begin{aligned}(f(\lambda x + \mu y)|\lambda f(x) + \mu f(y)) &= \lambda(f(\lambda x + \mu y)|f(x)) + \mu(f(\lambda x + \mu y)|f(y)) \\ &= \lambda(\lambda x + \mu y|x) + \mu(\lambda x + \mu y|y) \\ &= (\lambda x + \mu y|\lambda x + \mu y) \\ &= \|\lambda x + \mu y\|^2\end{aligned}$$

Par conséquent, $M = 2\|\lambda x + \mu y\|^2 - 2\|\lambda x + \mu y\|^2 = 0$. Ce qui montre que f est bien une application linéaire.

• Enfin, si $x \in \ker(f)$, alors $f(x) = 0$ et donc $\|f(x)\| = 0$; sachant que f conserve la norme, $\|x\| = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. Ce qui prouve que f est injective et donc bijective (puisque E est de dimension finie). ⊠

Proposition 9.4.1.6 *L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est un sous groupe de $GL(E)$. On le note $O(E)$ et on l'appelle groupe orthogonal de E.*

Preuve :

D'après le théorème précédent, on a bien $O(E) \subset GL(E)$. De plus,

- on a déjà vu que $\mathrm{Id}_E \in O(E)$;
- si $f, g \in O(E)$, alors pour tout $(x, y) \in E^2$:

  $$((g \circ f)(x)|(g \circ f)(y)) = (g(f(x))|g(f(y))) = (f(x)|f(y)) = (x|y)$$

  Ce qui montre que $g \circ f \in O(E)$.
- Enfin, si $f \in O(E)$, on sait que f est bijective et que f conserve le produit scalaire donc :

  $$\forall (x, y) \in E^2\ ,\ (f^{-1}(x)|f^{-1}(y)) = \Big(f(f^{-1}(x))|f(f^{-1}(y))\Big) = (x|y)$$

  Ce qui montre que $f^{-1} \in O(E)$. ⊠

9.4.2 Caractérisations des automorphismes orthogonaux

Théorème 9.4.2.1 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f conserve le produit scalaire ($f \in O(E)$) ;

(ii) pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E ;

(iii) il existe une base orthonormée de E telle que $f(\mathcal{B})$ est orthonormée ;

(iv) f conserve la norme, c'est-à-dire $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

Preuve :

• Montrons $(i) \Longrightarrow (ii)$.
On suppose (i). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E. On a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ , \ (f(e_i)|f(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$$

Ce qui prouve que $f(\mathcal{B})$ est une famille orthonormée. De plus, c'est alors une famille libre (propriété des familles orthonormées) qui est maximale (puisque $|f(\mathcal{B})| = |\mathcal{B}| = \dim(E)$) donc c'est une base orthonormée de E.

• Montrons $(ii) \Longrightarrow (iii)$.
On suppose (ii). Puisque E est euclidien, E admet une base orthonormée $\mathcal{B}$. D'après (ii), $f(\mathcal{B})$ est alors une base orthonormée de E, d'où (iii).

• Montrons $(iii) \Longrightarrow (iv)$.
On suppose (iii). Soit alors $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $f(\mathcal{B})$ soit orthonormée. Soient $x \in E$ et $(x_1, \cdots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, on a alors :

$$\|f(x)\|^2 = \left\| f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\right\|^2 \quad \text{(car } f \text{ est linéaire)}$$

Or, $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ (respectivement $(e_1, \cdots, e_n)$) est orthonormée donc :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2$$

• Montrons $(iv) \Longrightarrow (i)$.
On suppose (iv). D'après l'identité de polarisation, pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}(f(x)|f(y)) &= \frac{1}{4}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)-f(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \quad \text{(car } f \text{ conserve la norme)}\end{aligned}$$

c'est-à-dire, toujours d'après l'identité de polarisation :

$$(f(x)|f(y)) = (x|y)$$

Ce qui montre que $f \in O(E)$. ⊠

Remarque : *on a vu que toute application qui conserve le produit scalaire est forcément linéaire. Par contre, une application conservant la norme ne l'est pas nécessairement comme par exemple $f(x) = \|x\|e$ avec e unitaire. Il est donc nécessaire ici de supposer que f est linéaire pour pouvoir écrire les équivalences entre les 4 caractérisations.*

Proposition 9.4.2.2 *Les symétries orthogonales sont des automorphismes orthogonaux.*

Preuve :

Soit s une symétrie orthogonale par rapport à F. s étant linéaire, on peut appliquer le théorème précédent. Soient $\mathcal{B}_1$ une base orthonormée de F et $\mathcal{B}_2$ une base orthonormée de $F^\perp$. Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base orthonormée de E et $s(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}'_2$ est une base orthonormée de E (où $\mathcal{B}'_2$ est la famille constituée des opposés des vecteurs de $\mathcal{B}_2$). ⊠

⚠ **Attention :** je vous rappelle que malgré le nom, les projections orthogonales ne sont pas des automorphismes orthogonaux (sauf l'identité) !

Proposition 9.4.2.3 *Soit $f \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par f, c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$. Alors, $F^\perp$ est stable par f. En particulier, $f_{|F} \in O(F)$ et $f_{|F^\perp} \in O(F^\perp)$.*

Preuve :

• Tout d'abord, puisque $f(F) \subset F$, $f_{|F} \in \mathcal{L}(F)$. Par ailleurs, puisque F est inclus dans E, il est clair que pour tous $x, y \in F$, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$. Par suite, $f_{|F} \in O(F)$. En particulier, $f_{|F}$ est donc une bijection de F dans F.

• Montrons que $F^\perp$ est stable par f.
Soit $x \in F^\perp$. Montrons que $\forall y \in F$, $(f(x)|y) = 0$. Soit $y \in F$. Puisque $f_{|F} \in O(F) \subset GL(F)$, il existe $z \in F$ tel que $y = f(z)$. On a alors :

$$(f(x)|y) = (f(x)|f(z)) = (x|z) = 0 \quad \text{(puisque } x \in F^\perp \text{ et } z \in F)$$

Ce qui prouve que $F^\perp$ est stable par f. D'après le raisonnement précédent (en remplaçant F par $F^\perp$), $f_{|F^\perp} \in O(F^\perp)$. ⊠

9.4.3 Matrices orthogonales

Définition 9.4.3.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est orthogonale si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. On note alors $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales (réelles) de taille n.

Proposition 9.4.3.2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) A est orthogonale ;

(ii) les colonnes $(C_1, \cdots, C_n)$ de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;

(iii) ${}^tAA = I_n$;

(iv) $A{}^tA = I_n$.

Preuve :

• Montrons $(i) \Longrightarrow (ii)$.
On suppose (i). Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Par définition, f est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Par conséquent, l'image par f de la base canonique est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, ce qui équivaut à dire que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

• Montrons $(ii) \Longrightarrow (iii)$.
On suppose (ii). Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient (i,j) de la matrice ${}^tAA$ est par définition ${}^tC_iC_j$. Or, $(C_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc ${}^tC_iC_j = \delta_{i,j}$. D'où ${}^tAA = I_n$.

• Montrons $(iii) \Longrightarrow (iv)$.
Si ${}^tAA = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$. Par suite, $A{}^tA = AA^{-1} = I_n$.

• Montrons enfin $(iv) \Longrightarrow (i)$.
On suppose (iv). Alors $A^{-1} = {}^tA$ donc ${}^tAA = I_n$ et on a :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \ , \ \Big((AY)|(AX)\Big) = {}^tY{}^tAAX = {}^tYX = (X|Y)$$

On en déduit alors, par définition de la matrice d'une application linéaire et par définition des produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ , \ (f(x)|f(y)) = (x|y)$$

c'est-à-dire $f \in O(\mathbb{R}^n)$. Par définition, on a alors $A \in O_n(\mathbb{R})$. ⊠

Exemple 9.4.3.3 La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ est une matrice orthogonale puisque c'est la matrice de s, la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $< e_1 >$.

Exemple 9.4.3.4 Montrons que la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ est orthogonale. Ici, il est difficile de reconnaître directement la nature géométrique de f, l'endomorphisme canoniquement associé à A. On applique donc la caractérisation précédente :

$$ {}^tAA = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = I_3 $$

Par conséquent, $A \in O_3(\mathbb{R})$.

Corollaire 9.4.3.5 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, $A \in O_n(\mathbb{R}) \iff {}^tA \in O_n(\mathbb{R})$ et par suite, $A \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $(L_1, \cdots, L_n)$ (les lignes de A) forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.*

Preuve :

C'est évident car :

$$ {}^tA = A^{-1} \iff {}^t({}^tA) = {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} \iff {}^tA \in O_n(\mathbb{R}) $$

⊠

Corollaire 9.4.3.6 *Si A est une matrice orthogonale, alors* $\det(A) = \pm 1$.

Preuve :

Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tAA = I_n$. Par conséquent,

$$ 1 = \det(I_n) = \det({}^tAA) = \det({}^tA) \times \det(A) = \det(A)^2 $$

⊠

⚠ **Attention :** la réciproque est très fausse ! $\det A = \pm 1$ n'implique pas $A \in O_n(\mathbb{R})$! Par exemple, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors $\det(A) = 1$ (c'est une matrice triangulaire) mais il est évident que $(C_1|C_2) = 1 \neq 0$ (ou bien C_2 n'est pas unitaire).

Proposition 9.4.3.7 *L'application $A \longmapsto \det(A)$ est un morphisme de groupes de $O_n(\mathbb{R})$ dans $\{\pm 1\}$. Le noyau est appelé le groupe spécial orthogonal, noté $SO_n(\mathbb{R})$. Il s'agit donc d'un groupe et,*

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

Preuve :

Il est clair que la restriction du déterminant à $O_n(\mathbb{R})$ est un morphisme de groupes de $O_n(\mathbb{R})$ dans $(\{\pm 1\}, \times)$ (d'après le corollaire précédent). Par suite, son noyau est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

⊠

Proposition 9.4.3.8 *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Alors :*

$$f \in O(E) \iff A \in O_n(\mathbb{R})$$

Preuve :

Soient $x \in E$ et $y \in E$. On note $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = Mat_{\mathcal{B}}(y)$. On a alors $(x|y) = {}^tXY$ (expression du produit scalaire en base orthonormée).
On en déduit que :

$$\begin{aligned} f \in O(E) &\iff \forall (x,y) \in E^2 \ , \ (f(x)|f(y)) = (x|y) \\ &\iff \forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \ , \ {}^tY\,{}^tAAX = {}^tYX \\ &\iff {}^tAA = I_n \end{aligned}$$

Pour l'implication directe de la dernière équivalence, il suffit de choisir pour i et j dans $[\![1, n]\!]$, $X = E_i$ et $Y = E_j$ (où $(E_1, \cdots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) pour conclure que le coefficient (i,j) de la matrice ${}^tAA$ est $\delta_{i,j}$.

⊠

Exercice 9.4.3.9 Proposer une autre preuve en utilisant l'image par f de la base $\mathcal{B}$.

► À retenir :

1. une matrice est orthogonale si et seulement si ${}^tAA = I_n$;
2. un endomorphisme de E est orthogonal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale. Dans ce cas, la matrice de f dans toute base orthonormée est une matrice orthogonale.

⚠ **Attention :** la caractérisation précédente est fausse si la matrice de f n'est pas donnée dans une base orthonormée. Par exemple, $\mathcal{B} = (e_1, e_1 + e_2)$ et $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Corollaire 9.4.3.10 *Si $f \in O(E)$, alors* $\det(f) = \pm 1$.

Preuve :

Ceci découle directement du cas matriciel. ⊠

Proposition 9.4.3.11 (Définition) *Soit E un espace euclidien.*

(i) L'ensemble $SO(E) = \{f \in O(E) \mid \det(f) = 1\}$ est un groupe, appelé le groupe spécial orthogonal de E. Ses éléments sont appelés des rotations.

(ii) On note aussi $O^-(E) = \{f \in O(E) \mid \det(f) = -1\}$.

Preuve :

À nouveau, on peut dire que c'est une traduction du cas matriciel. Sinon, on peut aussi remarquer que $\varphi : f \longmapsto \det(f)$ est un morphisme de groupes de $O(E)$ dans $\{\pm 1\}$. Par suite, $SO(E) = \ker(\varphi)$ est un sous-groupe de $O(E)$. ⊠

Proposition 9.4.3.12 *Soit r une réflexion. Alors* $\det(r) = -1$, *c'est-à-dire $r \in O^-(E)$.*

Preuve :

Par définition, une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. Soit H cet hyperplan et soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \cdots, e_{n-1})$ une base orthonormée de H et (e_n) une base orthonormée de $H^\perp$. Alors $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de E :

$$\det(r) = \det_{\mathcal{B}}(r(e_1), \cdots, r(e_{n-1}), r(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \cdots, e_{n-1}, -e_n)$$

c'est-à-dire

$$\det(r) = -\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = -1$$

⊠

Définition 9.4.3.13 Soit F un espace vectoriel de dimension finie. On fixe une base $\mathcal{B}$ de F que l'on fixe comme directe. Alors, une base $\mathcal{B}'$ de F est dite directe si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ et indirecte sinon. On dit alors que l'espace F est orienté.

Remarque : *ainsi, fixer l'orientation, c'est décider de l'orientation d'une base donnée. L'orientation « positive » est donc une convention mais une fois qu'on a fixé la convention (c'est-à-dire choisi la base de référence directe), alors l'orientation de l'espace est bien définie et n'est plus une convention.*

Proposition 9.4.3.14 *Soit F un espace vectoriel de dimension finie orienté. Alors pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même orientation si et seulement si* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.

Preuve :

Notons $\mathcal{C}$ la base de référence de F qui définit l'orientation. D'après les propriétés du déterminant :

$$\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

On conclut donc que $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}')$ et $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ ont le même signe si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.

⊠

Proposition 9.4.3.15 *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de F telles que* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$. *Alors, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définissent la même orientation de F. Autrement dit, pour toute base $\mathcal{C}$ de F, $\mathcal{C}$ est une base directe relativement à $\mathcal{B}$ si et seulement si elle l'est relativement à $\mathcal{B}'$.*

Preuve :

La preuve est identique (avec des notations semblables) :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{C}) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$$

Or, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ donc $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{C}) > 0 \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) > 0$.

⊠

Définition 9.4.3.16 On oriente l'espace $\mathbb{R}^n$ en posant que la base canonique est une base directe.

Définition 9.4.3.17 Soit E un espace euclidien orienté. On dit qu'une famille $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe (respectivement indirecte) si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E et si $\mathcal{B}$ est une base directe (respectivement indirecte) de E.

Proposition 9.4.3.18 *Soient un espace euclidien orienté et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in SO(E)$;

(ii) l'image par f de toute base orthonormée est une base orthonormée de même orientation ;

(iii) l'image par f d'une base orthonormée est une base orthonormée de même orientation.

Preuve :

C'est clair ! En effet, si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, on a :

$$\begin{aligned} f \in SO(E) &\iff \begin{cases} f \in O(E) \\ \det(f) = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f \in O(E) \\ \det(f) > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f(\mathcal{B}) \text{ est une base orthonormée de } E \\ \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

⊠

Proposition 9.4.3.19 *Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $\mathcal{B}'$ une base quelconque de E. Notons $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Alors :*

$$\mathcal{B}' \text{ est orthonormée} \iff P \in O_n(\mathbb{R})$$

Preuve :

C'est clair en interprétant P comme la matrice dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ de l'unique application linéaire f vérifiant $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$. ⊠

Corollaire 9.4.3.20 *Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E, $f \in \mathcal{L}(E)$, $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ et $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Alors, on a la formule de changement de bases :*

$$A' = {}^tPAP$$

Preuve :

En effet, d'après les formules de changement de base pour les endomorphismes, on sait que $A' = P^{-1}AP$. Or $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormées, donc $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = {}^tP$. ⊠

9.5 Automorphismes orthogonaux du plan et étude des groupes $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$

9.5.1 Étude des groupes $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$

Théorème 9.5.1.1 *On a les égalités suivantes :*

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} , \theta \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } O_2^-(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix} , \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Preuve :

• On vérifie facilement que les matrices en question appartiennent respectivement à $SO_2(\mathbb{R})$ et $O_2^-(\mathbb{R})$. En effet, pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, en notant :

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

On a

$${}^tAA = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{bmatrix} = I_2$$

et $\det(A) = \varepsilon$ donc $A \in SO_2(\mathbb{R})$ si $\varepsilon = 1$ et $A \in O_2^-(\mathbb{R})$ si $\varepsilon = -1$.

• Réciproquement, soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$. Alors, ${}^tAA = I_n$, *i.e.* :

$$\begin{cases} a^2 + c^2 &= 1 \quad (1) \\ b^2 + d^2 &= 1 \quad (2) \\ ab + cd &= 0 \quad (3) \end{cases}$$

D'après (1) et (2), il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que : $a = \cos(\theta)$, $c = \sin(\theta)$, $b = \sin(\varphi)$ et $d = \cos(\varphi)$. Mais alors, en remplaçant dans (3), on obtient :

$$\cos(\theta)\sin(\varphi) + \sin(\theta)\cos(\varphi) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sin(\theta + \varphi) = 0$$

Par suite, $\theta + \varphi \equiv 0[\pi]$, soit encore $\varphi \equiv -\theta[\pi]$. On distingue alors deux cas :

∗ Premier cas : $A \in SO_2(\mathbb{R})$
Dans ce cas, $\det(A) = 1$, c'est-à-dire $\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) = 1$, soit $\cos(\theta + \varphi) = 1$. On en déduit donc que $\varphi \equiv -\theta[2\pi]$ et par suite,

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

∗ Deuxième cas : $A \in O_2^-(\mathbb{R})$
Alors, $\det(A) = -1$ et on conclut que $\varphi \equiv -\theta + \pi[2\pi]$ et par suite, $\cos(\varphi) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\varphi) = \sin(\theta)$.

En remplaçant ($b = \sin(\varphi)$ et $d = \cos(\varphi)$), on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

⊠

Proposition 9.5.1.2 *L'application suivante :*

$$\begin{array}{rcl} R : (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & SO_2(\mathbb{R}) \\ \theta & \longmapsto & R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \end{array}$$

est un morphisme surjectif de groupes. De plus, son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$ et $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

Preuve :

• Pour montrer que R est un morphisme de groupes, on doit montrer que pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$:

$$R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta')$$

Ceci découle directement des formules d'addition pour cosinus et sinus. En effet, le produit $R(\theta) \times R(\theta')$ est la matrice :

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -\cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta') \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') & -\sin(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta)\cos(\theta') \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$R(\theta) \times R(\theta') = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{bmatrix} = R(\theta + \theta')$$

• Le fait que R est surjectif est une conséquence du théorème précédent car celui-ci dit directement que $\mathrm{Im}(R) = SO_2(\mathbb{R})$.

• Par définition, $\ker(R) = \{\theta \in \mathbb{R} \ / \ \cos(\theta) = 1 \text{ et } \sin(\theta) = 0\} = 2\pi\mathbb{Z}$.

• Enfin, puisque $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif et puisque R est un morphisme de groupes, $\mathrm{Im}(R)$ est un groupe commutatif.

⊠

Remarque : *en particulier, pour tout réel θ, la matrice $R(\theta)$ est inversible et on a :*

$$R(\theta)^{-1} = {}^tR(\theta) = R(-\theta)$$

Ceci était géométriquement prévisible : la bijection réciproque de la rotation d'angle θ est bien la rotation d'angle $-\theta$. Notez au passage que ceci explique les formules simples de changement de coordonnées et d'inversion pour les passages entre deux bases orthonormées directes du plan.

9.5.2 Rotations du plan

Dans tout ce paragraphe, E est un espace euclidien de dimension 2 que l'on suppose orienté.

Proposition 9.5.2.1 *Soit $f \in SO(E)$ (c'est-à-dire f est une rotation). Alors, il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que la matrice de f dans toute base orthonormée directe soit $R(\theta)$. On dit alors que θ est l'angle de la rotation.*

Preuve :

• Montrons l'existence pour commencer.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E et soit $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Alors, $A \in SO_2(\mathbb{R})$ donc, d'après le théorème précédent, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = R(\theta)$. Ce θ est unique si on impose $\theta \in [0, 2\pi[$.

• Montrons à présent « l'unicité ».
Soient $\mathcal{B}'$ une autre base orthonormée directe de E et $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$. De même que dans l'existence, il existe $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $A' = R(\theta')$.
Par ailleurs, si on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, alors $P \in SO_2(\mathbb{R})$ (c'est une matrice de passage entre deux bases orthonormées directes) : elle s'écrit donc sous la forme $P = R(\varphi)$, avec $\varphi \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$R(\theta') = A' = P^{-1}AP = R(-\varphi)R(\theta)R(\varphi) = R(\theta)R(-\varphi)R(\varphi) = R(\theta)$$

puisque $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif et $R(-\varphi)R(\varphi) = I_2$. ⊠

Proposition 9.5.2.2 *Soit r la rotation d'angle θ. Alors, pour tout vecteur unitaire a,*

- $\cos(\theta) = (a|r(a))$;
- *et si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe,* $\sin(\theta) = \det_{\mathcal{B}}(a, r(a))$.

En particulier, $\det_{\mathcal{B}}(a, r(a))$ *ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe $\mathcal{B}$.*

Preuve :

• Soit a un vecteur unitaire de E. On complète (a) en une base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (a, b)$. On a alors : $r(a) = \cos(\theta)a + \sin(\theta)b$. Il reste alors à faire le calcul de produit scalaire et de déterminant pour conclure.

• Par ailleurs, si $\mathcal{B}'$ est une autre base orthonormée directe, alors :

$$\det_{\mathcal{B}'}(a, r(a)) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(a, r(a)) = \det_{\mathcal{B}}(a, r(a))$$

car le déterminant de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ vaut 1 (la matrice de passage entre deux bases orthonormées de même orientation est dans $SO_2(\mathbb{R})$). ⊠

9.5.3 Réflexions et décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions

Proposition 9.5.3.1 *Soit $f \in O^-(E)$ (E plan euclidien orienté).*

(i) f est une réflexion ;

(ii) soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

L'angle θ dépend du choix de la base orthonormée $\mathcal{B}$;

(iii) enfin, si $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base orthonormée directe, et si $Mat_{\mathcal{B}}(f) = S(\theta)$, alors $\frac{\theta}{2}$ (modulo π) est l'angle entre l'axe des abscisses (c'est-à-dire la droite dirigée par e_1) et l'axe de la réflexion.

Preuve :

On prouve tout simultanément.

• Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors $A = Mat_{\mathcal{B}}(f) \in O_2(\mathbb{R})$. De plus, $\det(A) = \det(f) = -1$ donc d'après ce qui précède, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = S(\theta)$.

• Le calcul direct montre que $A^2 = S(\theta)^2 = I_2$ donc f est bien une symétrie orthogonale, c'est-à-dire une réflexion ici (on est dans le plan).

• L'axe de la réflexion est alors $D = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
xe_1 + ye_2 \in D &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \cos(\theta)x + \sin(\theta)y &=& x \\ \sin(\theta)x - \cos(\theta)y &=& y \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} (\cos(\theta) - 1)x + \sin(\theta)y &=& 0 \\ \sin(\theta)x - (\cos(\theta) + 1)y &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin(\frac{\theta}{2})x - \cos(\frac{\theta}{2})y\right) &=& 0 \\ 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin(\frac{\theta}{2})x - \cos(\frac{\theta}{2})y\right) &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \sin(\frac{\theta}{2})x - \cos(\frac{\theta}{2})y = 0
\end{aligned}$$

Le vecteur $\cos(\frac{\theta}{2})e_1 + \sin(\frac{\theta}{2})e_2$ est alors un vecteur directeur de l'axe de la réflexion. C'est bien un vecteur dont l'angle avec e_1 est $\frac{\theta}{2}$ (à π près) lorsque $\mathcal{B}$ est orthonormée directe.

⊠

Corollaire 9.5.3.2 *Soit $f \in O^-(E)$. Alors, il existe $\mathcal{B}$ une base orthonormée (que l'on peut choisir directe si l'on veut) telle que :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Preuve :

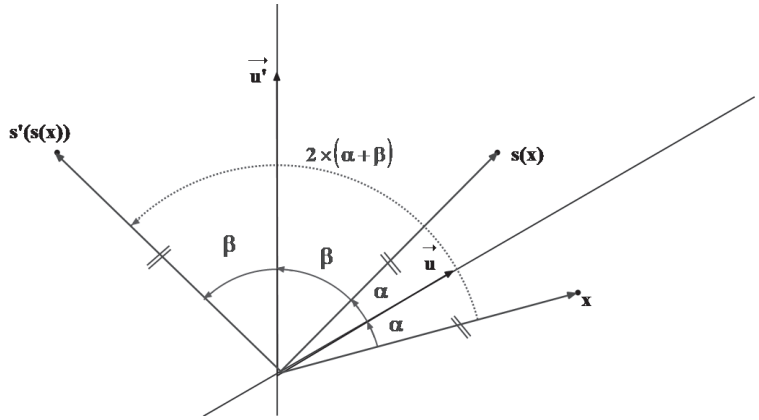
D'après le théorème précédent, f est une réflexion : soit e_1 un vecteur unitaire de l'axe D de la réflexion et e_2 unitaire dirigeant $D^\perp$. Alors, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base orthonormée de E (quitte à remplacer e_2 par $-e_2$, on peut toujours la choisir directe) dans laquelle la matrice de f est de la forme voulue. ⊠

Proposition 9.5.3.3 (Décomposition en produit de deux réflexions) *Soit E un espace euclidien de dimension 2 orienté.*

(i) La composée de deux réflexions s et s' est une rotation. Plus précisément, si $\theta = (\vec{u}, \vec{u}')$ est l'angle (à π près) entre les deux axes, alors $s' \circ s$ est une rotation d'angle 2θ.

(ii) Réciproquement, toute rotation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions. L'angle de la rotation est alors le double de l'angle des deux axes (pris dans le même ordre que la composée).

Remarque : *on peut commencer par faire une interprétation graphique qui aide parfaitement à comprendre ce résultat.*



L'angle $(\vec{u}, \vec{u}')$ de la figure est $\alpha + \beta$, et on obtient bien une rotation dont l'angle est $2(\alpha + \beta)$.

Preuve :

• Pour commencer, si $s, s' \in O^-(E)$, alors $s' \circ s \in O(E)$ (puisque $O(E)$ est un groupe) et $\det(s' \circ s) = \det(s') \times \det(s) = 1$ donc $s' \circ s$ est bien une rotation.

• On va proposer ici deux démonstrations.

∗ Première méthode : calcul direct sans choix particulier de base.

Soient s et s' deux réflexions et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée directe du plan. D'après la proposition précédente (proposition 9.3.5.1), il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$ tels que $Mat_{\mathcal{B}}(s) = S(\theta)$ et $Mat_{\mathcal{B}}(s') = S(\theta')$. De plus, on a vu que dans ce cas, $\frac{\theta}{2}$ est l'angle (à π près) entre e_1 et l'axe de s. De même pour θ'. On a alors :

$$Mat_{\mathcal{B}}(s' \circ s) = S(\theta')S(\theta) = R(\theta' - \theta)$$

(les calculs sont analogues aux calculs faits pour le produit de matrices de rotation et sont laissés en exercice). On remarque par ailleurs que $\theta' - \theta$ est bien deux fois l'angle entre les deux axes.

∗ Seconde méthode : calculs dans une base adaptée.

Soit e_1 un vecteur directeur normé de l'axe de s, on complète (e_1) en $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée directe de E. Soit e'_1 un vecteur unitaire dirigeant l'axe de s' que l'on complète également en $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2)$ base orthonormée directe. Alors :

$$Mat_{\mathcal{B}}(s) = S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Mat_{\mathcal{B}'}(s') = S$$

Soit $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. P est la matrice de passage d'une base orthonormée directe vers une autre base orthonormée directe donc $P \in SO_2(\mathbb{R})$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $P = R(\theta)$ (on peut d'ailleurs remarquer que θ une mesure de l'angle orienté (e_1, e'_1)). Alors :

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{B}}(s' \circ s) &= Mat_{\mathcal{B}}(s')Mat_{\mathcal{B}}(s) \\ &= PMat_{\mathcal{B}'}(s')P^{-1}Mat_{\mathcal{B}}(s) \\ &= R(\theta)SR(-\theta)S \\ &= R(2\theta) \end{aligned}$$

⊠

Remarques : *avec les notations précédentes, $S = S(0)$ et :*

- *on vient de montrer que $O_2^-(\mathbb{R}) = \{R(-\theta)SR(\theta)\ ,\ \theta \in \mathbb{R}\}$ ce qui signifie que O_2^- ne contient « qu'un seul type d'éléments » ;*
- *on a $R(\theta)S = S(-\theta) = SR(\theta)$ et $SS(\theta) = R(-\theta) = S(\theta)S$. En revanche, $O_2(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif car en général, $S(\theta)S(\theta') = R(\theta - \theta') \neq R(\theta' - \theta) = S(\theta')S(\theta)$ (logique car si on compose deux réflexions, on obtient une rotation mais l'angle (son orientation) dépend de l'ordre de composition).*

9.6 Automorphismes orthogonaux de l'espace et étude du groupe $O_3(\mathbb{R})$

9.6.1 Étude théorique

Lemme 9.6.1.1 *Si $f \in O(E)$ (E euclidien quelconque), alors $Sp_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1, 1\}$. Autrement dit, si $f(x) = \lambda x$ avec $x \in E \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda = \pm 1$.*

Preuve :

Supposons qu'il existe $x \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \lambda x$. On a alors :

$$\lambda^2 \|x\|^2 = (\lambda x | \lambda x) = (f(x) | f(x)) = (x|x) = \|x\|^2$$

Puisque $x \neq 0$, $\|x\|^2 \neq 0$ et donc $\lambda^2 = 1$.

⊠

Proposition 9.6.1.2 *Soient E un espace euclidien de dimension 3 et $f \in O(E)$. Alors, il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = x$ ou bien $f(x) = -x$. Autrement dit, f admet au moins un vecteur propre.*

Preuve :

On calcule ce qu'on appelle le polynôme caractéristique (ceci sera étudié en détails dans le cours de mathématiques spéciales 1). On pose :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \ P(\lambda) = \det(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$$

En calculant brutalement le déterminant (en prenant par exemple la matrice de f dans une base quelconque), on montre que P est une fonction polynômiale de degré 3 et de coefficient dominant -1 (ce calcul « brutal » de déterminant, valable pour toute matrice carrée de taille 3, est laissé en exercice). Puisque

- P est continue sur $\mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} P(\lambda) = -\infty < 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} P(\lambda) = +\infty > 0$;

le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un réel λ tel que $P(\lambda) = 0$.
Pour un tel λ, $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$, ce qui équivaut à $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$. Il existe donc $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. D'après le lemme précédent, $\lambda = \pm 1$, c'est-à-dire qu'il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = x$ ou bien $f(x) = -x$.

⊠

Théorème 9.6.1.3 *Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $f \in O(E)$.*

(i) Si $f \in SO(E)$, alors il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

f est alors une rotation d'axe $\mathbb{R}e_1$ et d'angle θ. Lorsque $\theta = \pi$ (modulo 2π), on dit que f est le retournement d'axe $\mathbb{R}e_1$.

(ii) Si $f \in O^-(E)$, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Lorsque $\theta = 0$ (modulo 2π), f est la réflexion par rapport au plan $< e_1 >^{\perp}$. Sinon, f est la composée commutative de la rotation d'axe $\mathbb{R}e_1$ et d'angle θ avec la réflexion par rapport au plan $< e_1 >^{\perp}$.

Preuve :

Soit $f \in O(E)$. D'après le lemme, il existe un vecteur unitaire e'_1 tel que $f(e'_1) = \varepsilon e'_1$, avec $\varepsilon = \pm 1$. Soit $D =< e'_1 >$ et g la restriction de f à $D^{\perp}$. D'après la proposition 9.4.2.3, g est alors un élément de $O(D^{\perp})$. On distingue alors deux cas :

- Si $g \in SO(D^{\perp})$, alors il existe une base orthonormée (e'_2, e'_3) de $D^{\perp}$ telle que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit une base orthonormée directe de E. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $Mat_{\mathcal{B}'}(g) = R(\theta)$. La matrice de f est alors de la forme annoncée (première forme si $\varepsilon = 1$ et seconde forme si $\varepsilon = -1$).
- Si $g \in O^-(D^{\perp})$, g est une réflexion dans le plan $D^{\perp}$. On construit alors une base orthonormée directe $\mathcal{B}'$ telle que $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = diag(\varepsilon, 1, -1)$.
  - Si $f \in SO(E)$, alors $\varepsilon = -1$ et on réordonne les vecteurs de la base en $(e'_2, e_{3'}, e'_1)$ et la matrice de f dans cette nouvelle base orthonormée directe est la matrice d'un retournement.
  - Si $f \in O^-(E)$, alors $\varepsilon = 1$ et on réordonne les vecteurs pour obtenir une nouvelle base orthonormée directe (e'_3, e'_1, e'_2) dans laquelle la matrice de f est $diag(1, -1, -1)$ (qui est bien la matrice d'une réflexion).

Ainsi, pour tout $f \in O(E)$, il existe une base orthonormée directe de l'espace dans laquelle la matrice de f est de l'une des deux formes voulues. Puisque les deux cas s'excluent à cause du déterminant, on obtient le résultat. ⊠

Remarque : *en fait, dans la pratique, on n'applique pas la méthode de la démonstration. On peut montrer que si $f \in SO(E)$ (E est de dimension 3), alors $\ker(f - Id_E) \neq \{0\}$, puis on discute suivant la dimension. On reverra cela dans l'étude pratique. Notez que la démonstration donnée montre bien que si $f \in SO(E)$, $\ker(f - Id_E) \neq \{0\}$ (et est soit de dimension 1, soit de dimension 3).*

Corollaire 9.6.1.4 *Tout automorphisme orthogonal de l'espace se décompose en un produit d'au plus trois réflexions. Si f est une rotation, alors f se décompose en un produit de deux réflexions.*

Preuve :

• Géométriquement, si f est une rotation d'axe D, dans le plan $D^\perp$ on décompose $f_{|D^\perp}$ en un produit de deux réflexions (planes) par rapport aux droites D_1 et D_2. Il reste alors à constater que f est la composée des réflexions par rapport aux plans $< D, D_1 >$ et $< D, D_2 >$.

• Si $f \in O^-(E)$, alors de deux choses l'une :

∗ soit f est une réflexion et le résultat est acquis (f est le produit d'une réflexion - elle-même) ;

∗ ou bien f la composée commutative d'une réflexion et d'une rotation. Dans ce cas, d'après le cas précédent, f est la composée de trois réflexions.

⊠

Exercice 9.6.1.5 Proposer une démonstration directe de ce résultat par calcul matriciel brutal par blocs.

Avant de poursuivre l'étude des automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien de dimension 3, on va revenir sur la notion de produit vectoriel.

Proposition 9.6.1.6 *Soit E un espace euclidien de dimension 3 et orienté. Alors, pour toutes bases orthonormées directes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$. Autrement dit, le déterminant de trois vecteurs en base orthonormée directe ne dépend pas du choix de la base.*
On note alors $\det(u, v, w)$ le déterminant de u, v et w, dans une base orthonormée directe.

Preuve :

On sait que $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}$. Or, puisque $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées directes, $P = Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \in SO_3(\mathbb{R})$ et par conséquent $\det(P) = 1$, c'est-à-dire $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$.

⊠

Proposition 9.6.1.7 (Définition) *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Alors pour tout $(x,y) \in E^2$, il existe un unique vecteur, noté $x \wedge y$, appelé produit vectoriel de x et y tel que :*

$$\forall z \in E \ , \ \det(x,y,z) = \Big((x \wedge y)|z\Big)$$

Preuve :

Soit $(x,y) \in E^2$. L'application $z \longmapsto \det(x,y,z)$ est une forme linéaire sur E. D'après le théorème de représentation de Riesz (théorème 9.3.5.1), il existe un unique vecteur $a \in E$ (que l'on note $x \wedge y$) tel que :

$$\forall z \in E \ , \ \det(x,y,z) = (a|z)$$

⊠

Proposition 9.6.1.8 *Le produit vectoriel est une application bilinéaire antisymétrique.*

Preuve :

• Soit $(x,y) \in E^2$. Alors :

$$\forall z \in E \ , \ (y \wedge x|z) = \det(y,x,z) = -\det(x,y,z) = -(x \wedge y|z) = (-x \wedge y|z)$$

Puisque $a \longmapsto f_a$ est un isomorphisme de E sur $E^\star$ (théorème 9.3.5.1), on en déduit que $y \wedge x = -x \wedge y$.

• Montrons que le produit vectoriel est linéaire à gauche. Soient $x, x' \in E$, $y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall z \in E \ , \ \Big((\lambda x + \mu x') \wedge y|z\Big) &= \det(\lambda x + \mu x', y, z) \\ &= \lambda \det(x,y,z) + \mu \det(x',y,z) \\ &= \lambda(x \wedge y|z) + \mu(x' \wedge y|z) \\ &= \Big(\lambda(x \wedge y) + \mu(x' \wedge y)|z\Big) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $z \in E$, le même argument que ci-dessus montre que :

$$(\lambda x + \mu x') \wedge y = \lambda(x \wedge y) + \mu(x' \wedge y)$$

• Puisque le produit vectoriel est linéaire à gauche et antisymétrique, il est linéaire à droite (exercice : le vérifier).

⊠

Proposition 9.6.1.9 *Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :*

(i) $x \wedge y = 0 \iff (x, y)$ *est liée ;*

(ii) $(x \wedge y) \perp x$ *et* $(x \wedge y) \perp y$.

Preuve :

• Si (x, y) est liée, alors $\forall z \in E$, $(x \wedge y|z) = \det(x, y, z) = 0$. Par suite, $(x \wedge y) \in E^{\perp} = \{0\}$. Réciproquement, si (x, y) est libre, alors il existe $z \in E$ tel que (x, y, z) soit une base de E. Alors, $\det(x, y, z) \neq 0$, c'est-à-dire $(x \wedge y|z) \neq 0$. Ce qui montre que $x \wedge y \notin E^{\perp} = \{0\}$.

⊠

Proposition 9.6.1.10 *Soient x et y deux vecteurs non colinéaires de E. On oriente le plan $< x, y >$ de sorte qu'une mesure de l'angle $\theta = (x, y) \in]0, \pi[$. Alors,*

$$\|x \wedge y\| = \|x\| \times \|y\| \times \sin(\theta)$$

Preuve :

En effet, soient $u = \frac{x}{\|x\|}$ et v obtenu par rotation plane (directe dans le plan $< x, y >$) d'angle $\frac{\pi}{2}$ de u. On complète en $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base orthonormée directe de l'espace. Dans cette base, x a pour coordonnées $(\|x\|, 0, 0)$, y a pour coordonnées $(\|y\| \cos(\theta), \|y\| \sin(\theta), 0)$.
Par ailleurs, puisque $x \wedge y$ est orthogonal à x et y,

$$x \wedge y \perp < x, y > = < u, v >$$

On en déduit donc qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{\star}$ tel que $x \wedge y = \lambda w$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|x \wedge y\|^2 &= \det(x, y, x \wedge y) \\ &= \begin{vmatrix} \|x\| & \|y\| \cos(\theta) & 0 \\ 0 & \|y\| \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda \times \|x\| \times \|y\| \times \sin(\theta) \end{aligned}$$

On en déduit donc dans un premier temps que $\lambda > 0$ et donc :

$$\|x \wedge y\| = |\lambda| \times \|w\| = \lambda$$

Puisque $\|x \wedge y\| \neq 0$, en divisant par $\|x \wedge y\|$, on obtient :

$$\|x \wedge y\| = \|x\| \times \|y\| \times \sin(\theta)$$

⊠

Remarques :

- *vous pouvez noter que la définition formelle d'une base directe ou d'une base orthonormée directe donnée ici est bien plus rigoureuse que la définition que vous avez probablement vue avant, avec « la règle des trois doigts » ;*
- *de même, on a ici une définition très formelle du produit vectoriel qui permet d'ailleurs d'établir de façon immédiate la bilinéarité et l'antisymétrie : propriétés qui étaient plus ou moins délicates à prouver rigoureusement avec la définition géométrique du produit vectoriel que vous aviez apprise.*

Proposition 9.6.1.11 *Soit f une rotation d'axe $\mathbb{R}u$ et d'angle θ, avec u unitaire. Alors :*

$$\forall x \in < u >^{\perp} \ , \ f(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)u \wedge x$$

Plus généralement,

$$\forall x \in E \ , \ f(x) = (1 - \cos(\theta))(u|x)u + \cos(\theta)x + \sin(\theta)u \wedge x$$

Preuve :

• Pour la première formule, si $x = 0$ c'est clair. Sinon, on pose $v = \dfrac{x}{\|x\|}$ et $w = u \wedge v$. (u, v, w) est une base orthonormée directe de l'espace et (v, w) une base orthonormée du plan $< u >^{\perp}$. On a alors :

$$f(v) = \cos(\theta)v + \sin(\theta)w \ \text{ c'est-à-dire } \ \frac{1}{\|x\|}f(x) = \frac{\cos(\theta)}{\|x\|}x + \sin(\theta)\, u \wedge \frac{x}{\|x\|}$$

d'où le résultat (en multipliant par $\|x\|$ et en utilisant la linéarité à droite du produit vectoriel).

• Dans le cas général, soit $x \in E$. Alors $x = (x|u)u + x'$ avec $x' \in < u >^{\perp}$. Par linéarité de f et d'après le calcul précédent, on a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x|u)f(u) + f(x') \\ &= (x|u)u + \cos(\theta)x' + \sin(\theta)u \wedge x' \\ &= (x|u)u + \cos(\theta)\,(x - (u|x)u) + \sin(\theta)u \wedge (x - (x|u)u) \\ &= (1 - \cos(\theta))(u|x)u + \cos(\theta)x + \sin(\theta)u \wedge x \end{aligned}$$

⊠

Remarque : *on pouvait aussi tout simplement remarquer que les applications linéaires f et $x \longmapsto (1 - \cos(\theta))(u|x)u + \cos(\theta)x + \sin(\theta)u \wedge x$ coïncident sur $< u >$ et $< u >^{\perp}$ d'après le premier cas, donc sont égales d'après le théorème de recollement.*

Corollaire 9.6.1.12 *Si u est un vecteur directeur unitaire de l'axe de rotation, alors l'angle θ est caractérisé par :*

$$1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(f) \qquad et \qquad \sin(\theta) = \frac{\det(u, x, f(x))}{\|u \wedge x\|^2}$$

avec x un vecteur quelconque non colinéaire à u et le déterminant calculé en base orthonormée directe.

Preuve :

• D'après le théorème de classification des éléments de $O(E)$ (théorème 9.6.1.3), puisque f est une rotation, il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de E et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{bmatrix}$$

où ici, on a écrit la matrice A par blocs, la matrice $R(\theta)$ est la matrice de $SO_2(\mathbb{R})$, matrice de rotation d'angle θ. On sait que la trace d'un endomorphisme est égale à la trace de la matrice de f dans une base donnée (elle ne dépend pas du choix de la base). Par suite,

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta)$$

• Montrons à présent la règle pour le sinus.
Soit $x \in E$ non colinéaire à u. On a alors :

$$\begin{aligned} \det(u, x, f(x)) &= \det(u, x, (1 - \cos(\theta))(u|x)u + \cos(\theta)x + \sin(\theta)u \wedge x) \\ &= \sin(\theta)\det(u, x, u \wedge x) \\ &= \sin(\theta)\Big((u \wedge x)|(u \wedge x\Big) \\ &= \sin(\theta)\|u \wedge x\|^2 \end{aligned}$$

Or, (u, x) est libre donc $u \wedge x \neq 0$, c'est-à-dire $\|u \wedge x\| \neq 0$ et on peut donc diviser, ce qui donne bien la relation voulue, à savoir :

$$\sin(\theta) = \frac{\det(u, x, f(x))}{\|u \wedge x\|^2}$$

⊠

Remarques :

- *si x est un vecteur unitaire orthogonal à u (c'est-à-dire dans le plan de rotation) alors* $\cos(\theta) = (x|f(x))$ *et* $\sin(\theta) = \det(u, x, f(x))$ *;*
- *dans la pratique, on utilise* $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(f)$ *pour déterminer l'angle de rotation (au signe près) et la formule avec le déterminant pour trouver le signe de θ.*

9.6.2 Étude pratique

Plan d'étude d'une matrice $M \in O_3(\mathbb{R})$

• **Étape 1**
Pour montrer que M est orthogonale, on calcule $(C_i|C_j)$. Il suffit d'ailleurs de la faire avec C_1 et C_2 (c'est-à-dire de montrer que $(C_1|C_1) = (C_2|C_2) = 1$ et $(C_1|C_2) = 0$) puis de vérifier que $C_3 = \pm C_1 \wedge C_2$ (ici C_1, C_2, C_3 désignent les colonnes de la matrice M).

• **Étape 2**
On détermine $\det M$:

- soit par le calcul direct de déterminant ;
- soit en utilisant $C_3 = \det(M)\, C_1 \wedge C_2$.

• **Étape 3**
Cette étape se scinde en deux cas :

$M \in SO_3(\mathbb{R})$	$M \in O_3^-(\mathbb{R})$
(a) on détermine l'axe de rotation : $\ker(M - I_3)$ (u vecteur unitaire dirigeant l'axe)	(a) on détermine $\ker(M + I_3)$
(b) Si ${}^tM = M$, alors M est le retournement d'axe $< u >$	(b) Si $M = -I_3$ c'est fini
(c) Sinon, M est une rotation et l'angle (qui dépend du choix de u) est donné par : $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(M)$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\det(u, x, f(x))}{\|u \wedge x\|^2}$ avec x un vecteur non colinéaire à u.	(c) Si ${}^tM = M$, alors M est la réflexion par rapport au plan $\ker(M + I_3)^\perp$. (d) Sinon, si u est un vecteur unitaire directeur de $\ker(M + I_3)$, M est la composée de la rotation d'axe u d'angle θ et de la réflexion par rapport à $< u >^\perp$ avec θ caractérisé par : $\mathrm{tr}(f) = -1 + 2\cos(\theta)$ Le signe est déterminé par la même règle : $\sin(\theta) = \dfrac{\det(u, x, f(x))}{\|u \wedge x\|^2}$

Exemple 9.6.2.1 Déterminons les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

On note C_1, C_2, C_3 les colonnes de A (et on identifie $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$).

- Tout d'abord,
$$\|C_1\|^2 = \frac{1}{9}\left(1^2+2^2+(-2)^2\right) = 1$$
$$\|C_2\|^2 = \frac{1}{9}\left(2^2+1^2+2^2\right) = 1$$
$$(C_1|C_2) = \frac{1}{9}\left(1\times 2+2\times 1+(-2)\times 2\right) = 0$$
Par ailleurs,
$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}6\\-6\\-3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} = C_3$$
On conclut alors que (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et $A \in O_3(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire $f \in O(\mathbb{R}^3)$).
- Puisque $C_3 = +C_1 \wedge C_2$, $\det(f) = \det(A) = 1$ (on sait que f transforme une base orthonormée directe (la base canonique) en une base orthonormée directe). On conclut donc que $A \in SO_3(\mathbb{R})$ (ou de façon équivalente, $f \in SO(\mathbb{R}^3)$).
- D'après ce qui précède, f est une rotation : déterminons son axe. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (on note $X = {}^t(x\,y\,z)$)).
$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) &\iff AX = X \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x+2y+2z &=& 0 \\ 2x-2y-2z &=& 0 \\ -2x+2y-4z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& y \\ z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff (x,y,z) \in \mathbb{R}(1,1,0)
\end{aligned}$$
Ainsi, en posant $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, (u) est une base orthonormée de l'axe de rotation.
- Enfin, d'après les propriétés du cours, l'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de la rotation vérifie :
$$1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(A) = \frac{1}{3} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \cos(\theta) = -\frac{1}{3}$$
et de plus,
$$\sin(\theta) = \frac{\det(u, e_1, f(e_1))}{\|u \wedge e_1\|^2}$$
Or, $u \wedge e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et :
$$\det(u, e_1, f(e_1)) = (u \wedge e_1|C_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{3}((0,0,1)|(1,2,-2)) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$
Et finalement, $\sin(\theta) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ d'où $\theta = \arccos(-\frac{1}{3})$.

Ainsi, f est la rotation d'axe $\mathbb{R}u$ (avec $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$) et d'angle $\theta = \arccos(-\frac{1}{3})$.

9.7 Exercices

Exercice 9.7.1 Soient $x_0, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ des réels deux à deux distincts. On pose :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \ , \ (P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$$

1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Démontrer que les polynômes d'interpolation de Lagrange forment une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.
3. S'agit-il d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 9.7.2 On définit pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A|B) = tr({}^tAB)$.

1. Montrer que ceci définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $S_n(\mathbb{R})^\perp$.

Exercice 9.7.3 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et strictement positive. On pose :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \ , \ (P|Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Démontrer l'existence d'une famille orthonormée $\mathcal{F} = (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$. $\mathcal{F}$ est-elle une base de $\mathbb{R}[X]$?
3. Montrer que pour tout entier non nul n, P_n est scindé à racines simples et que toutes ses racines sont dans $[0,1]$.

Exercice 9.7.4 Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on considère $u = (1,2,-1,1)$, $v = (0,3,1,-1)$ et $F = \mathrm{Vect}(u,v)$. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$ ainsi qu'un système d'équations cartésiennes.

Exercice 9.7.5 Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on considère F défini par :

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \in F \iff (x_1+x_2+x_3+x_4 = 0 \ \text{ et } \ x_1+2x_2+3x_3+4x_4 = 0)$$

Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F.

Exercice 9.7.6 On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \in F \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+x_4 & = & 0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

1. Former la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F. En déduire celle de la symétrie orthogonale par rapport à F.
2. Étant donné $x \in \mathbb{R}^4$, calculer la distance de x à F.

Exercice 9.7.7 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire et soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(e_1, \cdots, e_n) \in E^n$ tels que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ ||e_i|| = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in E \ , \ ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une famille orthonormale de E.
2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

   Indication : on pourra montrer que pour tout $x \in E$, $x = p_{<\mathcal{B}>}(x)$.

Exercice 9.7.8 Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 9.7.9 Calculer, après avoir justifié l'existence, $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 x^2 |\ln x - ax - b|^2 \, \mathrm{d}x$.

Exercice 9.7.10 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose pour $P, Q \in E$, $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)(1+x^2) \, \mathrm{d}x$.

1. Montrer que E est alors un espace vectoriel euclidien.
2. Lorsque $n = 3$, déterminer une base orthonormée de E par orthonormalisation de la base canonique.

Exercice 9.7.11 On note $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et on considère l'application φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (f, g) \in E^2 \ , \ \varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E. On notera par la suite $(f|g)$ au lieu de $\varphi(f, g)$.
2. Déterminer une base orthonormée de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_3$ constitué des fonctions polynomiales de degré au plus 3.
3. Calculer la distance de $f = \exp \in E$ à $\mathcal{P}_2$ (même notation qu'à la question précédente).

Exercice 9.7.12 Soient E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et f, g deux applications de E dans E telles que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \ , \ (f(x)|y) = (x|g(y))$$

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de E.
2. On suppose que E est euclidien. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ donné, il existe un unique g vérifiant la relation précédente.

Exercice 9.7.13 Soient E un espace vectoriel euclidien, $a \in E \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. On définit une application f par :

$$\forall x \in E \ , \ f(x) = x + \alpha(x|a)a$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres et espaces propres de f, c'est-à-dire les réels λ tels que $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$ ainsi que les espaces $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ pour de telles valeurs de λ.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme orthogonal. Caractériser dans ce cas f.

Exercice 9.7.14 Déterminer la nature des endomorphismes de E (euclidien) ayant pour matrice dans une b.o.n.d. de E :

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{bmatrix} \ ; \ B = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{bmatrix} \ ; \ C = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & -2-2\sqrt{3} & 4-\sqrt{3} \\ -2+2\sqrt{3} & 2 & 2+2\sqrt{3} \\ 4+\sqrt{3} & 2-2\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 9.7.15 Soit $A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 8 & 6 & -10 \\ -10 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & 5 \end{bmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Démontrer que $\ker(f) \perp \mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ constituée d'une base de $\ker f$ et d'une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Écrire la matrice de f dans cette base et en déduire la nature géométrique de f.

Exercice 9.7.16 Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe dirigé et orienté par $e_1 + e_2 - e_3$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 9.7.17 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Former la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport au plan d'équation cartésienne $ax + by + cz = 0$.

Exercice 9.7.18 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2+b^2+c^2 = 1$. Déterminer la matrice relativement à la base canonique du retournement d'axe $\mathbb{R}(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$.

Exercice 9.7.19 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$. Montrer que f est une rotation.

Exercice 9.7.20 Soient r et R deux rotations d'un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Que peut-on dire de la nature de $f = r \circ R \circ r^{-1}$?
2. Déterminer le(s) vecteur(s) normé(s) invariants par f.
3. Que peut-on dire de la trace de f ?
4. En déduire les éléments caractéristiques de f.