M.TEHUA
What. : (+225) 05 05 46 23 46 13
Email: Tehua.unasafa@gmail.com

1iere

MATHEMATIQUES

Exercices corrigés

(Dénombrement)

Edition FOMESOUTRA

DENOMBREMENT ET PROBABILITE

I/ DENOMBREMENT

Exercice n°23.

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes

1) De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes ?
2) Dans chacun des cas suivants, de combien de façons peut-on constituer ce groupe avec :
   a) uniquement des hommes ;
   b) des personnes de même sexe ;
   c) au moins une femme et au moins un homme

CORRECTION

Soit E l'ensemble des personnes.

1/ Card (E) = 25 + 32 = 57

Ici le choix des 6 personnes se fait sans tenir compte de l'ordre, donc il s'agit d'une combinaison de 6 éléments dans un ensemble de 57. Cependant le nombre de groupe qu'on peut constituer est :

$$C_{57}^{6} = 36.288.252 \text{ groupes.}$$

2. a/ Les groupes sont constitués uniquement que des hommes :

$$C_{32}^{6} = 906.192 \text{ groupes.}$$

b/ Les groupes sont constitués que des personnes de même sexe :

$$C_{25}^{6} + C_{32}^{6} = 1.082.292 \text{ groupes.}$$

c/ Constitués d'au moins une femme et au moins un homme :

$$C_{25}^{1} \times C_{32}^{5} + C_{25}^{2} \times C_{32}^{4} + C_{25}^{3} \times C_{32}^{3} + C_{25}^{4} \times C_{32}^{2} + C_{25}^{5} \times C_{32}^{1} = 35.204.960$$

Scanné avec CamScanner

Exercice n°24.

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer le nombre de possibilités :
   a) De ne tirer que 3 jetons verts ;
   b) De ne tirer aucun jeton vert
   c) De tirer au plus 2 jetons verts ;
   d) De tirer exactement 1 jeton vert.
2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

CORRECTION

5 → Verts

4 → rouges

1/ Tirage successive

b/ De ne tirer aucun jeton vert :

$A_4^3 = 24$

a/ De ne tirer que 3 jetons verts :

$A_5^3 = 60$

c/ De tirer au plus 2 jetons verts :

$A_5^0 \times A_4^3 + A_5^1 \times A_4^2 + A_5^2 \times A_4^1 = 24 + 60 + 80 = 164$

d/ De tirer exactement 1 jeton vert :

$A_5^1 \times A_4^2 = 5 \times 12 = 60$

2/ Tirage simultané.

a-
b-
c-
d-

} remplacer Arrangement par Combinaison dans la question 1.

Exercice n°25.

~~Un portemanteau~~ comporte 5 patères alignées. Combien a-t-on de dispositions distinctes (sans mettre deux manteaux l'un sur l'autre) :

1) pour 3 manteaux sur ces 5 patères ?
2) pour 5 manteaux ?
3) pour 6 manteaux ?

Scanné avec CamScanner

CORRECTION

1/ pour 3 manteaux sur ces 5 patères :

$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

2/ Pour 5 manteaux :

$N_1 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

3/ Pour 6 manteaux :

$N_2 = 5! \times 5$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5$

$= 120 \times 5$

$N_2 = 600$

Exercice n°14.

Les nombres 5, -1 et 3 constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues.

Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système

CORRECTION

Déterminons les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système.

Il s'agit d'une permutation

$N = 3! = 3 \times 2 \times 1$

$N = 6$

Exercice n°15.

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATH ?

CORRECTION

Déterminons le nombre d'anagrammes du mot MATH.

Il s'agit d'une permutation

$N = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$N = 24$

Exercice n°16.

1) Dénombrer les anagrammes du mot PATRICE
2) Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot PATRICE :
   a) commençant et finissant par une consonne ;
   b) commençant et finissant par une voyelle ;
   c) commençant par une consonne et finissant par une voyelle
   d) commençant par une voyelle et finissant par une consonne

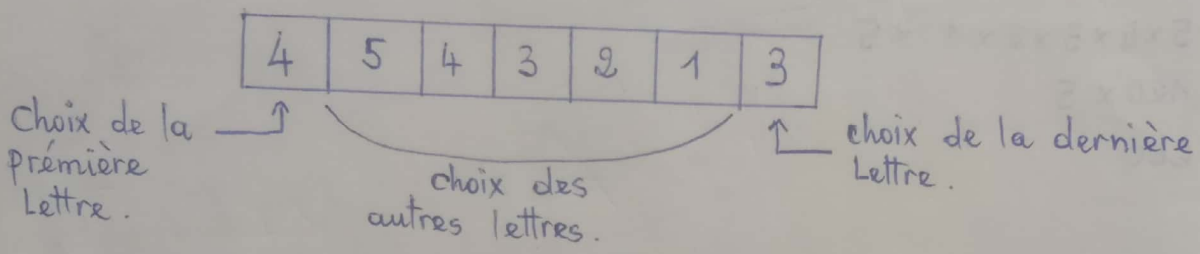
Scanné avec CamScanner

CORRECTION

1/ Le nombre d'anagramme du mot PATRICE :
Il s'agit d'une permutation des 7 lettres du mot PATRICE

$N_1 = 7! = 5040$

2. a/ Il y a 4 Consonnes et 3 voyelles dans le mot PATRICE. Donc le nombre d'anagramme Commençant et finissant par une Consonne est :



$N_2 = 4 \times 5! \times 3$

$N_2 = 1440$

b/ Commençant et Finissant par une voyelle :

$N_3 = 3 \times 5! \times 2$

$N_3 = 720$

c/ Commençant par une Consonne et finissant par une voyelle :

$N_4 = 4 \times 5! \times 3$

$N_4 = 1440$.

d/ Commençant par une voyelle et finissant par une Consonne :

$N_5 = 3 \times (5!) \times 4$

$N_5 = 1440$

Exercice n°17.
Un groupe de 3 élèves de Terminale doit aller chercher des livres au CDI. De combien de manières peut-on former ce groupe ? (il y a 24 élèves dans la classe)

CORRECTION

Le nombre de maniere de former ce groupe est :
L'ordre n'etant pas important, il s'agit ici d'une Combinaison de 3 elements dans un ensemble de 24 elements :

$N = C_{24}^{3}$

$N = 2024$

Scanné avec CamScanner

Exercice n°18.

Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois Combien doit-on organiser de matchs ?

CORRECTION

Le nombre de matchs organiser est :
L'ordre n'etant pas important, il s'agit d'une Combinaison de 2 elements dans un ensemble à 8 elements.

$N = C_8^2 \Rightarrow N = 28$ matchs.

Exercice n°19.

Au loto, il y a 49 numéros. Une grille de loto est composée de 6 de ces numéros. Quel est le nombre de grilles différentes ?

CORRECTION

Le nombre de grilles differentes est :
L'ordre n'etant pas important, il s'agit d'une Combinaison de 6 elements dans un ensemble à 49 elements.

$N = C_{49}^6 \Rightarrow N = 13.983.816$ grilles.

Exercice n°20.

De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes ?

CORRECTION

soit A le nombre de Façon :

$A = C_{10}^3 \times C_5^2 = 120 \times 10$

$A = 1200$ Façons.

Exercice n°21.

Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués

1) Quel est le nombre de choix possibles ?
2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et fille
3) Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons ? 1 2 3 4 5 6 A B C

Reponse

19 garçons
13 filles
} 32 élèves.

1/ le nombre de choix possibles.

$C_{32}^2 = 496$ choix

Scanné avec CamScanner

2/ nombre de choix si l'on impose un garçon et une fille :

$C_{19}^{1} \times C_{13}^{1} = 19 \times 13 = 247$ choix

3/ Nombre de choix si l'on impose 2 garçons :

$C_{19}^{2} \times C_{13}^{0} = 171 \times 1 = 171$ choix.

Exercice n°22.

Au service du personnel, on compte 12 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

1) Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
2) Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?
3) Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?

CORRECTION

12 Celibataires } 30 employés
18 mariés

1/ Le nombre d'echantillons différents possibles :

$C_{30}^{4} = 27405$ echantillons.

2/ Le nombre d'echantillons ne Contenant aucun Célibataire :

$C_{18}^{4} \times C_{12}^{0} = 3060 \times 1 = 3060$ echantillons.

3/ Le nombre d'echantillons Contenant au moins un celibataire :

$(C_{12}^{1} \times C_{18}^{3}) + (C_{12}^{2} \times C_{18}^{2}) + (C_{12}^{3} \times C_{18}^{1}) + (C_{12}^{4} \times C_{18}^{0}) = 24345$ echantillons.

EXERCICE N°27

1/ Dix personnes se présentent dans une salle pour une réunion. Comme de coutume, ces personnes se serrent les mains pour se saluer.

Démontrer que le nombre de poignées de mains distinctes est 45.

2/ On suppose qu'il avait 5151 poignées de mains distinctes pour se saluer au début d'une réunion. On note n le nombre de ces personnes à cette reunion.

a/ Démontrer que n est la solution de l'equation (E) :

$x^2 - x - 10302 = 0$

Scanné avec CamScanner

b/ Résoudre l'équation (E). En déduire le nombre n de ces personnes à cette réunion.

CORRECTION

1/ Le nombre de poignés distinctes est :

$C_{10}^{2} = 45$ poignés distinctes.

2/a/ Soit n le nombre total de personne.

On a : $C_n^2 = 5151 \Rightarrow \frac{A_n^2}{2!} = 5151$

$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 5151$

$\Rightarrow n^2 - n = 10.302$

$\Rightarrow n^2 - n - 10.302 = 0$

Donc n est la solution de l'equation (E) : $x^2 - x - 10.302 = 0$

b/ Resolution de l'equation (E) :

$x^2 - x - 10.302 = 0$

$\Delta = 41.209 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 203$

$x_1 = -101$ et $x_2 = 102$

$S = \{-101; 102\}$

- $x \in \mathbb{N}$ donc le nombre de personne à cette réunion est : 102 personnes.

EXERCICE N°28

Cinq chevaux A, B, C, D et E prennent le départ d'une Course. On suppose qu'il n'y a pas d'exaequo.

1/ Quel est le nombre d'arrivées possibles ?

2/ Determiner le nombre de cas où :

a/ Le cheval A est premier.

b/ le cheval A suit le cheval B.

Scanné avec CamScanner

c/ Les chevaux A et B occupent les deux premières places.

CORRECTION

1/ Le nombre d'arrivées possible est :

$N_1 = 5!$

$N_1 = 120$ arrivées

2/a - Le Cas où le cheval A est prémier :

$N_2 = 1 \times 4!$

$N_2 = 24$ arrivées

b - le Cas où le cheval A suit le cheval B.

$N_3 = 1 \times 6$

$N_3 = 6$ arrivées

c - Le Cas où les chevaux A et B occupent les deux premières places :

$N_4 = 2\ (1 \times 6)$

$N_4 = 12$ arrivées.

EXERCICE N° 29

Une enquête menée dans une classe de 70 élèves a donné Les résultats suivants :

25 élèves ont la moyenne en mathematiques, 22 élèves ont la moyenne en anglais, 33 élèves ont la moyenne en EPS, 8 élèves ont la moyenne en mathematiques et en EPS, 5 élèves ont la moyenne en mathématique et en anglais, 6 élèves ont la moyenne en EPS et en anglais, 4 élèves ont la moyenne en mathématiques, en EPS et en anglais.

1/ Combien y a-t-il d'élèves qui ont la moyenne :

a/ Uniquement en mathématiques ?

b/ Uniquement en anglais ?

c/ Uniquement en EPS

Scanné avec CamScanner

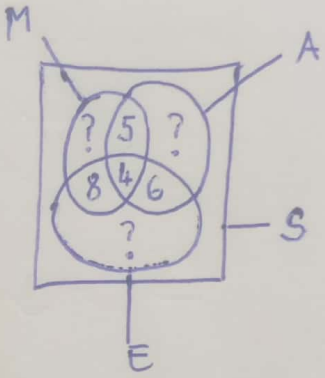
2/ Combien y a-t-il d'élèves qui n'ont pas la moyenne dans aucune de ces trois matières ?

CORRECTION

25 → Mathematiques (M)
22 → Anglais (A)
33 → Eps (E)

Soit S le nombre d'élèves dans la classe :
Card (S) = 70.

1) a - Uniquement ent Mathematiques :
25 - (5+4+8) = 8 élèves



b - Uniquement en Anglais :
22 - (5+4+6) = 7 élèves

c/ Uniquement en Eps
33 - (8+6+4) = 15 élèves.

2/ Qui n'ont pas la moyenne dans aucune de ces trois matières :
70 - (8+7+15+4+5+8+6) = 17 élèves

Scanné avec CamScanner

Dans un lot de 20 pièces fabriquées, 4 sont mauvaises. De combien de façon différentes peut-on en prélever 4 dans les cas suivants :
a) les 4 pièces sont bonnes
b) Une au moins d'entre elles est mauvaise.
c) Deux au moins sont mauvaises.

Solution

Les réponses dépendent de l'expérience. D'après l'énoncé il n'y a pas répétition mais est-ce que l'ordre compte ? Tirages successifs, arrangements, ou tirage simultané, combinaisons ?

a) Si l'ordre compte il y a A_4^{16} façons sinon une $\binom{16}{4}$

b) On prend l'évènement contraire, aucune mauvaise ou quatre bonnes donc il y a : $A_{20}^4 - A_{16}^4$ ou $\binom{20}{4} - \binom{16}{4}$

c) L'évènement « deux au moins » est égale à l'évènement « un au moins » moins l'évènement « un exactement » . On choisit une mauvaise parmi 4, 4 choix, puis trois bonnes parmi 16, $\binom{16}{3}$ choix, si l'ordre compte il y a 4! (nombre de permutations) façon de ranger ces 4 éléments donc :

$A_{20}^4 - A_{16}^4 - 4 \times 4! \binom{16}{3} = A_{20}^4 - A_{16}^4 - 16\ A_{16}^3$ ou $\binom{20}{4} - \binom{16}{4} - 4\binom{16}{3}$

Rappel : $A_n^p = p!\binom{n}{p}$

Une classe de 30 élèves, 12 filles et 18 garçons, doit élire un comité composé d'un président, un vice-président et un secrétaire.
a) Combien de comités peut-on constituer ?
b) Combien de comités peut-on constituer sachant que le poste de secrétaire doit être occupé par une fille ?
c) Quel est le nombre de comités comprenant l'élève X ?
d) Quel est le nombre de comités pour lesquels le président est un garçon et le secrétaire une fille ?
e) Quel est le nombre de comités pour lesquels le président et le vice-président sont de sexes différents ?

Solution

L'ordre compte et il n'y a pas de répétition donc les comités sont des arrangements.

a) Il y a A_{30}^3 comités possibles.

b) On choisit une fille parmi 12 donc 12 choix pour la secrétaire puis deux élèves parmi les 29 restants donc : $12\ A_{29}^2$

c) Il y a 3 postes possibles pour X puis on choisit 2 élèves parmi les 29 restants donc : $3\ A_{29}^2$

d) Il y a 18 choix pour le président puis 12 pour le secrétaire et il à choisir le vice-président parmi les 28 restants donc $18 \times 12 \times 28$

e) On choisit un garçon puis une fille donc 18×12 cas, puis 2 cas selon que la fille ou le garçon est président, puis un secrétaire parmi les 28 restants donc : $18 \times 12 \times 2 \times 28$

Une assemblée de 15 hommes et 12 femmes désire élire un comité de 6 membres, madame A refuse de siéger dans tout comité dont ferait partie monsieur B.
a) Quel est le nombre de comités qui pourront être constitués dans ces conditions ?
b) Dénombrer ceux de ces comités dont madame A ferait partie.

Solution

a) On va compter le nombre de comités où A et B siégeraient, A et B étant choisis il reste à choisir 4 personnes parmi les 25 restantes sans ordre donc : $\binom{25}{4}$

Nombre total de comités de 6 personnes parmi 27 : $\binom{27}{6}$

Nombre de comités où A et B ne siègent pas en même temps : $\binom{27}{6} - \binom{25}{4}$

b) A est choisi, il reste à choisir 5 personnes parmi 25 (ni A, ni B) donc : $\binom{25}{5}$

On choisit 5 cartes dans un jeu de 32. Combien y a-t-il de résultats comprenant : **1)** exactement 2 valets ; **2)** aucun as ; **3)** au moins 3 dames ; **4)** 2 trèfles et 3 carreaux ; **5)** 2 cartes d'une couleur et trois de l'autre ; **6)** au moins un roi ; **7)** 3 piques et 2 roi ?

Solution

1) On choisit 2 valets parmi quatre sans ordre, $\binom{4}{2}$ choix, puis 3 cartes parmi les non valets donc, $\binom{28}{3}$ choix. En tout $\binom{4}{2}\binom{28}{3}$ choix.

2) On choisit 5 cartes parmi 28 donc $\binom{28}{5}$ choix.

3) Attention à ne pas compter deux fois la même main (3 dames puis 2 parmi les 29 restantes est faux). Il faut étudier 2 cas :
4 dames puis 1 parmi 28
3 dames, 4 cas, puis 2 parmi 28
En tout, $28 + 4\binom{28}{2}$

4) 2 parmi 8 puis 3 parmi 8 donc $\binom{8}{2}\binom{8}{3}$

5) Attention, il faut bien lire la question, ici couleur désigne noir ou rouge et non pique, cœur, carreau, trèfle. On choisit la couleur des deux cartes donc 2 cas, puis cas précédent donc : $2\binom{8}{2}\binom{8}{3}$

6) Evènement contraire, aucun roi, $\binom{28}{5}$ donc $\binom{32}{5} - \binom{28}{5}$

7) Deux cas; avec le roi de pique, 3 choix pour le deuxième roi, puis 2 piques parmi 7 donc $\binom{7}{2}$ puis une carte ni pique ni roi donc 21 choix, donc $3 \times 21\binom{16}{4}$
sans le roi de pique, 2 rois parmi 3, 3 choix, 3 piques parmi 7 $\binom{7}{3}$ donc $3\binom{7}{3}$
En tout $3 \times 21\binom{16}{4} + 3\binom{7}{3}$

On tire successivement 4 boules d'un sac contenant 10 boules : 3 vertes et 7 jaunes. Déterminer le nombre de tirages permettant d'obtenir : **a)** 4 boules jaunes ; **b)** 4 boules vertes ; **c)** 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre ; **d)** 3 jaunes et une verte ; **e)** 2 jaunes et deux vertes dans cet ordre ; **f)** deux jaunes et deux vertes ; **g)** au moins 3 vertes ; **h)** au plus 3 jaunes.
On distinguera deux cas suivant que le tirage est effectué avec ou sans remise.

Solution

On suppose que les boules sont numérotées, avec remise un résultat est une 4-liste de l'ensemble produit E^4 où E est l'ensemble des dix boules, sans remise un résultat est un arrangement.

a) 4 jaunes, 7^4 ou A_7^4 cas

b) 4 vertes, 3^4 ou 0 cas

c) 3 jaunes en premier puis une verte donc $7^3 \times 3$ ou $A_7^3 \times 3$

d) 2 jaunes puis deux vertes donc $7^2 \times 3^2$ ou $A_7^2 A_3^2$

e) On choisit les deux places non ordonnées des deux vertes donc $\binom{4}{2}$ cas, puis on retombe sur le cas précédent donc $7^2 \times 3^2\binom{4}{2}$ ou $A_7^2 A_3^2\binom{4}{2}$

f) 3 vertes exactement ou 4 vertes exactement.
3 vertes, 4 choix pour la place de la jaune puis 7×3^3 ou $A_7^1 A_3^3$ choix donc $4 \times 7 \times 3^3$ ou $4 \times A_7^1 A_3^3$ choix
4 vertes, 3^4 ou 0 choix.
Donc en tout, $4 \times 7 \times 3^3 + 3^4$ ou $4 \times A_7^1 A_3^3$ choix

g) Evènement contraire, 3 jaunes exactement ou 4 jaunes exactement.
Avec le même raisonnement que ci-dessus on obtient $4 \times 7^3 \times 3 + 7^4$ ou $4 \times A_7^3 A_3^1 + A_7^4$ choix donc $10^4 - \left(4 \times 7^3 \times 3 + 7^4\right)$ ou $A_{10}^4 - \left(4 \times A_7^3 A_3^1 + A_7^4\right)$ choix.

On garde tous les cœurs et tous les trèfles d'un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de permutations de ces 16 cartes dans lesquelles deux cartes consécutives quelconques sont de couleurs différentes.

Solution

D'après l'énoncé les couleurs sont alternées, cœur trèfle cœur trèfle ... ou trèfle cœur trèfle ... Donc deux cas.
Pour les cœurs il y a 8! cas (nombre de permutations de 8 éléments) et idem pour les trèfles donc $2 \times (P_8)^2 = 2 \times (8!)^2$ permutations.

On considère les cinq lettres a, b, c, d, e. Combien peut-on former de mots avec ces cinq lettres, dans lesquels les voyelles a et e ne sont pas voisines ?

Solution

On considère l'évènement contraire, mots avec a et e consécutifs ou e et a consécutifs, donc deux cas. On choisit deux rangs consécutifs, 4 choix (de 1,2 à 4,5). On place les trois lettres restantes dans les trois cases donc $P_3 = 3!$ choix. Donc $2 \times 4\ P_3$ choix.

Donc il y a $P_5 - 2 \times 4\ P_3$ mots.

Soit un polygone convexe de n côtés. Combien a-t-il de diagonales ?

Solution

Une diagonale joint deux sommets non consécutifs. Par chaque sommet il passe *n*-3 diagonales, il y a *n* sommets mais chaque diagonale est comptée deux fois donc $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

Calculer le nombre d'anagrammes formées avec les lettres des mots PERE, THEOREME, ANANAS.

Solution

On place déjà P et R, il y a A_4^2 choix, puis les E dans les deux places restantes, donc A_4^2 anagrammes de PERE.

On place T,H,O,R et M puis les 3 E donc A_5^8 anagrammes de THEOREME

On place S, 6 choix, puis on choisit deux places non ordonnées parmi 5 pour les N donc $\binom{5}{2}$, on place les A dans les places restantes donc $6\binom{5}{2}$ anagrammes.

Soit E un ensemble de cardinal n, et A un ensemble inclus dans E de cardinal p. Quel est le nombre de parties de E contenant A ?

---

5 pts

Soit E un ensemble de cardinal fini n et A une partie de E de cardinal p.

1. Quel est le nombre de parties de E à k éléments qui contiennent un et un seul élément de A ?

2. Quel est le nombre de parties de E à k éléments qui contiennent au moins un élément de A ?

Solution

1. On choisit un élément dans A (il y a p choix), puis on a $\binom{n-p}{k-1}$ choix pour les autres éléments (k-1 éléments dans le complémentaire de A) donc on a $p\binom{n-p}{k-1}$ parties.

2. Il y a $\binom{n-p}{k}$ parties de E qui ne contiennent aucun élément de A, donc $\binom{n}{k} - \binom{n-p}{k}$ qui contiennent au moins un élément de A.

Soit E un ensemble de cardinal fini n

Trouver le cardinal des ensembles suivants :

$F = \{(A;B) \in P(E)^2 / A \cup B = E, A \cap B = \varnothing\}$

$G_A = \{B \in P(E) / A \cup B = E\}$ avec $card(A) = p$ fixé

$H = \{(A;B) \in P(E)^2 / A \cup B = E\}$

Solution

$F = \{(A;\overline{A}) \in P(E)^2\}$ donc card (*F*)=2^n. L'application qui a A associe $\overline{A}$ est bijective !!)

Soit $f : P(A) \to G_A$ définie par $f(X) = X \cup \overline{A}$ est une bijection de $P(A)$ dans G_A donc $card(G_A) = 2^p$

$H = \{(A;B) / A \in P(E),\ B \in G_A\}$ donc il y a $n+1$ cas correspondants au nombre p d'éléments de A, $0 \leqslant p \leqslant n$. On choisit un ensemble A de p éléments,Il y a $\binom{n}{p}$ choix. Puis on choisit $B \in G_A$, il y a 2^p choix.

Donc $card(H) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = (2+1)^n = 3^n$ d'après la formule du binôme de Newton

---

Quelle est le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à 2 éléments ?

Quelle est le nombre de surjections d'un ensemble à n+1 éléments dans un ensemble à n éléments ?

Solution

Il y a 2^n applications dont 2 ne sont pas des surjections (tous les éléments ont la même image) donc 2^n-2 surjections

Un élément x de l'ensemble d'arrivée a 2 antécédents , les autres en ont un seul. Choisissons l'élément x (n choix possibles), il y a alors $\binom{n+1}{2}$ choix possibles pour choisir les 2 antécédents , puis (*n*-1) ! choix possibles pour les autres images soit $(n-1)!\,n\binom{n+1}{2} = n!\binom{n+1}{2}$ surjections.

Trouver le cardinal de $Q = \{(A;B) \in P(E)^2 / A \cap B = \varnothing\}$

Calculer la somme des cardinaux de toutes les parties de E avec card (E)=n.

Solution

Soit A fixé de cardinal k, $A \cap B = \varnothing$ donc $B \in P(\overline{A})$ et il y a 2^{n-k} parties de E qui ne contiennent aucun élément de A. Il y a $\binom{n}{k}$ parties A de k éléments,

Donc $card(Q) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$ d'après la formule du binôme de Newton

Il y a $\binom{n}{k}$ parties de cardinal k donc le cardinal cherché est $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ et en dérivant des 2 côtés : $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k$ puis en donnant la valeur 1 à x , on obtient : $n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k$

Calculer | 1 + i |².

En déduire que $\left(1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} \ldots\right)^2 + \left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \ldots\right)^2 = 2^n$

Solution

Un nombre complexe s'écrit $z = a + ib$, on le représente dans le plan par le point M de coordonnées (a,b) (on dit M d'affixe z). Le module de z noté $|z| = |a + ib|$ est la longueur OM, donc $|a+ib|^2 = a^2 + b^2$ et $|1+i|^2 = 2$

$|1+i|^{2n} = 2^n$ mais aussi

$|1+i|^{2n} = |(1+i)^n|^2 = \left(1 + \binom{n}{1} i + \binom{n}{2} i^2 + \binom{n}{3} i^3 + \binom{n}{4} i^4 + \ldots\right)$

$i^2 = -1,\ i^3 = -i, i^4 = 1,\ i^5 = i \ldots$ en écrivant les termes réels puis les termes imaginaires purs puis en factorisant *i* on obtient la formule.

---

officiel 04 (5 pts)

On considère 7 boules numérotées de 1 à 7. L'expérience consiste à en tirer simultanément 3.

1. Soit k un entier vérifiant $3 \leqslant k \leqslant 7$. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k ?

2. En déduire une expression de $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2}$ sous forme d'un unique coefficient binomial.

Solution

On tire simultanément 3 boules numérotées parmi sept donc un résultat est une combinaison et il y a $\binom{7}{3}$ tirages possibles.

1. k est le plus grand numéro du tirage donc il reste à choisir 2 boules parmi k-1 soit $\binom{k-1}{2}$ tirages.

2. D'après le résultat du 1. il y a $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2}$ tirages possibles donc : $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2} = \binom{7}{3}$