

# Eléments d'analyse

## Limites

### Exercice 1 [00227] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

On suppose que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  et on désire établir

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \ell$$

a) Pour  $\varepsilon > 0$ , justifier qu'il existe  $A \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $x \geq A$  :

$$\left| \frac{1}{x} \int_A^x (f(t) - \ell) dt \right| \leq \varepsilon$$

b) Conclure en écrivant

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - \ell = \frac{1}{x} \int_0^A (f(t) - \ell) dt + \frac{1}{x} \int_A^x (f(t) - \ell) dt$$

### Exercice 2 [00228] [correction]

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que

$$f(x+1) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$$

Montrer que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$$

en commençant par étudier le cas  $\ell = 0$ .

### Exercice 3 [00230] [correction]

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) + f'(t) = \ell \in \mathbb{R}$$

Montrer que

$$f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \ell$$

### Exercice 4 Mines-Ponts MP [02812] [correction]

Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x/2)}{\sqrt{x}} = 1$$

Trouver un équivalent simple en 0 de  $f$ .

### Exercice 5 [03223] [correction]

Montrer que lorsque  $x \rightarrow +\infty$

$$\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$$

## Développements limités

### Exercice 6 [00231] [correction]

Déterminer les développements limités suivants :

a)  $DL_3(0)$  de  $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$

b)  $DL_3(0)$  de  $\sqrt{3+\cos x}$

c)  $DL_2(0)$  de  $(1+x)^{1/x}$

d)  $DL_3(0)$  de  $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$

### Exercice 7 [00232] [correction]

Former le DL à l'ordre 3 en 0 de  $\arctan(e^x)$ .

Quelle à l'allure de cette fonction autour de ce point ?

### Exercice 8 [00233] [correction]

Exprimer le développement limité général en 0 de  $\arcsin x$ .

**Exercice 9** [ 00234 ] [correction]

Former le DL à l'ordre 3 en 0 de

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Prolonger le DL à l'ordre 5 en exploitant

$$\tan(\arctan x) = x$$

Prolonger le DL à l'ordre 7 en exploitant

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

**Exercice 10** Mines-Ponts MP [ 02818 ] [correction]Soit  $f : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

a) Trouver le plus grand intervalle ouvert  $I$  contenant 0 sur lequel  $f$  est un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme.

b) On note  $g$  l'application réciproque de  $f|_I$ . Montrer que les coefficients du développement limité de  $g$  en 0 à un ordre quelconque sont positifs.

## Etude asymptotique d'application réciproque

**Exercice 11** [ 00237 ] [correction]On pose  $f(x) = x + \ln x - 1$  pour  $x > 0$ .

a) Prouver que  $f$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur un intervalle à préciser.

b) Former le développement limité à l'ordre 2 de  $f^{-1}$  en 0.

c) Donner un équivalent simple à  $f^{-1}(y)$  quand  $y \rightarrow +\infty$ .

d) Quelle est l'allure de la branche infinie de  $f^{-1}$  en  $+\infty$ ?

e) Donner un équivalent simple à  $f^{-1}(y)$  quand  $y \rightarrow -\infty$ .

**Exercice 12** [ 00238 ] [correction]Montrer que  $x \mapsto x + \ln(1+x)$  admet au voisinage de 0 une fonction réciproque.

Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de celle-ci.

**Exercice 13** [ 00239 ] [correction]Soit  $f : [e, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[e, +\infty[$  vers un intervalle à préciser.

b) Déterminer un équivalent simple à  $f^{-1}$  en  $+\infty$ .

c) Réaliser un développement asymptotique à trois termes de  $f^{-1}$  en  $+\infty$ .

**Exercice 14** [ 03228 ] [correction]Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ et } f''(0) > 0$$

a) Montrer l'existence de  $a > 0$  tel que  $f$  est strictement décroissante sur  $[-a, 0]$  et strictement croissante sur  $[0, a]$ .

b) On pose

$$b = \min \{f(-a), f(a)\}$$

Montrer que pour tout  $\lambda \in [0, b]$ , l'équation  $f(x) = \lambda$  admet une unique solution  $x_1(\lambda)$  dans  $[-a, 0]$  et une unique solution  $x_2(\lambda)$  dans  $[0, a]$ .

c) Déterminer les limites puis des équivalents de  $x_1(\lambda)$  et de  $x_2(\lambda)$  quand  $\lambda \rightarrow 0^+$ .

d) On suppose maintenant que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^3$ . Etudier la limite quand  $\lambda \rightarrow 0^+$  de

$$\frac{x_1(\lambda) + x_2(\lambda)}{\lambda}$$

**Exercice 15** [ 03230 ] [correction]Soit  $f : x \mapsto \frac{x+1}{x}e^x$ 

a) Montrer que l'équation

$$f(x) = \lambda$$

admet deux solutions  $a(\lambda) < b(\lambda)$  pour  $\lambda$  assez grand.

b) Déterminer

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} b(\lambda)^{a(\lambda)}$$

## Continuité des fonctions réelles

### Exercice 16 Centrale MP [00246] [correction]

La fonction  $t \mapsto \sin \frac{1}{t}$  si  $t > 0$  et 0 si  $t = 0$  est-elle continue par morceaux sur  $[0, 1]$  ?

### Exercice 17 [00245] [correction]

Existe-t-il une fonction continue  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  envoyant les rationnels dans les irrationnels et les irrationnels dans les rationnels ?

### Exercice 18 [00241] [correction]

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .

- On suppose que  $f$  est continue. Montrer que  $f$  admet un point fixe.
- On suppose que  $f$  est croissante. Montrer que  $f$  admet un point fixe.

### Exercice 19 [00242] [correction]

Soient  $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continues vérifiant

$$f \circ g = g \circ f$$

Montrer qu'il existe  $x_0 \in [0, 1]$  telle que  $f(x_0) = g(x_0)$ .

### Exercice 20 Mines-Ponts MP [02813] [correction]

Soient  $f$  et  $g$  des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$  telles que  $f \circ g = g \circ f$ .

- Montrer que l'ensemble des points fixes de  $f$  possède un plus grand et un plus petit élément.
- Montrer l'existence de  $c \in [0, 1]$  tel que  $f(c) = g(c)$ .

### Exercice 21 Centrale MP [00563] [correction]

Soit  $(u_n)$  une suite strictement croissante de réels de  $[0, 1]$  de limite 1. Déterminer les fonctions  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  vérifiant

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n x + 1 - x)}{2^n}$$

## Dérivation des fonctions réelles

### Exercice 22 [00251] [correction]

Calculer la dérivée  $n$ ème de  $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ .

### Exercice 23 [00253] [correction]

Soit  $f : x \mapsto \arctan x$ . Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i} \left( \frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n} \right)$$

En déduire les racines de  $f^{(n)}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Exercice 24 Mines-Ponts MP [02811] [correction]

Soient des réels  $a, b$  où  $a \notin \{0, 1\}$ . On pose  $h(x) = ax + b$  pour tout  $x$  réel. On note  $S$  l'ensemble des fonctions dérivables  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$f \circ f = h$$

- Montrer que  $S = \emptyset$  si  $a < 0$ . Désormais on suppose  $a > 0$  (et  $a \neq 1$ ).
- Montrer que  $h$  est une homothétie ; préciser son centre et son rapport.
- Soit  $f \in S$ . Montrer que  $h^{-1} \circ f \circ h = f$ . En déduire une expression de  $f$  ; on commencera par le cas  $0 < a < 1$ .

### Exercice 25 Mines-Ponts MP [02819] [correction]

On pose  $f(x) = e^{-1/x^2}$  pour  $x$  réel non nul et  $f(0) = 0$ .

- Montrer l'existence pour tout  $n \in \mathbb{N}$  d'un polynôme  $P_n$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = x^{-3n} P_n(x) f(x)$ . Quel est le degré de  $P_n$  ?
- Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$ , toutes ses dérivées étant nulles en 0.
- Montrer que toute racine de  $P_n$  est réelle.

### Exercice 26 [00248] [correction]

[Théorème de Darboux]

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable.

- Montrer que  $f'$  prend toutes les valeurs intermédiaires entre

$$f'(a) \text{ et } \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Conclure que  $f'$  prend toutes les valeurs intermédiaires entre  $f'(a)$  et  $f'(b)$ .

**Exercice 27** X MP [00257] [correction]

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Etudier l'équation fonctionnelle

$$f(x) = \int_0^{\lambda x} f(t) dt$$

où  $f$  est une fonction réelle continue de la variable réelle

**Théorème de Rolle****Exercice 28** [00261] [correction]

a) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme scindé à racines simples avec  $n = \deg P \geq 2$ .

Montrer que  $P'$  est lui aussi scindé.

b) Montrer que le résultat perdure même si les racines de  $P$  ne sont pas simples.

**Exercice 29** [00262] [correction]

On pose  $f : x \mapsto [(x^2 - 1)^n]^{(n)}$ .

a) Montrer que  $f$  est une fonction polynomiale de degré  $n$ .

b) Calculer  $f(1)$  et  $f(-1)$ .

c) Montrer que  $f$  possède exactement  $n$  racines distinctes toutes dans  $] -1, 1[$ .

**Exercice 30** [00266] [correction]

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et s'annulant une infinité de fois. Montrer qu'il existe  $\alpha \in [a, b]$  tel que  $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ .

**Exercice 31** [00264] [correction]

Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^n$  et  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  des valeurs d'annulation de  $f$ .

Montrer que pour tout  $x_0 \in [a, b]$ , il existe  $c \in ]a, b[$  vérifiant

$$f(x_0) = \frac{(x_0 - a_1)(x_0 - a_2) \dots (x_0 - a_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

On pourra, lorsque cela est possible, introduire  $K$  tel que

$$f(x_0) = \frac{(x_0 - a_1) \dots (x_0 - a_n)}{n!} K$$

et établir que la dérivée  $n$ ème de  $x \mapsto f(x) - \frac{(x - a_1) \dots (x - a_n)}{n!} K$  s'annule.

**Exercice 32** [00265] [correction]

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $f(a) = f(b) = 0$ .

a) Montrer que

$$\forall x_0 \in [a, b], \exists \xi \in ]a, b[, f(x_0) = \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} f''(\xi)$$

b) En déduire que

$$\sup_{[a, b]} |f| \leq \frac{(b - a)^2}{8} \sup_{[a, b]} |f''|$$

**Exercice 33** Mines-Ponts MP [02820] [correction]

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable sur  $I$  et  $a, b, c$  trois points distincts de  $I$ .

Montrer

$$\exists d \in I, \frac{f(a)}{(a - b)(a - c)} + \frac{f(b)}{(b - c)(b - a)} + \frac{f(c)}{(c - a)(c - b)} = \frac{1}{2} f''(d)$$

**Théorème des accroissements finis****Exercice 34** [00267] [correction]

Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}$$

**Exercice 35** Mines-Ponts MP [02815] [correction]

Soient  $f$  un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme croissant de  $[0, 1]$  sur  $[0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que l'on peut trouver une suite  $(x_{k,n})_{1 \leq k \leq n}$  telle que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \frac{k-1}{n} \leq f(x_{k,n}) \leq \frac{k}{n} \text{ et } \sum_{k=1}^n \frac{1}{f'(x_{k,n})} = n$$

**Exercice 36** Mines-Ponts MP [02822] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable.

a) Si  $f'$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ , montrer que  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

b) Si  $|f'(x)| \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , montrer que  $f$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

## Intégration sur un segment

### Exercice 37 [00272] [correction]

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $0 < c < \frac{b-a}{2}$  et

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter

$$g(t) = \int_a^b f(t-x) dx$$

### Exercice 38 [02601] [correction]

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux.

On désire établir,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f(x) |\sin(nx)| dx \right) = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx$ .

- Vérifier le résultat pour une fonction  $f$  constante.
- Observer le résultat pour une fonction  $f$  en escalier.
- Etendre enfin le résultat au cas où  $f$  est une fonction continue par morceaux.

### Exercice 39 [02640] [correction]

[Inégalité d'entropie]

Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexe et dérivable sur  $I$  intervalle non singulier.

- Etablir que pour tout  $a, x \in I$  on a l'inégalité

$$\varphi(x) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a)$$

- Soit  $f : [0, 1] \rightarrow I$  continue. Etablir que

$$\varphi \left( \int_0^1 f(t) dt \right) \leq \int_0^1 \varphi(f(t)) dt$$

- Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, strictement positive et d'intégrale sur  $[0, 1]$  égale à 1.

Montrer que

$$\int_0^1 f(t) \ln(f(t)) dt \geq 0$$

- Soit  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues, strictement positives et d'intégrales sur  $[0, 1]$  égales à 1.

Montrer que

$$\int_0^1 f(t) \ln f(t) dt \geq \int_0^1 f(t) \ln g(t) dt$$

### Exercice 40 Centrale MP [02469] [correction]

Soit  $(x_k)$  une suite de  $[0, 1]$  équirépartie :

$$\forall [a, b] \subset [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid x_k \in [a, b]\} = b - a$$

- Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{C}([0, 1]), \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_0^1 f(x) dx$$

- Pour  $f(t) = e^{-t^2}$ , créer, à l'aide de Maple, un programme calculant

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

Créer un programme qui réalise la méthode des rectangles. Comparer ces deux programmes avec la valeur donnée par Maple.

- Adapter la méthode aléatoire au calcul de

$$\iint_{[0,1]^2} \cos(xy) e^{x^2+y^2} dx dy$$

### Exercice 41 X MP [02942] [correction]

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, concave et vérifiant  $f(0) = 1$ . Etablir

$$\int_0^1 x f(x) dx \leq \frac{2}{3} \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

### Exercice 42 X MP [02977] [correction]

Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Déterminer la limite de la suite

$$\left( \frac{\int_0^1 t^n f(t) dt}{\int_0^1 t^n dt} \right)_{n \geq 0}$$

### Exercice 43 X MP [02981] [correction]

Déterminer un équivalent lorsque  $n \rightarrow +\infty$  de

$$I_n = \int_0^1 \left( \frac{t}{1+t^2} \right)^n dt$$

**Exercice 44** [ 03072 ] [correction]

Résoudre l'équation

$$2^x + 4^{x^2} = 3^x + 3^{x^2}$$

d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .**Exercice 45** Centrale MP [ 03181 ] [correction]

Déterminer un équivalent de

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\ln(1-x)} dx$$

**Intégrale fonction des bornes****Exercice 46** Centrale MP [ 00087 ] [correction]

On pourra à tout moment s'aider du logiciel de calcul formel.

a) Résoudre sur l'intervalle  $I = ]1, +\infty[$  l'équation différentielle

$$(E) : xy' + y = \frac{1}{\ln x}$$

et expliciter (sous forme intégrale) la solution de (E) sur  $I$ , notée  $f$ , telle que  $f(2) = 0$ .

Quel est le résultat obtenu avec le logiciel de calcul formel ?

b) Etudier les variations de  $f$ . Vérifier que  $f$  admet un maximum en un unique point d'abscisse  $x_0 \in I$ .Avec le logiciel de calcul formel, donner une valeur approchée de  $x_0$ .c) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . On commencera par établir l'équivalent

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$$

d) Déterminer un équivalent de  $f$  lorsque  $x \rightarrow 1^+$ .e) Tracer le graphe de  $f$  avec le logiciel de calcul formel.**Exercice 47** Centrale MP [ 02444 ] [correction]

Soit

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

a) Calculer les limites de  $f$  en  $0^+$  et  $+\infty$ , la limite en  $+\infty$  de  $f(x)/x$  et montrer que  $f(x)$  tend vers  $\ln 2$  quand  $x$  tend vers 1.b) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+\ast}$  mais qu'elle ne l'est pas sur  $\mathbb{R}^+$ .c) Etudier les variations de  $f$  et tracer sa courbe représentative.**Exercice 48** [ 00273 ] [correction]On introduit sur  $\mathbb{R}^\ast$  la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

a) Prolonger  $f$  par continuité en 0.b) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Branches infinies ?

**Exercice 49** [ 00275 ] [correction]

Soit

$$f : x \in \mathbb{R}^\ast \mapsto \int_x^{2x} \frac{\text{cht}}{t} dt$$

a) Etudier la parité de  $f$ . On étudie désormais  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .b) Prolonger  $f$  par continuité en 0.c) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

d) Branches infinies, allure.

**Exercice 50** [ 00277 ] [correction]Soient  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $g : \mathbb{R}^\ast \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

a) Prolonger  $g$  par continuité en 0.b) Montrer que la fonction ainsi obtenue est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .**Exercice 51** [ 00278 ] [correction]Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $a > 0$ . On pose

$$I(x) = \frac{1}{x^{a+1}} \int_0^x t^a f(t) dt$$

Déterminer la limite de  $I(x)$  quand  $x$  tend vers 0.

## Calcul d'intégrales

### Exercice 52 [00283] [correction]

Calculer

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$$

### Exercice 53 [00282] [correction]

Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable ad hoc :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt \\ \text{b)} \quad & \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t} + 2t} \\ \text{c)} \quad & \int_1^2 \frac{\ln(1+t) - \ln t}{t^2} dt \end{aligned}$$

### Exercice 54 [00285] [correction]

Calculer

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$$

### Exercice 55 Centrale MP [02436] [correction]

Calculer

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

### Exercice 56 [00288] [correction]

Pour  $p, q \in \mathbb{N}$ , calculer

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$$

### Exercice 57 [00289] [correction]

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$$

- Former une relation de récurrence liant  $I_n$  et  $I_{n-2}$ .
- En déduire l'expression de  $I_n$  selon la parité de  $n$ .

## Formules de Taylor

### Exercice 58 [00291] [correction]

Etablir que pour tout  $x \in [0, \pi/2]$ ,

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

### Exercice 59 [00293] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .

On suppose

$$f(x), f''(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Montrer que

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

### Exercice 60 [00295] [correction]

En exploitant une formule de Taylor adéquate établir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

### Exercice 61 [00296] [correction]

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $f''(0) \neq 0$ .

a) Montrer qu'au voisinage de 0, la relation

$$f(x) = f(0) + x f'(\theta x)$$

détermine un réel  $\theta \in ]0, 1[$  unique.

b) Déterminer la limite de  $\theta$  quand  $x \rightarrow 0$ .

### Exercice 62 [00297] [correction]

Soient  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  et

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k/n^2) - n f(0)$$

Déterminer la limite de la suite  $(S_n)$ .

**Exercice 63** Mines-Ponts MP [ 02816 ] [correction]

Enoncer et établir la formule de Taylor avec reste intégral.

**Exercice 64** Mines-Ponts MP [ 02817 ] [correction]

Montrer, pour tout  $x \in ]0, \pi/2[$ , l'existence de  $\theta_x \in ]0, 1[$  tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} \cos(x\theta_x)$$

Etudier  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta_x$ .

**Exercice 65** [ 00255 ] [correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  telle que

$$\varphi(x) = o(x^n)$$

a) Montrer que

$$\forall 0 \leq p \leq n, \varphi^{(p)}(x) = o(x^{n-p})$$

b) On introduit  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall 0 \leq p < n, \psi^{(p)}(x) = o(x^{n-p-1})$$

En déduire que  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^n$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$ .

d) Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^n$  telles que

$$f(0) = 0, g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } g'(0) \neq 0$$

Montrer que  $f/g$  est de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$ .

**Exercice 66** [ 03217 ] [correction]

[Egalité de Taylor-Lagrange]

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . Montrer que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  alors

$$\forall x \in I, \exists c \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

## Suites numériques

**Exercice 67** [ 00298 ] [correction]

Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

a)  $u_n = \sqrt[n]{n}$  b)  $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  c)  $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$   
 d)  $u_n = n^2 \left(\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1}\right)$  e)  $u_n = \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{n}\right)\right)^n$  f)  $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n \ln n}$   
 g)  $u_n = \left(\frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}}{3}\right)^n$  h)  $u_n = \left(\frac{\arctan(n+1)}{\arctan n}\right)^{n^2}$ .

**Exercice 68** [ 00302 ] [correction]

Nature de la suite de terme général

$$u_n = \cos(\pi n^2 \ln(1 - 1/n))$$

**Exercice 69** Mines-Ponts MP [ 02781 ] [correction]

Etudier la convergence de la suite  $([a^n]^{1/n})$ , où  $a > 0$ .

**Exercice 70** Mines-Ponts MP [ 02782 ] [correction]

Soient des réels positifs  $a$  et  $b$ . Trouver la limite de

$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n$$

**Exercice 71** [ 00304 ] [correction]

Soit  $(u_n)$  une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer que  $u_n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 72** [ 00300 ] [correction]

Soient  $a > 0$  et

$$u_n = (1+a)(1+a^2) \dots (1+a^n)$$

a) Montrer que si  $a \geq 1$  alors  $u_n \rightarrow +\infty$ .

b) On suppose  $0 < a < 1$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente. On pourra exploiter la majoration  $1+x \leq e^x$  valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 73** [ 00320 ] [\[correction\]](#)

Soient  $\alpha > 0$  et  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha}$ .

- a) Montrer que si  $\alpha > 1$  alors  $u_n \rightarrow 0$  tandis que si  $\alpha < 1$ ,  $u_n \rightarrow +\infty$ .
- b) Montrer que si  $\alpha = 1$ , la suite est monotone et convergente.
- c) En exploitant l'encadrement  $\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$  valable pour tout  $x \in [0, 1[$ , établir  $u_n \rightarrow \ln 2$ .

**Exercice 74** [ 00321 ] [\[correction\]](#)

a) Etablir que pour tout  $x \geq 0$  on a

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$$

b) En déduire la limite de

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

**Exercice 75** [ 00322 ] [\[correction\]](#)

Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$$

- a) Montrer que  $I_n \rightarrow 0$  en décroissant.
- b) Simplifier  $I_n + I_{n+1}$  et en déduire une expression de  $I_n$  à l'aide d'un symbole sommatoire.
- c) Déterminer

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

d) Exploiter

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$$

pour déterminer

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

**Exercice 76** [ 00324 ] [\[correction\]](#)

[Irrationalité de e]

On pose pour  $n \geq 1$ ,

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

- a) Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.
- b) En exploitant l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction  $x \mapsto e^x$ , montrer que  $u_n \rightarrow e$ .
- c) On suppose que  $e = p/q$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$ . En considérant  $q.q!u_q$  et, obtenir une absurdité.

**Exercice 77** Centrale MP [ 00319 ] [\[correction\]](#)

a) Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{n+k}$$

où  $p \in \mathbb{N}^*$  est fixé. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge. Sa limite sera notée  $\ell$  (on ne demande pas ici de la calculer)

b) Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et telle que  $f(0) = 0$ . Soit

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

Montrer que  $(v_n)$  converge. Exprimer sa limite en fonction de  $\ell$ .

- c) Calculer  $\ell$  en utilisant  $f(x) = \ln(1+x)$ .
- d) Si  $f$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{C}$  est continue et vérifie  $f(0) = 0$ , montrer qu'il peut y avoir divergence de la suite  $(v_n)$ .

**Exercice 78** Centrale MP [ 00323 ] [\[correction\]](#)

Développement asymptotique à trois termes de :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2}$$

**Exercice 79** Mines-Ponts MP [ 02788 ] [\[correction\]](#)

Donner un développement asymptotique de  $\left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!\right)_{n \in \mathbb{N}}$  à la précision  $o(n^{-3})$ .

**Exercice 80** Centrale MP [ 02471 ] [correction]

Soit  $f(x) = (\cos x)^{1/x}$  et  $(\mathcal{C})$  le graphe de  $f$ .

- a) Montrer l'existence d'une suite  $(x_n)$  vérifiant :
  - i)  $(x_n)$  est croissante positive.
  - ii) la tangente à  $(\mathcal{C})$  en  $(x_n, f(x_n))$  passe par  $O$ .
- b) Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de  $(x_n)$ .

**Exercice 81** Centrale PC [ 03184 ] [correction]

Soient  $K$  un réel strictement supérieur à 1 et  $(\varepsilon_n)$  une suite de réels positifs convergeant vers 0. Soit  $(u_n)$  une suite de réels de  $[0, 1]$  vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}$$

La suite  $(u_n)$  converge-t-elle vers 0 ?

## Théorème de Cesaro

**Exercice 82** [ 00307 ] [correction]

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle convergeant vers  $\ell \in \mathbb{R}$ . On désire établir que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$$

converge aussi vers  $\ell$ . Soit  $\varepsilon > 0$ .

- a) Justifier qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > n_0$  entraîne :  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$ .
- b) Etablir que pour tout entier  $n > n_0$  on a :

$$|v_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + \dots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{n - n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2}$$

- c) En déduire qu'il existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > n_1$  entraîne :  $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$ .
- d) Application : Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que  $u_{n+1} - u_n \rightarrow \alpha \neq 0$ . Donner un équivalent simple de  $u_n$ .

**Exercice 83** [ 00308 ] [correction]

Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

- a) On suppose que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  et on considère

$$v_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n^2}$$

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

- b) On suppose

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{n} \rightarrow \ell$$

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n^2}$$

**Exercice 84** [ 00309 ] [correction]

Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs.

On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell \in ]0, +\infty[$$

Montrer que  $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell$ .

**Exercice 85** [ 03219 ] [correction]

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est définie par  $u_0 > 0$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

- a) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$
- b) Déterminer la limite de

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$$

- c) En déduire un équivalent de  $(u_n)$

**Exercice 86** [ 03220 ] [correction]

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est définie par  $u_0 \in ]0, \pi/2[$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$$

- a) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$
- b) Déterminer la limite de

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$$

- c) En déduire un équivalent de  $(u_n)$

## Etude de suite de solutions d'une équation

### Exercice 87 [01477] [correction]

Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \ln x + x$$

- Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique  $x_n$  tel que  $f(x_n) = n$ .
- Former le développement asymptotique de la suite  $(x_n)$  à la précision  $(\ln n)/n$ .

### Exercice 88 [00310] [correction]

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère l'équation

$$x + \sqrt[3]{x} = n$$

d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

- Montrer que cette équation possède une unique solution  $x_n$ .
- Déterminer la limite de  $x_n$  puis un équivalent simple de  $(x_n)$ .
- Donner un développement asymptotique à trois termes de  $(x_n)$ .

### Exercice 89 [00311] [correction]

a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , justifier que l'équation

$$x + e^x = n$$

possède une unique solution  $x_n \in \mathbb{R}$ .

- Déterminer la limite de  $(x_n)$  puis un équivalent de  $x_n$ .
- Former un développement asymptotique à trois termes de  $x_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

### Exercice 90 [01478] [correction]

Montrer que l'équation  $\tan x = \sqrt{x}$  possède une unique solution  $x_n$  dans chaque intervalle  $I_n = ]-\pi/2, \pi/2[ + n\pi$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ).

Réaliser un développement asymptotique à trois termes de  $x_n$ .

### Exercice 91 Centrale MP [02478] [correction]

- Subdiviser  $\mathbb{R}^+$  en intervalles contigus disjoints, chacun d'entre eux contenant une unique racine de l'équation  $(E) : \tan x \ln x = 1$ .
- On range toutes les racines positives de  $(E)$  dans une suite strictement croissante  $(x_n)_{n \geq 0}$ .  
Evaluer numériquement les quatre premiers termes.
- Donner un développement asymptotique de  $x_n$ .

### Exercice 92 Centrale MP [00316] [correction]

Montrer que l'équation  $x^n + x^2 - 1 = 0$  admet une unique racine réelle strictement positive pour  $n \geq 1$ . On la note  $x_n$ . Déterminer la limite  $\ell$  de la suite  $(x_n)$  puis un équivalent de  $x_n - \ell$ .

### Exercice 93 Centrale MP [00317] [correction]

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on considère l'équation  $(E_n) : x^n = x + 1$  dont l'inconnue est  $x \geq 0$ .

- Montrer l'existence et l'unicité de  $x_n$  solution de  $(E_n)$ .
- Montrer que  $(x_n)$  tend vers 1.
- Montrer que  $(x_n)$  admet un développement limité à tout ordre. Donner les trois premiers termes de ce développement limité.

### Exercice 94 X MP - Centrale MP [00318] [correction]

Pour  $n \geq 2$ , on considère le polynôme

$$P_n = X^n - nX + 1$$

- Montrer que  $P_n$  admet exactement une racine réelle entre 0 et 1, notée  $x_n$ .
- Déterminer la limite de  $x_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .
- Donner un équivalent de  $(x_n)$  puis le deuxième terme du développement asymptotique  $x_n$ .

### Exercice 95 [00312] [correction]

a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que l'équation  $x^n + \ln x = 0$  possède une unique solution  $x_n > 0$ .

b) Déterminer la limite de  $x_n$ .

c) On pose  $u_n = 1 - x_n$ . Justifier que  $nu_n \sim -\ln u_n$  puis déterminer un équivalent de  $u_n$ .

### Exercice 96 [00314] [correction]

Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , l'équation

$$\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

possède une unique racine  $x_n$  dans  $]0, +\infty[$ . Déterminer  $\lim x_n$ .

**Exercice 97** [ 00315 ] [correction]

Montrer que la relation  $nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1$  définit une suite positive  $(u_n)$  unique.

Etudier sa convergence et préciser sa limite.

**Exercice 98** [ 03154 ] [correction]

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on introduit le polynôme

$$P_n(X) = X(X-1)\dots(X-n)$$

a) Montrer que le polynôme  $P_n$  possède une unique racine dans l'intervalle  $]0, 1[$ ; celle-ci sera noté  $x_n$ .

b) Etudier la monotonie de la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$ .

c) Former la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$F = \frac{P'_n}{P_n}$$

d) En déduire un équivalent de la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$ .

## Suites récurrentes

**Exercice 99** [ 00328 ] [correction]

Etudier la suite définie par  $u_0 > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}u_n^2$$

**Exercice 100** [ 00330 ] [correction]

Soient  $a > 0$ ,

$$u_1 = \sqrt{a}, u_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, u_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots$$

Montrer que  $(u_n)$  est convergente.

**Exercice 101** [ 00331 ] [correction]

Soit

$$f : x \mapsto \frac{x^3 + 1}{3}$$

et  $(u_n)$  la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Justifier que l'équation  $f(x) = x$  possède trois racines réelles (qu'on n'exprimera pas).

b) Etudier le signe de  $f(x) - x$  ainsi que la monotonie de  $f$ .

c) Préciser le comportement de  $(u_n)$  en discutant selon la valeur de  $u_0$ .

**Exercice 102** [ 00332 ] [correction]

Soient

$$f : x \mapsto \frac{x^3 + 3ax}{3x^2 + a}$$

(avec  $a > 0$ ) et  $(u_n)$  la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Etudier les variations de  $f$ , le signe de  $f(x) - x$  et en déduire le comportement de  $(u_n)$ .

**Exercice 103** [ 00333 ] [correction]

Soient  $u_0 \in ]0, 1[$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

Montrer que  $(u_n)$  est monotone de limite nulle. Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 \text{ et } \prod_{k=0}^n (1 - u_k)$$

**Exercice 104** [ 00334 ] [correction]

Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| < 1$$

a) Montrer que  $f$  admet un point fixe unique  $\alpha$ .

b) Montrer, pour tout  $u \in [a, b]$ , la convergence vers  $\alpha$  de la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_0 = u \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

**Exercice 105** [00335] [correction]

Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction 1 lipschitzienne et  $\alpha \in [a, b]$ .

On considère la suite définie par

$$u_0 = \alpha \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + f(u_n)}{2}$$

Montrer que  $(u_n)$  converge vers un point fixe de  $f$ .

**Exercice 106** [00329] [correction]

Soit  $(u_n)$  la suite définie par

$$u_0 \in ]0, 4[ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = 4u_n - u_n^2$$

- Montrer que  $(u_n)$  est bornée. Quelles sont les limites possibles de  $(u_n)$  ?
- Montrer que si  $(u_n)$  converge alors  $(u_n)$  est soit stationnaire égale à 0, soit stationnaire égale à 3.
- En posant  $u_0 = 4 \sin^2 \alpha$ , déterminer les valeurs de  $u_0$  pour lesquelles la suite  $(u_n)$  est stationnaire.

**Exercice 107** [00336] [correction]

Soient  $\rho \in \mathbb{R}^+$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ .

On considère la suite complexe  $(z_n)$  définie par

$$z_0 = \rho e^{i\theta} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

- Exprimer  $(z_n)$  à l'aide d'un produit.
- Déterminer la limite de  $(z_n)$ .

**Exercice 108** [00338] [correction]

Soit  $(u_n)$  une suite de réels positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$$

Montrer que  $(u_n)$  converge. On pourra commencer par étudier la monotonie de  $v_n = \max(u_{n+1}, u_n)$ .

**Exercice 109** [00337] [correction]

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites récurrentes réelles définies par :

$$u_0, v_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers une même limite.

**Exercice 110** [00326] [correction]

Pour  $\alpha \in ]0, \pi/2]$ , on étudie les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par

$$\begin{cases} u_0 = \cos \alpha \\ v_0 = 1 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = (u_n + v_n)/2 \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{cases}$$

- Etablir que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n} \text{ et } v_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}$$

- Etudier  $\sin \frac{\alpha}{2^n} v_n$  et en déduire les limites de  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

**Exercice 111** Mines-Ponts MP [02783] [correction]

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de réels positifs. On pose, pour tout  $n > 0$ ,

$$y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$$

- Ici  $x_n = a$  pour tout  $n$ , où  $a > 0$ . Etudier la convergence de  $(y_n)$ .
- Même question dans le cas où  $x_n = ab^{2^n}$  pour tout  $n$ , avec  $b > 0$ .
- Montrer que  $(y_n)$  converge si, et seulement si, la suite  $(x_n^{2^{-n}})$  est bornée.

**Exercice 112** Centrale MP [02477] [correction]

Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par

$$x_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = x_n + n/x_n$$

- Calculer avec Maple, les 10 premiers termes de la suite pour différentes valeurs de  $x_1$ . Commenter.
- Minorer  $x_n$ . Si  $(y_n)_{n \geq 1}$  vérifie la même relation de récurrence, étudier  $x_n - y_n$ . En déduire le comportement asymptotique de  $(x_n)$ .

**Exercice 113** X MP [ 03165 ] [[correction](#)]

Soient  $(a_n)$  une suite réelle positive, bornée et  $(u_n)$  la suite récurrente définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{u_n + a_n + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que la suite  $(u_n)$  converge si, et seulement si, la suite  $(a_n)$  converge.

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

a) Soit  $\varepsilon > 0$ , puisque  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ , il existe  $A \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\forall x \geq A, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Pour  $x \geq A$  et pour tout  $t \in [A, x]$ ,  $|f(t) - \ell| \leq \varepsilon$  donc

$$\left| \frac{1}{x} \int_A^x (f(t) - \ell) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_A^x |f(t) - \ell| dt \leq \frac{x-A}{x} \varepsilon \leq \varepsilon.$$

b)  $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - \ell = \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - \ell) dt = \frac{1}{x} \int_0^A (f(t) - \ell) dt + \frac{1}{x} \int_A^x (f(t) - \ell) dt$

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{1}{x} \int_0^A (f(t) - \ell) dt = \frac{C^{te}}{x} \rightarrow 0$  donc il existe  $A' \in \mathbb{R}^+$  tel que

$x \geq A' \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \int_0^A (f(t) - \ell) dt \right| \leq \varepsilon$  et alors pour  $A'' = \max(A, A')$ , on a

$$x \geq A'' \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - \ell) dt \right| \leq 2\varepsilon.$$

### Exercice 2 : [énoncé]

Dans le cas  $\ell = 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \geq A, |f(x+1) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Or

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{E(x-A)-1} [f(x-k) - f(x-k-1)] + \frac{1}{x} f(x - E(x-A))$$

donc

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{E(x-A)}{A} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|f(x - E(x-A))|}{x}$$

Puisque  $f$  est continue sur le segment  $[A, A+1]$ , elle y est bornée par un certain  $M$ .

Or  $x - E(x-A) \in [A, A+1]$  donc

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{x}$$

et pour  $x$  assez grand

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \varepsilon$$

Dans le cas général, il suffit d'introduire la fonction  $g : x \mapsto f(x) - \ell x$  pour conclure.

### Exercice 3 : [énoncé]

Commençons par le cas  $\ell = 0$ .

On remarque que  $(f(t)e^t)' = (f(t) + f'(t))e^t$  donc

$$f(x)e^x = f(0) + \int_0^x (f(t) + f'(t))e^t dt$$

puis

$$f(x) = f(0)e^{-x} + \int_0^x (f(t) + f'(t))e^{t-x} dt$$

Il reste à montrer

$$\int_0^x (f(t) + f'(t))e^{t-x} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A \in \mathbb{R}^+$ , pour  $t \geq A$ ,

$$|f(t) + f'(t)| \leq \varepsilon$$

On a alors

$$\left| \int_A^x (f(t) + f'(t))e^{t-x} dt \right| \leq \varepsilon$$

et

$$\left| \int_0^A (f(t) + f'(t))e^{t-x} dt \right| \leq e^{A-x} \int_0^A |f(t) + f'(t)| dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi pour  $x$  assez grand,

$$\left| \int_0^x (f(t) + f'(t))e^{t-x} dt \right| \leq 2\varepsilon$$

Finalement  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Cas général : il suffit de considérer  $g : x \mapsto f(x) - \ell$ .

### Exercice 4 : [énoncé]

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall x \in ]0, \alpha], (1 - \varepsilon)\sqrt{x} \leq f(x) - f(x/2) \leq (1 + \varepsilon)\sqrt{x}$$

Pour  $x \in ]0, \alpha]$ ,  $x/2^n \in ]0, \alpha]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc

$$(1 - \varepsilon)\sqrt{x/2^n} \leq f(x/2^n) - f(x/2^{n+1}) \leq (1 + \varepsilon)\sqrt{x/2^{n+1}}$$

En sommant ces inégalités et en passant à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  on obtient :

$$(1 - \varepsilon)\sqrt{x} \frac{1}{1 - 1/\sqrt{2}} \leq f(x) \leq (1 + \varepsilon)\sqrt{x} \frac{1}{1 - 1/\sqrt{2}}$$

La phrase quantifiée ainsi obtenue permet d'affirmer

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{1 - 1/\sqrt{2}}$$

**Exercice 5 :** [\[énoncé\]](#)

On découpe l'intégrale en deux

$$\int_0^x e^{t^2} dt = \int_0^1 e^{t^2} dt + \int_1^x e^{t^2} dt$$

et on procède à une intégration par parties

$$\int_1^x e^{t^2} dt = \int_1^x \frac{2t}{2t} e^{t^2} dt = \left[ \frac{e^{t^2}}{2t} \right]_1^x + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$$

Ainsi

$$\int_0^x e^{x^2} = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + C^{te}$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$ , sachant que la constante est négligeable devant  $e^{x^2}/2x \rightarrow +\infty$ , il suffit pour conclure de montrer

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt = o\left(\int_1^x e^{t^2} dt\right)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $A \geq 1$  tel que

$$\forall t \geq A, \frac{1}{t^2} \leq \varepsilon$$

et alors

$$0 \leq \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq \int_1^A \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + \varepsilon \int_A^x e^{t^2} dt$$

puis

$$0 \leq \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq \int_1^A \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + \varepsilon \int_1^x e^{t^2} dt$$

Or

$$\int_1^x e^{t^2} dt \geq \int_1^x 1 dt \geq x - 1 \rightarrow +\infty$$

donc pour  $x$  assez grand

$$\int_1^A \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq \varepsilon \int_1^x e^{t^2} dt$$

puis

$$0 \leq \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq 2\varepsilon \int_1^x e^{t^2} dt$$

et on peut conclure.

**Exercice 6 :** [\[énoncé\]](#)

a)  $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

b)  $\sqrt{3 + \cos x} = 2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$

c)  $(1+x)^{1/x} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$

d)  $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1} = 1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + o(x^3)$

**Exercice 7 :** [\[énoncé\]](#)

$(\arctan e^x)' = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{2(1+x+x^2+o(x^2))} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$  donc  $\arctan e^x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$ .

La tangente au point à pour équation  $y = \pi/4 + x/2$ . La courbe traverse la tangente.

**Exercice 8 :** [\[énoncé\]](#)

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k x^{2k} + o(x^{2n})$  avec

$c_k = \frac{(-1)^k \frac{1}{2} \frac{3}{2} \dots \frac{2k-1}{2}}{k!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$

donc  $\arcsin x = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$ .

**Exercice 9 :** [\[énoncé\]](#)

Par opérations

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Par la formule de Taylor-Young, le développement limité à l'ordre 5 existe et est de la forme

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + ax^5 + o(x^5)$$

On a alors

$$\tan(\arctan x) = x + \frac{1}{3}x^3 + ax^5 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5) = x$$

et donc

$$a = \frac{2}{15}$$

Par la formule de Taylor-Young, le développement limité à l'ordre 7 existe et est de la forme

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + bx^7 + o(x^7)$$

En intégrant le développement à l'ordre 6 de  $1 + \tan^2 x$  on conclut

$$b = \frac{17}{315}$$

**Exercice 10 : [énoncé]**

a)  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et  $f'(x) = \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} \neq 0$  si, et seulement si,  $x \neq e - 1$ .

Le plus grand intervalle cherché est  $I = ]-1, e - 1[$  sur lequel  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et sa dérivée ne s'annule pas,  $f$  réalise donc un  $\mathcal{C}^\infty$  difféomorphisme de  $I$  vers  $] -\infty, 1/e[$ .

b) On a  $\ln(1 + g(x)) = x(1 + g(x))$ .

En dérivant  $g'(x) = 1 + 2g(x) + g^2(x) + xg'(x) + xg'(x)g(x)$ .

En dérivant à l'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  et en évaluant en 0 on obtient

$$g^{(n+1)}(0) = 2g^{(n)}(0) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(0)g^{(n-k)}(0) + ng^{(n)}(0) + n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k+1)}(0)g^{(n-1-k)}(0)$$

On peut alors appliquer un raisonnement par récurrence forte pour obtenir  $\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) \geq 0$ .

Ceci suffit pour conclure via la formule de Taylor-Young.

**Exercice 11 : [énoncé]**

a)  $f$  est continue et strictement croissante. L'étude des limites de  $f$  permet d'affirmer que  $f$  réalise une bijection  $]0, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ .

b)  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) \neq 0$  donc  $f^{-1}$  est  $\mathcal{C}^\infty$ . Par suite  $f^{-1}$  admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la forme

$f^{-1}(y) = a + by + cy^2 + o(y^2)$ . Comme  $f(1) = 0$ ,  $f^{-1}(0) = 1$  et donc  $a = 1$ .

$f(f^{-1}(y)) = y$  donne  $1 + by + cy^2 + o(y^2) + \ln(1 + by + cy^2 + o(y^2)) - 1 = y$  soit encore  $2by + (2c - \frac{1}{2}b^2)y^2 + o(y^2) = y$ . Par unicité des DL,  $b = 1/2$  et  $c = 1/16$ .

c) Le tableau de variation de  $f$  permet de déterminer celui de  $f^{-1}$  et d'affirmer  $f^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Puisque  $f^{-1}(y) + \ln(f^{-1}(y)) - 1 = y$  avec  $\ln(f^{-1}(y)) - 1 = o(f^{-1}(y))$  on obtient  $f^{-1}(y) \sim y$ .

d)  $f^{-1}(y)/y \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 1$  et  $f^{-1}(y) - y = 1 - \ln f^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} -\infty$ .  $f^{-1}$  présente en  $+\infty$  une branche parabolique de direction  $y = x$ .

e) On a  $f^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0$ .

$f^{-1}(y) + \ln(f^{-1}(y)) - 1 = y$  donne  $\ln(f^{-1}(y)) = y + 1 - f^{-1}(y)$  puis

$f^{-1}(y) = e^{1+y}e^{-f^{-1}(y)} \sim e^{1+y}$ .

**Exercice 12 : [énoncé]**

$f : x \mapsto x + \ln(1 + x)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 2 > 0$  donc  $f$  définie  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme d'un voisinage de 0 vers un autre. Son application réciproque étant  $\mathcal{C}^\infty$ , elle admet un développement limité à l'ordre 3 de la forme

$f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + o(y^3)$ .

Puisque  $f(f^{-1}(y)) = y$ , on a  $2ay + (2b - \frac{a^2}{2})y^2 + (2c - ab + \frac{1}{3}a^3)y^3 + o(y^3) = y$ .

On en déduit  $a = 1/2$ ,  $b = 1/16$  et  $c = -1/192$ .

**Exercice 13 : [énoncé]**

a)  $f$  est continue et

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} > 0$$

sauf en  $x = e$  donc  $f$  est strictement croissante et réalise donc une bijection de  $[e, +\infty[$  vers  $[e, +\infty[$ .

b) Quand  $y \rightarrow +\infty$ ,  $f^{-1}(y) \rightarrow +\infty$ .

$$\frac{f^{-1}(y)}{\ln(f^{-1}(y))} = y$$

donc

$$\ln(f^{-1}(y)) - \ln(\ln(f^{-1}(y))) = \ln(f^{-1}(y)) + o(\ln(f^{-1}(y))) = \ln y$$

d'où

$$\ln(f^{-1}(y)) \sim \ln y$$

Par suite

$$f^{-1}(y) \sim y \ln y$$

c)  $f^{-1}(y) = y \ln(f^{-1}(y)) = y \ln(y \ln y + o(y \ln y)) = y \ln y + y \ln(\ln y + o(\ln y)) = y \ln y + y \ln(\ln y) + o(y \ln(\ln y))$ .

puis  $f^{-1}(y) = y \ln(f^{-1}(y)) = y \ln(y \ln y + y \ln(\ln y) + o(y \ln(\ln y))) = y \ln(y \ln y) + y \ln\left(1 + \frac{\ln(\ln y)}{\ln y} + o\left(\frac{\ln(\ln y)}{\ln y}\right)\right)$

et enfin

$$f^{-1}(y) = y \ln y + y \ln(\ln y) + y \frac{\ln(\ln y)}{\ln y} + o\left(y \frac{\ln(\ln y)}{\ln y}\right)$$

**Exercice 14 :** [\[énoncé\]](#)

a) Puisque  $f''$  est continue et  $f''(0) > 0$ , on peut introduire  $a > 0$  tel que  $f'' > 0$  sur  $[-a, a]$ .

On a alors  $f'$  strictement croissante sur  $[-a, a]$  et puisque  $f'(0) = 0$ , on peut exprimer le signe de  $f'$  sur  $[0, a]$  et constater que  $f'$  est strictement décroissante sur  $[-a, 0]$  et strictement croissante sur  $[0, a]$ .

b) Puisque  $f$  est continue, par stricte monotonie,  $f$  réalise une bijection  $f_1$  de  $[-a, 0]$  sur  $[0, f(-a)]$  et une bijection  $f_2$  de  $[0, a]$  sur  $[0, f(a)]$ . L'existence et l'unicité de  $x_1(\lambda)$  et de  $x_2(\lambda)$  en découlent et

$$x_1(\lambda) = f_1^{-1}(\lambda) \text{ et } x_2(\lambda) = f_2^{-1}(\lambda)$$

c) Par continuité de  $f_1^{-1}$  et  $f_2^{-1}$ , on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} x_1(\lambda) = 0^- \text{ et } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} x_2(\lambda) = 0^+$$

Par la formule de Taylor-Young, quand  $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 f''(0) + o(x^2)$$

Pour  $i \in \{1, 2\}$ , puisque  $x_i(\lambda) \rightarrow 0$ ,

$$\lambda = f(x_i(\lambda)) = \frac{1}{2}x_i^2(\lambda) f''(0) + o(x_i^2(\lambda))$$

donc

$$x_i^2(\lambda) \sim \frac{2\lambda}{f''(0)}$$

Ainsi

$$x_1(\lambda) \sim -\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{f''(0)}} \text{ et } x_2(\lambda) \sim \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{f''(0)}}$$

d) On peut écrire

$$x_i(\lambda) = \pm \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{f''(0)}} + y_i(\lambda) \text{ avec } y_i = o(\sqrt{\lambda})$$

Par la formule de Taylor-Young, quand  $\lambda \rightarrow 0$

$$\lambda = f(x_i(\lambda)) = \frac{1}{2}x_i^2(\lambda) f''(0) + \frac{1}{6}x_i^3(\lambda) f^{(3)}(0) + o(x_i^3(\lambda))$$

et on obtient

$$y_1(\lambda) \sim -\frac{1}{3} \frac{f^{(3)}(0)}{f''(0)^2} \lambda \text{ et } y_2(\lambda) \sim \frac{1}{3} \frac{f^{(3)}(0)}{f''(0)^2} \lambda$$

donc

$$\frac{x_1(\lambda) + x_2(\lambda)}{\lambda} \rightarrow -\frac{2}{3} \frac{f^{(3)}(0)}{f''(0)^2}$$

**Exercice 15 :** [\[énoncé\]](#)

a) La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  avec

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2}\right) e^x$$

Notons  $\alpha < \beta$  les deux racines réelles de l'équation  $x^2 + x - 1 = 0$ . On a le tableau des variations suivant

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$0^-$	$0^+$	$\beta$	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$			
$f(x)$	$0$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour  $\lambda > \max(f(\beta), f(\alpha))$ , l'équation  $f(x) = \lambda$  admet deux solutions, l'une dans  $a(\lambda) \in ]0, \beta[$  et l'autre  $b(\lambda) \in ]\beta, +\infty[$ .

b) On a

$$a(\lambda) = (f_{]0, \beta[})^{-1}(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0^+ \text{ et } b(\lambda) = (f_{] \beta, +\infty[})^{-1}(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty$$

Puisque  $a(\lambda) \rightarrow 0$  et

$$\frac{a(\lambda) + 1}{a(\lambda)} e^{a(\lambda)} = \lambda$$

on a

$$\lambda a(\lambda) = (a(\lambda) + 1) e^{a(\lambda)} \rightarrow 1$$

donc

$$a(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda}$$

Puisque  $b(\lambda) \rightarrow +\infty$  et

$$\frac{b(\lambda) + 1}{b(\lambda)} e^{b(\lambda)} = \lambda$$

donc

$$e^{b(\lambda)} \sim \lambda$$

Or  $\lambda \rightarrow +\infty \neq 1$  donc

$$b(\lambda) \sim \ln \lambda$$

et puisque  $\ln \lambda \rightarrow +\infty \neq 1$ , on a encore

$$\ln b(\lambda) \sim \ln(\ln \lambda)$$

Par suite

$$b(\lambda)^{a(\lambda)} = e^{a(\lambda) \ln b(\lambda)}$$

avec

$$a(\lambda) \ln b(\lambda) \sim \frac{\ln(\ln \lambda)}{\lambda} \rightarrow 0$$

donc

$$b(\lambda)^{a(\lambda)} \rightarrow 1$$

### Exercice 16 : [énoncé]

Cette fonction n'a pas de limite en 0, elle n'est donc pas continue par morceaux.

### Exercice 17 : [énoncé]

Une telle fonction ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs, or si celles-ci n'est pas constante, elle prend toutes les valeurs d'un intervalle non singulier ce qui constitue un nombre non dénombrable de valeurs. Une telle fonction ne peut donc exister.

### Exercice 18 : [énoncé]

a) Considérons  $g : x \mapsto f(x) - x$ .  $g$  est continue,  $g(0) \geq 0$  et  $g(1) \leq 0$  donc il existe  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .

b) L'ensemble  $\{x \in [0, 1] / f(x) \geq x\}$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , non vide (0 y appartient) et est majoré (par 1).

On peut donc poser

$$\alpha = \sup \{x \in [0, 1] / f(x) \geq x\}$$

Pour  $x > \alpha$ , on a  $f(x) < x$  donc  $f(\alpha) \leq f(x) < x$ . D'où  $f(\alpha) \leq \alpha$ . ( $\alpha$  est majorant)

Pour  $x < \alpha$ , il existe  $t \in ]x, \alpha]$  tel que  $f(t) \geq t$  donc  $f(\alpha) \geq f(t) \geq t \geq x$ . D'où  $f(\alpha) \geq \alpha$ . ( $\alpha$  est le plus petit majorant).

Finalement  $f(\alpha) = \alpha$ . On peut aussi procéder par dichotomie...

### Exercice 19 : [énoncé]

Par l'absurde, supposons que  $f - g$  ne s'annule pas. Quitte à échanger, supposons  $f - g > 0$ .

Soit  $x$  un point fixe de  $g$ .

On a  $g(f(x)) = f(g(x)) = f(x)$ . Donc  $f(x)$  est point fixe de  $g$  et de plus  $f(x) > g(x) = x$ .

De même,  $f^2(x)$  est point fixe de  $g$  et  $f^2(x) \geq f(x)$ .

On peut ainsi construire une suite  $(f^n(x))$  de points fixes de  $g$ , suite qui est croissante et majorée.

Posons  $\ell = \lim f^n(x)$ . On a par continuité :  $f(\ell) = \ell$  et  $g(\ell) = \ell$ . Absurde.

### Exercice 20 : [énoncé]

a) L'ensemble des points fixes de  $f$  est  $(f - \text{Id})^{-1} \{0\}$ , c'est donc une partie fermée de  $[0, 1]$ . Etant fermée et bornée c'est une partie compacte. Etant de plus non vide, cette partie admet un plus petit et un plus grand élément.

b) Soient  $a \leq b$  les deux éléments précédents. L'égalité  $f \circ g = g \circ f$  donne  $f(g(a)) = g(a)$  et  $f(g(b)) = g(b)$  donc  $a \leq g(a)$ ,  $g(b) \leq b$ . Considérons la fonction continue  $\varphi = f - g$ . On a  $\varphi(a) = a - g(a) \leq 0$  et  $\varphi(b) = b - g(b) \geq 0$  donc  $\varphi$  s'annule.

### Exercice 21 : [énoncé]

Soit  $f$  une fonction solution. Puisque celle-ci est continue sur un segment, elle y admet un minimum en un certain  $x_0 \in [0, 1]$ .

On a alors

$$f(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n x_0 + 1 - x_0)}{2^n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x_0)}{2^n} = f(x_0)$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n x_0 + 1 - x_0) = f(x_0)$$

En passant à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$f(1) = f(x_0)$$

Ainsi  $f(1)$  est la valeur minimale de  $f$  sur  $[0, 1]$

Un raisonnement symétrique assure aussi que  $f(1)$  est la valeur maximale de  $f$  sur  $[0, 1]$ .

On en déduit que  $f$  est constante.

La réciproque est immédiate.

Notons que l'hypothèse de stricte croissance de la suite  $(u_n)$  est sans doute là pour tromper l'ennemi.

**Exercice 22 :** [énoncé]

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} \text{ et } \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \text{ donc}$$

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)} = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}.$$

**Exercice 23 :** [énoncé]

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}\right) \text{ qu'il suffit de dériver à l'ordre } n.$$

Après résolution de l'équation  $(x-i)^n = (x+i)^n$ , on obtient que les racines de  $f^{(n)}$  sont les cot  $\frac{k\pi}{n}$  avec  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .

**Exercice 24 :** [énoncé]

a) En dérivant la relation  $(f \circ f)(x) = ax + b$  on obtient  $f'(x)f'(f(x)) = a$ .

On observe que  $h$  admet un unique point fixe  $\alpha = b/(1-a)$ .

Si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) < x$  alors  $h(x) = f(f(x)) < f(x) < x$  ce qui est contradictoire avec l'existence d'un point fixe pour  $h$ .

De même, on ne peut avoir  $f(x) > x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . La continuité de  $f$  permet alors d'assurer l'existence d'un point fixe à  $f$  (qui ne peut d'ailleurs qu'être  $\alpha$  car un point fixe de  $f$  est aussi point fixe de  $h$ ).

La relation

$$f'(x)f'(f(x)) = a$$

en  $x = \alpha$  donne

$$(f'(\alpha))^2 = a$$

Par suite si  $a < 0$ ,  $S = \emptyset$ .

b) On observe

$$h(x) = a(x - \alpha) + \alpha$$

$h$  est une homothétie de centre  $\alpha$  et de rapport  $a$ .

c) On a

$$h^{-1} \circ f \circ h = h^{-1} \circ f \circ f \circ h = h^{-1} \circ h \circ f = f$$

En itérant la relation précédente

$$(h^{-1})^n \circ f \circ h^n = f$$

avec  $h^n(x) = \alpha + a^n(x - \alpha)$  et  $(h^{-1})^n(x) = \alpha + a^{-n}(x - \alpha)$ .

Supposons  $a \in ]0, 1[$ .

On peut écrire

$$f(x) = ((h^{-1})^n \circ f \circ h^n) = (h^{-1})^n \circ f(\alpha + a^n(x - \alpha))$$

Puisque  $a^n \rightarrow 0$  et que  $f$  est dérivable en  $\alpha$

$$f(\alpha + a^n(x - \alpha)) = \alpha + a^n(x - \alpha)f'(\alpha) + o(a^n)$$

donc

$$f(x) = (h^{-1})^n \circ f(\alpha + a^n(x - \alpha)) = \alpha + (x - \alpha)f'(\alpha) + o(1)$$

En passant à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , on peut affirmer que  $f$  est affine. Puisque de plus  $\alpha$  est point fixe,  $f$  est une homothétie de centre  $\alpha$  et son rapport ne peut qu'être  $\sqrt{a}$ .

Dans le cas  $a > 1$ , la même étude en partant de

$$h \circ f \circ h^{-1} = f$$

permet aussi d'affirmer que  $f$  est affine et d'obtenir la même conclusion.

**Exercice 25 :** [énoncé]

a) Il suffit de raisonner par récurrence. On obtient  $P_0(x) = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{n+1} = (2 - 3nX^2)P_n + X^3P'_n$ . Par récurrence, pour  $n > 0$ ,  $\deg P_n = 2(n-1)$ .

b)  $f$  est continue en 0 et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  dont par le théorème

« limite de la dérivée », on peut conclure.

c)  $P_1 = 2$  a toutes ses racines réelles.

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$  donc par une généralisation du théorème

de Rolle, on peut affirmer que  $f''$  s'annule sur  $]0, +\infty[$  et  $]-\infty, 0[$ . Ses annulations sont aussi des zéros de  $P_2$  qui est de degré 2, donc  $P_2$  a toutes ses racines réelles.

$f''$  s'annule aussi en 0 et en  $\pm\infty$ . Par la généralisation du théorème de Rolle, on obtient 2 annulations sur  $]0, +\infty[$  et 2 annulations sur  $]-\infty, 0[$  qui seront toutes quatre zéros de  $P_3$  qui est un polynôme de degré 4, ... on peut itérer la démarche.

**Exercice 26 : [énoncé]**

Soit  $y$  une valeur strictement intermédiaire à  $f'(a)$  et  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .  
 Soit  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(x) = f(x) - y(x - a)$ .  
 $\varphi$  est dérivable.  $\varphi(a) = f(a)$ ,  $\varphi'(a) = f'(a) - y < 0$ ,  $\varphi(b) = f(b) - y(b - a) > f(a)$ .  
 Puisque  $\varphi'(a) < 0$ ,  $\varphi$  prend des valeurs strictement inférieures à  $f(a)$ .  
 Ainsi il existe  $\alpha \in ]a, b[$  tel que  $\varphi(\alpha) < f(a)$ .  
 $\varphi$  est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué entre  $\alpha$  et  $b$ , il existe  $x \in ]\alpha, b[ \subset ]a, b[$  tel que  $\varphi(x) = f(a)$ .  
 En appliquant le théorème de Rolle entre  $a$  et  $x$ , il existe  $c \in ]a, x[$  tel que  $\varphi'(c) = 0$  i.e.  $f'(c) = y$ .  
 Par le même principe que ci-dessus,  $f'$  prend aussi les valeurs intermédiaires à  $f'(b)$  et  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  et donc les valeurs intermédiaires à  $f'(a)$  et  $f'(b)$ .

**Exercice 27 : [énoncé]**

Nous allons montrer que seule la fonction nulle est solution sur  $\mathbb{R}$  du problème posé.  
 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une solution du problème posé.  
 On vérifie aisément que  $f$  est indéfiniment dérivable et vérifie

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = \lambda f(\lambda x)$$

Dans les cas où  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1$  conclut aisément que  $f$  est la fonction nulle.  
 Dans le cas où  $\lambda = -1$ , on a  $f''(x) = f'(-x) = -f(x)$ . Ainsi  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y'' + y = 0$  et puisque  $f(0) = f'(0) = 0$ , on obtient encore que  $f$  est la fonction nulle.

Cas  $|\lambda| < 1$   
 Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on  $f'(x) = \lambda f(\lambda x)$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^+$ , posons

$$M(x) = \sup_{[-x, x]} |f|$$

La fonction  $M$  est croissante et

$$M(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f(0) = 0$$

Pour  $x \geq 0$

$$|f(x)| \leq \int_0^x |f'(t)| dt = |\lambda| \int_0^x |f(\lambda t)| dt \leq |\lambda| x M(|\lambda x|)$$

et on a un résultat semblable pour  $x \leq 0$ .

On en déduit

$$M(x) \leq |\lambda| |x| M(|\lambda x|)$$

En itérant cette relation, on obtient

$$M(x) \leq [|\lambda|^{(n+1)/2} |x|]^n M(|\lambda^n x|)$$

et quand  $n \rightarrow +\infty$  on obtient  $M(x) = 0$ .

On en déduit que  $f$  est constante égale à la fonction nulle.

Cas  $|\lambda| > 1$  : reste à résoudre... On peut toujours faire référence à X MP 2006 1ère épreuve mais cela ne me semble pas raisonnable pour un jour d'oral...

**Exercice 28 : [énoncé]**

Soient  $a_1 < \dots < a_n$  les racines de  $P$ .

En appliquant Rolle sur chaque intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$ , on obtient  $n - 1$  racines réelles distinctes pour le polynôme  $P'$ . Puisque  $\deg P' = n - 1$ , ce polynôme est scindé.

Soient  $a_1 < \dots < a_p$  les racines de  $P$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  leurs multiplicités avec  $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n$ .

Les  $a_1 < \dots < a_p$  sont racines de  $P'$  de multiplicités respectives  $\alpha_1 - 1, \dots, \alpha_p - 1$ .

Comme ci-dessus, par Rolle, on peut aussi assurer l'existence de  $p - 1$  autres racines à  $P'$ .

La somme des multiplicités des racines est donc au moins égales à

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i - 1 + p - 1 = n - 1 = \deg P' \text{ donc } P' \text{ est scindé.}$$

**Exercice 29 : [énoncé]**

a)  $(X^2 - 1)^n$  est de degré  $2n$  donc  $[(X^2 - 1)^n]^{(n)}$  est de degré  $n$ .

b)

$$f(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(x-1)^n]^{(k)}(1) [(x+1)^n]^{(n-k)}(1) = 2^n n!$$

et de manière similaires  $f(-1) = (-1)^n 2^n n!$ .

c) 1 et  $-1$  sont racines de multiplicité  $n$  de  $g : x \mapsto (x^2 - 1)^n$ , 1 et  $-1$  sont donc racines de  $g, g', \dots, g^{(n-1)}$ .

En appliquant le théorème de Rolle, on montre que  $g', g'', \dots, g^{(n)} = f$  admettent resp.  $1, 2, \dots, n$  racines dans  $] -1, 1[$ . Puisque  $f$  est de degré  $n$ , celles-ci sont simples et il ne peut y en avoir d'autres.

**Exercice 30 : [énoncé]**

Soit  $(a_n)$  une suite de valeurs d'annulation deux à deux distinctes de  $f$ . Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite bornée  $(a_n)$  une

sous-suite convergente  $(a_{\varphi(n)})$ . Posons  $\alpha$  sa limite. Par continuité, on a  $f(\alpha) = 0$ . En appliquant le théorème de Rolle entre  $a_{\varphi(n)}$  et  $a_{\varphi(n+1)}$ , il existe  $b_n$  compris entre ces deux nombres tel que  $f'(b_n) = 0$ . Quand  $n \rightarrow +\infty$ , on a  $b_n \rightarrow \alpha$  par encadrement et donc par continuité de  $f'$ , on a  $f'(\alpha) = 0$ . Finalement  $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ .

**Exercice 31 : [énoncé]**

Si  $x_0 \in \{a_1, \dots, a_n\}$  n'importe quel  $c$  convient.

Si  $x_0 \notin \{a_1, \dots, a_n\}$ , il existe une constante  $K$  telle que

$$f(x_0) = \frac{(x_0 - a_1) \dots (x_0 - a_n)}{n!} K$$

La fonction  $x \mapsto f(x) - \frac{(x-a_1)\dots(x-a_n)}{n!} K$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et s'annule en  $a_1, \dots, a_n$  et  $x_0$  ce qui fournit au moins  $n+1$  valeurs d'annulation et permet, par le théorème de Rolle, de conclure que sa dérivée  $n$ ème s'annule en un  $c \in ]a, b[$ . Or

$$\frac{d^n}{dx^n} \left( f(x) - \frac{(x-a_1)\dots(x-a_n)}{n!} K \right) = f^{(n)}(x) - K$$

donc  $K = f^{(n)}(c)$ .

**Exercice 32 : [énoncé]**

a) Si  $x_0 = a$  ou  $x_0 = b$  : ok. Sinon introduisons un réel  $K$  tel que la fonction

$$g : x \mapsto f(x) - \frac{(x-a)(x-b)}{2} K$$

s'annule en  $x_0$ .

La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et s'annule en  $a < t < b$  donc il existe  $\xi \in ]a, b[$  tel que  $g''(\xi) = 0$  ce qui résout le problème.

b) Notons que les sup engagés existent car les fonctions considérées sont continues sur le segment  $[a, b]$ .

On a

$$\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq \frac{(x-a)(b-x)}{2} \sup_{[a,b]} |f''|$$

Or  $x \mapsto \frac{(x-a)(b-x)}{2}$  est maximum en  $x = \frac{a+b}{2}$  ce qui donne :

$$|f(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \sup_{[a,b]} |f''|$$

puis

$$\sup_{[a,b]} |f| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \sup_{[a,b]} |f''|$$

**Exercice 33 : [énoncé]**

Considérons

$$g : x \mapsto (x-b)f(a) + (a-x)f(b) + (b-a)f(x) - \frac{1}{2}(a-b)(b-x)(x-a)K$$

où la constante  $K$  est choisie de sorte que  $g(c) = 0$  (ce qui est possible).

La fonction  $g$  s'annule en  $a$ , en  $b$  et en  $c$  donc par le théorème de Rolle, il existe  $d \in I$  tel que  $g''(d) = 0$  ce qui résout le problème posé.

**Exercice 34 : [énoncé]**

En appliquant le théorème des accroissements finis à  $x \mapsto x^{1/x}$  entre  $n$  et  $n+1$ , on obtient

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{1 - \ln c}{c^2}$$

avec  $c \in ]n, n+1[$ .

Puisque  $c \sim n \rightarrow +\infty$ ,  $\ln c \sim \ln n$  et donc

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}$$

**Exercice 35 : [énoncé]**

Appliquons le théorème des accroissements finis à  $f^{-1}$  entre  $\frac{k-1}{n}$  et  $\frac{k}{n}$ ,

$$\exists y_{k,n} \in \left] \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right[ , f^{-1} \left( \frac{k}{n} \right) - f^{-1} \left( \frac{k-1}{n} \right) = (f^{-1})'(y_{k,n}) \left( \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right)$$

En posant  $x_{k,n} = f^{-1}(y_{k,n})$ , on a

$$\frac{k-1}{n} \leq f(x_{k,n}) \leq \frac{k}{n}$$

En sommant les relations précédentes pour  $k$  allant de 1 à  $n$  on obtient :

$$f^{-1}(1) - f^{-1}(0) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{f'(x_{k,n})} \frac{1}{n}$$

car

$$(f^{-1})'(y_{k,n}) = \frac{1}{f'(x_{k,n})}$$

Puisque  $f^{-1}(1) = 1$  et  $f^{-1}(0) = 0$  car  $f$   $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme croissant de  $[0, 1]$  sur  $[0, 1]$ , on obtient finalement,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{f'(x_{k,n})} = n$$

**Exercice 36 :** [énoncé]

- a) Si  $f'$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ , l'inégalité des accroissements finis assure que  $f$  est lipschitzienne donc uniformément continue.  
 b) Supposons que  $f$  soit uniformément continue. Pour  $\varepsilon = 1 > 0$ , il existe un réel  $\alpha > 0$  vérifiant  $\forall x, y \in \mathbb{R}, |y - x| \leq \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq 1$ . En particulier, pour tout  $x \in \mathbb{R}, |f(x + \alpha) - f(x)| \leq 1$ . Or par le théorème des accroissements finis, il existe  $\xi_x \in ]x, x + \alpha[$  vérifiant  $|f(x + \alpha) - f(x)| = \alpha |f'(\xi_x)|$  et donc  $|f'(\xi_x)| \leq 1/\alpha$ . Cette propriété est incompatible avec  $|f'(x)| \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 37 :** [énoncé]

- $-c \leq t - x \leq c \Leftrightarrow t - c \leq x \leq t + c$ .  
 Si  $t \leq a - c$  ou  $t \geq b + c$  alors  $g(t) = 0$ .  
 Si  $a - c \leq t \leq a + c$  alors  $g(t) = \int_a^{t+c} 1 dx = t + c - a$ .  
 Si  $a + c \leq t \leq b - c$  alors  $g(t) = \int_{t-c}^{t+c} 1 dt = 2c$ .  
 Si  $b - c \leq t \leq b + c$  alors  $g(t) = \int_{t-c}^b 1 dx = b - t + c$ .  
 La fonction  $g$  est représentée par une fonction continue affine par morceaux.

**Exercice 38 :** [énoncé]

- a) Supposons  $f$  constante égale à  $C$ .  
 $\int_a^b f(x) |\sin(nx)| dx = C \int_a^b |\sin(nx)| dx$ .  
 Posons  $p = \lfloor \frac{an}{\pi} \rfloor + 1$  et  $q = \lfloor \frac{bn}{\pi} \rfloor$ .  
 $\int_a^b |\sin(nx)| dx = \int_a^{\frac{p\pi}{n}} |\sin(nx)| dx + \sum_{k=p+1}^q \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} |\sin(nx)| dx + \int_{\frac{q\pi}{n}}^b |\sin(nx)| dx$   
 On a  $|\int_a^{\frac{p\pi}{n}} |\sin(nx)| dx| \leq \frac{\pi}{n}$  donc  $\int_a^{\frac{p\pi}{n}} |\sin(nx)| dx \rightarrow 0$  et aussi  $\int_{\frac{q\pi}{n}}^b |\sin(nx)| dx \rightarrow 0$ .  
 De plus  $\sum_{k=p+1}^q \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} |\sin(nx)| dx = \frac{(q-p)}{n} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{2(q-p)}{n} \rightarrow \frac{2(b-a)}{\pi}$ .  
 Ainsi  $\int_a^b |\sin(nx)| dx \rightarrow \frac{2}{\pi}(b-a)$  puis  $\int_a^b f(x) |\sin(nx)| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx$ .  
 b) Supposons  $f$  en escalier.  
 Soit  $a_0, \dots, a_n$  une subdivision adaptée à  $f$ .  
 Par l'étude qui précède,  $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) |\sin(nx)| dx \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f$ .  
 Puis en sommant par la relation de Chasles  $\int_a^b f(x) |\sin(nx)| dx \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_a^b f$ .  
 c) Supposons enfin  $f$  continue par morceaux.  
 Pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\varphi$  en escalier vérifiant  $\|f - \varphi\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ .  
 Puisque  $\int_a^b \varphi(x) |\sin(nx)| dx \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi$ , pour  $n$  assez grand, on a  $|\int_a^b \varphi(x) |\sin(nx)| dx - \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi| \leq \varepsilon$ .

Or  $|\int_a^b \varphi(x) |\sin(nx)| dx - \int_a^b f(x) |\sin(nx)| dx| \leq \varepsilon$  et  $|\int_a^b \varphi - \int_a^b f| \leq \varepsilon$  donc  $|\int_a^b f(x) |\sin(nx)| dx - \frac{2}{\pi} \int_a^b f| \leq 2\varepsilon + \frac{2}{\pi}\varepsilon$ .  
 Ainsi  $\int_a^b f(x) |\sin(nx)| dx \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_a^b f$ .

**Exercice 39 :** [énoncé]

- a)  $\varphi$  étant convexe, la courbe est au dessus de chacune de ses tangentes.  
 b) Posons  $a = \int_0^1 f(u) du \in I$  et considérons  $x = f(t) \in I$ :  
 $\varphi(f(t)) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)(f(t) - a)$   
 En intégrant sur  $[0, 1]$ , on obtient :

$$\int_0^1 \varphi(f(t)) dt \geq \varphi \left( \int_0^1 f(u) du \right)$$

car

$$\int_0^1 \varphi'(a)(f(t) - a) dt = \varphi'(a) \left( \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 f(u) du \right) = 0$$

- c)  $\varphi : x \mapsto x \ln x$  est convexe sur  $I = \mathbb{R}^{+*}$  car  $(x \ln x)' = 1 + \ln x$  qui est croissant.  
 L'inégalité précédente donne alors

$$0 \leq \int_0^1 f(t) \ln(f(t)) dt$$

puisque  $\int_0^1 f(t) dt = 1$  annule  $\varphi$ .

- d)  $x \mapsto x \ln x$  étant convexe et de tangente d'équation  $y = x - 1$  en 1, on a  $x \ln x \geq x - 1$  pour tout  $x > 0$ .

Par suite

$$\int_0^1 f(t) \ln f(t) dt - \int_0^1 f(t) \ln g(t) dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)} \ln \left( \frac{f(t)}{g(t)} \right) g(t) dt \geq \int_0^1 \left( \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right) g(t) dt =$$

Document 7

**Exercice 40 :** [énoncé]

- a) La propriété est valable pour les fonctions en escalier et se prolonge aux fonctions continues par approximation uniforme.  
 b)

$f := x \rightarrow \exp(-x^2)$

```

somme1:=proc(n)
local k,S;
S:=0; for k from 1 to n do S:=S+f(die()) od; RETURN(S/n);
end;
somme2:=proc(n)
RETURN(sum(f(k/n),k=1..n)/n);
end;

```

La méthode aléatoire donne des résultats instables peu convaincants.

c)

```

g:=(x,y)->cos(x*y)*exp(x^2+y^2);
somme3:=proc(n)
local k,S;
S:=0; for k from 1 to n do S:=S+g(die(),die()) od; RETURN(S/n);
end;

```

### Exercice 41 : [énoncé]

Par un argument géométrique (trapèze sous la courbe) la concavité donne

$$x \frac{f(0) + f(x)}{2} \leq \int_0^x f(t) dt$$

On en déduit  $xf(x) \leq 2 \int_0^x f(t) dt - x$  donc

$$\int_0^1 xf(x) dx \leq 2 \int_{x=0}^1 \left( \int_{t=0}^x f(t) dt \right) dx - \frac{1}{2} \quad (1)$$

Or

$$\int_{x=0}^1 \int_{t=0}^x f(t) dt dx = \int_{t=0}^1 \int_{x=t}^1 f(t) dx dt = \int_{t=0}^1 (1-t)f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 tf(t) dt$$

La relation (1) donne alors

$$3 \int_0^1 xf(x) dx \leq 2 \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2} \quad (2)$$

Enfin

$$2 \left( \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0$$

donne

$$2 \left( \int_0^1 f(t) dt \right)^2 \geq 2 \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2} \quad (3)$$

Les relations (2) et (3) permettent alors de conclure.

### Exercice 42 : [énoncé]

On peut écrire

$$\frac{\int_0^1 t^n f(t) dt}{\int_0^1 t^n dt} = \int_0^1 (n+1)t^n f(t) dt$$

Par le changement de variable  $u = t^{n+1}$

$$\frac{\int_0^1 t^n f(t) dt}{\int_0^1 t^n dt} = \int_0^1 f(u^{1/(n+1)}) du$$

Par convergence dominée par  $\|f\|_\infty$ , on obtient

$$\frac{\int_0^1 t^n f(t) dt}{\int_0^1 t^n dt} \rightarrow f(1)$$

### Exercice 43 : [énoncé]

On a

$$2^n I_n = \int_0^1 \left( \frac{2t}{1+t} \right)^n dt$$

où l'on remarque que la fonction  $t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$  croît de  $[0, 1]$  sur  $[0, 1]$ .

Introduisons

$$J_n = \int_0^1 \frac{1+t^2}{2} \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt \stackrel{t=\tan x/2}{=} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$$

On sait

$$J_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

(via  $nJ_n J_{n+1} = \pi/2$  et  $J_n \sim J_{n+1}$ , cf. intégrales de Wallis)

Montrons  $2^n I_n \sim J_n$  en étudiant la différence

$$2^n I_n - J_n = \int_0^1 \frac{1-t^2}{2} \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt$$

On découpe l'intégrale en  $1 - \varepsilon_n$  avec  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  que nous choisirons par la suite.

$$\int_0^1 \frac{1-t^2}{2} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n dt = \int_0^{1-\varepsilon_n} \frac{1-t^2}{2} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n dt + \int_{1-\varepsilon_n}^1 \frac{1-t^2}{2} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n dt$$

D'une part

$$0 \leq \int_{1-\varepsilon_n}^1 \frac{1-t^2}{2} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n dt \leq \varepsilon_n \frac{2\varepsilon_n - \varepsilon_n^2}{2} \sim \varepsilon_n^2$$

et d'autre part

$$0 \leq \int_0^{1-\varepsilon_n} \frac{1-t^2}{2} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n dt \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1-\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n + \varepsilon_n^2/2}\right)^n$$

avec

$$\left(\frac{1-\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n + \varepsilon_n^2/2}\right)^n = \exp\left(-\frac{1}{2}n\varepsilon_n^2 + o(n\varepsilon_n^2)\right)$$

Pour  $\varepsilon_n = n^{-1/3}$ , on a

$$\int_{1-\varepsilon_n}^1 \frac{1-t^2}{2} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n dt = O\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et

$$\left(\frac{1-\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n + \varepsilon_n^2/2}\right)^n = \exp\left(-\frac{1}{2}n^{1/3} + o(n^{1/3})\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On peut alors affirmer

$$2^n I_n - J_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

puis

$$2^n I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

et finalement

$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^n \sqrt{2n}}$$

**Exercice 44 : [énoncé]**

L'équation étudiée équivaut à

$$4^{x^2} - 3^{x^2} = 3^x - 2^x$$

Or

$$3^x - 2^x = \int_0^1 x(2+t)^{x-1} dt \text{ et } 4^{x^2} - 3^{x^2} = \int_0^1 x^2(3+t)^{x^2-1} dt$$

et donc l'équation étudiée peut se réécrire

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = 0$$

où  $\varphi$  est l'application continue définie par

$$\varphi(t) = x(x(3+t)^{x^2-1} - (2+t)^{x-1})$$

Si  $x \leq 0$  ou si  $x \geq 1$ , il est immédiat d'affirmer que l'application  $\varphi$  est de signe constant.

Si  $x \in ]0, 1[$ , l'étude est plus délicate et nous allons montrer par étude de fonctions que

$$x(3+t)^{x^2-1} \leq (2+t)^{x-1}$$

soit encore

$$\ln x + (x^2 - 1) \ln(3+t) \leq (x-1) \ln(2+t)$$

Soit  $f : x \mapsto \ln x + (x^2 - 1) \ln(3+t) - (x-1) \ln(2+t)$  définie sur  $]0, 1[$

La fonction  $f$  est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x \ln(3+t) - \ln(2+t)$$

Si  $x \geq 1/2$  alors  $f'(x) \geq \frac{1}{x} + \ln(3+t) - \ln(2+t) \geq 0$ .

Si  $x \leq 1/2$  alors  $f'(x) \geq 2 - \ln(2+t) \geq 2 - \ln 3 \geq 0$ .

Dans tous les cas  $f'(x) \geq 0$  et donc  $f$  est croissante.

Puisque  $f(1) = 0$ , la fonction  $f$  est négative et l'on obtient l'inégalité proposée.

Finalement, l'équation initialement étudiée équivaut à une équation de la forme

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = 0$$

avec  $\varphi$  une fonction continue de signe constant. L'équation est donc vérifiée si, et seulement si,  $\varphi$  est la fonction nulle.

Pour  $x \leq 0$ , cette propriété n'est vérifiée que si  $x = 0$ .

Pour  $x > 0$ , si la fonction  $\varphi$  est la fonction nulle alors

$$\forall t \in [0, 1], \frac{1}{x} + (x^2 - 1) \ln(3+t) - (x-1) \ln(2+t) = 0$$

puis en dérivant par rapport à la variable  $t$ , on obtient

$$\forall t \in [0, 1], \frac{x^2 - 1}{3+t} = \frac{x-1}{2+t}$$

ce qui n'est possible que pour  $x = 1$ .

Inversement,  $x = 0$  et  $x = 1$  sont solutions de l'équation étudiée.  
Finalement

$$S = \{0, 1\}$$

**Exercice 45 :** [énoncé]

Posons  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

prolongée par continuité en 0.

Notons que cette fonction est positive et croissante.

Introduisons  $a, b \in ]0, 1[$  dont les valeurs seront déterminées ultérieurement. On peut écrire

$$-(n+1)I_n = A_n + B_n + C_n$$

avec

$$A_n = \int_0^a (n+1) \frac{x^n}{f(x)} dx, B_n = \int_a^b (n+1) \frac{x^n}{f(x)} dx \text{ et } C_n = \int_b^1 (n+1) \frac{x^n}{f(x)} dx$$

Par monotonie de  $f$ ,

$$0 \leq A_n \leq \int_0^a \frac{(n+1)x^n}{f(0)} dx = a^{n+1}$$

Pour  $a = 1 - \varepsilon_n$  avec  $\varepsilon_n = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ , on a

$$\ln(n)a^{n+1} = e^{\ln(\ln n) + (n+1)\ln(1-\varepsilon_n)} \rightarrow 0$$

car

$$\ln(\ln n) + (n+1)\ln(1-\varepsilon_n) \sim -\ln n \rightarrow -\infty$$

On en déduit

$$A_n = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

Par la croissance de  $f$

$$0 \leq C_n \leq \int_b^1 \frac{(n+1)x^n}{f(b)} dx = \frac{1-b^{n+1}}{f(b)}$$

Pour  $b = 1 - \eta_n$  avec  $\eta_n = \frac{1}{n(\ln n)} \rightarrow 0$ , on a

$$b^{n+1} \rightarrow 1 \text{ et } f(b) \sim \ln n$$

de sorte que

$$C_n \sim o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

Enfin, toujours par la croissance de  $f$ ,

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{f(b)} \leq B_n \leq \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{f(a)}$$

et puisque

$$b^{n+1} - a^{n+1} \rightarrow 1 \text{ et } f(b) \sim f(a) \sim \ln n$$

on parvient à

$$-(n+1)I_n \sim \frac{1}{\ln n}$$

et finalement

$$I_n \sim -\frac{1}{n \ln n}$$

Remarque :

Par le changement de variable  $t = -\ln(1-x)$ ,  $x = 1 - e^{-t}$

$$I_n = -\int_0^{+\infty} \frac{(1 - e^{-t})^{n+1}}{t} e^{-t} dt$$

En développant par la formule du binôme

$$I_n = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(k+1)t}}{t} dt$$

et on peut montrer par découpage d'intégrale et un changement de variable affine que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(k+1)t}}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(k+1)t}}{t} dt = \ln(k+1)$$

Ce qui précède permet alors d'établir

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \ln(k+1) \sim -\frac{1}{n \ln n}$$

**Exercice 46 :** [énoncé]

a) ( $E$ ) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur  $I$ .

La solution générale homogène est

$$y(x) = \frac{\lambda}{x}$$

Par la méthode de la variation de constante, une solution particulière est

$$y(x) = \frac{1}{x} \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

La solution générale est alors

$$y(x) = \frac{1}{x} \left( \lambda + \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \right)$$

La fonction  $f$  recherchée est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

La résolution avec Maple

`dsolve({x*D(y)(x)+y(x)=1/ln(x), y(2)=0}, y(x));`

fait référence à une fonction *Ei* qui lui est personnelle.

b) La fonction  $f$  admet pour dérivée

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{x^2} \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{1}{x^2} g(x)$$

avec

$$g(x) = \frac{x}{\ln x} - \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

Par intégration par parties

$$g(x) = \frac{2}{\ln 2} - \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}$$

Puisque

$$g'(x) = -\frac{1}{(\ln x)^2} < 0$$

la fonction  $g$  est strictement décroissante,  $g(2) > 0$  et  $\lim_{+\infty} g = -\infty$  donc la fonction  $g$  s'annule une unique fois en un  $x_0 \in I$ . Le signe de  $g$  puis de  $f'$  sont alors immédiats et on peut affirmer que  $f$  admet un unique maximum en  $x_0$ . On obtient une valeur approchée de  $x_0$  en écrivant

`fsolve(diff(1/x*int(1/ln(t), t=2..x), x)=0, x);`

et l'on obtient  $x_0 = 6,579728$  à  $10^{-6}$  près.

c) Par intégration par parties

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x \ln 2} + \frac{1}{x} \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}$$

Montrons que

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} = o\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right) \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $1/\ln t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ , il existe  $x_0 \geq 2$  tel que

$$\forall t \geq x_0, \frac{1}{\ln t} \leq \varepsilon$$

et alors

$$\int_{x_0}^x \frac{dt}{(\ln t)^2} \leq \varepsilon \int_{x_0}^x \frac{dt}{\ln t} \leq \varepsilon \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

De plus, par non intégrabilité d'une fonction positive

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

donc, pour  $x$  assez grand

$$\int_2^{x_0} \frac{dt}{(\ln t)^2} = C^{te} \leq \varepsilon \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

et alors

$$0 \leq \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} \leq 2\varepsilon \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

On en déduit

$$f(x) \sim \frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x \ln 2} \sim \frac{1}{\ln x}$$

Une nouvelle intégration par parties donne

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} = \frac{x}{(\ln x)^2} - \frac{2}{(\ln 2)^2} + 2 \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^3}$$

Comme ci-dessus, on montre

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^3} = o\left(\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}\right) \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

et on en déduit

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln x)^2}\right) \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

d) Quand  $x \rightarrow 1^+$ , on peut écrire  $x = 1 + u$  avec  $u \rightarrow 0^+$  et alors

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \int_1^u \frac{ds}{\ln(1+s)}$$

Or

$$\frac{1}{\ln(1+s)} = \frac{1}{s} + \frac{s - \ln(1+s)}{s \ln(1+s)}$$

donc

$$\int_1^u \frac{ds}{\ln(1+s)} = \ln u + \int_1^u \frac{s - \ln(1+s)}{s \ln(1+s)} ds$$

Grâce à un prolongement par continuité, il y a convergence quand  $u \rightarrow 0^+$  de l'intégrale du second membre et donc on peut affirmer

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{1}{u} \sim \frac{1}{x-1}$$

e) On obtient le graphe de  $f$  par la commande

```
plot(1/x*int(1/ln(t),t=2..x),x=1.5..20);
```

Remarque :

Les questions c) et d) pouvaient aussi être résolues en faisant référence à des résultats de comparaison d'intégrales partielles de fonctions positives non intégrables (résultats hors-programme).

**Exercice 47 :** [énoncé]

a) La fonction  $f$  est définie sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  car pour chaque  $x$  dans ce domaine, la fonction  $t \mapsto 1/\ln t$  est définie et continue sur le segment d'extrémités  $x$  et  $x^2$  car 1 n'y appartient pas. Pour  $x \in ]0, 1[$ , on a pour tout  $t \in [x^2, x]$ ,  $2 \ln x \leq \ln t \leq \ln x$  puis par encadrement d'intégrales

$$\frac{x^2 - x}{2 \ln x} \leq f(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

et donc  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ .

L'encadrement est identique pour  $x > 1$  ce qui permet d'affirmer

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ et } f(x)/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On peut aussi écrire

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{t}{t \ln t} dt$$

et par encadrement du  $t$  du numérateur par  $x$  et  $x^2$ , on obtient  $f(x)$  encadré par  $xI(x)$  et  $x^2I(x)$  avec

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln |\ln t|]_x^{x^2} = \ln 2$$

d'où  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln 2$ .

b) On introduit  $H$  primitive de  $t \mapsto 1/\ln t$  et on démontre que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  avec  $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ . Cette dérivée étant de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on conclut que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ . On prolonge  $f$  par continuité en 1 en posant  $f(1) = \ln 2$  et puisque  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ , la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  avec

$f'(1) = 1$ . Par développement en série entière  $h \mapsto \frac{\ln(1+h)}{h}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de 0 donc  $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de 1 et par passage à l'inverse  $x \mapsto f'(x)$  est  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de 1. Finalement  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ . Le calcul de  $f''(x)$  permet de justifier que  $f''$  n'a pas de limite finie en 0 et donc  $f$  ne peut être prolongée en une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de 0.

c)  $f$  est croissante, convexe, branche parabolique verticale en  $+\infty$ , tangente horizontale en l'origine.

**Exercice 48 :** [énoncé]

a) Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,  $\forall t \in [x, 2x]$ ,  $e^x \leq e^t \leq e^{2x}$  donc  $e^x \ln 2 \leq f(x) \leq e^{2x} \ln 2$ . Ainsi  $f(x) \rightarrow \ln 2$ .

De même, quand  $x \rightarrow 0^-$ ,  $f(x) \rightarrow \ln 2$ . On prolonge  $f$  par continuité en 0 en posant  $f(0) = \ln 2$ .

b) Soit  $F$  une primitive de  $t \mapsto e^t/t$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .  $F$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $f(x) = F(2x) - F(x)$  donc  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}$ . Il en est de même sur  $\mathbb{R}^{-*}$  et puisque  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ , on peut affirmer que la fonction continue  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(0) = 1$ .

c) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \geq e^x \ln 2$  assure une branche parabolique verticale. Quand  $x \rightarrow -\infty$ ,  $e^{2x} \ln 2 \leq f(x) \leq e^x \ln 2$  donne  $f(x) \rightarrow 0^+$  ce qui donne l'axe  $(Ox)$  asymptote, courbe au dessus.

**Exercice 49 :** [énoncé]

a) Par le changement de variable  $u = -t$ , on obtient que  $f$  est paire.

b) Pour tout  $x > 0$ , on a

$$\forall t \in [x, 2x], \frac{\text{ch } x}{t} \leq \frac{\text{ch } t}{t} \leq \frac{\text{ch } 2x}{t}$$

En intégrant, on obtient

$$\operatorname{ch} x \cdot \ln 2 \leq f(x) \leq \operatorname{ch} 2x \cdot \ln 2$$

et on en déduit

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln 2$$

c) La fonction  $t \mapsto \operatorname{cht}/t$  est continue sur  $]0, +\infty[$  donc y admet une primitive  $G$  et puisque  $f(x) = G(2x) - G(x)$ , on obtient que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} x}{x}$$

De plus

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc, par le théorème du prolongement  $\mathcal{C}^1$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

d) Puisque  $f(x) \geq \operatorname{ch} x \cdot \ln 2$ ,  $f$  présente une branche parabolique verticale.

**Exercice 50 :** [énoncé]

a)  $g(x) - f(0) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) - f(0) dt$ .

Pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  vérifiant  $|x| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$ .

Par suite, si  $|x| \leq \alpha$ , pour tout  $t$  compris entre 0 et  $x$ ,  $|f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$  puis par intégration,  $|g(x) - f(0)| \leq \varepsilon$ . Ainsi  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ . On pose  $g(0) = f(0)$ .

b) Par opération,  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{f(x)}{x}$$

Procédons à une intégration par parties,

$$\int_0^x f(t) dt = x f(x) - \int_0^x t f'(t) dt$$

On a alors

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t f'(t) dt$$

De façon semblable à ce qui précède, on obtient

$$g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} f'(0)$$

Ainsi la fonction continue  $g$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$g'(0) = \frac{1}{2} f'(0)$$

**Exercice 51 :** [énoncé]

On a

$$I(x) - \frac{f(0)}{a+1} = \frac{1}{x^{a+1}} \left( \int_0^x t^a f(t) dt - \int_0^x t^a f(0) dt \right) = \frac{1}{x^{a+1}} \int_0^x t^a (f(t) - f(0)) dt$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  vérifiant

$$|x| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$$

Par suite, si  $|x| \leq \alpha$ , pour tout  $t$  compris entre 0 et  $x$ ,  $|f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$  puis par intégration

$$\left| \frac{1}{x^{a+1}} \int_0^x t^a (f(t) - f(0)) dt \right| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} I(x) = \frac{f(0)}{a+1}$$

**Exercice 52 :** [énoncé]

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) dt = [t \ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2.$$

**Exercice 53 :** [énoncé]

a) Via  $x = \cos t$

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt = \int_{-1}^1 \frac{dx}{3 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

b) Via  $x = \sqrt{t}$

$$\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t} + 2t} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2dx}{1 + 2x} = [\ln(1 + 2x)]_1^{\sqrt{2}} = \ln(1 + 2\sqrt{2}) - \ln 3$$

c) Via  $x = 1/t$

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+t) - \ln t}{t^2} dt = - \int_1^{1/2} \ln(x+1) dx = \int_{3/2}^2 \ln x dx = \frac{7}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{2}$$

**Exercice 54 :** [énoncé]

La fonction  $x \mapsto \ln(1 + \tan x)$  est définie et continue sur  $[0, \pi/4]$  donc  $I$  existe.

$\ln(1 + \tan x) = \ln(\cos x + \sin x) - \ln(\cos x)$  et  $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ .

Ainsi

$$I = \frac{\pi \ln 2}{8} + \int_0^{\pi/4} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) dx$$

or

$$\int_0^{\pi/4} \ln \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx \stackrel{t = \frac{\pi}{4} - x}{=} \int_0^{\pi/4} \ln \cos(t) dt$$

donc

$$I = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

**Exercice 55 :** [énoncé]

On réalise le changement de variable  $t = \tan \frac{x}{2}$  pour lequel  $\frac{2t}{1+t^2} = \sin x$ .

On obtient

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt = \int_0^{2\pi/3} \frac{1}{2} \arcsin(\sin x) \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx$$

On simplifie  $\arcsin(\sin x) = x$  pour  $x \in [0, \pi/2]$  et  $\arcsin(\sin x) = \pi - x$  pour  $x \in [\pi/2, 2\pi/3]$ .

Enfin on calcule

$$\int_0^{\pi/2} x \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx$$

par intégration par parties.

Au final, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

**Exercice 56 :** [énoncé]

Par intégration par parties, on obtient pour  $q \neq 0$

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$

Puisque  $I_{n,0} = \frac{1}{n+1}$ , on obtient

$$I_{p,q} = \frac{q! p!}{(p+q+1)!}$$

**Exercice 57 :** [énoncé]

a) Pour  $n \geq 2$ , par intégration par parties (avec  $u' = \sin t$  et  $v = \sin^{n-1} t$ ) :

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

donc

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

b)  $I_0 = \pi/2$  et  $I_1 = 1$  puis

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

**Exercice 58 :** [énoncé]

Par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\sin x = x - \frac{1}{3}x^3 + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \cos(t) dt$$

or

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \cos(t) dt \leq \frac{x^5}{120}$$

donc

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

**Exercice 59 :** [énoncé]

Par Taylor avec reste intégral

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \int_x^{x+1} (x+1-t)f''(t) dt$$

donc

$$|f'(x)| \leq |f(x)| + |f(x+1)| + \max_{x \leq t \leq x+1} |f''(t)| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

**Exercice 60 :** [énoncé]

Considérons la fonction  $f : t \rightarrow \ln(1+t)$ .

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $f(0) = 0$ ,

$$\forall k \geq 1, f^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k}$$

donc

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

Sur  $[0, 1]$ ,  $|f^{(n+1)}(t)| \leq n!$  donc l'inégalité de Taylor Lagrange donne

$$\left| f(1) - f(0) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

i.e.

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

d'où

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \rightarrow \ln 2$$

### Exercice 61 : [énoncé]

a) L'existence de  $\theta$  est assurée par le théorème des accroissements finis. Si deux réels  $\theta$  et  $\theta'$  sont solutions distinctes alors, par le théorème de Rolle,  $f''$  s'annule entre  $\theta x$  et  $\theta' x$ . Or  $f''(0) \neq 0$ , donc il existe un voisinage de 0 sur lequel  $f''$  ne s'annule pas et sur ce voisinage on a l'unicité de  $\theta$ .

b) Par la formule de Taylor-Young appliquée à  $f'$  :

$$f'(\theta x) = f'(0) + x\theta f''(0) + o(x)$$

En substituant dans la relation initiale, on obtient

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + x^2 \theta f''(0) + o(x^2)$$

Or la formule de Taylor-Young appliquée à  $f$  donne

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2} x^2 f''(0) + o(x^2)$$

On en déduit

$$x^2 \theta f''(0) + o(x^2) = \frac{1}{2} x^2 f''(0) + o(x^2)$$

Sachant  $f''(0) \neq 0$ , on en déduit  $\theta \rightarrow 1/2$  quand  $x \rightarrow 0$ .

### Exercice 62 : [énoncé]

Par l'inégalité de Taylor Lagrange avec  $M = \max_{[0,1]} |f''|$  :

$$\left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right| \leq \frac{M}{2} \left(\frac{k}{n^2}\right)^2$$

Par suite

$$\left| S_n - \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f'(0) \right| \leq \frac{M}{2n^4} \sum_{k=1}^n k^2 \leq \frac{M}{2n} \rightarrow 0$$

or

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f'(0) = \frac{n+1}{2n} f'(0)$$

donc

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(0)/2$$

### Exercice 63 : [énoncé]

C'est du cours.

### Exercice 64 : [énoncé]

Par l'égalité de Taylor-Lagrange (hors-programme) :

$$\forall x \in ]0, \pi/2[, \exists \xi \in ]0, x[, \sin x = x - \frac{1}{6} x^3 \cos(\xi)$$

Le réel  $\theta_x = \xi/x$  convient.

A défaut de connaître, l'égalité de Taylor-Lagrange, par l'égalité de Taylor avec reste intégral

$$\sin x = x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \cos t \, dt$$

Or pour  $t \in [0, x]$ , on a

$$\cos x \leq \cos t \leq 1$$

avec inégalité stricte pour  $t \in ]0, x[$  donc

$$\frac{x^3}{6} \cos x < \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \cos t \, dt < \frac{x^3}{6}$$

Ainsi

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \cos t \, dt = \lambda \frac{x^3}{6} \text{ avec } \cos x < \lambda < 1 = \cos 0$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut écrire

$$\lambda = \cos(x\theta_x) \text{ avec } \theta_x \in ]0, 1[$$

Quand  $x \rightarrow 0$ ,  $x\theta_x \rightarrow 0$  donc

$$\cos(x\theta_x) = 1 - \frac{1}{2}x^2\theta_x^2 + o(x^2)$$

puis

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^5\theta_x^2 + o(x^5)$$

or

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$$

donc  $\theta_x^2 \rightarrow 1/10$  puis

$$\theta_x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}}$$

**Exercice 65 :** [énoncé]

a) Par la formule de Taylor Young :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(0) + o(x^n)$$

$\varphi(x) = o(x^n)$  entraîne alors  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$ .

En appliquant la formule de Taylor Young à  $\varphi^{(p)}$ , on obtient la conclusion.

b)  $x\psi(x) = \varphi(x) = o(x^n)$  donc  $\psi(x) = o(x^{n-1})$ .

$x\psi'(x) + \psi(x) = \varphi'(x) = o(x^{n-1})$  donc  $\psi'(x) = o(x^{n-2})$

$x\psi''(x) + 2\psi'(x) = \varphi''(x) = o(x^{n-2})$  donc  $\psi''(x) = o(x^{n-3})$ ...

Par le théorème du prolongement  $\mathcal{C}^1$ , la fonction  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$ .

c) On introduit

$$\varphi(x) = f(x) - \left( f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) \right)$$

On a  $\varphi(x) = o(x^n)$  donc  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  puis

$$g(x) = \psi(x) + \left( f'(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!}f^{(n)}(0) \right)$$

est de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$ .

d)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{x} \frac{1}{g(x)/x}$$

avec  $x \mapsto f(x)/x$  et  $x \mapsto g(x)/x$  qui se prolongent en 0 en des fonctions de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$ .

**Exercice 66 :** [énoncé]

Soit  $x \in I$

Cas  $x = a$

N'importe quel  $c$  convient.

Cas  $x > a$

Par la formule de Taylor-Laplace

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) dt$$

Posons

$$m = \min_{[a,x]} f^{(n+1)} \text{ et } M = \max_{[a,x]} f^{(n+1)}$$

On a

$$m \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) dt \leq M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à  $f^{(n+1)}$ , il existe  $c \in I$  tel que

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) dt = f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cas  $x < a$

Semblable

**Exercice 67 :** [énoncé]

a)  $u_n = \exp(\ln n/n) \rightarrow 1$ .

b)  $u_n = \exp(n \ln(1 + \frac{x}{n})) = \exp(x + o(1)) \rightarrow e^x$ .

c)  $u_n = \exp\left((n+2) \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\right) = \exp(-2 + o(1)) \rightarrow e^{-2}$ .

d)  $u_n = -2n^2 \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$ .

e)  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{n}\right) = 1 + \frac{2\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  donc  $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{2\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(2\alpha + o(1)) \rightarrow e^{2\alpha}$ .

f)  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right)^{n \ln n} \rightarrow e$ .

g)  $\sqrt[n]{2} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln 2\right) = 1 + \frac{1}{n} \ln 2 + o(1)$ ,  $u_n = \left(1 + \frac{\ln 24}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \rightarrow \sqrt[3]{24}$ .

h)  $\arctan(n+1) - \arctan n = \frac{1}{1+c^2}$  avec  $n \leq c \leq n+1$  donc

$$u_n = \exp\left(n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{1+c^2}\right)\right) = \exp(1 + o(1)) \rightarrow e$$

**Exercice 68 :** [énoncé]

$$u_n = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + o(1)\right) = (-1)^{n+1} \sin(o(1)) \rightarrow 0$$

**Exercice 69 :** [énoncé]

Si  $a \in ]0, 1[$ , la suite est constante égale à 0.

Si  $a = 1$ , la suite est constante égale à 1.

Si  $a > 1$  alors  $a^n - 1 < [a^n] \leq a^n$  donne  $(a^n - 1)^{1/n} < [a^n]^{1/n} \leq a$  et donc, par encadrement, la suite converge vers  $a$ .

**Exercice 70 :** [énoncé]

Si  $a = 0$  ou  $b = 0$  alors la suite converge évidemment vers 0. On suppose désormais  $a, b > 0$ .

On a

$$\frac{1}{2} (a^{1/n} + b^{1/n}) = 1 + \frac{1}{2n} \ln(ab) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n \rightarrow \sqrt{ab}$$

**Exercice 71 :** [énoncé]

$\forall A \in \mathbb{R}^+$ , l'ensemble  $E = \{n \in \mathbb{N} / u_n < A\}$  est fini car il contient au plus  $E(A) + 1$  éléments.

Par suite il possède un plus grand élément  $N$  et alors  $\forall n \geq N + 1, u_n \notin E$  donc  $u_n \geq A$ . Ainsi  $u_n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 72 :** [énoncé]

a) Si  $a \geq 1$  alors  $u_n \geq 2^n \rightarrow +\infty$  donc  $u_n \rightarrow +\infty$ .

b)  $u_n > 0$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$  donc  $(u_n)$  est croissante. De plus

$$u_n \leq e^a e^{a^2} \dots e^{a^n} = \exp\left(a \frac{1 - a^n}{1 - a}\right) \leq \exp\left(\frac{a}{1 - a}\right)$$

donc  $(u_n)$  est majorée et par suite convergente.

**Exercice 73 :** [énoncé]

a) Si  $\alpha > 1$  alors  $0 \leq u_n \leq \frac{n}{n^\alpha + 1} \rightarrow 0$  donc  $u_n \rightarrow 0$ .

Si  $\alpha < 1$  alors  $u_n \geq \frac{n}{n^\alpha + n^\alpha} = \frac{1}{2} n^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$  donc  $u_n \rightarrow +\infty$ .

b)  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} > 0$  donc  $(u_n)$  est croissante. De plus  $u_n \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$  donc  $(u_n)$  est majorée et par conséquent convergente.

c)  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq -\ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n+k}\right)\right) = -\ln \frac{n}{2n} = \ln 2$  et

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \geq \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)\right) = \ln \frac{2n+1}{n+1} \rightarrow \ln 2 \text{ donc } u_n \rightarrow \ln 2.$$

**Exercice 74 :** [énoncé]

a) Il suffit de dresser le tableau de variation des fonctions  $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$  et  $x \mapsto x - \ln(1+x)$ .

b)

$$\ln u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{(n+1)}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

et

$$\ln u_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{n^4} = \frac{n+1}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

donc  $u_n \rightarrow \sqrt{e}$ .

**Exercice 75 :** [énoncé]

a)

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

donc  $I_n \rightarrow 0$ .

De plus, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$\frac{x^n}{x+1} \leq \frac{x^{n+1}}{x+1}$$

donc  $I_n \leq I_{n+1}$ .

b)

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k} + (-1)^n I_0$$

c)  $I_0 = \ln 2$  et  $(-1)^n I_n \rightarrow 0$  donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{-k}}{k} + \ln 2 \rightarrow 0$$

puis la conclusion.

d) Comme ci-dessus,  $J_n \rightarrow 0$ . De plus

$$J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$J_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k}}{2k+1} + (-1)^n J_0$$

puis

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} + \frac{\pi}{4} \rightarrow 0$$

d'où

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

**Exercice 76 :** [énoncé]

- a) Aisément  $(u_n)$  est croissante  $(v_n)$  décroissante et  $v_n - u_n \rightarrow 0$ .
- b) Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{M_{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec  $M_{n+1} = \sup_{x \in [0,1]} |(e^x)^{(n+1)}| = e$ . Pour  $x = 1$ , on obtient

$$|e - u_n| \leq \frac{e}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

donc  $u_n \rightarrow e$ .

- c) Par la stricte monotonie des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  on a  $u_n < e < v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$q \cdot q! u_q$  est un entier et  $q \cdot q! v_q$  est l'entier consécutif. Or  $q \cdot q! u_q < q \cdot q! e < q \cdot q! v_q$  donc  $q \cdot q! e$  ne peut être entier. Or  $q \cdot q! e = p \cdot q! \in \mathbb{N}$ . Absurde.

**Exercice 77 :** [énoncé]

a)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(p+1)+1} + \dots + \frac{1}{(n+1)(p+1)} - \frac{1}{n+1} \leq 0$$

et  $u_n \leq \frac{np}{n+1} \leq p$  donc  $(u_n)$  converge.

- b) Par le théorème des accroissements finis, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \{1, \dots, np\}$ , il existe  $c_{n,k} \in ]0, \frac{1}{n+k}[$  tel que

$$f\left(\frac{1}{n+k}\right) - f(0) = f'(c_{n,k}) \frac{1}{n+k}$$

On a alors

$$v_n - \ell f'(0) = \sum_{k=1}^{np} (f'(c_{n,k}) - f'(0)) \frac{1}{n+k}$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in [0, \alpha]$  on ait  $|f'(x) - f'(0)| \leq \varepsilon$ .

Pour  $n$  suffisamment grand pour que  $\frac{1}{n+1} \leq \alpha$ , on a  $c_{n,k} \in [0, \alpha]$  et donc  $|v_n - \ell f'(0)| \leq \varepsilon \ell$ .

On en déduit  $v_n \rightarrow \ell f'(0)$ .

- c) Pour  $f(x) = \ln(1+x)$ ,

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} \ln(n+k+1) - \ln(n+k) = \ln(n(p+1)+1) - \ln(n+1) \rightarrow \ln(p+1)$$

On conclut  $\ell = \ln p$ .

- d) Pour  $f(x) = \sqrt{x}$ ,

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{np}{\sqrt{(n+1)p}} \rightarrow +\infty$$

**Exercice 78 :** [énoncé]

Pour  $x \in [0, 1]$ ,

$$\left| \sin x - x + \frac{1}{6} x^3 \right| \leq \frac{1}{120}$$

On a donc

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6} \frac{k^3}{n^6} + M_n$$

avec

$$|M_n| \leq \frac{1}{120} \sum_{k=1}^n \frac{k^5}{n^{10}} \leq \frac{1}{120} \frac{1}{n^4}$$

donc  $M_n = o(1/n^3)$ .

Or

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

et

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^6} = \frac{1}{n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \sim \frac{1}{4n^2}$$

donc

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

**Exercice 79 : [énoncé]**

On a

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + \sum_{k=0}^{n-5} \frac{k!}{n!}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-5} \frac{k!}{n!} \leq (n-4) \frac{(n-5)!}{n!} = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

**Exercice 80 : [énoncé]**

a) La fonction  $f$  est définie et  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$  avec

$$I_k = \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$$

Pour  $x \in \mathcal{D}$ , la tangente en  $(x, f(x))$  passe par  $O$  si, et seulement si,  $xf'(x) = f(x)$ .  
Après transformation, ceci équivaut pour  $x > 0$  à l'équation

$$x \tan x + \ln(\cos(x)) + 1 = 0$$

Posons  $\varphi(x) = x \tan x + \ln(\cos(x)) + 1$ .

$\varphi$  est définie et  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{D}$ .  $\varphi'(x) = x(1 + \tan^2 x) > 0$  sur  $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}^{+\ast}$ .

Quand  $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^-$ ,  $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ . Quand  $x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^+$ ,  $\varphi(x) \rightarrow -\infty$ .

$\varphi|_{I_k}$  réalise donc une bijection de  $I_k$  vers  $\mathbb{R}$  (pour  $k \in \mathbb{N}^\ast$ ).

La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^\ast}$  avec  $x_n = (\varphi|_{I_n})^{-1}(0)$  est solution.

b) Evidemment  $x_n \sim 2n\pi$  et donc  $x_n = 2n\pi + y_n$ .

On a

$$\sin y_n = -\frac{\cos y_n (\ln \cos y_n) + \cos y_n}{2n\pi + y_n}$$

avec  $|y_n| < \pi/2$

L'étude de la fonction  $x \mapsto x \ln x + x$  assure que celle-ci est bornée et donc

$\sin y_n \rightarrow 0$  puis  $y_n \rightarrow 0$ .

Par suite  $\cos y_n \rightarrow 1$  donc  $\sin y_n \sim -\frac{1}{2n\pi}$  puis  $y_n \sim -\frac{1}{2n\pi}$ .

On conclut

$$x_n = 2n\pi - \frac{1}{2n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

**Exercice 81 : [énoncé]**

Montrons que la suite  $(u_n)$  converge vers 0 par l'épsilon-tique...

Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque la suite  $(\varepsilon_n)$  converge vers 0, il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  pour lequel

$$\forall n \geq N, 0 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon$$

et alors pour tout  $n \geq N$

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon}{K}$$

On en déduit

$$0 \leq u_{n+2} \leq \frac{u_n}{K^2} + \frac{\varepsilon}{K^2} + \frac{\varepsilon}{K}$$

et par récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{u_n}{K^p} + \sum_{i=1}^p \frac{\varepsilon}{K^i}$$

La suite  $(u_n)$  étant majorée par 1 et on peut encore écrire

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{1}{K^p} + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{K^i} = \frac{1}{K^p} + \frac{\varepsilon}{1 - 1/K}$$

Pour  $p$  assez grand, on a  $1/K^p \leq \varepsilon$  et alors

$$0 \leq u_{n+p} \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1 - 1/K} = \lambda\varepsilon$$

avec  $\lambda$  une constante strictement positive ce qui permet de conclure.

**Exercice 82 : [énoncé]**

a) C'est la convergence de  $u_n$  vers  $\ell$ .

b) Par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &= \frac{1}{n} |(u_1 - \ell) + \dots + (u_n - \ell)| \\ &\leq \frac{|u_1 - \ell| + \dots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \dots + |u_n - \ell|}{n} \end{aligned}$$

et on conclut en exploitant  $|u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pour  $k > n_0$ .

c) Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{|u_1 - \ell| + \dots + |u_{n_0} - \ell|}{n} = \frac{C^{te}}{n} \rightarrow 0$$

donc pour  $n$  assez grand

$$\frac{|u_1 - \ell| + \dots + |u_{n_0} - \ell|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi il existe un rang  $n_1$  au-delà duquel

$$|v_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

d) On applique le résultat précédent à la suite de terme général  $u_{n+1} - u_n$  et on peut affirmer  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k \rightarrow \alpha$  donc  $\frac{1}{n} (u_n - u_0) \rightarrow \alpha$  puis  $\frac{1}{n} u_n \rightarrow \alpha$  et enfin  $u_n \sim \alpha n$ .

**Exercice 83 : [énoncé]**

a) Supposons  $\ell = 0$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n > n_0, |u_n| \leq \varepsilon/2$$

On a alors

$$|v_n| \leq \left| \frac{u_1 + \dots + n_0 u_{n_0}}{n^2} \right| + \left| \frac{(n_0 + 1)u_{n_0+1} + \dots + n u_n}{n^2} \right| \leq \frac{C^{te}}{n^2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

pour  $n$  assez grand.

Ainsi  $v_n \rightarrow 0$ .

Cas général :  $u_n = \ell + w_n$  avec  $w_n \rightarrow 0$  :

$$v_n = \frac{n(n+1)}{2n^2} \ell + \frac{w_1 + \dots + n w_n}{n^2} \rightarrow \frac{\ell}{2}$$

b) On peut écrire

$$\frac{u_n}{n^2} = \frac{(u_n - u_{n-1}) + \dots + (u_1 - u_0)}{n^2} + \frac{u_0}{n^2}$$

donc

$$\frac{u_n}{n^2} = \frac{n \frac{(u_n - u_{n-1})}{n} + \dots + \frac{(u_1 - u_0)}{1}}{n^2} + \frac{u_0}{n^2} \rightarrow \frac{\ell}{2}$$

**Exercice 84 : [énoncé]**

On a  $\ln u_{n+1} - \ln u_n \rightarrow \ln \ell$  donc par Césaro

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln u_k - \ln u_{k-1} \rightarrow \ln \ell$$

d'où

$$\frac{1}{n} \ln u_n \rightarrow \ln \ell$$

puis

$$\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ln \ell$$

**Exercice 85 : [énoncé]**

a) La suite  $(u_n)$  est bien définie et à valeur dans  $\mathbb{R}^{++}$  car

$$\forall x > 0, \ln(1+x) > 0$$

La suite  $(u_n)$  est décroissante car

$$\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$$

La suite  $(u_n)$  est aussi minorée par 0 donc convergente.

En passant la relation de récurrence à la limite, on obtient que  $(u_n)$  tend vers 0.

b)

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{1}{2}$$

car  $u_{n+1} \sim u_n$ .

c) Par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

puis

$$\frac{1}{n} \frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Finalement

$$u_n \sim \frac{2}{n}$$

**Exercice 86 :** [énoncé]

a) La suite  $(u_n)$  est décroissante car

$$\forall x \in [0, \pi/2], \sin x \leq x$$

La suite  $(u_n)$  est aussi minorée par 0 donc convergente.

En passant la relation de récurrence à la limite, on obtient que  $(u_n)$  tend vers 0.

b)

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - \sin(u_n)^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} \sim \frac{1}{3}$$

car  $u_{n+1} \sim u_n$ .

c) Par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) \rightarrow \frac{1}{3}$$

puis

$$\frac{1}{n} \frac{1}{u_n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Finalement

$$u_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$$

**Exercice 87 :** [énoncé]

a) La fonction  $f : x \mapsto x + \ln x$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$  d'où l'existence de  $(x_n)$ .

Comme  $n \rightarrow +\infty$ ,  $x_n = f^{-1}(n) \rightarrow +\infty$ . Par suite  $\ln x_n = o(x_n)$  et

$$n = x_n + \ln x_n \sim x_n.$$

Donc  $x_n = n + o(n)$ .

Soit  $y_n = x_n - n$ . On a :

$$y_n = -\ln x_n = -\ln(n + o(n)) = -\ln n + \ln(1 + o(1)) = -\ln n + o(1)$$

Donc

$$x_n = n - \ln n + o(1)$$

Soit  $z_n = y_n + \ln n$ . On a :

$$z_n = -\ln(n - \ln(n) + o(1)) + \ln n = -\ln \left( 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\text{Donc } x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

**Exercice 88 :** [énoncé]

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .

b)  $x_n = f^{-1}(n)$  et  $f^{-1} \xrightarrow{+\infty} +\infty$  donc  $x_n \rightarrow +\infty$ .

Puisque  $\sqrt[3]{x_n} = o(x_n)$ , on a  $x_n \sim n$ .

c) On peut écrire  $x_n = n + y_n$  avec  $y_n = o(n)$ .

Puisque

$$y_n + \sqrt[3]{n + y_n} = 0$$

on a

$$y_n \sim -\sqrt[3]{n}$$

On peut écrire  $y_n = -\sqrt[3]{n} + z_n$  avec  $z_n = o(\sqrt[3]{n})$ .

Puisque

$$-\sqrt[3]{n} + z_n + \sqrt[3]{n} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{-\sqrt[3]{n}}{n} + o\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{n}\right) \right) = 0$$

on a  $z_n \sim \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ .

Finalement

$$x_n = n - \sqrt[3]{n} + \frac{1}{3\sqrt[3]{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

**Exercice 89 :** [énoncé]

a) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x + e^x$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

b)  $f(x_n) = n \leq n + 1 = f(x_{n+1})$  donc  $x_n \leq x_{n+1}$  car  $f^{-1}$  est croissante.

Si  $(x_n)$  est majorée par  $M$  alors  $f(x_n) = n \leq f(M)$  ce qui est absurde.

La suite  $(x_n)$  étant croissante et non majorée, elle diverge vers  $+\infty$ .

$x_n = o(e^{x_n})$  donc  $e^{x_n} \sim n \rightarrow +\infty \neq 1$  puis  $x_n \sim \ln n$ .

c) Posons  $y_n = x_n - \ln n = o(\ln n)$ .

On a  $y_n + \ln n + n e^{y_n} = n$  donc

$$e^{y_n} = 1 - \frac{y_n}{n} + \frac{\ln n}{n} \rightarrow 1$$

d'où  $y_n \rightarrow 0$  et

$$e^{y_n} = 1 + y_n + o(y_n)$$

On a alors  $y_n + \ln n + n(1 + y_n + o(y_n)) = n$  d'où  $n y_n + o(n y_n) = -\ln n$  et

$$y_n \sim -\frac{\ln n}{n}$$

Par suite

$$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

On écrit  $y_n = -\frac{\ln n}{n} + z_n$  et

$$e^{y_n} = 1 - \frac{\ln n}{n} + z_n + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$$

donc

$$-\frac{\ln n}{n} + z_n + nz_n + \frac{1}{2}\frac{(\ln n)^2}{n} + o\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right) = 0$$

puis

$$z_n \sim -\frac{(\ln n)^2}{2n^2}$$

Finalement

$$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} - \frac{(\ln n)^2}{2n^2} + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)$$

**Exercice 90 :** [énoncé]

Sur  $I_n$ , la fonction  $f : x \mapsto \tan x - \sqrt{x}$  est continue, croît strictement de  $-\infty$  vers  $+\infty$ .

Cela assure l'existence et l'unité de  $x_n$ .

On a

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$$

donc  $x_n \sim n\pi$ .

Posons  $y_n = x_n - n\pi$ . On a  $\tan y_n = \sqrt{x_n}$  et  $y_n \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  donc

$$y_n = \arctan \sqrt{x_n} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Posons

$$z_n = \frac{\pi}{2} - y_n = \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{x_n} = \arctan \frac{1}{\sqrt{x_n}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}}$$

On a

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\pi n^3}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

et

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

donc

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\pi n^3}} - \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi^3 n^3}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Finalement

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}} + \frac{3+4\pi}{\pi^{3/2}} \frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

**Exercice 91 :** [énoncé]

a) La fonction  $x \mapsto \tan x \operatorname{th} x$  réalise une bijection continue strictement croissante de  $I_0 = [0, \pi/2[$  vers  $\mathbb{R}^+$  et de  $I_n = ]-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi[$  vers  $\mathbb{R}$  pour  $n \geq 1$   $x \mapsto \tan x \operatorname{th} x$ . Dans chaque  $I_n$  figure une solution unique  $x_n$  à l'équation (E).

b) On résout l'équation dans les intervalles  $[n\pi, n\pi + \pi/2[$  pour des valeurs successives de  $n$ .

```
seq(fsolve(tan(x)*tanh(x)=1,x=n*Pi..Pi/2+n*Pi),n=0..3);
```

c)

Puisque  $x_n \in I_n$ , on a déjà  $x_n \sim n\pi$ .

Posons  $y_n = x_n - n\pi$ . On a  $y_n \in ]-\pi/2, \pi/2[$  et  $\tan y_n \operatorname{th} x_n = 1$  donc  $y_n = \arctan \frac{1}{\operatorname{th} x_n}$ .

Puisque  $x_n \rightarrow +\infty$ ,  $\operatorname{th} x_n \rightarrow 1$  puis  $y_n \rightarrow \pi/4$ . Ainsi  $x_n = n\pi + \pi/4 + o(1)$ .

On obtient le développement limité de  $x \mapsto \arctan x$  en 1 par

```
series(arctan(x),x=1);
```

On en déduit  $y_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\operatorname{th} x_n - 1) + o(\operatorname{th} x_n - 1)$

Or  $1 - \operatorname{th} x_n = \frac{2}{e^{2x_n} + 1} \sim \frac{2}{e^{2n\pi + \pi/2}}$  donc  $y_n - \frac{\pi}{4} \sim -\frac{2}{e^{2n\pi + \pi/2}}$ .

Finalement  $x_n = n\pi + \pi/4 - \frac{2}{e^{2n\pi + \pi/2}} + o\left(\frac{1}{e^{2n\pi}}\right)$ .

On peut observer la rapide convergence vers 0 de  $x_n - n\pi + \pi/4$  en écrivant

```
seq(fsolve(tan(x)*tanh(x)=1,x=n*Pi..Pi/2+n*Pi)-evalf(n*Pi+Pi/4),n=0..3);
```

**Exercice 92 :** [énoncé]

Posons  $f_n(x) = x^n + x^2 - 1$ . L'étude de la fonction  $f_n$  assure l'existence et l'unicité d'une solution  $x_n \in \mathbb{R}^+$  à l'équation étudiée. De plus, on observe que  $x_n \in [0, 1]$ . Puisque  $0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1})$ , on peut affirmer  $x_{n+1} \geq x_n$ . La suite  $(x_n)$  est croissante et majorée donc converge vers un réel  $\ell$ . Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in [0, 1]$ , à la limite  $\ell \in [0, 1]$ . Si  $\ell < 1$  alors  $0 \leq x_n^n \leq \ell^n \rightarrow 0$  et la relation  $x_n^n + x_n^2 - 1 = 0$  donne à la limite  $\ell^2 = 1$  ce qui est absurde. On conclut que  $\ell = 1$ . Posons  $u_n = 1 - x_n$ ,  $(1 - u_n)^n = u_n(2 - u_n)$  donne  $n \ln(1 - u_n) = \ln u_n + \ln(2 - u_n)$  d'où  $-nu_n \sim \ln u_n$  puis  $\ln n + \ln u_n \sim \ln(-\ln u_n)$  or  $\ln(-\ln u_n) = o(\ln u_n)$  donc  $\ln u_n \sim -\ln n$  puis  $u_n \sim \frac{\ln n}{n}$  et enfin  $x_n - 1 \sim -\frac{\ln n}{n}$ .

**Exercice 93 :** [énoncé]

a) Il suffit d'étudier la fonction  $f_n : x \mapsto x^n - (x + 1)$ .  
 b)  $f_n(1) \leq 0$  donc  $x_n \geq 1$ .  $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (x_n + 1) = (x_n - 1)(x_n + 1) \geq 0$  donc  $x_{n+1} \leq x_n$ . La suite  $(x_n)$  est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers  $\ell \geq 1$ . Si  $\ell > 1$  alors  $x_n^n \geq \ell^n \rightarrow +\infty$  or  $x_n^n = x_n + 1 \rightarrow \ell + 1$ . Ce qui est impossible et il reste  $\ell = 1$ .  
 c)  $x^n = x + 1 \Leftrightarrow n \ln x = \ln(x + 1) \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{n}$  avec  $g(x) = \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$  définie sur  $[1, +\infty[$ . La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $g'(x) > 0$  donc  $g$  réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  vers  $[0, 1[$ , de plus (puisque  $g'(x) \neq 0$ )  $g^{-1}$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et donc  $g^{-1}$  admet un  $DL_n(0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et donc  $x_n = g^{-1}(1/n)$  admet un développement limité à tout ordre. Formons ses trois premiers termes  $g^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$ .  $a = g^{-1}(0) = 1$ .  $g(g^{-1}(x)) = x$  donc  $\ln(1 + bx + cx^2 + o(x^2)) = x \ln(2 + bx + o(x^2))$  puis  $bx + \left(c - \frac{b^2}{2}\right)x^2 + o(x^2) = \ln(2)x + \frac{b}{2}x^2 + o(x^2)$  donc  $b = \ln 2$  et  $c = \frac{(1 + \ln(2)) \ln(2)}{2}$ .  
 Finalement  $x_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + \frac{(1 + \ln(2)) \ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

**Exercice 94 :** [énoncé]

a)  $P_n$  réalise une bijection strictement décroissante de  $[0, 1]$  vers  $[-n, 1]$ .  
 b)  $P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n + 1)x_n + 1 \leq P_n(x_n) = 0$  donc  $x_{n+1} \leq x_n$ . La suite  $(x_n)$  est décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel  $\ell \in [0, 1]$ . Si  $\ell > 0$  alors  $0 = P_n(x_n) \rightarrow -\infty$ , c'est absurde. On conclut  $\ell = 0$ .  
 c)  $\frac{x_n^n}{nx_n} = \frac{1}{n}x_n^{n-1} \rightarrow 0$  donc  $x_n^n = o(nx_n)$  puis sachant  $x_n^n - nx_n + 1 = 0$ , on obtient  $x_n \sim 1/n$ .  
 d) Ecrivons  $x_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$  avec  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ .  
 Puisque  $x_n^n = nx_n - 1$ , on a  $\frac{(1 + \varepsilon_n)^n}{n^n} = \varepsilon_n$ .  
 $(1 + \varepsilon_n)^n = \exp(n \ln(1 + \varepsilon_n)) = \exp(n\varepsilon_n + o(n\varepsilon_n))$ .  
 Or  $n\varepsilon_n = n \frac{(1 + \varepsilon_n)^n}{n^n}$ .

Puisque  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , pour  $n$  assez grand,  $|1 + \varepsilon_n| \leq 2$  et la relation précédente donne  $|n\varepsilon_n| \leq \frac{2^n}{n^{n-1}} \rightarrow 0$ .

On en déduit  $n\varepsilon_n \rightarrow 0$  puis  $(1 + \varepsilon_n)^n \rightarrow 1$  et enfin  $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^n}$ .

Finalement

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)$$

**Exercice 95 :** [énoncé]

a) Soit  $f_n : x \mapsto x^n + \ln x$ . On a

$x$	0	1	$+\infty$
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

d'où l'existence et l'unicité de  $x_n$  avec en plus la propriété  $x_n \in ]0, 1[$ .

b) On a

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + \ln(x_n) = (1 - x_n) \ln(x_n) < 0$$

donc  $x_{n+1} \geq x_n$ . La suite  $(x_n)$  est croissante et majorée par 1 donc converge vers  $\ell \in ]0, 1[$ .

Si  $\ell < 1$  alors

$$0 = x_n^n + \ln x_n \rightarrow -\ln \ell$$

car  $0 \leq x_n^n \leq \ell^n \rightarrow 0$ .

Ceci est impossible. Il reste  $\ell = 1$ .

c)  $(1 - u_n)^n = -\ln(1 - u_n) \sim u_n \rightarrow 0 \neq 1$

donc  $n \ln(1 - u_n) \sim \ln u_n$  puis  $nu_n \sim -\ln u_n \rightarrow +\infty \neq 1$ .

$\ln n + \ln u_n \sim \ln(-\ln u_n)$  donc  $\ln n = -\ln u_n + \ln(-\ln u_n) + o(\ln(-\ln u_n))$  or  $\ln(-\ln u_n) = o(\ln u_n)$  donc  $\ln n \sim -\ln u_n$  puis

$$u_n \sim -\frac{\ln u_n}{n} \sim \frac{\ln n}{n}$$

**Exercice 96 :** [énoncé]

On pose  $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ . On observe que  $f_n(0) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$  et

$f'_{n+1} = f_n$ . La propriété est vrai pour  $n = 1$  et si elle est vrai au rang  $n$ , le tableau de signe de  $f_n$  permet d'assurer que  $f_{n+1}$  est décroissante (et donc strictement négative) sur  $[0, x_n]$  puis strictement croissante sur  $[x_n, +\infty[$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut assurer que  $f$  s'annule en un  $x_{n+1} > x_n$  et celui-ci est unique.

La suite  $(x_n)$  est croissante. Si elle est majorée alors elle converge vers un réel  $\ell$  et

$\frac{x_n^n}{n!} \rightarrow 0$ . Or la suite de terme général est  $\sum_{k=0}^n \frac{x_n^k}{k!}$  est croissante et strictement

positive. Elle ne peut donc converger vers 0. Par conséquent la suite  $(x_n)$  n'est pas majorée et, étant croissante, elle diverge vers  $+\infty$ .

**Exercice 97 : [énoncé]**

L'étude des variations de la fonction  $x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n$  assure l'existence et l'unicité de  $u_n > 0$  vérifiant la relation  $nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1$ . De plus on peut affirmer  $u_n \geq 1$ .

Puisque  $u_n^n(n(u_n - 1) - 1) = 1$  et  $u_n^n \geq 1$  on a  $n(u_n - 1) - 1 \leq 1$  puis  $0 \leq u_n - 1 \leq 2/n$  permet de conclure  $u_n \rightarrow 0$ .

**Exercice 98 : [énoncé]**

a) Par application du théorème de Rolle à la fonction  $t \mapsto P_n(t)$  sur chacun des intervalles  $[k, k+1]$  (avec  $0 \leq k \leq n-1$ ), on obtient que le polynôme  $P'_n$  admet au moins une racine dans chacun des intervalles  $]k, k+1[$ . Puisque le polynôme  $P'_n$  est de degré  $n$ , il possède au plus  $n$  racines et donc il ne possède pas d'autres racines que celles précédentes. En particulier, le polynôme  $P'_n$  possède exactement une racine dans l'intervalle  $]0, 1[$ .

b) On a

$$P_{n+1}(X) = P_n(X)(X - (n+1))$$

En dérivant et en évaluant en  $x_n$  on obtient

$$P'_{n+1}(x_n) = P_n(x_n)$$

D'une part

$$(-1)^n P_n(x_n) = x_n \prod_{k=1}^n (k - x_n)$$

est une quantité positive.

D'autre part, l'expression

$$(-1)^n P_{n+1}(x) = x(x-1) \prod_{k=2}^{n+1} (k-x)$$

est négative sur  $[0, 1]$ . On en déduit ses variations sur  $[0, 1]$  puis le signe de sa dérivée sur ce même intervalle. Puisque qu'elle est négative sur  $[0, x_{n+1}]$  et positive sur  $[x_{n+1}, 1]$ , on obtient

$$x_{n+1} \leq x_n$$

La suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est donc décroissante.

c) Puisque les racines de  $P_n$  sont exactement les  $0, 1, \dots, n$  et puisque celles-ci sont simples, on obtient

$$F_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{X-k}$$

d) Sachant  $F_n(x_n) = 0$ , on obtient

$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-x_n}$$

Puisque  $0 \leq x_n \leq x_0 \leq 1$ , on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x_n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-x_0} \leq \frac{1}{1-x_0} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1}$$

Ainsi

$$\ln n + O(1) \leq \frac{1}{x_n} \leq \ln(n-1) + O(1)$$

et on peut conclure

$$x_n \sim \frac{1}{\ln n}$$

**Exercice 99 : [énoncé]**

Si  $(u_n)$  converge sa limite  $\ell$  vérifie  $\ell = 1 + \ell^2/4$  d'où  $\ell = 2$ .

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(u_n - 2)^2$  donc  $(u_n)$  est croissante.

Si  $u_0 > 2$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

Si  $u_0 \in [0, 2]$  alors on vérifie aisément que  $(u_n)$  est majorée par 2 et on conclut  $u_n \rightarrow 2$ .

**Exercice 100 : [énoncé]**

$u_{n+1} \geq u_n$  donc  $(u_n)$  est croissante. Par récurrence montrons  $u_n \leq a+1$ . La relation est vraie pour  $n=1$  et l'hérédité s'obtient par

$$u_{n+1} = \sqrt{a+u_n} \leq \sqrt{2a+1} \leq a+1.$$

**Exercice 101 : [énoncé]**

a) Il suffit de dresser le tableau de variation de  $f$ . On note  $\alpha < \beta < \gamma$  ces trois racines.

b)  $f$  est croissante et

$x$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$f(x) - x$	-	0	+
	-	0	-
	+	0	+

c)  $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1})$  donc  $u_0 \leq f(u_0) \Rightarrow (u_n)$  croissante.  
 De même  $u_n \geq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \geq f(u_{n+1})$  donc  $u_0 \geq f(u_0) \Rightarrow (u_n)$  décroissante.  
 Les seules limites finies possibles pour  $(u_n)$  sont  $\alpha, \beta, \gamma$ .  
 Enfin si  $u_0 \leq \alpha$  (resp.  $\beta, \gamma$ ) alors pour tout  $n$ ,  $u_n \leq \alpha$  (resp.  $\beta, \gamma$ ) et de même pour  $\geq$ .

Au final on peut conclure :

$u_0 \in ]-\infty, \alpha[$  donne  $(u_n)$  décroissant vers  $-\infty$ .

$u_0 = \alpha$  donne  $(u_n)$  constante égale à  $\alpha$ .

$u_0 \in ]\alpha, \gamma[$  donne  $(u_n)$  convergeant vers  $\beta$ .

$u_0 = \gamma$  donne  $(u_n)$  constante égale à  $\gamma$ .

$u_0 \in ]\gamma, +\infty[$  donne  $(u_n)$  croissant vers  $+\infty$ .

### Exercice 102 : [énoncé]

$f'(x)$  est du signe de  $3(x^2 - a)^2$  donc  $f$  est croissante et par suite  $(u_n)$  est monotone.

Les racines de l'équation  $f(x) = x$  sont  $0, \sqrt{a}$  et  $-\sqrt{a}$ . Ce sont les seules limites possibles pour  $(u_n)$ .

$f(x) - x$  est du signe de  $ax - x^3 = -x(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$ .

Si  $u_0 \in ]0, \sqrt{a}[$  la suite est croissante est majorée par  $\sqrt{a}$  donc converge vers  $\sqrt{a}$ .

Si  $u_0 \in [\sqrt{a}, +\infty[$  la suite est décroissante et minorée par  $\sqrt{a}$  donc converge vers  $\sqrt{a}$ .

### Exercice 103 : [énoncé]

$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$  donc  $(u_n)$  est croissante. Aiséement, on montre que  $u_n \in ]0, 1[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et donc on peut conclure que  $(u_n)$  converge. Sa limite  $\ell$  vérifie  $\ell = \ell - \ell^2$  d'où  $\ell = 0$ .

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 = \sum_{k=0}^n u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1} \rightarrow u_0$$

et

$$\prod_{k=0}^n (1 - u_k) = \prod_{k=0}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0} \rightarrow 0$$

### Exercice 104 : [énoncé]

a) Soit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = f(x) - x$ .

$g$  est continue,  $g(a) \geq 0$  et  $g(b) \leq 0$  donc  $g$  s'annule en un point  $\alpha$  qui est alors point fixe de  $f$ .

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux points fixes distincts alors par application du théorème des accroissements finis, il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f'(c) = 1$  ce qui est incompatible avec les hypothèses.

b) La fonction  $x \mapsto |f'(x)|$  est continue sur le segment  $[a, b]$ , elle y admet donc un maximum en un point  $c \in [a, b]$  et en posant  $k = |f'(c)|$  on a

$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq k \text{ avec } k \in [0, 1[$$

Par l'inégalité des accroissements finis,  $f$  est  $k$  lipschitzienne et alors par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq k^n |u - \alpha| \rightarrow 0$$

d'où le résultat.

### Exercice 105 : [énoncé]

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(f(u_n) - f(u_{n-1})) + (u_n - u_{n-1})}{2}$$

Puisque  $f$  est 1 lipschitzienne on a

$$|f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq |u_n - u_{n-1}|$$

donc  $u_{n+1} - u_n$  est du signe de  $u_n - u_{n-1}$ ,  
 (en fait la fonction itératrice est croissante).

Par suite  $(u_n)$  est monotone et étant bornée elle converge vers un  $\ell \in [a, b]$ .

La relation

$$u_{n+1} = \frac{u_n + f(u_n)}{2}$$

donne à la limite

$$\ell = \frac{\ell + f(\ell)}{2}$$

donc  $f(\ell) = \ell$ .

### Exercice 106 : [énoncé]

a) On observe que  $x \mapsto 4x - x^2$  est une application de  $[0, 4]$  dans lui-même. Par suite  $u_n \in [0, 4]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $(u_n)$  converge alors, en posant  $\ell$  sa limite, on a  $\ell = 4\ell - \ell^2$  d'où  $\ell = 0$  ou  $\ell = 3$ .

b) Supposons que  $u_n \rightarrow 0$ . S'il existe un rang  $n$  tel que  $u_n = 0$  alors la suite  $(u_n)$  est stationnaire égale à 0. Sinon on a  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et donc  $u_{n+1} - u_n \sim 3u_n > 0$ . Ainsi, à partir d'un certain rang, la suite est strictement

croissante. De même si  $u_n \rightarrow 3$  sans être stationnaire égale à 3, on observe que la suite  $|u_n - 3|$  est strictement croissante à partir d'un certain rang.

c) On obtient aisément  $u_n = 4 \sin^2 2^n \alpha$ . La suite est stationnaire si, et seulement si, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n = 0$  ou 3 i.e.  $\sin^2(2^n \alpha) = 0, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2$  soit encore  $2^n \alpha = k\pi/3$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Ainsi les  $u_0$  pour lesquels la suite est stationnaire sont les  $\sin(k\pi/3 \cdot 2^n)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 107 : [énoncé]**

a)  $z_1 = \frac{\rho e^{i\theta} + \rho}{2} = \rho \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ . Par ce principe :

$$z_n = \rho \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} e^{i\frac{\theta}{2^n}}$$

b)  $e^{i\frac{\theta}{2^n}} \rightarrow 1$  et

$$\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} = \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} \rightarrow \frac{\sin \theta}{\theta} \text{ (ou 1 si } \theta = 0)$$

Finalement  $z_n \rightarrow \frac{\sin \theta}{\theta}$ .

**Exercice 108 : [énoncé]**

On a  $u_n \leq v_n$  et  $u_{n+1} \leq v_n, v_{n+1} = \max(u_{n+2}, u_{n+1})$  avec  $u_{n+2} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) \leq v_n$  et  $u_{n+1} \leq v_n$  donc  $(v_n)$  est décroissante.  $(v_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc  $(v_n)$  converge.

On a  $u_{n+1} \leq v_n$ .

$$v_{n+1} \leq \max\left(\frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n), u_{n+1}\right) = \max\left(\frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n), \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_{n+1})\right) = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

donc  $2v_{n+1} - v_n \leq u_{n+1} \leq v_n$  donc  $(u_n)$  converge vers la même limite que  $(v_n)$ .

**Exercice 109 : [énoncé]**

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont bien définies et à termes positifs.

Sachant

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

on a  $\forall n \geq 1, u_n \leq v_n$  puis  $u_{n+1} \geq u_n$  et  $v_{n+1} \leq v_n$ .

Les suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  sont respectivement croissante et décroissante et on a  $\forall n \geq 1, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$ .

Par convergence monotone,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers des limites  $\ell$  et  $\ell'$ .

En passant la relation  $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$  à la limite on obtient  $\ell = \ell'$ .

**Exercice 110 : [énoncé]**

a) Exploiter  $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$  et raisonner par récurrence.

b)

$$\sin \frac{\alpha}{2^n} v_n = \frac{1}{2^n} \sin \alpha$$

via  $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ . Par suite

$$v_n \sim \frac{\sin \alpha}{2^n \sin(\alpha/2^n)} \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

et aussi

$$u_n \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

**Exercice 111 : [énoncé]**

Notons que la suite  $(y_n)$  est croissante, elle est donc convergente si, et seulement si, elle est majorée.

a) Ici  $y_{n+1} = \sqrt{a + y_n}$ . Soit  $\ell$  la racine positive de l'équation  $\ell^2 - \ell - a = 0$  i.e.

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

On remarque que  $y_1 = \sqrt{a} \leq \ell$  et on montre par récurrence  $y_n \leq \ell$ . La suite  $(y_n)$  est croissante et majorée donc convergente.

b) On observe que la nouvelle suite  $(y_n)$  est désormais égale à  $b$  fois la précédente, elle est donc convergente.

c) Si  $(y_n)$  converge vers  $\ell$  alors  $x_n^{2^{-n}} \leq y_n \leq \ell$  donc  $(x_n^{2^{-n}})$  est bornée.

Si  $(x_n^{2^{-n}})$  est bornée par un certain  $M$  alors  $x_n \leq M^{2^n}$ , la suite  $(y_n)$  définie par  $(x_n)$  est alors inférieure à celle obtenue par  $(M^{2^n})$ , cette dernière étant convergente, la suite  $(y_n)$  converge.

**Exercice 112 : [énoncé]**

a) Définissons une procédure récursive calculant les termes de la suite

```
x:=proc(n,x1)
local y;
if n=1 then RETURN(x1) else y:=x(n-1,x1); RETURN(y+(n-1)/y); fi
end;
```

On peut alors évaluer les termes de la suite pour différentes valeurs de  $x_1$

`x1:=5;seq(evalf(x(k,x1)),k=1..10);`

On remarque que  $(x_n)$  tend vers  $+\infty$  et on peut même présumer  $x_n \sim n$ .

On remarque aussi que pour  $x_1 = 1$  on a  $x_n = n$  ce qu'on justifie aisément par récurrence.

b) La suite proposée est bien définie et à termes dans  $]0, +\infty[$ .

En exploitant  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ , on peut affirmer  $x_{n+1} \geq 2\sqrt{n}$  donc  $x_n \geq 2\sqrt{n-1}$  pour  $n \geq 2$ . On en déduit  $x_n \rightarrow +\infty$ .

Pour  $n \geq 2$ , posons  $u_n = x_n - y_n$ , quitte à échanger éventuellement les suites  $(x_n)_{n \geq 1}$  et  $(y_n)_{n \geq 1}$  pour que  $u_2 = x_2 - y_2 \geq 0$ .

On a

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{n}{x_n y_n}\right) u_n$$

Or pour  $n \geq 2$ ,

$$1 - \frac{n}{x_n y_n} \geq 1 - \frac{n}{4(n-1)} > 0$$

On en déduit que pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n \geq 0$  et  $(u_n)_{n \geq 2}$  décroissante. La suite  $(u_n)$  est donc convergente et par conséquent  $x_n \sim y_n$ .

Puisque pour  $y_1 = 1$ , on obtient  $y_n = n$ , on peut affirmer  $x_n \sim n$ .

### Exercice 113 : [énoncé](#)

Posons

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

On vérifie aisément que la suite  $(u_n)$  est bien définie et que pour tout  $n \geq 2$

$$\frac{1}{M+2} \leq u_n \leq 1$$

Supposons la convergence de la suite  $(u_n)$ . Sa limite est strictement positive. En résolvant l'équation définissant  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ , on obtient

$$a_n = \frac{1}{u_{n+1}} - u_n - 1$$

On en déduit que la suite  $(a_n)$  converge.

Inversement, supposons que la suite  $(a_n)$  converge vers une limite  $\ell$ ,  $\ell \geq 0$ .

Considérons la suite  $(v_n)$  définie par

$$v_0 = 1 \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{v_n + \ell + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On vérifie que la suite  $(v_n)$  est bien définie et à termes strictement positifs.

L'équation

$$x = \frac{1}{x + \ell + 1}$$

possède une racine  $L > 0$  et on a

$$|v_{n+1} - L| \leq \frac{|v_n - L|}{1 + L}$$

ce qui permet d'établir que la suite  $(v_n)$  converge vers  $L$ . Considérons ensuite la suite  $(\alpha_n)$  définie par

$$\alpha_n = u_n - v_n$$

On a

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + (\ell - a_n)}{(u_n + a_n + 1)(v_n + \ell + 1)}$$

et donc

$$|\alpha_{n+1}| \leq k(|\alpha_n| + |a_n - \ell|)$$

avec

$$k = \frac{1}{m+1} \in [0, 1[$$

où  $m > 0$  est un minorant de la suite convergente  $(v_n)$ .

Par récurrence, on obtient

$$|\alpha_n| \leq k^n |\alpha_0| + \sum_{p=0}^{n-1} k^{n-p} |a_p - \ell|$$

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Puisque la suite  $(a_n)$  converge vers  $\ell$ , il existe  $p_0$  tel que

$$\forall p \geq p_0, |a_p - \ell| \leq \varepsilon$$

et alors

$$\sum_{p=p_0}^{n-1} k^{n-p} |a_p - \ell| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} k^p = \frac{k\varepsilon}{1-k}$$

Pour  $n$  assez grand

$$\sum_{p=0}^{p_0-1} k^{n-p} |a_p - \ell| = C^{te} k^n \leq \varepsilon \text{ et } k^n |\alpha_0| \leq \varepsilon$$

et on en déduit

$$|\alpha_n| \leq 2\varepsilon + \frac{k\varepsilon}{1-k}$$

Ainsi  $\alpha_n \rightarrow 0$  et par conséquent

$$u_n \rightarrow L$$

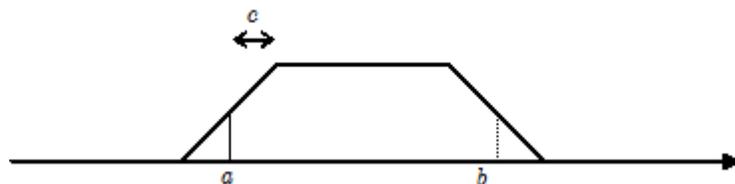


FIGURE 1 – La fonction  $g$

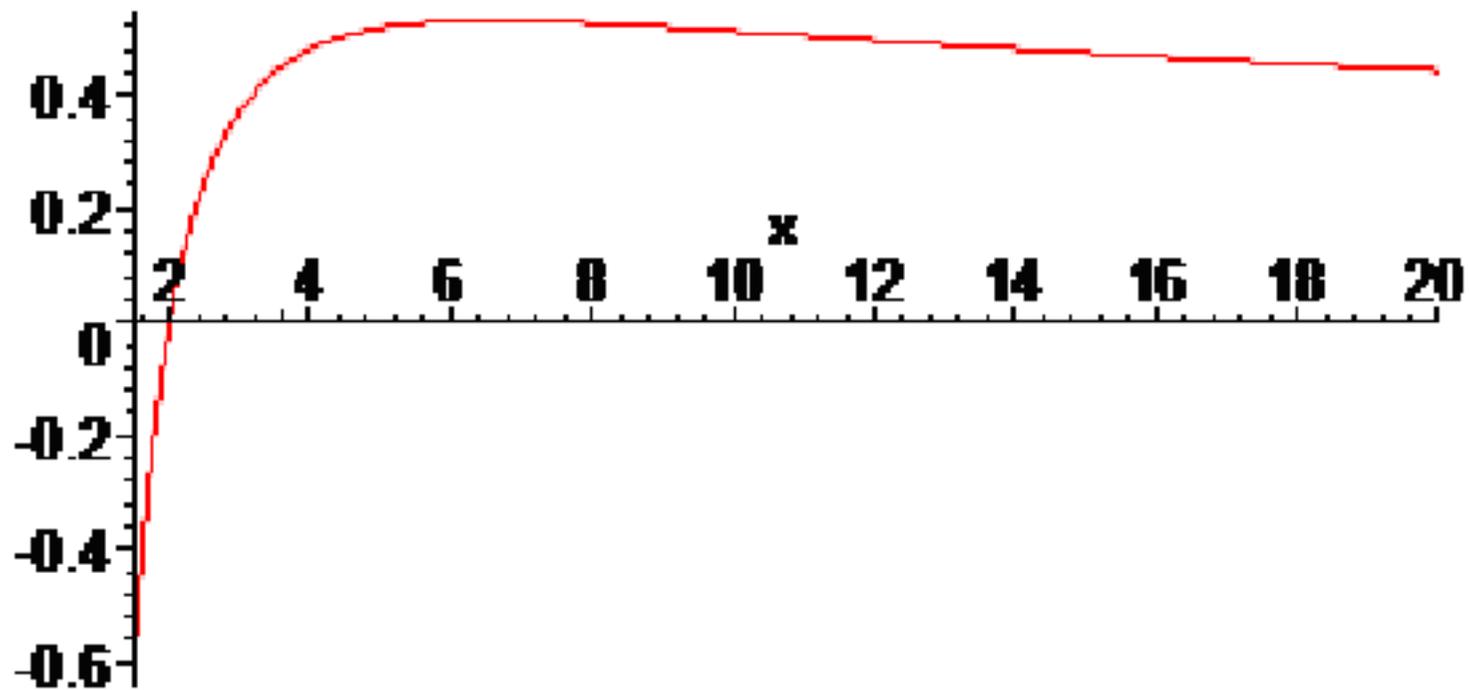


FIGURE 2 – Le graphe de  $f$