

AXLOU TOTH POUR L'INNOVATION	SÉRIE D'EXERCICES N°4	ENCADREURS : M. DIALLO & M. SARR
COURS D'EXCELLENCE D'ENCADREMENT SCIENTIFIQUE	THÈME : GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES	NIVEAU : PREMIÈRE S1-S3

### Exercice 1 : Domaine de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$  ; b)  $f(x) = \frac{x-1}{|x|-2}$  ; c)  $f(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}$  ; d)  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$  e)  $f(x) = \sqrt{x^2 + |x| - 2}$  ;  
f)  $f(x) = \frac{x^2}{|x|+x}$  ; g)  $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{3|x|-1}}$  ; h)  $f(x) = \sqrt{\frac{3+x^2}{2-x^2}}$  ; i)  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-2|x|-3}$  ; j)  $f_m(x) = \frac{1}{x^2-2mx+1}$  ;  
k)  $f(x) = \sqrt{|x^2 + 2x| - 3}$  ; l)  $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{mx^2+2x-1}}$  ; m)  $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{|x-1|}}{(x-3)(x-2)}$  ; n)  $f(x) = \sqrt{2\sqrt{1-x} - 1}$   
o)  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{E(x)-1}$  ; p)  $f(x) = \frac{3}{E(x)-x}$  ; q)  $f(x) = \sqrt{x - E(x)}$  ; r)  $f(x) = \sqrt{x - E(\sqrt{x})}$  ; s)  $f(x) = \frac{x^2-x}{E(x-\frac{1}{x})}$   
; t)  $f(x) = \frac{\sqrt{E(x)-5}}{E(|2x|)-4}$  u)  $f(x) = \sqrt{\frac{|1+x|-|4-x|}{x-E(x)}}$  v)  $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{E(\frac{1}{x})-x}$  w)  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{(x-1)(x+3)} & \text{si } x \leq 2 \\ \sqrt{4-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$   
x)  $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x^2-1}, & x < 0 \\ f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-x-2}, & x \geq 0 \end{cases}$  y)  $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}, & x < -1 \\ f(x) = \frac{x+1}{|x|-1}, & x \geq -1 \end{cases}$  ; z)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x}, & x < 1 \\ \frac{\sqrt{x-1}}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

### Exercice 2 : Parité

I) Etudier la parité des fonctions :

a)  $f(x) = 3x^4 + x^2$  ; b)  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$  ; c)  $f(x) = -2x^2 + 3|x| - 1$  ; d)  $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2+|x|}$  ;  
e)  $f(x) = \frac{x^2}{5x^2-3}$  ; f)  $f(x) = 8x^3 - 2x$  ; g)  $f(x) = \frac{x}{4x^2-3}$  ; h)  $f(x) = x\sqrt{x^3 + 3x}$   
i)  $f(x) = |-x + 1| + |x + 1|$

II) Dans chacun des cas déterminer la parité de chaque fonction.

$$f_1: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} ; \quad f_2: x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x-3} & \text{si } x \geq 3 \\ -\sqrt{-3-x} & \text{si } x < -3 \end{cases} ;$$

$$f_3: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ x+1 & \text{si } -1 < x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

III) Une fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  vérifie  $3h(-x) + h(x) = 4x^3 + 2x$

Montrer que  $h$  est impaire et en déduire  $h(x)$ .

### Exercice 3 :

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = |x+1| + |x-1|$ .

1) Montrer que  $f(-x) = f(x)$  puis conclure sur la parité de  $f$ . Interpréter graphiquement ce résultat.

**Pour vos cours particuliers de l'année scolaire ou à domicile (Maths, PC et SVT), contactez-nous aux  
78 192 84 64- 78 151 34 44**

- 2) Ecrire  $f(x)$ , suivant les valeurs de  $x$ , sans le symbole de la valeur absolue.
- 3) Etudier les variations de  $f$  sur  $]-\infty; -1]$ ,  $[-1; 1]$  et  $[1; +\infty[$  puis dresser son tableau de variation.

#### **Exercice 4 :**

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur  $[-a; a]$ , avec  $a > 0$ . Soient  $g$  et  $h$  fonctions telles que :

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \text{ et } h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

- 1) Démontrer que  $g$  est une fonction paire et  $h$  est impaire.
- 2) Vérifier que  $f = g + h$ .
- 3) Déterminer  $g$  et  $h$  lorsque :
  - a)  $f(x) = x^2 + x + 1$  ; b)  $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 2}$  ; c)  $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1}$

#### **Exercice 5 : Périodicité**

1. On considère la fonction numérique  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  telle que pour tout réel  $x$  :

$$f(x + 2) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$$

- a) Calculer  $f(x + 4)$ ,  $f(x + 6)$  et  $f(x + 8)$  en fonction de  $f(x)$
- b) En déduire que  $f$  est périodique et préciser sa période
2. Soit  $f$  une application définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  telle que qu'il existe un réel non nul  $k$  tel que pour tout réel  $x$  :  $f(x - k) = -f(x + k)$   
Prouver que  $f$  est périodique et préciser sa période  $T$ .
3. Soit  $f$  une fonction qui est définie sur  $\mathbb{R}$  et qui possède la propriété suivante :

$$\ll \exists a > 0 \text{ tel que } f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} \gg$$

Montrer que  $f$  est périodique et préciser sa période.

#### **Exercice 6 :**

I/ Soit  $f, g, h, k$  les fonctions numériques suivantes :

$$f: x \mapsto |x|; g: x \mapsto (\sqrt{x})^2; h: x \mapsto \sqrt{x^2}; k: x \mapsto x$$

- 1) Dire celles qui sont égales
- 2) La fonction  $g$  est-elle une restriction de  $k$  ? De  $f$  ?
- 3) La fonction  $f$  est-elle un prolongement de  $k$  ?

II) On donne les fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définies par :  $f(x) = \frac{|x^2 - 2x - 3|}{x + 1}$  et  $g(x) = x - 3$

Sur quel intervalle les restrictions de  $f$  et  $g$  sont-elles égales ? Sont-elles opposées ?

#### **Exercice 7 :**

Soit  $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$  et  $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$

$$x \mapsto \frac{3x + 5}{x - 2}$$

- 1) Déterminer  $Df \circ g$  et  $Dg \circ f$
- 2) Déterminer  $f \circ g(x)$  et  $g \circ f(x)$
- 3) Déterminer les ensembles de définition des fonctions  $f \circ g$  et  $g \circ f$  dans les cas suivants
  - a)  $f(x) = \sqrt{x - 1}$  et  $g(x) = x^2 - x + 2$
  - b)  $f(x) = \frac{1}{x - 2}$  et  $g(x) = x^2 + x$
- 4) Dans les 3 cas suivants, Calculer  $g \circ f(x)$  puis  $f \circ g(x)$ 
  - a)  $f$  et  $g$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x + 2$  et  $g(x) = -5x + 4$
  - b)  $f(x) = \sqrt{x - 6} + 3$  sur  $[6; +\infty[$  et  $g(x) = 3x - 6$  sur  $\mathbb{R}$

**Pour vos cours particuliers de l'année scolaire ou à domicile (Maths, PC et SVT), contactez-nous aux  
78 192 84 64- 78 151 34 44**

c)  $f(x) = \sqrt{x}$  sur  $\mathbb{R}_+$  et  $g(x) = -x^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

### **Exercice 8 : Minimum et maximum**

- A) On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}$
- 1) Montrer que  $f$  admet une valeur maximale au point  $-3$ .
  - 2) Montrer que  $f$  admet une valeur minimale au point  $-1$ .
- B) Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2+4}}$ .
- 1) a) Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .  
b) Montrer que  $f$  est paire. Interpréter ce résultat graphique.
  - 2) a) Donner les images des réels  $0; \sqrt{5}; -1; \text{ et } 2\sqrt{3}$  par  $f$ .  
b) Trouver le nombre d'antécédent(s) de 1 par  $f$ .
  - 3) Montrer que  $f$  est minorée par 0 et majorée par 1.
  - 4) Montrer que  $f$  admet un maximum absolu en 0 que l'on précisera.

### **Exercice 9 :**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ .

- 1) Montrer que  $f$  est impaire. Interpréter ce résultat graphiquement.
- 2) a) Montrer que pour tout réel  $x$ , on a :  $2|x| \leq x^2 + 1$ .  
b) En déduire que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts.  
a) Montrer que :  $f(a) - f(b) = \frac{2(a-b)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}$   
b) En déduire les variations de  $f$  sur  $[0; 1]$  et  $[1; +\infty[$
- 4) Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- 5) Déterminer les extremums de  $f$ .

Déterminer l'image de l'intervalle  $[-1,1]$  par  $f$ .

### **Exercice 10 :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$ , dans chacun des cas suivants étudiez la monotonie de  $f \circ g$  et la monotonie de  $g \circ f$ .

- a)  $f$  croissante et  $g$  croissante sur  $I$ .
- b)  $f$  décroissante et  $g$  croissante sur  $I$ .
- c)  $f$  décroissante et  $g$  décroissante sur  $I$ .

### **Exercice 11 :**

**Définition :** Pour tout réel  $x$  on appelle partie entière de  $x$  le nombre entier relatif noté  $E(x)$  défini par  $E(x) \leq x < E(x) + 1$

**Exemple :**  $E(1,2) = 1$  car  $1 \leq 1,2 < 2$  et  $E(-2,4) = -3$  car  $-3 \leq -2,4 < -2$ .

Ainsi  $E(x) = n$  signifie que  $x \in [n; n + 1[$ , ou encore  $n \leq x < n + 1$ .

#### **A. Etude de la fonction $E(x)$**

- 1) Donner  $E(2,3)$  ;  $E(-4,1)$  ;  $E(5)$  ,  $E(0,1)$
- 2) Quels sont les réels  $x$  tels que a)  $E(x) = 3$  ? b)  $E(x) = -2$  c)  $E(x) = 0$  ?
- 3) Etudier la fonction  $E(x)$  et tracer la courbe représentative de  $E(x)$  restreinte à l'intervalle  $[-5; 4]$ .
- 4) Soit  $x$  un réel tel que  $E(x) = 4$ . Montrer qu'alors  $E(x + 3) = 7$ .

**Pour vos cours particuliers de l'année scolaire ou à domicile (Maths, PC et SVT), contactez-nous aux  
78 192 84 64- 78 151 34 44**

Montrer que, plus généralement, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $E(x+n) = E(x) + n$

5) Montrer que si  $\forall x \in \mathbb{Z}$ ,  $E(-x) = -E(x)$  puis si  $x \notin \mathbb{Z}$  alors  $E(-x) = -E(x) - 1$ .

### B. Avec la partie entière

4) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x - E\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

- Calculer  $f(0)$ ;  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(n) = 0$
- En utilisant la question 4. Démontrer que  $-\frac{1}{2} \leq f(x) < \frac{1}{2}$ .
- Montrer que  $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ ,  $f(x) = x$ .
- Montrer que  $f$  est périodique de période 1
- Tracer Cf sur  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ .
- En déduire la représentation graphique de Cf sur  $[-5; 5]$ .

### C. La partie décimale

Soit  $d$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\mathbf{d}(x) = x - E(x)$ .

- Calculer les images par  $d$  des réels :  $5,2$ ;  $\frac{3}{2}$ ;  $8$ ;  $-5$ ;  $-6,3$ .
- Donner au moins quatre réels différents, et pas tous de même signe, qui vérifient :  $d(x) = 0,4$ .
- Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq d(x) < 1$ .
- Montrer que  $d$  est périodique.
- Tracer la représentation graphique de la restriction de  $d$  à  $[0; 1[$  et en déduire alors courbe représentative de  $d$ .
- Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{d(x)}{\sqrt{x}}$ .
  - En déduire une majoration de  $g(x)$  sur  $]0; 1[$ .
  - Montrer alors que  $g$  est bornée sur  $]0; +\infty[$ .

#### Exercice 12 :

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = (-1)^{E(x)} [x - E(x)]^2$  :

- Montrer que  $f$  est périodique de période 2.
- Etudier  $f$  sur l'intervalle  $[0; 2]$  puis tracer sa courbe représentative.

#### Exercice 13 :

On considère la fonction  $g: x \rightarrow d(x, \mathbb{Z})$ , où  $d(x, \mathbb{Z})$  représente la distance du réel  $x$  à l'entier relatif le plus proche

- Montrer que  $g(x) = \min(x - E(x); E(x) - x + 1)$  où  $\min(a; b)$  désigne le plus petit des entiers  $a$  et  $b$
- Calculer  $d\left(\frac{3}{4}, \mathbb{Z}\right)$ ,  $d\left(\frac{8}{3}, \mathbb{Z}\right)$  et  $d(\sqrt{2}, \mathbb{Z})$ .

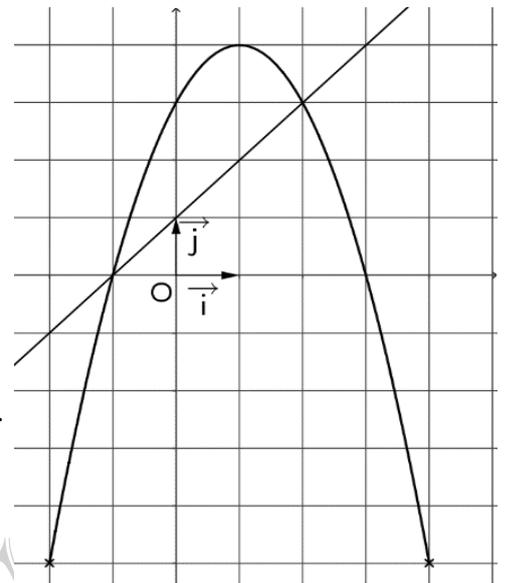
#### Exercice 14 : Quelques propriétés de $E(x)$ .

- A. On désigne par  $E(x)$  la partie entière de  $x$ .
- Montrer que, pour tout  $x$  :  $2E(x) \leq E(2x) \leq 1 + 2E(x)$ .
  - Montrer que pour tout  $x$  réel :  $E\left[\frac{E(2x)}{2}\right] = E(x)$ .

B. On cherche à démontrer que :  $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$

Pour cela, on pose :  $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) - E(nx)$

- 1) Montrer que  $f$  est  $\frac{1}{n}$ -périodique.
- 2) Prouver que  $\forall x \in \left[0; \frac{1}{n}\right], f(x) = 0$  puis conclure.



**Exercice 15 :**

Dans le repère ci-contre sont représentées la courbe d'une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-2, 4]$  et la droite  $(D) : y = x + 1$ .

1. Déterminer graphiquement les images de -1 ; 0 ; et de 1 par  $f$ .
2. Résoudre graphiquement
  - a.  $f(x) = 3$  , b.  $f(x) = 4$  , c.  $f(x) = -7$  , d.  $f(x) > 0$  , e.  $f(x) \leq 0$ .
3. Résoudre graphiquement
  - a.  $f(x) - x - 1 = 0$  , b.  $f(x) - 1 \geq x$ .

**Exercice 16 :**

Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  tel que  $|f(x)| \neq \frac{1}{3}$  par :  $f(x+1) = \frac{f(x) - 1}{3f(x) + 1}$ .

- 1) Peut-il exister un réel  $x$  tel que  $f(x+1) = f(x)$  ? Justifier.
- 2) Calculer  $f(x+2)$  en fonction de  $f(x)$ .
- 3) Montrer que  $f$  est périodique de période 3.
- 4) On suppose dans cette question que  $f(0) = 1$ .
  - a) Calculer  $f(1)$  ;  $f(2)$  et  $f(3)$ .
  - b) On suppose que :  $\begin{cases} \text{si } 0 \leq x \leq 2; f(x) = ax + b \\ \text{si } 2 \leq x \leq 3; f(x) = a'[(x-3)^2 + \beta] \end{cases}$ 
    - i) Déterminer  $a$  et  $b$  en utilisant  $f(0)$  et  $f(1)$ .
    - ii) Déterminer  $a'$  et  $\beta$  à l'aide de  $f(2)$  et  $f(3)$ .
    - iii) Résoudre dans  $[0; 3]$  l'équation  $|f(x)| = \frac{1}{3}$ , suivant les valeurs de  $x$ .
    - iv) En déduire l'ensemble des valeurs de  $[0; 3]$  ayant une image par  $f$ .

Tracer la courbe de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 3]$ .

**Exercice 17 :**

Soit  $f, g$  et  $h$  trois fonctions définies par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 ; g(x) = \sqrt{x} \text{ et } h(x) = g \circ f(x).$$

- 1) Montrer que la droite d'équation  $x = 2$  est axe de symétrie de  $(C_h)$ .
- 2) Etudier les variations de  $f$  et  $g$  puis en déduire celles de  $h$ .
- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $(C_h)$  avec les axes de coordonnées.
- 4) Etudier la position relative de  $(C_h)$  par rapport à la droite  $(D_1) : y = x - 2$ , d'une part et d'autre part, par rapport à la droite  $(D_2) : y = -x + 2$ .
- 5) Tracer dans le même repère orthonormé les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$ .
- 6) En déduire  $(C_h)$  puis celle de la fonction  $x \mapsto f(|x|)$ .

**Exercice 18 :**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = 1$ , si  $x \geq 0$  et  $f(x) = 0$ , si  $x < 0$ .

On pose :  $g(x) = 2f(x) - f(x-1)$  et  $h(x) = g(x-1) + 2g(x-2) + \dots + 2009g(x-2009)$ .

Calculer  $h(\sqrt{2009})$ .

### **Exercice 19 :**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{2x-7}{4x+2}$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .
- 2) Etudier la parité de  $f$ .
- 3) Déterminer l'intersection de  $(C_f)$  avec les axes de coordonnées.
- 4) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :  $f(x) = a + \frac{b}{x+\frac{1}{2}}$ .
- 5) Montrer que le point  $I(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$ .
- 6) a) En posant  $\begin{cases} X = x + \frac{1}{2} \\ Y = y - \frac{1}{2} \end{cases}$  montrer que  $y = f(x) \Leftrightarrow Y = -\frac{2}{X}$ .
- b) En déduire le tracer de  $(C_f)$ .
- c) A l'aide de  $(C_f)$  déterminer le tableau de variation de  $f$ .
- d) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$  où  $m \in \mathbb{R}$ .

### **Exercice 20 :**

On définit pour chaque couple de réels  $(a; b)$  la fonction  $f$  par  $f(x) = a - \sqrt{x+b}$ .

Deux nombres réels distinctes  $u$  et  $v$  sont dit échangeables s'il existe au moins un couple de réels  $(a; b)$  tel que la fonction  $f$  vérifie à la fois  $f(u) = v$  et  $f(v) = u$ .

- 1) Montrer que 2 et 3 sont échangeables.
- 2) Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?
- 3) A quelle condition deux entiers  $u$  et  $v$  sont-ils échangeables ?

### **Exercice 21 :**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[0; 1]$  à valeurs dans  $[0; 1]$  telle que pour tous réels  $x$  et  $y$  de  $[0; 1]$  ;  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \geq |x - y|$

- 1) Montrer que les fonctions  $u$  et  $v$  définies sur  $[0; 1]$  par  $u(x) = x$  et  $v(x) = 1 - x$  sont de telles fonctions
- 2) Montrer que l'on a  $E(\varphi) = \begin{cases} \varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi(1) = 1 \\ \text{ou bien} \\ \varphi(0) = 1 \text{ et } \varphi(1) = 0 \end{cases}$
- 3) On suppose que  $\varphi(0) = 0$  et donc  $\varphi(1) = 1$ 
  - a) Démontrer que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$   $f(x) \geq x$
  - b) Exploiter l'inégalité  $|\varphi(x) - 1| \geq |x - 1|$  pour établir que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$   $\varphi(x) = x$ .
  - c) Examiner le cas  $\varphi(0) = 1$ .
- 4) a) Démontrer que chacune des fonctions  $f, g$  telles que  $f(x) = \frac{x^2}{2}$  et  $g(x) = \frac{1}{1+x}$  est définie sur  $I$ , et à valeurs dans  $I$ 
  - b) Démontrer que  $f$  et  $g$  sont dans  $E(\varphi)$  :
  - c) Trouver deux ensembles  $I$  et  $J$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $f$  soit bijective  $I$  dans  $J$ .

### **Pensée :**

« Soyez un élément de qualité. Certaines personnes ne sont pas habituées à un environnement où l'on attend l'Excellence » Steve Jobs

Pour vos cours particuliers de l'année scolaire ou à domicile (Maths, PC et SVT), contactez-nous aux  
78 192 84 64- 78 151 34 44