RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
UNION - DISCIPLINE - TRAVAIL

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNITE DE FORMATION ET DE RECHERCHE
SCIENCES DES STRUCTURES DE LA MATIERE
ET DE TECHNOLOGIE

Laboratoire de Physique de l'Atmosphère

Méthodes numériques pour Licence 2 de Physique-Chimie

(2ième édition 2013-2014)

Prof. Y. KOUADIO

Table des matières

Chapitre 0 : Bref aperçu sur l'Ordinogramme et le Pseudo-code

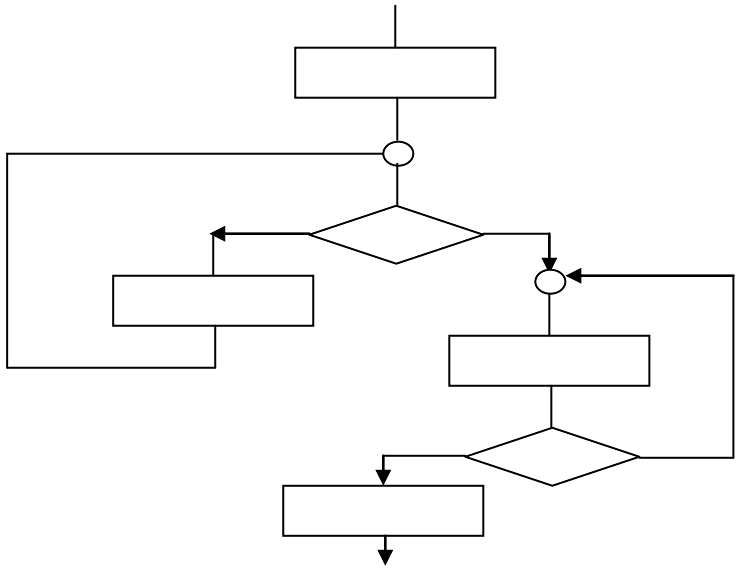
Dans ce fascicule, nous utiliserons la notion d'algorithmes et nous chercherons à résoudre le problème de l'expression de ces algorithmes. En effet, un algorithme doit être communiqué :

- D'abord à l'agent (humain ou machine) qui sera appelé à l'exécuter ;
- Ensuite à toute personne désireuse de l'apprendre, de l'étudier et, éventuellement, d'y apporter des modifications.

Pour que cette communication atteigne son but, il faut que le moyen d'expression soit clairement précisé et défini. Pour ce faire nous utiliserons l'ordinogramme (ou organigramme) et le pseudo-code.

1- Ordinogramme

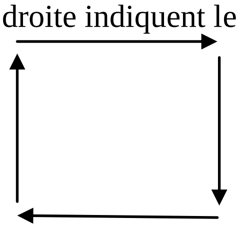
Un ordinogramme (voir figure ci-dessous) est un schéma symbolique conventionnel destiné à mettre en évidence les différentes étapes d'un algorithme et les relations qui existent entre celles-ci.



Pour construire un ordinogramme, nous utiliserons quatre symboles fondamentaux :

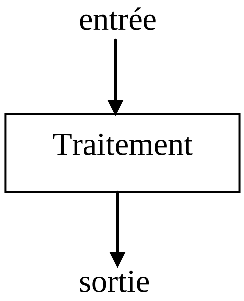
a) Les flèches

Les flèches haut, bas, gauche et droite indiquent le sens du traitement.



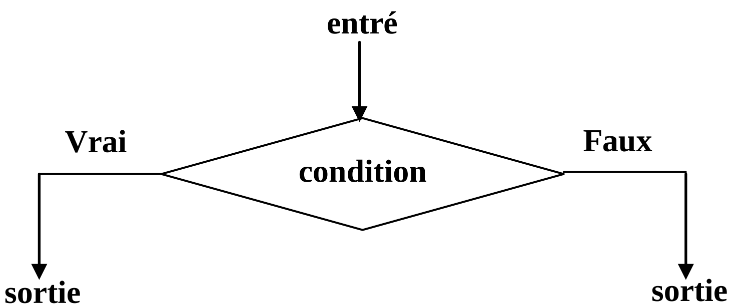
b) La « boîte » de traitement

Elle sera représentée à l'aide d'un rectangle à une « entrée » et une « sortie ». La nature du traitement sera inscrite à l'intérieur de la boîte.



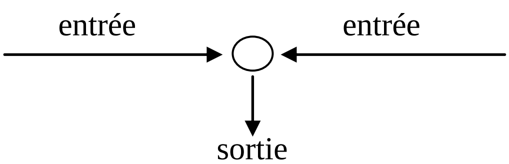
c) La « boîte » de décision

Lors d'un traitement, il peut arriver que l'on ait à choisir, à un moment donné, entre deux voies possibles. Nous exprimerons ce choix à l'aide de la « décision » que nous schématiserons par un losange à une « entrée » et deux « sorties ». Le contenu du losange est une condition (ou une combinaison de conditions) logique ; c'est-à-dire qu'elle n'admet que deux valeurs possibles : Vrai ou Faux, Oui ou Non, ….

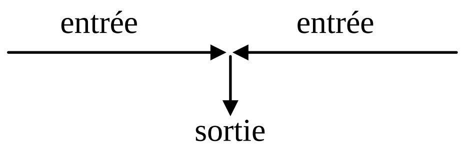


d) Le nœud de jonction

Un nœud de jonction nous servira à traduire la convergence de deux chemins en un point.

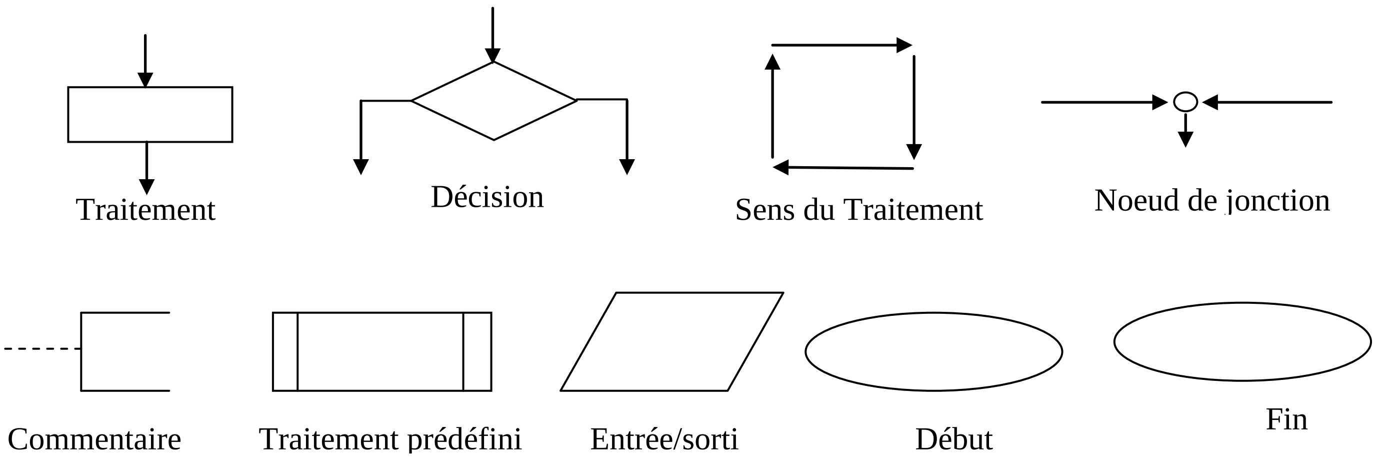


Ou encore



e) Remarques

Les quatre symboles ci-dessus constituent les symboles de base à partir desquels se confectionnent les ordinogrammes. Il est cependant possible que l'on ait, dans certains cas, à utiliser d'autres symboles auxiliaires.



2- Pseudo-code

Le pseudo-code est un langage informel qui vise à exprimer un algorithme en restant indépendant de l'agent (humain ou machine) qui sera appelé à l'exécuter. Par exemple, quand nous écrivons :

Lire A

Nous ne faisons aucune hypothèse sur la nature de l'organe d'entrée (clavier de terminal, lecteur de cartes, …) ou sur la forme de la donnée à lire. Nous voulons tout simplement exprimer une action :

Lire une donnée et attribuer la valeur lue à la variable A.

Une fois l'algorithme conçu, il va être nécessaire de traduire le pseudo-code dans un langage « compréhensible » par la machine.

Chapitre 1 : Opération sur les polynômes

Les polynômes font l'objet de nombreux calculs variés. Dans ce chapitre qui est un survol de l'opération sur les polynômes, nous aborderons principalement la multiplication, la division et la dérivation des polynômes.

Supposons connu un polynôme P à coefficients réels de degré n défini par :

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

On représente P dans un tableau de dimension $n + 1$ contenant les coefficients a_i.

1- Schéma de Hörner

$P_n(x)$ de degré n étant connu, le calcul de $P_n(x = \alpha)$ peut se faire à partir d'un algorithme.

Soit :

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + a_2x + \cdots + a_{n-1}x^{n-2} + a_nx^{n-1})$

$P_n(x) = a_0 + x[a_1 + x(a_2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-3} + a_nx^{n-2})]$

$\vdots$

$P_n(x) = a_0 + x\big[a_1 + \cdots x\big[a_{n-3} + x\big(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n)\big)\big] + \cdots\big]$

Posons que :

$$C_n = a_n \; et \; C_{i-1} = xa_i + a_{i-1} = x\,C_i + a_{i-1}$$

On obtient donc l'algorithme de Hörner suivant :

$$\begin{cases} C_n = a_n \\ C_{i-1} = x\,C_i + a_{i-1} \; avec \; i \; variant \; de \; n \text{ à } 1 \; par \; pas \; de -1 \end{cases}$$

Calculer donc $P_n(x = \alpha)$ revient à trouver la valeur de C_0 en utilisant la relation de récurrence.

2- Produit de deux polynômes

Soient deux polynômes $P_n(x)$ de degré n et $Q_m(x)$ de degré m définit par :

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

$Q_m(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m$

Posons le produit $H_{n+m}(x) = P_n(x).Q_m(x)$

$$H_{n+m}(x) = a_0b_0 + a_0b_1x + a_0b_2x^2 + \cdots + a_0b_{m-1}x^{m-1} + a_0b_mx^m +$$
$$a_1b_0x + a_1b_1x^2 + a_1b_2x^2 + \cdots + a_1b_{m-1}x^m + a_0b_mx^{m+1} +$$
$$a_2b_0x^2 + a_2b_1x^3 + a_2b_3x^4 + \cdots + a_2b_{m-1}x^{m+1} + a_2b_mx^{m+3} +$$
$$\ldots + a_{n-1}b_0x^{n-1} + a_{n-1}b_1x^n + a_{n-1}b_2x^{n+1} + \cdots + a_{n-1}b_{m-1}x^{n+m-2} + a_{n-1}b \quad x^{n+m-1}$$
$$+a_nb_0x^n + a_nb_1x^{n+1} + a_nb_2x^{n+2} + \cdots + a_nb_{m-1}x^{n+m-1} + a_nb_mx^{n+m}$$

Soit

$$H_{n+m}(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}\right)x^k$$
$$+ \cdots + a_nb_mx^{n+m}$$

Si on pose que

$H_k(x) = h_0 + h_1x + hx^2 + \cdots + h_kx^k$ avec $k\ variant\ de\ 0$ à $n+m$ alors la relation de récurrence donnant les coefficients h_k du produit de deux polynômes est :

$$h_k = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i} \quad avec\ \ k = 0, n+m$$

Le calcul de $H(x = \alpha)$ se déduit alors aisément en se référant au schéma de Hörner développé au point 1.

3- Division d'un polynôme par un monôme

Le polynôme $P_n(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$P_n(x) = (x - \alpha)Q_{n-1}(x) + R_0$ où $Q_{n-1}(x)$ est un polynôme de degré $n-1$ et R_0 le reste de la division euclidienne et α un réel quelconque. Posons que $Q_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_ix^i$

Faire la division euclidienne revient à trouver les coefficients de $Q_{n-1}(x)$ et le reste R_0. Soit donc :

$$P_n(x) = (x - \alpha)\sum_{i=0}^{n-1} b_ix^i$$

$P_n(x) = x\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$- $\alpha\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + R_0$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(b_i x^{i+1} - \alpha b_i x^i\right) + R_0$$

$P_n(x) = (R_0 - \alpha b_0) + (b_0 - \alpha b_1)x + \cdots + (b_{i-2} - \alpha b_{i-1})x^{i-1} + b_{n-1}x^n$

Par identification avec l'expression du polynôme donnée en début de chapitre, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{i-1} = a_i + \alpha b_i \;\; avec\; i = n-1,1 \\ R_0 = a_0 + \alpha b_0 \end{cases}$$

4- Dérivée d'un polynôme

Le polynôme $P_n(x)$ étant connu, sa dérivée est :

$P'_{n-1}(x) = a_1 + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_n x^{n-1}$ un polynôme de degré $n-1$.

Si on pose que

$P'_{n-1}(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-1}$

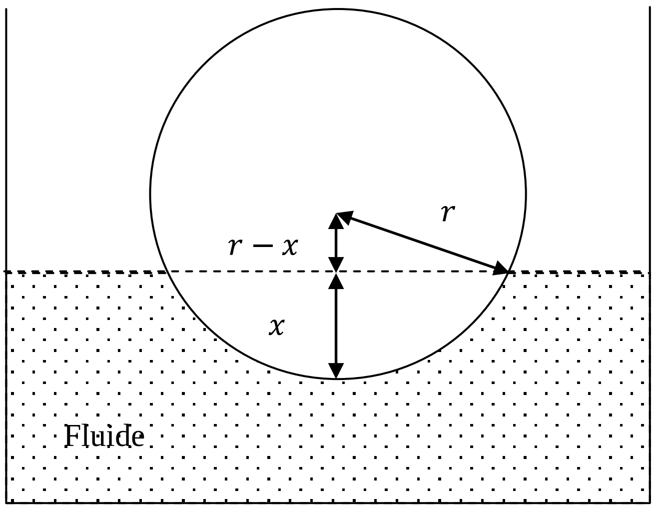
On a par identification la relation de récurrence :

$$\begin{cases} b_{n-1} = na_n \\ b_{i-2} = (i-1)a_{i-1} \end{cases} \;\; avec\; i = 2, n$$

Chapitre 2 : Résolution des équations non-linéaires de type $f(x) = 0$

Problème :

Selon le théorème d'Archimède, tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de celui-ci une poussée verticale dirigée de bas en haut et égale au poids du volume de fluide déplacé par le corps. Supposons qu'une sphère de rayon r, de masse volumique ρ_s est plongée dans un fluide de masse volumique ρ_l et est en équilibre comme le montre la figure ci-dessous.



Le volume de la sphère et sont poids sont respectivement :

$v_s = \frac{4}{3}\pi r^3$ et $P_s = m_s g = \rho_s v_s g = \frac{4}{3}\pi \rho_s r^3$.

Le volume du liquide déplacé et son poids sont respectivement :

$v_l = \frac{1}{3}\pi x^2(3r - x)$ et $P_l = m_l g = \rho_l v_l g = \frac{1}{3}\pi \rho_l x^2(3r - x)$.

La sphère étant en équilibre, alors $P_s = P_l$ soit donc :

$\frac{4}{3}\pi \rho_s r^3 = \frac{1}{3}\pi \rho_l x^2(3r - x)$.

Supposons que le fluide soit de l'eau ($\rho_l = 1000\ kg.m^{-3}$) et que la sphère soit un corps de masse volumique ($\rho_s = 200\ kg.m^{-3}$) de rayon unité ($r = 1\ m$).

On veut connaitre la profondeur d'immersion x de la sphère. Pour cela, on résoudra l'équation :

$$x^3 - 3x^2 + 0.8 = 0$$

Qui est une équation non-linéaire dont on cherche la racine.

Introduction

Le numéricien est souvent confronté à la résolution d'équations algébriques de la forme :

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

et ce dans toutes sortes de contextes. Introduisons dès maintenant la terminologie qui nous sera utile pour traiter ce problème.

Définition

Une valeur de x solution de $f(x) = 0$ est appelée une racine ou un zéro de la fonction $f(x)$ et sera notée x_s.

I- localisation de la racine de $f(x) = 0$

Soit $f(x)$ une fonction continue dont on veut calculer les racines (voir Fig. 1).

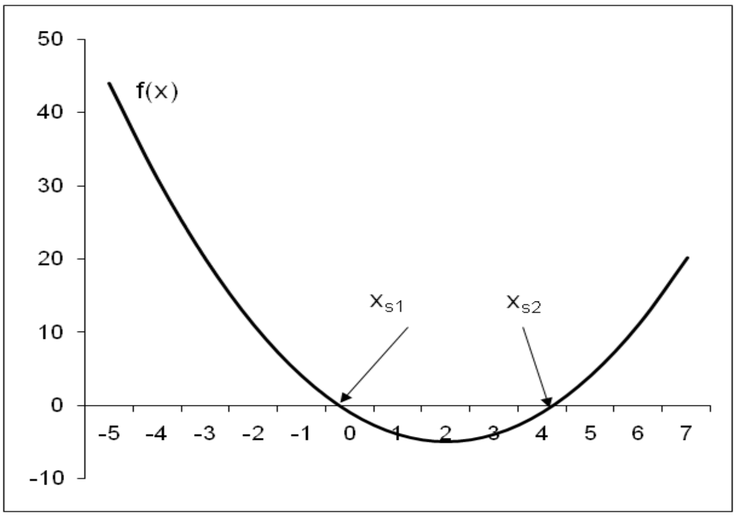


Figure 1

Il faut d'abord :

- s'assurer que cette fonction a des racines
- isoler ou localiser chaque racine dans un intervalle monotone.

Pour cela, on peut chercher les variations de $f(x) = 0$ par l'étude de sa dérivée ou de manière graphique.

Ainsi, si $f(x) = 0$ est continue entre $[a\,;b]$ et si N est le nombre de racines dans ce cet intervalle :

- si $f(a) \times f(b) < 0$ alors N est impair
- si $f(a) \times\ f(b) > 0$ alors N est pair ou égal à 0

NB : En général, on ignore les variation et la forme de $f(x)$. Pour déceler les racines situées dans l'intervalle $[a\,;b]$, on subdivise l'intervalle $[a\,;b]$ en plusieurs intervalles de longueur h, petite devant les variations présumées. On a donc :

$$x_0 = a$$

$$x_1 = a + h$$

$$x_2 = a + 2h$$

$$\vdots$$

$$x_n = a + nh$$

- si $f(x_i) \times f(x_{i+1}) < 0$ alors il existe au moins une racine dans l'intervalle $[x_{i\,;}\, x_{i+1}]$
- si $f(x_i) \times f(x_{i+1}) > 0$ alors il existe un nombre pair ou nul de racines.

Cette méthode (corollaire du théorème de Rolle) ne permet pas de déterminer les racines doubles.

Remarque : cas particulier d'un polynôme

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme. Cette fonction a au plus n racines réelles et on montre qu'elles sont toutes contenues dans l'intervalle $[-R\,;R]$ avec :

$$R = \frac{max\{|a_i|_{i=0,n}\}}{a_n} + 1$$

II- méthode de dichotomie ou de la bissection

1- principe de la méthode

La méthode de la bissection repose sur une idée toute simple, à savoir qu'en général, de part et d'autre d'une solution de l'équation (1), la fonction $f(x)$ change de signe et passe du positif au négatif et vice-versa (voir Fig. 1). De toute évidence, ce n'est toujours pas le cas puisque la fonction $f(x)$ peut aussi être tangente à l'axe des x.

Supposons que l'on ait localisé une et une seule racine x_s dans l'intervalle $[a\,;b]$, c'est-à-dire qu'il y ait effectivement un changement de signe autour de la racine ($f(a) \times f(b) < 0$).
Posons que :
$x_s = \frac{a+b}{2}$, milieu de $[a\,;b]$.

- Si $f(a) \times f(x_s) < 0$ ou $f(x_s) \times f(b) > 0$, alors la solution x_s se trouve dans l'intervalle $[a\,;x_s]$. On remplace alors b par x_s
- Si $f(a) \times f(x_s) > 0$ ou $f(x_s) \times f(b) < 0$, alors la solution x_s se trouve dans l'intervalle $[x_s\,;b]$. On remplace alors a par x_s.

On obtient donc un nouvel intervalle $[a\,;b]$ différent du précédent intervalle. Ce nouvel intervalle sera utilisé pour rechercher la racine de l'équation en usant de la procédure suscitée. Cela nous amène à l'algorithme suivant :

2- Pseudo-code

$Algorithme\ dichotomie$

$a, b, c, x_s, \epsilon\ des\ réels$

$faire\ (début)$

- $x_s = \frac{a+b}{2}$
- $si\ f(a) \times f(x_s) < 0\ \ alors$
- $b \leftarrow x_s$

  $sinon\ \ a \leftarrow x_s$
- $jusqu'à\ ce\ que\ \frac{|a-b|}{2} \leq \varepsilon$

$fin\ (faire)$

$imprimer\ \ x_s$

fin

3- Ordinogramme (organigramme)

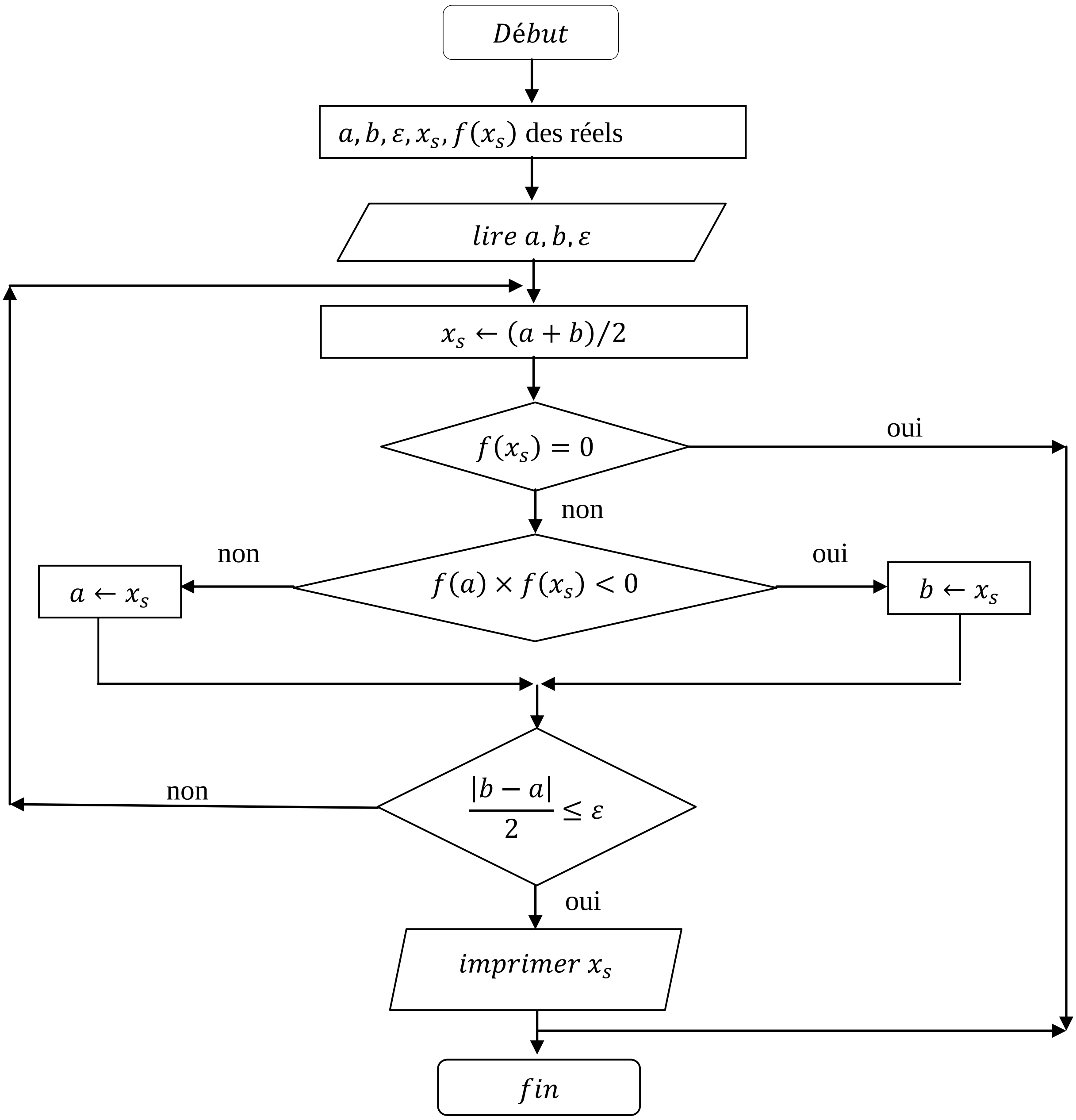


Figure 2

4- Nombre d'itérations

On remarque aisément que la longueur de l'intervalle $[a\,;b]$ entourant la racine x_s est divisée par deux à chaque itération. Cette constatation permet de déterminer à l'avance le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une certaine erreur absolue $\Delta x_s = \frac{|b-a|}{2}$ sur la racine. Soit $L = b - a$ la longueur de l'intervalle de départ. Après une itération, le nouvel intervalle est de longueur $\frac{L}{2}$ et après n itérations, la longueur de l'intervalle est :

$$\frac{L}{2^n} = \frac{|b-a|}{2^n}$$

La valeur de n nécessaires pour avoir $\frac{L}{2^n} = \Delta x_s$ est après résolution :

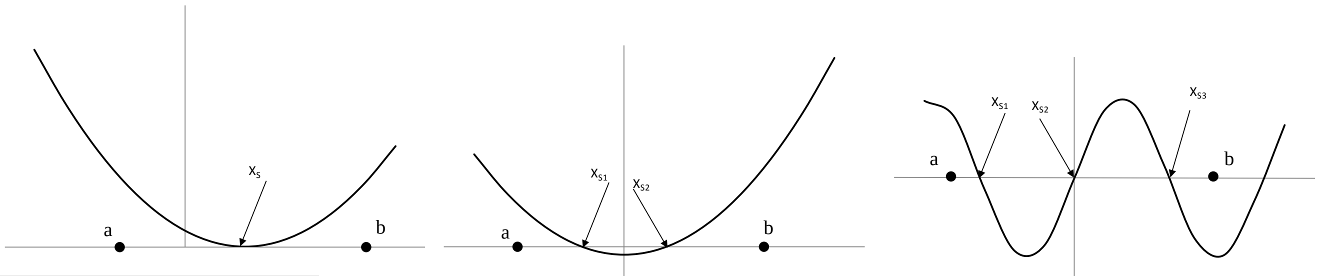
$$n \geq \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2}$$

5- Critères d'arrêt des calculs

- 1er cas : si l'incertitude recherchée est atteinte, c'est-à-dire $\Delta x_s = \frac{|x_{n+1}-x_n|}{2} \leq \varepsilon$.
- 2ième cas : si pendant le calcul de x_s, on rencontre $f(x_n) = 0$, alors $x_s = x_n$.
- 3ième cas : à la suite d'accumulation de valeurs tronquées, il peut arriver que $f(x_n) \times f(x_{n+1}) > 0$. On arrête alors les calculs et $x_s = x_{n-1}$ et $\Delta x_s = \Delta x_{n-1}$.
- 4ième cas : si le nombre maximal d'itérations N_{max} est atteint.

Remarques importantes

Il peut arriver des cas ou la méthode de dichotomie achoppe.



$f(x)$ est tangente à l'axe des x au point x_s tel que $f(x) = 0$. x_s est un extremum local.

$f(x)$ admet deux racines ou un nombre pair de racines dans l'intervalle $[a; b]$. Dans ce cas, il n'y a pas de changement de signe.

Si $[a; b]$ contient un nombre impair de racines, $f(x)$ change de signe mais la méthode peut avoir des difficultés à choisir parmi ces racines. On peut facilement éviter ces problèmes en localisant la racine qui nous intéresse.

Figure 3

III- méthode des points fixes ou des approximations successives

1- Définition du point fixe ou point invariant

Un point fixe d'une fonction $g(x)$ est une valeur de x qui reste invariante pour cette fonction, c'est-à-dire toute solution de l'équation $x = g(x)$ est un point fixe de $g(x)$.

2- Principe de la méthode

Supposons que l'équation $f(x) = 0$ peut s'écrire sous la forme $x = g(x)$ ou $g(x)$ est une nouvelle fonction continue. La solution x_s se trouve à l'intersection de la bissectrice $y = x$ et de la courbe de $g(x)$ (voir figure 4).

Supposons connue une valeur approchée $x_0 = a$ de la racine. A $x_0 = a$ correspond sur la courbe de $g(x)$ un point M_0. Si nous faisons $x_1 = g(x_0)$ à travers la bissectrice, x_1 est la nouvelle valeur approchée de la racine. A x_1 correspond le point M_1 sur la courbe de $g(x)$ dont l'ordonnées est $g(x_1)$. Ainsi, si nous posons :

$$x_1 = g(x_0)$$
$$x_2 = g(x_1)$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1} = g(x_n)$$

On définit de la sorte une suite :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = g(x_n) \quad \forall n > 0 \end{cases}$$

Si cette suite (converge) a une limite x_s, cette limite est telle que $x_s = g(x_s)$. C'est un point fixe de $g(x)$. Cette limite, si elle existe est la racine de $f(x) = 0$.

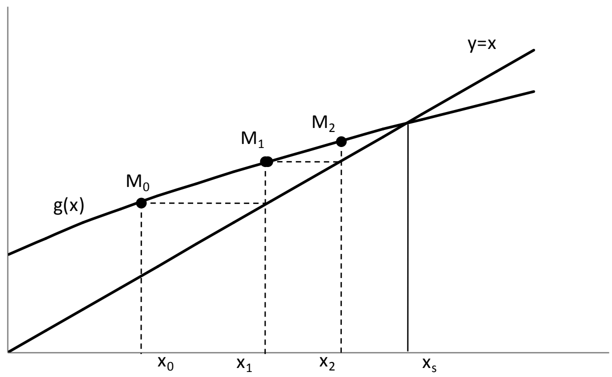


Figure 4

3- **Organigramme**

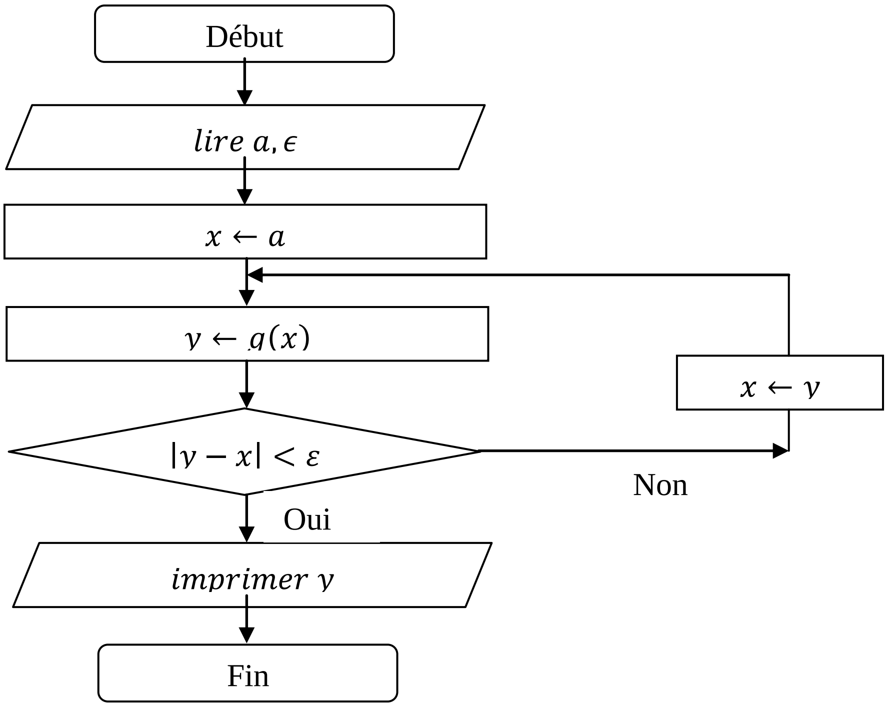


Figure 5

4- **Convergence de la méthode**

Soit x_s qui est à la fois une racine de $f(x)$ et un point fixe de $g(x)$. On définit l'erreur à l'étape n comme étant $e_n = x_n - x_s$.

On cherche à déterminer sous quelles conditions l'algorithme converge vers x_s. Ce sera bien sûr le cas si l'erreur tend vers 0 si n devient grand.

A l'étape $n+1$, on a :

$e_{n+1} = x_{n+1} - x_s$

Or $x_{n+1} = g(x_n)$ et $x_s = g(x_s)$

D'où $e_{n+1} = x_{n+1} - g(x_s) = g(x_s + e_n) - g(x_s)$

Si nous faisons un développement de Taylor de la fonction $g(x)$ autour de la racine x_s, on a :

$$e_{n+1} = \left\{ g(x_s) + g'(x_s)x_s + \frac{g''(x_s){x_s}^2}{2!} + \frac{g'''(x_s){x_s}^3}{3!} + \cdots \right\} - g(x_s)$$

On conclut donc que :

$$e_{n+1} = g'(x_s)x_s + \frac{g''(x_s){x_s}^2}{2!} + \frac{g'''(x_s){x_s}^3}{3!} + \cdots$$

a) Condition de convergence

Si $g'(x_s) \neq 0$ et si on néglige les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en e_n, on obtient :

$$e_{n+1} = e_n\, g'(x_s)$$

Soit $\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(x_s)$

L'erreur ne pourra donc diminuer que si $|g'(x_s)| < 1$.

$|g'(x_s)| < 1$ est une condition nécessaire de convergence de la méthode des points fixes.

b) Taux de convergence

Le taux de convergence d'une méthode des points fixes est donnée par $|g'(x_s)|$. En effet, plus $|g'(x_s)|$ est petit, plus l'erreur diminue vite et donc plus la convergence est rapide.

c) Ordre d'une méthode

Dans le cas du taux de convergence, le cas limite est $g'(x_s) = 0$. Dans ce cas, on néglige tous les termes d'ordre supérieur ou égal à 3 en e_n dans le développement de Taylor. Ainsi :

$$e_{n+1} = \frac{{e_n}^2\, g''(x_s)}{2}$$

NB : on dit qu'une méthode des points fixes converge à l'ordre p si $|e_{n+1}| = C\,|e_{n+1}|^p$ ou C est une constante.

Remarque :

- Si $|g'(x_s)| < 1$ et $|g'(x_s)| \neq 0$, la méthode converge à l'ordre 1. La convergence est linéaire.
- Si $|g'(x_s)| = 0$ et $|g''(x_s)| \neq 0$, la méthode converge à l'ordre 2. La convergence est quadratique.
- Si $|g'(x_s)| = 0$, $|g''(x_s)| = 0$ et $|g'''(x_s)| \neq 0$, la méthode converge à l'ordre 3.

d) Bassin d'attraction

La convergence d'une méthode des points fixes est également assujettie au choix de la valeur initiale x_0. En effet, un mauvais choix de x_0 peut résulter en un algorithme divergent, même si la condition de convergence est respectée. Ainsi, le bassin d'attraction de la racine x_s est l'ensemble des valeurs initiales x_0 pour lesquelles x_n tend vers x_s lorsque n tend vers l'infini. C'est donc l'ensemble de tous les points x_0 pour lesquels la méthode converge vers x_s.

e) Point attractif ou répulsif

- Un point fixe x_s est dit attractif si $|g'(x_s)| < 1$.
- Un point fixe x_s est dit répulsif si $|g'(x_s)| > 1$.
- Le cas ou $|g'(x_s)| = 1$ est indéterminé.

5- Incertitude de la méthode

Si la méthode converge, la différence entre les deux derniers termes consécutifs représente l'incertitude et est de la forme :

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$$

Avec ϵ fixée d'avance.

IV- méthode de Newton

La méthode de Newton est l'une des méthodes les plus utilisées pour la résolution des équations non linéaires. Cette méthode possède également une belle interprétation géométrique. On peut cependant obtenir son algorithme en utilisant un développement de Taylor.

1- Principe de la méthode

a) Algorithme par le développement de Taylor

Soit une équation à résoudre de la forme $f(x) = 0$. A partir d'une valeur initiale x_0 qui est une valeur approchée de la solution x_s recherchée, on cherche une correction δx telle que :

$$f(x_0 + \delta x) = 0$$

En faisant un développement de Taylor autour de $x = x_0$, on obtient :

$$f(x_0) + f'(x_0)\delta x + \frac{f''(x_0)(\delta x)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(\delta x)^3}{3!} + \cdots = 0$$

Négligeons, dans l'expression ci-dessus, les termes d'ordre supérieur ou égal à 2. On obtient :

$$f(x_0) + f'(x_0)\delta x = 0$$

Soit

$$\delta x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

La correction δx est en principe la quantité que l'on doit ajouter à x_0 pour annuler la fonction $f(x)$. Puisque nous avons négligé les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 dans le développement de Taylor, cette correction n'est pas parfaite et on pose :

$$x_1 = x_0 + \delta x$$

Soit donc : $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Soit x_1 la nouvelle valeur approchée de la solution recherchée. Si nous reprenons toute la démonstration ci-dessus à partir de x_1 , on obtient donc de proche en proche :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$\vdots$$

D'où la relation de récurrence de Newton : $\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \;\; ; \;\; \forall\, n \end{cases}$

b) Algorithme par interprétation géométrique

On suppose que $f(x)$ est définie, continue et dérivable dans le domaine considérée et qu'elle y possède une racine. Sur la figure ci-dessous, on a représenté la fonction $f(x)$, la valeur initiale x_0 qui est la valeur approchée de la racine et le point $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ appartenant à C_f.

La droite tangente à C_f en M_0 est de pente $f'(x_0)$ et a pour équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

Cette droite coupe l'axe (ox) en $y = 0$, c'est-à-dire que pour $x = x_1$, $y = 0$ et on obtient

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On reprend ensuite le raisonnement à partir du nouveau point $M_1\left(x_1, f(x_1)\right)$. De proche en proche, on a :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

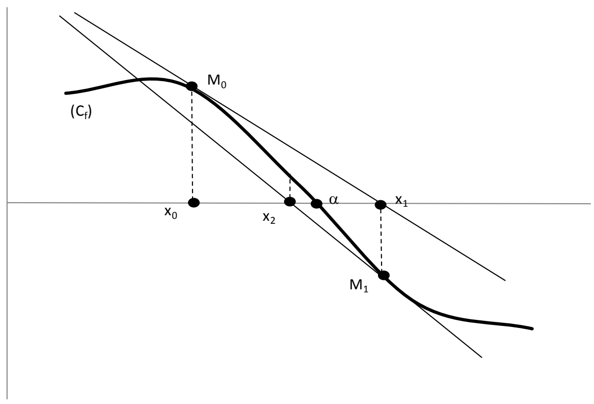
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

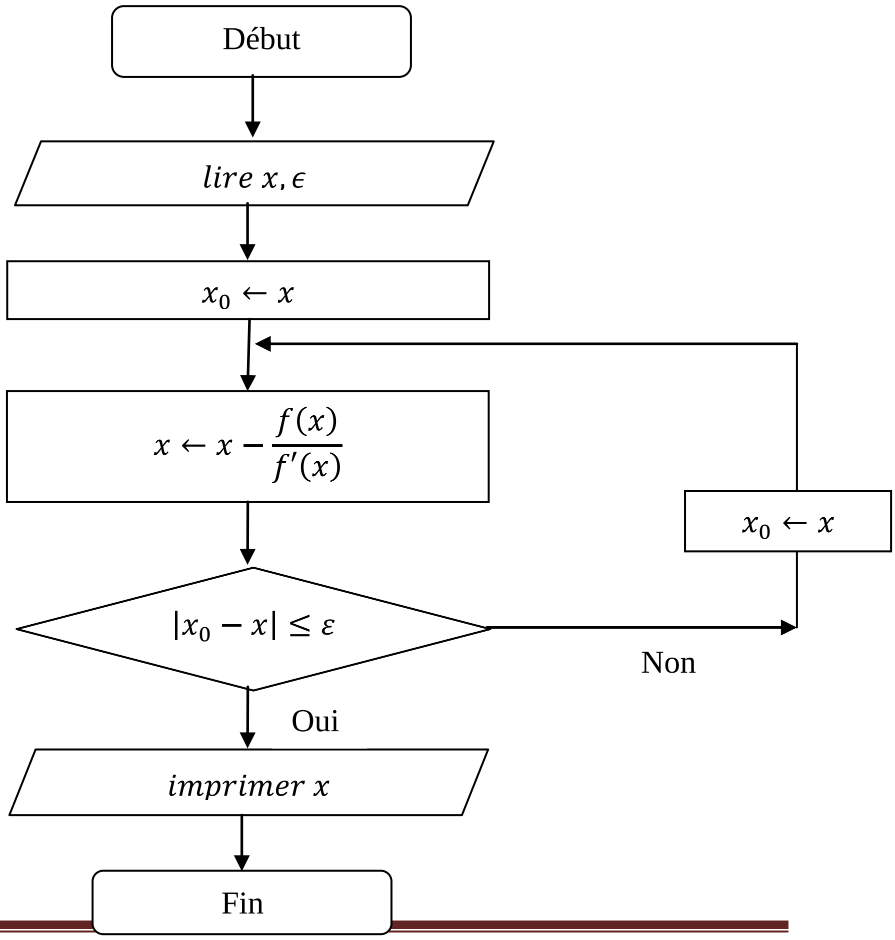
$$\vdots$$

D'où la relation de récurrence de Newton :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} ; \ \forall n$$



2- Organigramme



3- Analyse de la convergence

La méthode de Newton est un cas particulier de la méthode des points fixes où :

$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ et $g(x) = x$

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Soit après calcul

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Puisque x_s est une racine de $f(x)$, alors $f(x_s) = 0$. D'où on tire que $g'(x_s) = 0$ si on suppose que $f'(x_s) \neq 0$

On vient de montrer que la convergence de la méthode de Newton est au moins quadratique.

NB *:*

Dans le cas où $f'(x_s) = 0$, le résultat précédent n'est plus vrai dans la mesure où $g'(x_s)$ pourra être différent de 0.

Pour s'assurer que la méthode de Newton est bel et bien quadratique en général, il suffit de calculer $g''(x_s)$. On montre par le calcul que :

$$g'(\alpha) = \frac{f''(x_s)}{f'(x_s)}$$

Et que $g''(x_s)$ n'a à priori aucune raison d'être nul. Il reste que l'on a supposé que $f'(x_s) \neq 0$ (ce qui n'est toujours pas vrai). On en déduit donc que :

$$e_{n+1} \approx \frac{g''(x_s)}{2} {e_n}^2$$

On montre ainsi que la convergence est quadratique si $f'(x_s) \neq 0$.

4- Remarques : choix de x_0 pour que la méthode converge

Si f est définie dans l'intervalle $[a; b]$ et vérifie :

- $f(a) \times f(b) < 0$
- $\forall\, x \in [a; b],\ \ f'(x) \neq 0$ (stricte monotonie)
- $\forall\, x \in [a; b],\ \ f''(x) \neq 0$ (concavité dans le même sens)

Alors en choisissant $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$, la méthode de Newton converge vers la solution recherchée.

V- méthode de la sécante ou de Lagrange

La méthode de Newton possède de grands avantages, mais elle nécessite le calcul de la dérivée de $f(x)$. Si la fonction est complexe, cette dérivée peut être difficile à évaluer et peut résulter en une expression complexe. On contourne cette difficulté en remplaçant le calcul de la pente $f'(x)$ de la droite tangente à la courbe.

1- Principe de la méthode (figure ci-dessous)

A partir de deux valeurs approchées x_0 et x_1 de la racine x_s recherchée, on construit une suite de valeurs x_i qui converge vers x_s. x_{i+1} se déduit de x_{i-1} et de x_i par interpolation linéaire. Graphiquement, si M_i est le point de coordonnées $\left(x_i, f(x_i)\right)$, x_{i+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe (ox) et de la droite passant par les points $M_i\left(x_i, f(x_i)\right)$ et $M_{i-1}\left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right)$.

La droite M_iM_{i-1} a pour équation $y = Ax + B$ avec :

$$\begin{cases} A\,x_i + B = f(x_i) \\ A\,x_{i-1} + B = f(x_{i-1}) \end{cases}$$

Soit donc que :

$$A = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

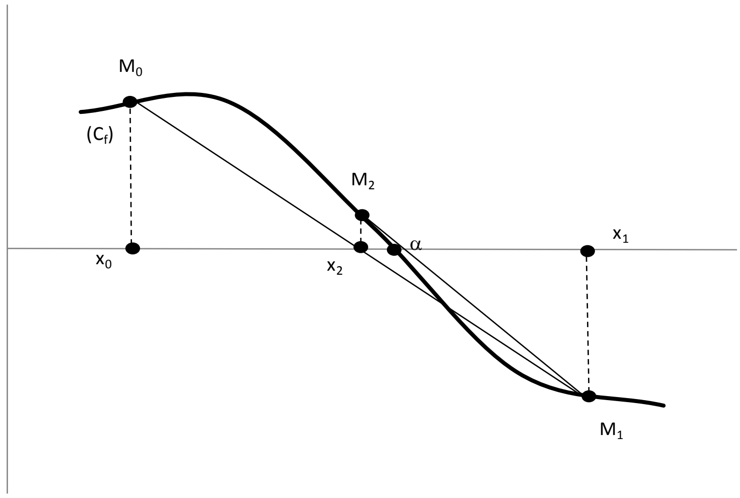
$$B = f(x_i) - x_i\,\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Comme à $x = x_{i+1}$, on a $y = 0$ alors on obtient :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

La généralisation de cette relation donne la relation de récurrence de la méthode des sécantes :

$$\begin{cases} x_0\,;\,x_1 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad \forall n \end{cases}$$



2- Remarque

- Il faut fournir au départ deux valeurs initiales. C'est ce qu'on appelle un algorithme à deux pas.
- On choisit les valeurs initiales le plus près possible de la racine recherchée. Il n'est cependant pas nécessaire qu'il y ait un changement de signe dans l'intervalle $[x_0;\ x_1]$ comme dans le cas de la méthode de dichotomie.
- L'algorithme se termine si $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$.

Résolution du problème

Dans le cas du problème posé en début de chapitre, l'équation admet au plus $n = 3$ *racines réelles contenues dans l'intervalle* $\left[-R; R\right] = [-4; 4]$ *avec* $R = \frac{|-3|}{1} + 1 = 4$. *En faisant une tabulation par pas de* 1 *(voir tableau) on note que :*

$f(-1) \times f(0) < 0$, $\quad f(0) \times f(1) < 0$ *et* $f(2) \times f(3) < 0$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-111.2	-53.2	-19.2	-3.2	0.8	-1.2	-3.2	0.8	16.8

Puisque $x > 0$, *alors la profondeur d'immersion peut se trouver dans les intervalles* $x \in [0m; 1m]$ *et* $[2m; 3m]$. *Ce qui signifierait que lors de l'oscillation de la balle, la première profondeur qu'elle atteindrait se situerait dans l'intervalle* $[2m; 3m]$. *A la fin de l'oscillation, lorsqu'elle est en équilibre, la profondeur se situerait dans l'intervalle* $[0m; 1m]$. *cherchons par exemple* $x \in [2m; 3m]$.

<u>Méthode de dichotomie :</u>

Si on pose que $\varepsilon = 10^{-2}$ *alors la solution est* $x = 2.905\ m$ *après* $10\ itérations$ *(voir tableau).*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	2.000	2.500	2.750	2.875	2.875	2.875	2.891	2.898	2.902	2.904	2.904
b	3.000	3.000	3.000	3.000	2.938	2.906	2.906	2.906	2.906	2.906	2.905
c	2.500	2.750	2.875	2.938	2.906	2.891	2.898	2.902	2.904	2.905	2.905
$f(a)$	-3.200	-2.325	-1.091	-0.233	-0.233	-0.233	-0.114	-0.053	-0.023	-0.007	-0.007
$f(c)$	-2.325	-1.091	-0.233	0.261	0.008	-0.114	-0.053	-0.023	-0.007	0.000	-0.003
$\Delta x = \left\lvert\frac{(b-a)}{2}\right\rvert$	5.E-01	3.E-01	1.E-01	6.E-02	3.E-02	2.E-02	8.E-03	4.E-03	2.E-03	1.E-03	5.E-04

<u>Méthode du point fixe :</u>

Posons que $x = g(x)$ avec $g(x) = (3x^2 - 0.8)^{\frac{1}{3}}$. On montre aisément que $x = g(x)$ est équivalent à $f(x) = 0$.

On représente graphiquement $y = x$ et $g(x)$ (voir graphique 2).

$x \in [2m; 3m]$ $g'(x) = \frac{1}{3}\,6x\,(3x^2 - 0.8)^{-\frac{2}{3}}$

$$g'(2) = 0.79 < 1 \quad et \quad g'(3) = 0.68 < 1$$

D'où pour $x \in [2m; 3m], |g'(x)| < 1$ la méthode est donc convergente.

Si on pose que $\varepsilon = 10^{-2},\ x_0 = 2$ alors la solution est $x = 2.887\ m$ après 11 itérations (voir tableau).

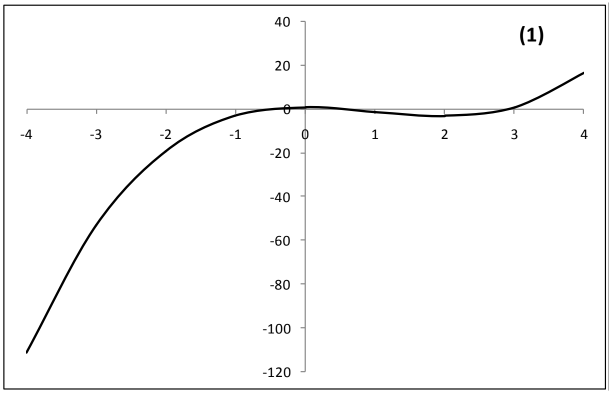
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_n	2.000	2.237	2.423	2.561	2.663	2.736	2.787	2.823	2.849	2.866	2.878	2.887
$\Delta x = \lvert x_{n+1} - x_n\rvert$		2.E-01	2.E-01	1.E-01	1.E-01	7.E-02	5.E-02	4.E-02	3.E-02	2.E-02	1.E-02	8.E-03

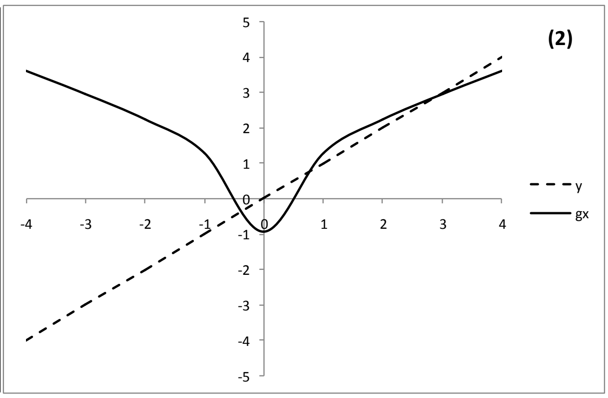
<u>Méthode de Newton</u>

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{{x_n}^3 - 3{x_n}^2 + 0.8}{3{x_n}^2 - 6x_n}$$

Si on pose que $\varepsilon = 10^{-2},\ x_0 = 2.1$ alors la solution est $x = 2.905\ m$ après 7 itérations (voir tableau).

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	2.100	7.130	5.209	3.998	3.299	2.984	2.909	2.905
$\Delta x = \lvert x_{n+1} - x_n\rvert$		5.E+00	2.E+00	1.E+00	7.E-01	3.E-01	7.E-02	4.E-03





Exercices sur la résolution des équations de type $f(x) = 0$

Exercice 1

On donne une fonction f définie sur $[\alpha; \beta]$. On subdivise $[\alpha; \beta]$ en plusieurs petits intervalles de longueur p et on suppose que la racine v de cette fonction appartient à l'un de ces petits intervalles. Donner l'ordinogramme qui permet de localiser pas à pas la racine v.

Indications *: se référer au cours*

Exercice 2

On considère la fonction $f(x) = e^x + 3\sqrt{x} - 2$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

1- Montrer qu'il existe une racine α pour la fonction f dans $[0; 1]$ et qu'elle est unique.

2- On veut calculer α par une méthode des approximations successives convenablement choisie. En particulier, on se donne deux méthodes $x = g_i(x)$ où les fonctions g_1 et g_2 sont définies comme suit :

$$g_1(x) = ln\left(2 - 3\sqrt{x}\right)$$

$$g_2(x) = \frac{(2 - e^{-x})^2}{9}$$

Laquelle de ces deux méthodes utiliseriez-vous pour calculer numériquement la racine de la fonction f ? Justifier votre réponse.

3- Représenter la marche de la méthode choisie pour $x_0 = 0$.

4- En utilisant la méthode de dichotomie sur $[0; 1]$, estimer le nombre d'itérations nécessaires pour calculer la racine α de la fonction f avec une tolérance de 10^{-3}. Calculer la racine α par cette méthode à 10^{-3} près.

Indications *:*

1- $f(0) = -1; f(1) = e + 1 > 0$ *et la fonction* f *est continue et strictement croissante sur* $[0; 1]$. *Donc il existe une racine* $\alpha \in [0; 1]$ *de* f *et elle est unique.*

2- $g_1(\alpha) = ln\left(2 - 3\sqrt{\alpha}\right) = ln(e^\alpha) = \alpha$ *car* $e^x + 3\sqrt{x} - 2 = 0 \;\leftrightarrow\; e^x = 2 - 3\sqrt{x}$

$g_2(\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{9} = \frac{\left(3\sqrt{\alpha}\right)^2}{9} = \alpha$ *car* $e^x + 3\sqrt{x} - 2 = 0 \;\leftrightarrow\; 3\sqrt{x} = 2 - e^x$

D'où α *est un point fixe pour chacune des deux méthodes*

Considérons maintenant la fonction g_1 *définie dans l'intervalle* $\left[0; \frac{4}{9}\right]$ *(ensemble de définition).* $|g'_1(x)| = \left|\frac{3}{4\sqrt{x} - 6x}\right|, \quad \forall x \in \left[0; \frac{4}{9}\right]$

$\forall x \in \left[0; \frac{4}{9}\right], |g'_1(x)| > 1$. *La condition de convergence n'étant pas respectée, cette méthode ne converge pas (on peut aussi calculer* g''_1 *et procéder à un tableau de variation).*

Considérons maintenant la fonction g_2 *sur* $[0; 1]$ *qui contient la racine.* $|g'_2(x)| = \left|\frac{2e^x(e^x-2)}{9}\right|$. *Soit :* $|g'_2(1)| = \left|\frac{2e(e-2)}{9}\right| < 1$ *et* $|g'_2(0)| = \left|\frac{2(1-2)}{9}\right| = \frac{2}{9} < 1$

$\forall x \in [0; 1], |g'_2(x)| > 1$. *La méthode est convergente. Elle sera donc choisie.*

3- $\frac{|b-a|}{2^n} \leq 10^{-\beta} \Rightarrow n \geq \frac{log|b-a| + \beta log10}{log2} \approx 10\ itérations$

Exercice 3

On veut calculer les racines de l'équation $f(x) = \frac{x}{2} - sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

1- Tracer le graphe de la fonction f. Combien de racines possède la fonction ? faire la tabulation de la fonction en utilisant un pas de $\frac{\pi}{6}$.
2- On pose que la fonction possède deux racines α_1 et α_2.
   a) Peut-on appliquer la méthode de dichotomie pour calculer ces racines ? pourquoi ?
   b) Dans le cas où c'est possible, estimer le nombre minimale d'itérations pour calculer la (les) racine (s) avec une tolérance de 10^{-10} après avoir choisi un intervalle convenable.
3- Ecrire la méthode de Newton pour la fonction f.

   Cette fois-ci, on pose que $\alpha_2 \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$. Choisir x_0 de manière que la méthode converge vers α_2. Trouver l'ordre de convergence de la méthode pour les deux racines.
4- On considère maintenant la méthode des approximations successives $x_{n+1} = g(x_n)$ avec :

$$g(x_n) = sin(x_n) + \frac{x_n}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

   On veut calculer la racine $\alpha > 0$.
   a) Démontrer que $g(\alpha) = \alpha - f(\alpha) = 0$
   b) En observant que $\alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$, établir si cette méthode est convergente.

Indications :

1- D'après le graphe, la fonction possède 2 racines comprises dans les intervalles $\alpha_1 = \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ *et* $\alpha_2 = \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	*-1.57*	*-1.05*	*-0.52*	*0.00*	*0.52*	*1.05*	*1.57*	*2.09*	*2.62*	*3.14*
$f(x)$	*-0.13*	*0.00*	*-0.10*	*-0.34*	*-0.58*	*-0.68*	*-0.56*	*-0.16*	*0.47*	*1.23*

2- On peut appliquer la méthode de dichotomie pour trouver α_2 *car on remarque que* $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \times f(0) < 0$. *Dans le cas de* α_1, *cela n'est pas possible car* $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times f(\pi) > 0$

Le nombre d'itérations pour calculer α_2 *est :*

$$\frac{|b-a|}{2^n} \leq 10^{-\beta} \Rightarrow n \geq \frac{log|b-a| + \beta log10}{log2} \approx 32\ itérations$$

3- La méthode de Newton s'écrit :

$x_{n+1} = g(x_n)$ *avec* $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\frac{x}{2} - sinx + \frac{\pi}{6} - \sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2} - cosx}$

Pour que la méthode de Newton converge vers α_2, *il faut que* $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$. *Utilisons donc l'intervalle* $\alpha_2 = \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ *avec :* $f''(x) = sinx$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times f''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0{,}16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \quad et \quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right) \times f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0{,}47 \times \frac{1}{2} > 0$$

On a donc $x_0 = \frac{5\pi}{6}$.

4- $\alpha - f(\alpha) = \frac{\alpha}{2} + sin(\alpha) - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = g(\alpha)$

On sait que $g'(\alpha) = 1 - f'(\alpha) = \frac{1}{2} + cos(\alpha)$

$\frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq \pi$ *alors* $-0 \leq \frac{1}{2} + cos(\alpha) \leq -0{,}5 \Rightarrow |g'(\alpha)| < 1$. *la méthode converge vers* α.

Exercice 4

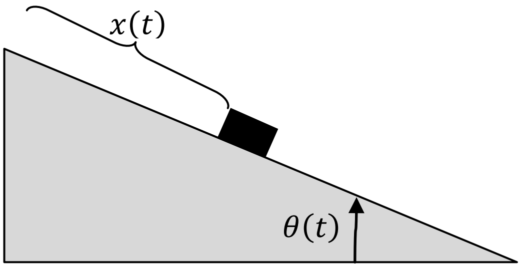
Une particule se déplace sur un plan incliné qui fait un angle θ par rapport à l'horizontale (voir figure ci-dessous). On note que θ croit à un taux constant ω tel que :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

A la fin du mouvement à $t\ secondes$, la position de la particule est donnée par :

$$x(t) = \frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - sin\omega t\right)$$

Supposons que la particule s'est déplacée de $0.53\,m$ en $1\,s$. Trouver par la méthode de dichotomie, avec une tolérance de 10^{-5}, le taux ω pour lequel θ change si l'intervalle de départ est $[\omega_0 = 0.1;\ \omega_1 = 1]$. on prendra $g = 10\ m/s^2$.



Indications : *on trouve $\omega = 0{,}31706\ rad$ au bout de 16 itérations*

Exercice 5

Un objet en chute verticale dans l'air est sujet aussi bien à une résistance due à la viscosité de l'air qu'à la force de gravité. Supposons qu'un objet de masse m chute d'une hauteur S_0 et qu'après $t\ secondes$, l'objet se trouve à une hauteur :

$$S(t) = S_0 + \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

Où $g = -10\,m/s^2$ et k représente le coefficient de la résistance de l'air en N/m. Soit $S_0 = 93\,m,\ \ m = 0.11\,kg$ et $k = 0.36\,N/m$.
Tracer le graphe de $S(t)$ et localiser la solution t_s entre deux entiers consécutifs.
En remarquant que :

$$S(t) = S_0 + \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) \Leftrightarrow t = \frac{k}{mg}\left[S(t) - S_0 + \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)\right]$$

Utiliser la méthode des approximations successives pour estimer le temps t_s auquel l'objet touchera le sol. On prendra une erreur $\Delta t = 10^{-2} s$. En déduire le nombre n d'itérations nécessaires pour calculer t_s.

Indications *: le temps $t_s \in [6s; 7s]$. On trouve $t_s = 6{,}0028\ s$.*

Exercice 6

La loi des gaz parfaits s'écrit $PV = nRT$ où P est la pression, V le volume, n le nombre de moles, R la constante des gaz parfaits et T la température absolue. Cependant, cette loi a le double défaut de n'être valable que pour certains gaz et seulement dans une certaine plage de température et de pression. Une autre équation, connue sous le nom de Van Der Wall, a donc été proposée : $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$ où $v = \frac{V}{n}$ le volume molaire et a, b des constantes empiriques qui dépendent du gaz. Dans le cadre d'un projet d'ingénierie chimique, on a besoin de connaître le volume molaire du dioxyde de carbone (CO_2) sur une échelle de

températures et de pressions afin de pouvoir construire un conteneur adéquat. On dispose des données suivantes : $R = 0.082; a = 3.592; b = 0.043$. Les pressions et les températures auxquelles on s'intéresse sont les couples de données suivantes :
$(1atm, 300K)$, $(10atm, 500K)$, $(100atm, 700K)$.

1- Calculer le volume molaire, pour chaque couple de données, selon la loi des gaz parfaits.
2- On pose $f(v) = \left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) - RT$. On répondra aux questions suivantes en considérant chaque cas de couple de données.
   a) Faire la tabulation de pas $10^{-2}\, m^3/mol$ de la fonction f dans l'intervalle $]0\ ;\ 0{,}1]$ et localiser v entre deux réels consécutifs. Soit I l'intervalle trouvé.
   b) En posant que l'approximation de départ est $v_0 = 0.04\, m^3/mol$, déterminer par la méthode de Newton, la valeur du volume molaire v. On prendra l'erreur admise $\Delta v = 10^{-5}\, m^3/mol$.
   c) Comparer les valeurs de v obtenues par les deux méthodes.

Indications :
avec le gaz parfait, on trouve respectivement :
$v = 0.000246\ m^3/mol\,; 0{,}000041\, m^3/mol\ \ et\ 0{,}00000574\, m^3/mol.$
avec le gaz de Van Der Wall, *on trouve respectivement :*
$v = 0.04324\ m^3/mol\,; 0{,}041\,302/mol\ \ et\ 0{,}043\, m^3/mol.$ *Le volume molaire ne devant pas évoluer, la seconde méthode est la meilleure.*

Exercice 7 :

Un mobile décrit un mouvement rectiligne uniformément varié d'équation: $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0$
On pose: $x_0 = -c\ (c > 0)$; $v_0 = 0ms^{-1}$; $a_0 = 2ms^{-2}$; $x(t) = f(t)$
On veut évaluer le temps $t\ (t > 0)$ nécessaire au mobile pour passer par le point origine. Pour cela, on résoudra l'équation: $f(t) = t^2 - c = 0$.
Application numérique: aux questions 2, 3 et 4, on prendra $c = 5$.

1) Localisation de la racine

a) combien de racines possède $f(t)$ et dans quel intervalles sont-elles contenues?
b) montrer qu'il existe une solution unique $t_s \in [0;\ +\infty[$.
c) en déduire les valeurs de c pour lesquelles $t_s \in [0; c]$.

2) Méthode de dichotomie

On considère maintenant que l'intervalle de départ est $[0; c]$. On utilise la méthode de dichotomie pour résoudre l'équation $f(t) = 0$.

a) donner les 7 premières valeurs, avec 5 chiffres significatifs, de t_i en remplissant le tableau ci-dessous.

Indice i	0	1	2	3	4	5	6
Borne inférieure a_i							
Borne supérieure b_i							
t_i							

b) déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une erreur $\varepsilon \leq 10^{-\beta}$ avec $\beta \in N^*$ dans les cas suivants: $\beta = 3$ et $\beta = 5$.

3) Méthode des approximations successives

Pour évaluer le temps t $(t > 0)$ nécessaire au mobile pour passer par le point origine, on propose la méthode suivante: $A_0 \begin{cases} t_0 \\ t_{n+1} = \frac{t_n}{2c}(3c - t_n^2) \end{cases}$ avec $g(t) = \frac{t}{2c}(3c - t_n^2)$.

a) montrer que 0 est un point fixe de $f(t)$.

b) pour quelles valeurs de t_0 la méthode A_0 est-elle convergente?

c) représenter géométriquement la marche de la méthode pour $t_0 = 2s$.

d) donner les 6 premières valeurs avec 5 chiffres significatifs, de t_i en remplissant le tableau ci-dessous. En déduire la racine et la précision obtenue.

Indice i	0	1	2	3	4	5
t_i						

4) Méthode de Newton

a) déterminer la relation de récurrence entre t_{n+1} et t_n à partir de la méthode de Newton.

b) On pose $g(t_n) = t_{n+1}$. Montrer que $g'(f) = \frac{f(t)f''(t)}{[f'(t)]^2}$.

c) quel est l'ordre de convergence de cette méthode?

d) montrer que pour $t_0 = \sqrt{\frac{4c}{3}}$ la méthode de Newton converge vers la racine. Calculer les 5 premiers termes de la suite $(t_n)_{n=0,4}$avec 5 chiffres significatifs. Quelle est la précision obtenue?

e) comparer avec la valeur exacte de $c = 2.23607$.

<u>Indications</u> *:*

Localisation de la racine

Cette fonction a au plus 2 racines réelles.

f est monotone $\forall x \geq 0$ et $f(t) \in [-c;\ +\infty[$. D'où il existe une solution unique $t_s \in [0;\ +\infty[$.

Si $t_s \in [0; c]$ alors $f(0) \times f(c) < 0 \Rightarrow c > 1$

Méthode de dichotomie

$\beta = 3 \Rightarrow n = 13\ itérations;\ \ \beta = 5 \Rightarrow n = 19\ itérations$

Méthode des approximations successives

$g(0) = \frac{0}{2c}(3c - 0) = 0$

$g'(t) = \frac{3}{2c}(c - t^2)$*, la méthode est convergente si* $|g'(t)| < 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{c}}{3} < t < \frac{\sqrt{5c}}{3}$

La racine est $t_s = 2{,}23607$ *et* $\Delta \approx 0$

Méthode de Newton

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t)}{f'(t)}$$

La méthode converge vers la racine si $|g'(t_0)| < 1 \ \Rightarrow\ g'\left(\sqrt{\frac{4c}{3}}\right) = \frac{c}{3} \times \frac{3}{8c} = \frac{1}{8} < 1$

$t_s = 2{,}23607\ s$

Chapitre 3 : Interpolation et approximation

Problème :

Soit un tableau donnant la répartition statistique des âges des membres d'une association des élèves, étudiants et cadres d'un village. Supposons que l'on ait ordonné ces personnes par ordre croissant de leur âge. Trouver par interpolation l'âge de la 72$^{\text{ième}}$ personne.

Tranche d'âge	Effectif	Effectif croissant cumulé
[0; 10[	14	14
[10; 20[	32	46
[20; 30[	55	101
[30; 40[	45	146
[40; 50[	16	162
[50; 60[	14	176
[60; 70[	20	196
[70; 80[	4	200
Total	200	

Introduction

Il arrive souvent que la fonction $f(x)$ que l'on doit traiter soit définie d'une façon qui rende sa manipulation aisée, ou encore ce qui est le plus fréquent, qu'elle soit définie pour un certain nombre de valeurs discrètes de la variable. Il est dans ce cas nécessaire de remplacer la fonction $f(x)$ à traiter par une fonction approchée g(x) plus simple ou encore par un ensemble de fonctions puis de traiter non plus $f(x)$ mais $g(x)$. Dans ce chapitre, on imposera à $g(x)$ de coïncider avec $f(x)$ pour un certain nombre de valeurs de x tel que $g(x_i) = f(x_i)$. On parlera donc de ***polynôme de collocation***. Notons que le degré de $g(x)$ sera égal à $n - 1$ où n est le nombre de valeurs où $f(x)$ est définie.

I- Interpolation linéaire

Etant donnée une fonction numérique $f(x)$ définie en deux points a et b du segment $[a; b]$ (voir figure ci-dessous), on peut approcher $f(x)$ par le polynôme $g(x)$ de degré 1 (c'est donc un monôme !!!) qui coïncide avec $f(x)$ en a et b.

Le polynôme $g(x)$ est tel que $g(x) = Ax + B$ avec :

$g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$

On obtient donc un système de 2 équations à 2 inconnues à résoudre :

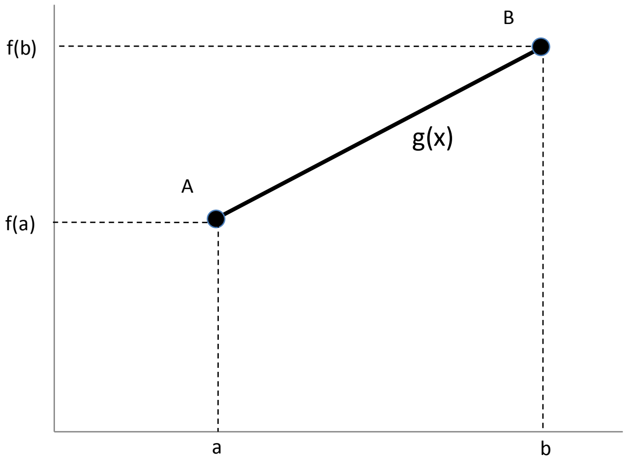
$$\begin{cases} Aa + B = f(a) \\ Ab + B = f(b) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} \\ B = \dfrac{af(b) - bf(a)}{a - b} \end{cases}$$

Le polynôme $g(x)$ sera donc :

$$g(x) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}\, x + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$$

Ou encore :

$$g(x) = f(a)\,\frac{x - b}{a - b} - f(b)\,\frac{x - a}{a - b}$$



NB : on montre que l'erreur est de la forme :

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{2} M''$$

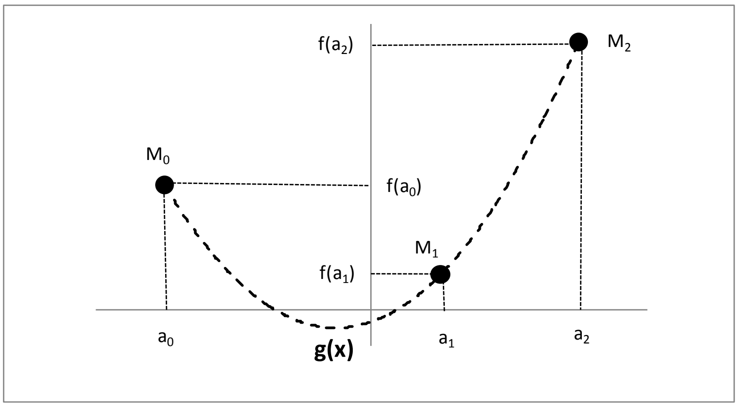
Où M'' est un majorant de $|f''(x)|$, avec $M'' = \sup|f''(x)|$. $f''(x)$ est calculée en utilisant les méthodes décrites dans le chapitre suivant.

II- Interpolation quadratique

Entres trois points distincts $M_0\big(a_0, f(a_0)\big)$, $M_1\big(a_1, f(a_1)\big)$, $M_2\big(a_2, f(a_2)\big)$ d'une fonction $f(x)$, il passe un polynôme unique $g(x)$ coïncidant avec $f(x)$ (voir figure ci-dessous). $g(x)$ est de degré 2 et est de la forme :

$$g(x) = c_o + c_1 x + c_2 x^2$$

Avec : $g(a_0) = f(a_0)$, $g(a_1) = f(a_1)$ et $g(a_2) = f(a_2)$



On obtient donc le système de 3 équations à 3 inconnues ci-dessous qu'on peut résoudre par les méthodes déjà connues.

$$\begin{cases} c_0 + c_1 a_0 + c_2 a_0^2 = f(a_0) \\ c_0 + c_1 a_1 + c_2 a_1^2 = f(a_1) \\ c_0 + c_1 a_2 + c_2 a_2^2 = f(a_2) \end{cases}$$

Exemple *: interpolons la fonction $f(x) = sinx$ entre les points $0, \pi, \frac{\pi}{2}$.*

$$g(0) = f(0) = 0$$

$$g(\pi) = f(\pi) = 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

On obtient :

$$\begin{cases} c_0 = f(0) = 0 \\ c_0 + c_1 \frac{\pi}{2} + c_2 \frac{\pi^2}{4} = 1 \\ c_0 + c_1 \pi + c_2 \pi^2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = \frac{4}{\pi} \\ c_2 = -\frac{4}{\pi^2} \end{cases}$$

Soit donc :

$$g(x) = \frac{4}{\pi^2} x(\pi - x)$$

III- Interpolation de Lagrange

L'interpolation de Lagrange est une façon simple et systématique de construire un polynôme de collocation. Etant donné $n+1$ points $M_i\big(x_i, f(x_i)\big)$ (pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n$), on suppose un instant que l'on sait construire $n+1$ polynômes $L_i(x)$ de degré n et satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 & \forall\, i \\ L_i(x_k) = 0 & \forall\, k \neq i \end{cases}$$

Cela signifie que le polynôme $L_i(x)$ de degré n prend la valeur 1 en x_i et s'annule en tous les autres points de collocation. Dans ce cas, on a :

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(x)$$

1- Recherche des $L_i(x)$

a) Cas d'un polynôme de degré 1

Il s'agit de déterminer le polynôme de degré 1 dont la courbe (qui est une droite !!!) passe par les deux points $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$, $M_1\big(x_1, f(x_1)\big)$. On doit donc construire 2 polynômes $L_0(x)$ et $L_1(x)$ de degré 1 qui vérifient :

$$L_0(x_0) = 1\ ;\ \ L_1(x_0) = 0$$
$$L_0(x_1) = 0\ ;\ \ L_1(x_1) = 1$$

Le polynôme $L_0(x)$ doit s'annuler en $x = x_1$. On pense immédiatement au polynôme $(x - x_1)$ qui s'annule en $x = x_1$ mais qui vaut $(x_0 - x_1)$ en $x = x_0$. Pour s'assurer d'une valeur 1 en $x = x_0$, il suffit de faire la division appropriée afin d'obtenir :

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

Un raisonnement similaire pour $L_1(x)$ donne :

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Ainsi, le polynôme de Lagrange de degré 1 est donc :

$$g(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$$
$$g(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1)$$

b) *Cas d'un polynôme de degré 2*

Si on cherche le polynôme de degré 2 passant par trois points $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$, $M_1\big(x_1, f(x_1)\big)$, $M_2\big(x_2, f(x_2)\big)$, on doit construire trois fonctions $L_i(x)$.

La fonction $L_0(x)$ s'annule cette fois en $x = x_1$ et $x = x_2$. On pense alors au polynôme $(x - x_1)\,(x - x_2)$ qui vaut $(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2)$ en $x = x_0$. Pour satisfaire à la condition $L_0(x_0) = 1$, il suffit de diviser le coefficient par cette valeur et de poser :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

De la même manière, on a :

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Ainsi, le polynôme de Lagrange de degré 1 est donc :

$$g(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

c) *Cas d'un polynôme de degré n*

On analyse le cas général de la même façon. L'expression générale pour la fonction $L_i(x)$ est donc :

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

On peut aussi l'écrire :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

2- Polynôme de Lagrange

Le polynôme de Lagrange sera donc de la forme :

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(x)$$

Ou encore :

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} \left\{ f(x_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \right\}$$

3- Erreur de calcul

On cherche un majorant $|f(x) - g(x)|$ pour $x \in [a, b]$. De manière générale, on montre que :

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} M^{(n+1)}$$

Où $M^{(n+1)}$ est un majorant de $f^{(n+1)}$ sur $[a, b]$.

L'erreur peut encore s'écrire :

$$\varepsilon(x) = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

Où $f^{(n+1)}(c) = sup\left|f^{(n+1)}(x_i)\right|$

4- Exemple

Calculons par interpolation de Lagrange, la fonction $f(x) = sinx$ entre les points $0, \pi, \frac{\pi}{2}$.

Les polynômes $L_i(x)$ sont telles que :

$$L_0(x) = \frac{(x - \pi)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{(0 - \pi)\left(0 - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{(\pi-0)\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-\pi)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)}$$

Soit donc :

$$g(x) = f(0)L_0(x) + f(\pi)L_1(x) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)L_2(x)$$

$$g(x) = 0 \times L_0(x) + 0 \times L_1(x) + 1 \times L_2(x)$$

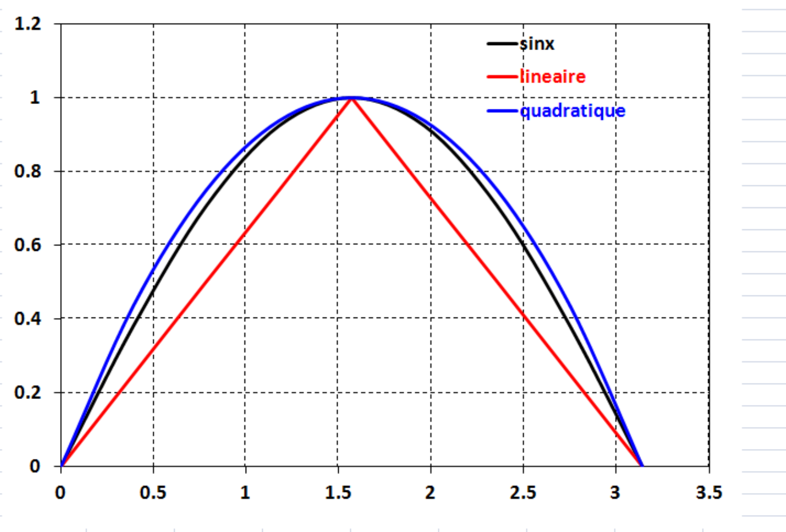
$$g(x) = -\frac{4}{\pi^2}(x^2 - \pi x) \quad \Rightarrow \quad g(x) = \frac{4}{\pi^2}x\,(\pi - x)$$

Représentation graphique

Interpolation linéaire : $g(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & pour\ x\epsilon\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \\ -\frac{2}{\pi}x + 2 & pour\ x\epsilon\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right] \end{cases}$

Interpolation quadratique et de Lagrange : $g(x) = \frac{4}{\pi^2}x\,(\pi - x)$

valeur	x	sinx	lineaire	quadratique
0	0	0	0	0
pi/8	0.39269908	0.38268343	0.25	0.4375
pi/4	0.78539816	0.70710678	0.5	0.75
3pi/8	1.17809725	0.92387953	0.75	0.9375
pi/2	1.57079633	1	1	1
5pi/8	1.96349541	0.92387953	0.75	0.9375
6pi/8	2.35619449	0.70710678	0.5	0.75
7pi/8	2.74889357	0.38268343	0.25	0.4375
pi	3.14159265	1.2251E-16	0	0



Exercices sur l'Interpolation et approximation

Exercice 1 :

La température initiale d'un objet est de $0°C$, puis de $5°C$ après une minute et $3°C$ après deux minutes. On utilisera les températures absolues (en Kelvin). On note que $T_{(K)} = t_{(°C)} + 273$.

1- Quelle est sa température à $30\ secondes$ si on procède à une approximation linéaire du temps?
2- Déterminer par interpolation quadratique, la température à $30\ secondes$.
3- une quatrième mesure donne une température de $0°C$ après $3\ minutes$. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange sur les quatre mesures. Calculer la température à $30\ secondes$.

***NB** : dans tout l'exercice, on exprimera le temps en minutes.*

Indications :

1- $T = 5t + 273$ *; pour* $t = 30s = 0{,}5min \Rightarrow T = 275{,}5K$

2- $T = -3{,}5t^2 + 8{,}5t + 273$ *; pour* $t = 30s = 0{,}5min \Rightarrow T = 276{,}375K$

3- $T = \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \times 273 + \frac{(t-0)(t-2)(t-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \times 278 + \frac{(t-0)(t-1)(t-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \times 276 + \frac{(t-0)(t-1)(t-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \times 27$

pour $t = 30s = 0{,}5min \Rightarrow T = 276{,}75K$

Exercice 2 :

On veut calculer $ln(529{,}62)$. Dans une table de logarithme népérien, on trouve :

x	529	530
$ln(x)$	6,270988	6,272877

1- déterminer une valeur approximative de $ln(529{,}62)$ par la méthode de Lagrange.
2- Déterminer l'erreur $\varepsilon(529{,}62)$.
3- Comparer la valeur approchée de $ln(529{,}62)$ avec celle calculée par une machine.

Indications :

$$ln(x) = \frac{(x-530)}{(529-530)} \times 6{,}270988 + \frac{(x-529)}{(530-529)} \times 6{,}272877 \Rightarrow ln(529{,}62) = 6{,}2721592$$

$$\varepsilon(529{,}62) = \left|(529{,}62-529)(529{,}62-530)\frac{f''(c)}{2!}\right| = 4.10^{-7}$$

avec $f''(c) = sup|f''(x)| = sup\left|-\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{529^2}$

La valeur calculée par la machine est : $ln(529{,}62) = 6{,}2721598$

Exercice 3 :

Le tableau de valeurs expérimentales a été obtenu en mesurant la vitesse en km/h d'un véhicule toutes les $5\ secondes$.

$t\ (s)$	$V\ (km/h)$
0	55
5	60
10	58
15	54

1/ interpolation linéaire et quadratique

a) représenter graphiquement la vitesse en fonction du temps.
b) quelle est la vitesse du véhicule à $t = 2{,}5\ s$ si l'on procède à une approximation linéaire du temps entre 0 et 5 secondes ?
c) trouver par interpolation quadratique à partir des temps $t = 0; 5; 10\ s$, la vitesse du véhicule lorsque $t = 2{,}5\ s$.

2/interpolation de Lagrange

Le polynôme d'interpolation de Lagrange est le polynôme de degré n passant par les $n+1$ points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_k, y_k), \cdots, (x_n, y_n)$. La formule générale est :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{L_k(x)}{L_k(x_k)} y_k$$

Avec $L_k(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$

a) montrer que $P_n(x_j) = y_j$
b) donner l'ordinogramme de la méthode de Lagrange
c) déterminer le polynôme de Lagrange à partir de tous les points du tableau. En déduire la vitesse à $t = 2{,}5\ s$.
d) placer la vitesse à $t = 2{,}5\ s$ sur la courbe $v = f(t)$ pour les 3 méthodes
e) conclure sur les 3 méthodes.

<u>Indications</u> *:*

1/ interpolation linéaire et quadratique

$v = 0{,}28t + 15{,}3$ *; d'où pour* $t = 2{,}5s$ *alors* $v = 16\ m/s$ *ou* $57{,}6\ km/h$.

$v = -0{,}04t^2 + 0{,}48t + 15{,}3$ *; d'où pour* $t = 2{,}5s$ *alors* $v = 16{,}25\ m/s$ *ou* $58{,}5\ km/h$.

2/ interpolation de Lagrange

$$P_n(x_j) = 0 \times y_1 + 0 \times y_2 + \cdots + \frac{L_k(x_j)}{L_k(x_j)} \times y_j + \cdots + \cdots = y_j$$

pour $t = 2{,}5s$ *alors* $v = 16{,}34\ m/s$ *ou* $58{,}82\ km/h$

Chapitre 4 : Méthode des moindres carrés

Problème :

Soit un tableau donnant les mesures de la caractéristique intensité-tension d'un dipôle linéaire. Trouver par la méthode des moindres carrés, la valeur de la résistance. On montrera par le calcul que la caractéristique est de la forme $U = a\,I + b$ où b est une valeur que l'on négligera.

I (A)	0	0.005	0.01	0.012	0.017	0.02	0.024	0.028	0.03
U (V)	0	0.5	1	1.3	1.6	2	2.3	2.8	3

1- Principe de la méthode

Le problème intervient au cours de l'interprétation des résultats expérimentaux. Considérons le problème posé. On pourrait songer à représenter $U(I) = f(x)$ par une ligne passant par tous les points expérimentaux. De toute évidence, cela n'a pas de sens du point de vue physique, et on devra au contraire représenter $f(x)$ par une courbe passant par tous les points expérimentaux, ou alors ne passant par aucun d'eux.

Une première méthode consiste à tracer à « l'œil » la fonction $g(x)$ censée représenter le mieux possible la fonction $f(x)$ décrite par les points expérimentaux.

Evidemment, il est préférable d'avoir une méthode plus sûre. Pour cela :

- On choisit une forme de fonction $g(x)$ censée représenter $f(x)$. g(x) est choisit, soit parce qu'elle correspond à la forme qu'on attend pour les résultats, soit d'après la configuration des résultats. Ainsi, $g(x)$ peut-être :
  - Une loi linéaire $g(x) = ax + b$
  - Une loi exponentielle $g(x) = ae^{bx}$
  - Une loi polynômiale $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$
- On détermine les différents paramètres de la loi $g(x)$ de telle sorte que $g(x)$ passe le plus près possible des points expérimentaux ; c'est-à-dire si la quantité S est minimum avec :

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - g(x_i)]^2$$

En d'autres termes, si :

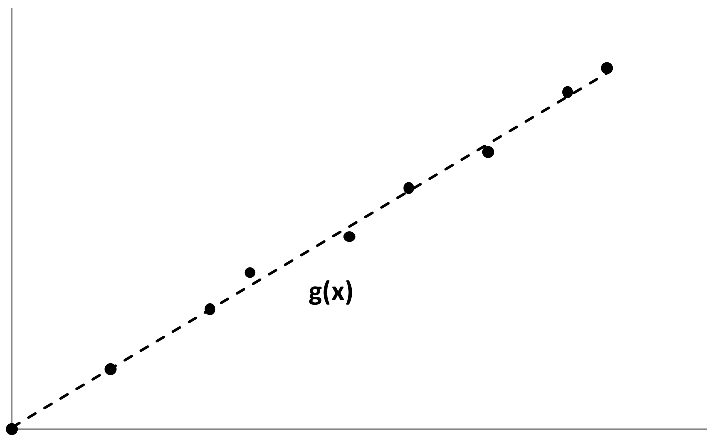
$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0\ ;\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0\ ;\ \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0\ ;\ \cdots ;\ \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0$$

On obtient un système de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues.

2- Loi linéaire ou droite des moindres carrés

C'est le cas où on choisit pour $g(x)$ un polynôme de degré 1 représenté par une droite (voir figure ci-dessous) de la forme :

$g(x) = ax + b = a_0 x + a_1$



La quantité S étant minimale, on :

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial a_0}\left\{\sum_{i=1}^{n} [y_i - a x_i - b]^2\right\} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \{-2x_i[y_i - a x_i - b]\} = 0$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \qquad (1)$$

De la même manière :

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial b}\left\{\sum_{i=1}^{n}[y_i - ax_i - b]^2\right\} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\{-2[y_i - ax_i - b]\} = 0$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2nb = 0 \qquad (2)$$

On a donc un système de 2 équations à 2 inconnues.

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Après résolution, les coefficients a et b de $g(x) = ax + b$ sont tels que :

$$a = \frac{n(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)\,(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$b = \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)\,(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)}$$

3- Loi exponentielle

Si $g(x) = ae^{bx}$ on peut se ramener au cas linéaire en posant :

$$ln\big(g(x)\big) = lna + bx$$

Au lieu de prendre comme points expérimentaux (x_i, y_i) on prendra plutôt $\big(x_i, ln(y_i)\big)$

La résolution se ramène à celle de la droite des moindres carrés en posant :

$A = ln(a)$, $B = b$, et $h(x) = ln\big(g(x)\big)$

D'où $h(x) = A + Bx$

Exercices sur la Méthode des moindres carrés

Exercice 1 : **étude de la balance de Cotton**

Au cours d'une expérience sur la balance de Cotton, une étudiante est amenée à faire varier le courant I_e dans l'électro-aimant, le courant dans la balance étant fixée à $I_b = 4{,}75\ A$. Pour chaque valeur de I_e, elle équilibre la balance en plaçant des masses sur le plateau. Les résultats de cette expérience sont consignés dans le tableau ci-dessous:

I_e	$M(g)$	$B(T)$
0,6	5	0,49
0,8	7	0,69
1	8	0,79
1,2	10	0,98
1,4	12	1,18
1,6	14	1,38

a) Marquer sur un graphique les points expérimentaux $B = f(I_e)$.

b) Déterminer par la méthode des moindres carrés, la loi linéaire $B = f(I_e)$. et représenter cette courbe sur le graphique précédent.

c) On démontre que $B = \frac{Mgd_2}{I_bLd_1}$ et on pose que $d_1 = d_2 = 15cm; L = 2{,}1cm; g = 9{,}8\ ms^{-2}$. Sachant que $I_{e_1} = 0{,}5A\ et\ I_{e_2} = 2A$, déterminer les masses $(M_i)_{i=1,2}$ nécessaires à l'équilibre de la balance.

Indications :
b) la loi linéaire $B = f(I_e) = 0{,}87\ I_e - 0{,}04$
c) $B = 98{,}25\ M.\ pour\ \ I_e = 0{,}5A\ \ alors\ \ B = 0{,}4T\ et\ M = 4{,}1\ g$
$pour\ \ I_e = 2A\ \ alors\ \ B = 1{,}7T\ \ et\ \ M = 17\ g$

Exercice 2 : méthode des moindres carrés

Les données suivantes concernent la population des Etats-Unis en millions d'habitants.

Année	1920	1930	1940	1950	1960	1970
Population ($\bar{M}$)	105,711	123,203	131,669	150,697	179,323	203,212

Trouver l'équation de la droite des moindres carrés correspondant à ces valeurs et estimer la population aux années 1910, 1965 et 2000.

NB : on exprimera les résultats à 10^{-3} près. On suppose que l'unité qui exprime le nombre d'habitants est $\bar{M}$ avec $1\ \bar{M} = 10^6 = 1\ million$.

On montre que pour une droite des moindres carrés de la forme $y = ax + b$, les coefficients a et b sont :

$$a = \frac{n(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)\ (\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$b = \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)\ (\sum_{i=1}^{n} y_i)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)}$$

Indications :
La droite des moindres carrés est $population(\overline{M}) = 1.928\ année - 3601.508$
Pour l'année 1910 $population(\overline{M}) = 1.928\ \times 1910 - 3601.508 = 80.972$

Pour l'année 1965 $population(\overline{M}) = 1.928\ \times 1965 - 3601.508 = 187.012$

Pour l'année 2000 $population(\overline{M}) = 1.928\ \times 2000 - 3601.508 = 254.492$

Exercice 3 : **Constante de raideur d'un ressort**
Selon la loi de Hooke, quand une force est appliquée à un ressort construit avec un même matériau, la longueur de ce ressort est une fonction linéaire de la force appliquée. On peut écrire la fonction linéaire comme étant $F(l) = k(l - E)$ où $F(l)$ est la force appliquée pour étirer le ressort d'une longueur l, E une constante représentant la longueur initiale du ressort quand aucune force n'est appliquée et k la constante de raideur du ressort que l'on veut déterminer. On donne le tableau de mesures suivant :

$l\ (m)$	$F\ (N)$
8.3	3
11.3	5
14.4	8
15.9	10

Calculer la valeur de k si on suppose que $E = 5.3m$.

Indications :
la loi linéaire $F(l) = k(l - E) =\ 0{,}912\ (l - E)$ – $0{,}047$. *D'où* $k = 0{,}912\ Nm^{-1}$

Chapitre 5 : Dérivation numérique

Problème

Lors de la décharge d'un condensateur de capacité $C = 10^{-5}\,F$ dans un dipôle non linéaire, on a relevé les tensions suivantes aux bornes du condensateur (voir tableau) :

t (ms)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
U (V)	4.0	3.5	3.0	2.0	1.1	0.7	0.5	0.4	0.3

On note que l'intensité qui a parcouru le circuit est de la forme $i = -C\,\frac{dU}{dt}$
Déterminer l'intensité du courant pour chaque valeur du temps t_i. En déduire la valeur maximale de l'intensité du courant qui a circulé dans le circuit.

Introduction

Le calcul numérique de la dérivée point par point intervient :

- Pour une fonction dont la dérivée a une fonction analytique complexe.
- Pour une fonction que l'on connaît seulement en certains points (voir problème ci-dessus)

A partir des valeurs de $f(x)$ en différents points, on calculera donc une approximation de la dérivée première et des autres dérivées successives.

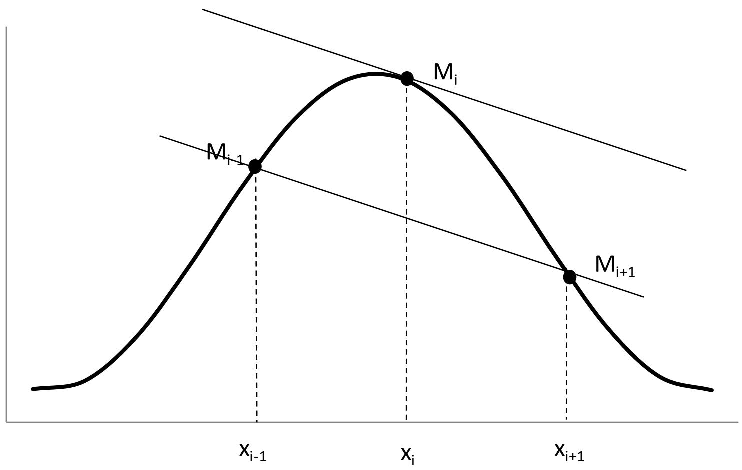
Par exemple, si l'on connaît la position d'une particule à intervalles de temps réguliers, on peut obtenir sa vitesse et son accélération par le calcul des dérivées.

I- Cas d'une fonction définie en des points régulièrement espacés

1- Méthode des différences centrées

On suppose qu'on connaît $f(x)$ en des points régulièrement espacés, c'est-à-dire que $x_{i+1} = x_i + h$, avec h le pas ou l'intervalle entre deux valeurs consécutives.

Pour calculer les dérivées successives $f^{(n)}(x)$, on utilise les points situés de part et d'autre de x_i.



a) *Dérivée première $f'(x)$*

On sait que : $f(x_{i+1}) = f(x_i + h)$

Car $x_{i+1} = x_i + h$ et $x_{i-1} = x_i - h$

En utilisant un développement limité de Taylor autour de $h = 0$, on a :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \cdots \qquad (1)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \cdots \qquad (2)$$

Faisons la soustraction des deux termes. On obtient :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}f'''(x_i)$$

En posant $\theta(h^2) = \frac{h^2}{3!}f'''(x_i)$ et en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à h^2, une approximation de la dérivée première est :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

On note que la tangente en M_i (voir figure ci-dessus) est remplacée par la droite $M_{i-1}M_{i+1}$. Plus h est petit, c'est-à-dire x_{i-1} plus proche de x_{i+1}, plus le résultat est proche de la valeur exacte de $f'(x)$.

b) *Dérivée seconde $f''(x)$*

Faisons une addition des équations (1) et (2). On obtient :

$$f(x_i + h) + f(x_i - h) = 2f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \theta(h^4)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à h^4, une approximation de la dérivée seconde est :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + h) + f(x_i - h) - 2f(x_i)}{h^2} = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i)}{h^2}$$

c) *Tableau récapitulatif*

Si l'on se réfère aux résultats précédents, on peut constituer une table nous donnant l'expression des dérivées successives.

	$f(x_{i-2})$	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$	$f(x_{i+2})$
$2hf'(x_i)$		-1	0	1	
$h^2 f''(x_i)$		1	-2	1	
$2h^3 f'''(x_i)$	-1	2	0	-2	1
$h^4 f''''(x_i)$	1	-4	6	-4	1

2- Méthode des différences à droite (ou avant)

Pour calculer les dérivées successives $f^{(n)}(x)$, cette méthode utilise les points situés de à droite de x_i, c'est-à-dire $x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, \cdots$.

a) *Dérivée première à droite $\boldsymbol{f'_d(x)}$*

En utilisant un développement limité de Taylor autour de $h = 0$, on a :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \cdots \qquad (3)$$

En posant $\theta(h^2) = \frac{h^2}{2}f''(x_i)$ et en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à h^2, une approximation de la dérivée première à droite est :

$$f'_d(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

Cette approximation est moins bonne qu'avec les différences centrées.

b) *Dérivée seconde à droite $\boldsymbol{f''_d(x)}$*

En utilisant un développement limité de Taylor autour de $h = 0$, on a :

$$f(x_{i+2}) = f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + \frac{4h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{8h^3}{3!}f'''(x_i) + \cdots \qquad (4)$$

Faisons la soustraction des équations (3) et (4). On obtient :

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \theta(h^3)$$

En posant $\theta(h^3) = h^3 f'''(x_i)$ et en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à h^2, une approximation de la dérivée seconde à droite est :

$$f''_d(x_i) = \frac{f(x_i + 2h) - 2f(x_i + h) + f(x_i)}{h^2} = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

c) *Tableau récapitulatif*

Si l'on se réfère aux résultats précédents, on peut constituer une table nous donnant l'expression des dérivées successives.

	Termes des dérivées				
Dérivées	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$	$f(x_{i+2})$	$f(x_{i+3})$	$f(x_{i+4})$
$hf'(x_i)$	-1 *(1)*	1 *(2)*			
$h^2f''(x_i)$	1	-2 *(3)*	1		
$h^3f'''(x_i)$	-1	3	-3	1	
$h^4f''''(x_i)$	1	-4	6	-4	1

<u>Remarque</u> : calcul des coefficients des termes de chaque dérivée.

Connaissant la dérivée première, on en déduit les autres dérivées par un simple calcul. Par exemple, pour le calcul de chacun des différents termes de la dérivée seconde, on soustrait le coefficient de la case 1 (voir tableau) et celui de la case 2 (voir tableau) pour obtenir le coefficient multiplicatif du deuxième terme de la dérivée seconde à la case 3 (voir tableau). Les cases qui n'ont pas de coefficient sont prises égales à 0. Pour le calcul des premiers termes, on suppose que la case contenant l'expression littérale des dérivées est aussi prise égale à 0.

3- Méthode des différences à gauche (ou arrière)

Pour calculer les dérivées successives $f^{(n)}(x)$, cette méthode utilise les points situés de à gauche de x_i, c'est-à-dire $x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}, \cdots$.
On obtient comme dans le cas de la méthode des différences à droite, le même résultat en remplaçant x_{i+1} par x_{i-1}.

a) Dérivée première à gauche $f'_g(x)$

$$f'_g(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

b) Dérivée seconde à gauche $f''_g(x)$

$$f''_g(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_i - h) + f(x_{i-2})}{h^2} = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$$

c) Tableau récapitulatif

Si l'on se réfère aux résultats précédents, on peut constituer une table nous donnant l'expression des dérivées successives.

	Termes des dérivées				
Dérivées	$f(x_i)$	$f(x_{i-1})$	$f(x_{i-2})$	$f(x_{i-3})$	$f(x_{i-4})$
$hf'(x_i)$	1 *(1)*	-1 *(2)*			
$h^2f''(x_i)$	1	-2 *(3)*	1		
$h^3f'''(x_i)$	1	-3	3	-1	
$h^4f''''(x_i)$	1	-4	6	-4	1

<u>Remarque</u> : calcul des coefficients des termes de chaque dérivée.

Connaissant la dérivée première, on en déduit les autres dérivées par un simple calcul. Par exemple, pour le calcul de chacun des différents termes de la dérivée seconde, on prend l'opposé du coefficient de la case 1 (voir tableau) et on l'additionne avec le coefficient de la case 2 (voir tableau) pour obtenir le coefficient multiplicatif du deuxième terme de la dérivée seconde à la case 3 (voir tableau). Les cases qui n'ont pas de coefficient sont prises égales à 0. Pour le calcul des premiers termes, on suppose que la case contenant l'expression littérale des dérivées est aussi prise égale à 0.

II- Cas d'une fonction définie en des points non régulièrement espacés

Il peut arriver que l'on cherche la dérivée en un point x pour une fonction $f(x)$ définie en des points non régulièrement espacés. Dans ce cas, on approche $f(x)$ par un polynôme de degré n (confère chapitre sur l'interpolation). Une approximation de la dérivée est donnée par la dérivée du polynôme trouvé. Dans le cas général, on se contente d'une interpolation linéaire ou quadratique.

1- Approximation linéaire

Si on peut calculer la dérivée de $f(x)$ en un point $x \in [x_i; x_{i+1}]$, on peut approcher $f(x)$ par la droite :

$$P(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\,(x - x_i)$$

D'où :

$$P'(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Les résultats sont bons au centre de l'intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ mais non aux extrémités.

2- Approximation quadratique

Si $x \in [x_{i-1}; x_{i+1}]$, x_i étant le point le plus proche de x, on a :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Avec :

$$P'(x) = 2ax + b$$

Il suffit de trouver les coefficients a, b, c en résolvant le système :

$$\begin{cases} f(x_{i-1}) = ax_{i-1}^2 + bx_{i-1} + c \\ f(x_i) = ax_i^2 + bx_i + c \\ f(x_{i+1}) = ax_{i+1}^2 + bx_{i+1} + c \end{cases}$$

Soit donc :

$$P'(x) = \frac{(2x - x_i - x_{i-1})\, T_i - (2x - x_{i+1} - x_i)\, T_{i-1}}{x_{i+1} - x_i}$$

Avec :

$$T_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad ; \quad T_{i-1} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Résolution du problème

On sait que
$i = -\frac{dq}{dt}$ *lors de la décharge d'un condensateur et,*
$i = \frac{dq}{dt}$ *lors de la charge d'un condensateur.*

Puisque $q = CU$ *on en déduit que* $\frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}$ $\frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}$ *avec* C *qui est une constante*

L'intensité qui a parcouru le circuit sera de la forme $i = -C\frac{dU}{dt}$
La dérivée en 0 *est une dérivée à droite de la forme* $i = -C\ \frac{U(t_1)-U(t_0)}{t_1-t_0}$
La dérivée en 8 *est une dérivée à gauche de la forme* $i = -C\ \frac{U(t_8)-U(t_7)}{t_8-t_7}$
Les autres dérivées sont des dérivées centrales de la forme $i = -C\ \frac{U(t_{i+1})-U(t_{i-1})}{2h}$

On en déduit le tableau suivant :

$t(ms)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$U(V)$	4.0	3.5	3.0	2.0	1.1	0.7	0.5	0.4	0.3
$I(\times 10^{-2} A)$	0.5	0.5	0.75	1.	0.65	0.3	0.1	0.1	0.1

L'intensité maximale qui a parcouru le circuit est de $I = 10^{-2}A$

Exercices sur la Dérivation numérique

Exercice 1: Déplacement d'un mobile

Une voiture de formule 1, assimilée à un point matériel, se déplace en ligne droite lors d'une course. On recueille dans un tableau, la distance parcourue par le mobile en fonction du temps.

$t(s)$	0	2	4	6	8
$x(m)$	20	40	100	200	340

a) calculer à partir des dérivées centrales, la vitesse et l'accélération de la voiture aux temps $t = 2s; 4s; 6s$.
b) calculer, à partir des dérivées à gauche ou à droite, la vitesse et l'accélération de la voiture aux temps $t = 0s; 8s$.
c) quelle est la nature du mouvement? Justifier votre réponse.

Indications

dérivées centrales : $v = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t_{i+1})-x(t_{i-1})}{2h}$; $\quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x(t_{i+1})-2x(t_i)+x(t_{i-1})}{h^2}$ *avec* $h = 2s$

$$\begin{cases} t = 2s \ \Rightarrow v = 20ms^{-1} \ ; \ a = 10ms^{-2} \\ t = 4s \ \Rightarrow v = 40ms^{-1} \ ; \ a = 10ms^{-2} \\ t = 6s \ \Rightarrow v = 60ms^{-1} \ ; \ a = 10ms^{-2} \end{cases}$$

$t = 0s$ *: dérivées à droite :* $v = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{h^2} = 10ms^{-1}$; $\quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x(t_i)-2x(t_{i+1})+x(t_{i+2})}{h^2} = 10ms^{-2}$

$t = 8s$ *: dérivées à gauche :* $v = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t_i)-x(t_{i-1})}{h^2} = 70ms^{-1}$; $\quad a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x(t_i)-2x(t_{i-1})+x(t_{i-2})}{h^2} = a = 10ms^{-2}$

mouvement rectiligne uniformément accéléré car $a = cte$ *et* $\vec{v}.\vec{a} > 0$

Exercice 2: décharge d'un condensateur

Lors de la décharge d'un condensateur de capacité $C = 10^{-5}F$ dans un dipôle non linéaire, on a relevé les tensions suivantes aux bornes du condensateur (voir tableau):

$t(ms)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$U(V)$	4	3,5	3	2	1,1	0,7	0,5	0,4	0,3

a) calculer l'intensité du courant à $t = 0ms$ et à $t = 8ms$ en utilisant respectivement la dérivée à droite et à gauche.
b) calculer l'intensité du courant aux temps $t = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\ ms$ en utilisant la dérivée centrale.
c) compléter le tableau et tracer le graphe $I = f(f)$.
d) déterminer la valeur maximale de l'intensité du courant qui a circulé dans le circuit.

Indications

$h = t_{i+1} - t_i = 1ms$

Pour $t = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\ ms$ *on a une dérivée centrale :* $i(t_i) = -C\frac{dU}{dt} = -C\frac{U(t_{i+1})-U(t_{i-1})}{2h}$

Pour $t = 0ms$ *on a une dérivée à droite :* $i(t_i) = -C\frac{dU}{dt} = -C\frac{U(t_{i+1})-U(t_i)}{2h}$

Pour $t = 8ms$ *on a une dérivée à gauche :* $i(t_i) = -C\frac{dU}{dt} = -C\frac{U(t_i)-U(t_{i-1})}{h^2}$

$I(\times 10^{-2}A)$	*0,5*	*0,5*	*0,75*	*0,95*	*0,65*	*0,3*	*0,15*	*0,1*	*0,1*

$I_{max} = 0{,}95.10^{-2}A$

<u>Exercice 3</u> : calcul de la tension dans un circuit R, L

Dans un circuit avec une tension $E(t)$ et une inductance L, la première loi de Kichhoff donne la relation :

$$E = L\frac{di}{dt} + Ri$$

Où R est la résistance dans le circuit et i le courant. Supposons qu'on a mesuré pour plusieurs valeurs du temps t, l'intensité i. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

$t(s)$	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04
$i(A)$	3,10	3,12	3,14	3,18	3,24

On pose que l'inductance est constante avec $L = 0{,}98\,Henries$. De même, $R = 0{,}142\,Ohms$.

Calculer la tension $E(t)$ pour les 5 valeurs de l'expérience.

<u>Indications</u>

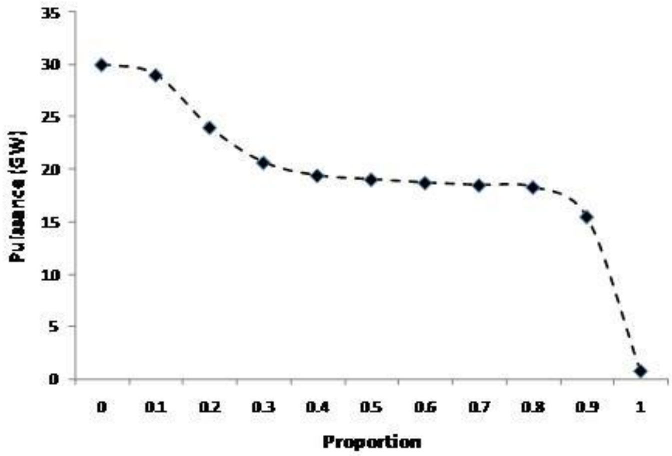
$t(s)$	*1,00*	*1,01*	*1,02*	*1,03*	*1,04*
$E(V)$	*2,400*	*2,403*	*3,386*	*5,352*	*7,320*

Chapitre 6 : Intégration numérique

Problème

On donne la courbe déduite du tableau ci-dessous :

Proportion (x)	Puissance (GW)
0	30.00
0.1	29.00
0.2	24.00
0.3	20.66
0.4	19.41
0.5	19.04
0.6	18.72
0.7	18.49
0.8	18.30
0.9	15.49
1	0.77



Cette courbe indique la proportion de l'année où la demande d'électricité atteint ou dépasse un niveau de puissance donné (en gigawatts ou GW) pour un service d'électricité. L'aire sous cette courbe est tout simplement l'énergie totale E vendue au cours de l'année. Cette donnée est donc importante pour l'entreprise en question. En déduire l'énergie totale E.

On note que $E = \int_{x_i}^{x_f} P\, dx$, avec :

$$E = GW\ année;\ \ P = puissance\ en\ GW;\ x_i = proportion\ initiale;\ x_f = proportion\ finale$$

Introduction

Lorsqu'une fonction $f(x)$ est définie et continue dans l'intervalle $[a;b]$, l'intégration de $f(x)$ est basée principalement sur la relation :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \quad F(b) - F(a)$$

Où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

Cette méthode de calcul n'est pas toujours réalisable si $F(x)$ ne peut s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires, ou si $F(x)$ n'est définie que par un ensemble de valeurs numériques provenant de résultats expérimentaux.

Il est possible d'approcher la valeur de I en évaluant l'aire S comprise entre l'axe (ox) et les parallèles à (oy) menées par a et b. Cette aire est constituée d'une somme finie de n aires élémentaires A_i de base $h = \frac{b-a}{n}$ et de formes plus ou moins complexe et qui caractérise la méthode utilisée. On a :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Avec

$$J = S = \sum_{i=0}^{n} A_i\,; \qquad I = J \pm R(f)$$

$$J = valeur\ approchée\ de\ I; \qquad R(f) = l'erreur$$

<u>**NB**</u> : *il existe plusieurs méthodes, mais dans notre cas, nous n'en étudierons que deux.*

III- Méthode des rectangles

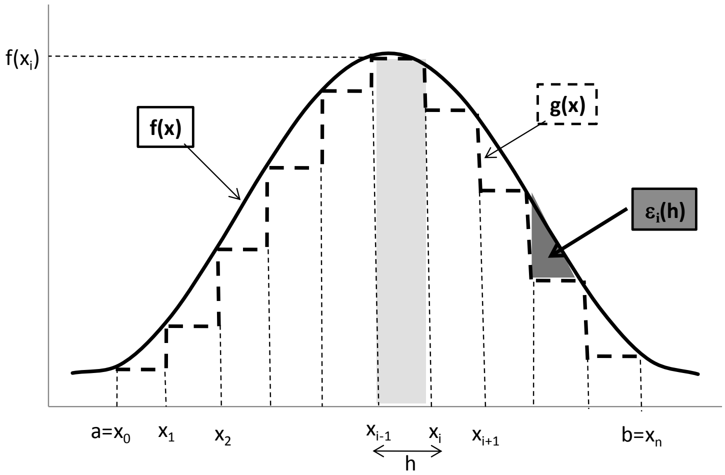
1- Principe

Considérons une subdivision de l'intervalle $[a;b]$ en n parties égales de longueur $h = \frac{b-a}{n}$.

La méthode consiste à remplacer $f(x)$ par une fonction en escalier définie par $g(x_i) = f(x_i)$ (voir figure ci-dessous).

L'aire élémentaire A_i est celle d'un rectangle définie par la base (largeur) h et une hauteur (longueur) $f(x_i)$, soit donc :

$$A_i = h\,f(x_i)$$



La valeur approchée de l'intégrale est de la forme :

$$J = \sum_{i=0}^{n} A_i = \sum_{i=0}^{n} h\, f(x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)$$

Ou encore :

$$J = \frac{b-a}{n}[f(x_0) + \cdots f(x_n)]$$

On sait aussi que $x_i = a + ih$. On peut donc écrire que

$$J = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(a+ih)$$

2- Calcul d'erreur

L'erreur élémentaire $\varepsilon_i(h)$ est la différence entre l'aire en dessous de $f(x)$ délimitée par x_{i-1} et x_i et l'aire en dessous de $g(x)$ délimitée par ces mêmes coordonnées. Soit donc :

$\varepsilon_i(h) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - h\, f(x_{i-1})$ Avec $x_{i-1} = x_i - h$

Posons $F(x)$ la primitive de $f(x)$. Il vient donc que :

$$\varepsilon_i(h) = F(x_i) - F(x_i - h) - hf(x_i - h)$$

Si l'on fait un développement limité de $\varepsilon_i(h)$ autour de $h = 0$, on a :

$$\varepsilon_i(h) = \varepsilon_i(0) + h\varepsilon'_i(0) + \frac{h^2}{2}\varepsilon''_i(0) + \cdots$$

On calcule chaque terme du développement limité et on s'arrête lorsqu'un terme est non nul. On a donc :

- $\varepsilon_i(0) = F(x_i) - F(x_i) - 0 \times f(x_i) = 0$

- $\varepsilon'_i(h) = f(x_i - h) - f(x_i - h) + hf'(x_i - h) = hf'(x_i - h)$

  $\varepsilon'_i(0) = f(x_i) - f(x_i) - 0 \times f'(x_i) = 0$
- $\varepsilon''_i(h) = f'(x_i - h) - hf''(x_i - h)$

  $\varepsilon''_i(0) = f'(x_i) - 0 \times f''(x_i) = f'(x_i) \neq 0$

Soit donc : $\varepsilon_i(h) = \frac{h^2}{2}\varepsilon''_i(0) = \frac{h^2}{2}f'(x_i)$

L'erreur totale est la somme de toutes les erreurs. On a :

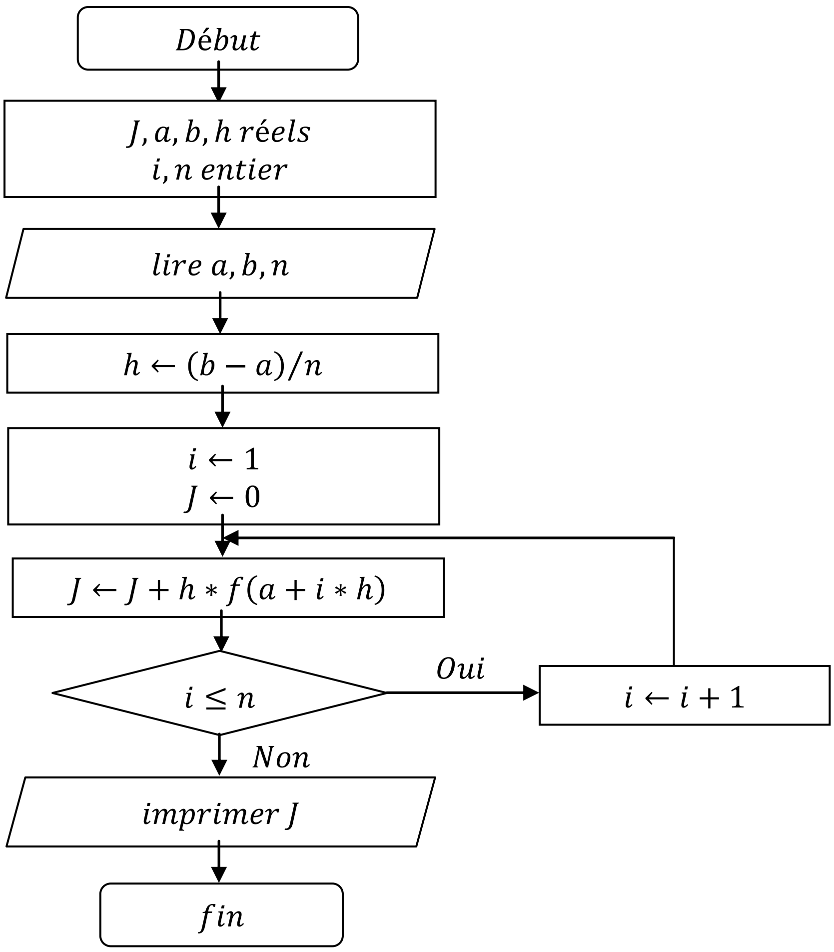
$$R(f) = \sum_{i=0}^{n}|\varepsilon_i(h)| = \frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{n}|f'(x_i)|$$

Posons $M_1 = \max_{i=0,n}|f'(x_i)|$

On montre que : $R(f) \leq \frac{(b-a)^2}{2n^2}\, nM_1$

Soit : $R(f) \leq \frac{(b-a)^2}{n}\, M_1$

3- Algorithme

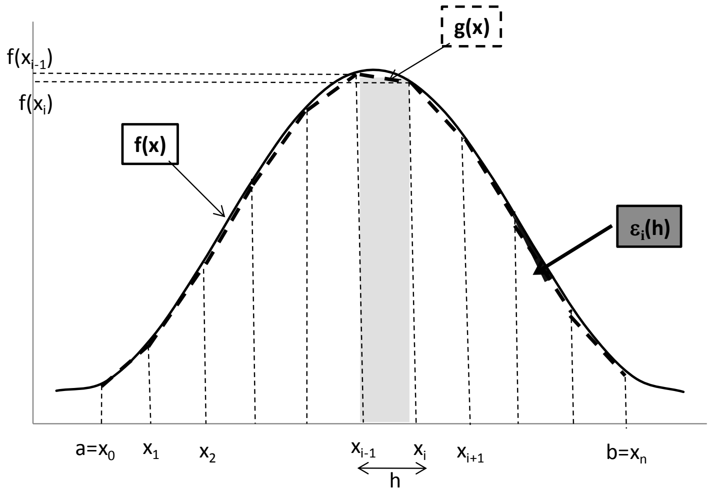


IV- Méthode des trapèzes

1- Principe

Considérons une subdivision de l'intervalle $[a;b]$ en n parties égales de longueur $h = \frac{b-a}{n}$.
La méthode consiste à remplacer $f(x)$ par ligne une brisée définie par $g(x_i) = f(x_i)$ et à calculer l'aire de chaque trapèze élémentaire (voir figure ci-dessous).
L'aire élémentaire A_i du trapèze compris entre x_{i-1} et x_i est celle d'un trapèze définie par la base $f(x_i)$, sa largeur $f(x_{i-1})$ et sa hauteur h, soit donc :

$$A_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) = h\,\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}$$



La valeur approchée de l'intégrale est de la forme :

$$J = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i) + f(x_{i-1})\right)$$

En développant cette expression avec $x_0 = a;\ \ x_n = b$, on a :

$$J = \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$J = \frac{b-a}{2n}[f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)]$$

$$J = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

NB : on peut aussi poser que : $x_i = a + ih$.

2- Calcul d'erreur

L'erreur élémentaire $\varepsilon_i(h)$ est la différence entre l'aire en dessous de $f(x)$ délimitée par x_{i-1} et x_i et l'aire en dessous de $g(x)$ délimitée par ces mêmes coordonnées. Soit donc :

$$\varepsilon_i(h) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - (x_i - x_{i-1})\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}$$

Posons $F(x)$ la primitive de $f(x)$ et $x_{i-1} = x_i - h$. Il vient donc que :

$$\varepsilon_i(h) = F(x_i) - F(x_i - h) - \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_i - h)]$$

Si l'on fait un développement limité de $\varepsilon_i(h)$ autour de $h = 0$, on a :

$$\varepsilon_i(h) = \varepsilon_i(0) + h\varepsilon'_i(0) + \frac{h^2}{2}\varepsilon''_i(0) + \frac{h^3}{6}\varepsilon'''_i(0) + \cdots$$

On calcule chaque terme du développement limité et on s'arrête lorsqu'un terme est non nul. On a donc :

- $\varepsilon_i(0) = F(x_i) - F(x_i) - \frac{0}{2} \times [f(x_i) + f(x_i)] = 0$
- $\varepsilon'_i(h) = f(x_i - h) - \frac{1}{2}f(x_i) - \frac{1}{2}f(x_i - h) + \frac{h}{2}f'(x_i - h) = \frac{1}{2}f(x_i - h) - \frac{1}{2}f(x_i) + \frac{h}{2}f'(x_i - h)$

  $$\varepsilon'_i(0) = \frac{1}{2}f(x_i) - \frac{1}{2}f(x_i) - \frac{0}{2} \times f'(x_i) = 0$$
- $\varepsilon''_i(h) = -\frac{1}{2}f'(x_i - h) + \frac{1}{2}f'(x_i - h) - \frac{h}{2}f''(x_i - h) = -\frac{h}{2}f''(x_i - h)$

  $\varepsilon''_i(0) = 0 \times f''(x_i) = 0$
- $\varepsilon'''_i(h) = -\frac{1}{2}f''(x_i - h) + \frac{h}{2}f'''(x_i - h)$

  $$\varepsilon'''_i(0) = -\frac{1}{2}f''(x_i) + \frac{0}{2} \times f'''(x_i) = -\frac{1}{2}f''(x_i) \neq 0$$

Soit donc :

$$\varepsilon_i(h) = \frac{h^3}{6}\varepsilon'''_i(0) = -\frac{h^3}{12}f'(x_i)$$

L'erreur totale est la somme de toutes les erreurs. On a :

$$R(f) \leq \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i(h)| = \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} |f''(x_i)|$$

Posons $M_2 = \max_{i=1,n}|f''(x_i)|$

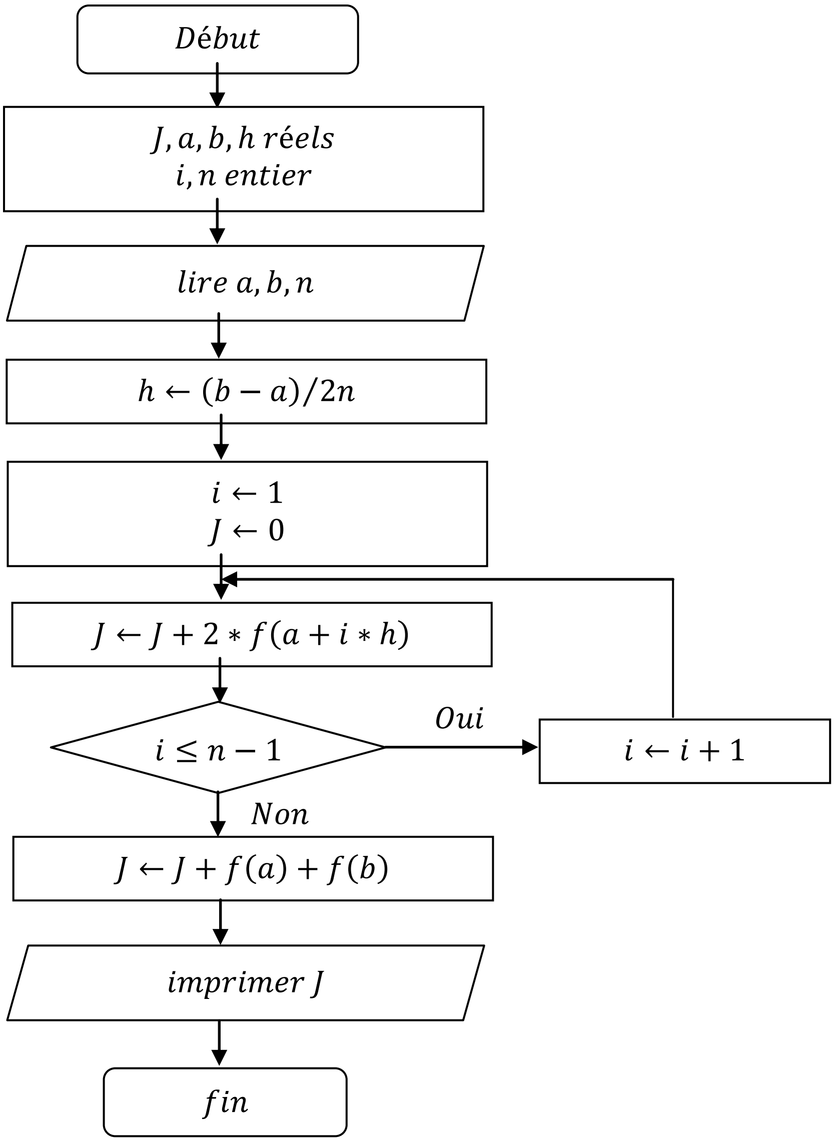
On montre que :

$$R(f) \leq \frac{(b-a)^3}{12n^3}\, nM_2$$

Soit :

$$R(f) \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\, M_2$$

1- Algorithme



Résolution du problème

La proportion est calculée par pas de $h = 0.1$. *On a donc* $n = 10$ *intervalles*.

<u>Méthode des rectangles</u>

$$J = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)$$

$$J = \frac{1-0}{10}(30 + 29 + 24 + 20.66 + 19.41 + 19.04 + 18.72 + 18.49 + 18.3 + 15.49 + 0.77)$$

$J = 21.388\ GW\ année$

L'erreur se calcule en recherchant chaque dérivée première. On ne calculera pas les dérivées à gauche et à droite pour les valeurs extrêmes car elles sont aberrantes. On calculera donc les dérivées centrales pour les autres valeurs (voir tableau ci-dessous).

On note que $M_1 = sup|f'(x)| = 147.2$

D'où

$$R(f) \leq \frac{(1-0)^2}{10} \times 87.65 = 8.765$$

On a donc : $E = J \pm R(f) = (21.388 \pm 8.765)\ GW\ année$

<u>Méthode des trapèzes</u>

$$J = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

$$J = \frac{1-0}{2 \times 10}\big(30 + 0.77 + 2 \times (29 + 24 + 20.66 + 19.41 + 19.04 + 18.72 + 18.49 + 18.3 + 15.49)\big)$$

$J = 19.8495\ GW\ année$

L'erreur se calcule en recherchant chaque dérivée seconde. On ne calculera pas les dérivées à gauche et à droite pour les valeurs extrêmes car elles sont aberrantes. On calculera donc les dérivées centrales pour les autres valeurs (voir tableau ci-dessous).

On note que $M_1 = sup|f''(x)| = 1191$

D'où

$$R(f) \leq \frac{(1-0)^3}{12 \times (10)^2} \times 1191 = 0.9925$$

On a donc : $E = J \pm R(f) = (19.8495 \pm 0.9925)\ GW\ année$

Proportion (x)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Puissance (GW)	30	29	24	20.66	19.41	19.04	18.72	18.49	18.3	15.49	0.77
$f'(x)$		-30	-41.7	-22.95	-8.1	-3.45	-2.75	-2.1	-15	-87.65	
$f''(x)$		-400	166	209	88	5	9	4	-262	-1191	

Exercices sur l'intégration numérique

Exercice 1 : **Déplacement d'une particule dans un fluide**

1) Rappeler le principe de la méthode:

   a) des rectangles

   b) des trapèzes

On donne l'intégrale suivante: $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

2) Rappeler (en les démontrant) les expressions de I, $J_n, R(f)$ pour ces deux méthodes suscitées.

3) Donnez les ordinogrammes de résolution de ces deux méthodes.

4) Application

Si une particule de masse m se déplace dans un fluide, elle est sujette à une force de viscosité R qui est une fonction de la vitesse. La relation entre la résistance R, la vitesse v et le temps t est donnée par l'équation:

$$t = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{m}{R(u)} du$$

supposons que $R(u) = u\sqrt{u}$ où R est en Newton et v en ms^{-1}. Si $m = 10kg, v_0 = 10ms^{-1}$, approximer le temps requis pour que la vitesse diminue jusqu'à $5ms^{-1}$ en utilisant:

   a) la méthode des rectangles avec $h = 1$

   b) la méthode des trapèzes avec $h = 1$

   c) comparer avec la valeur exacte qui est $t = 2{,}6197s$.

NB : On prendra le soin de calculer aussi l'erreur pour chaque méthode.

Indications :

Se référer au cours pour les principes

i	0	1	2	3	4	5
u_i	5	6	7	8	9	10
$f(u_i)$	0,09	0,07	0,05	0,04	0,04	0,03

Méthode des rectangles : $J_n = 3{,}2433\ s;\ R(f) = 0{,}7500\ s\ ;\ t = (3{,}2433 \pm 0{,}7500)\ s$

Méthode des trapèzes : $J_n = 2{,}6380\ s;\ R(f) = 0{,}0417\ s;\ t = (2{,}6380 \pm 0{,}0417)\ s$

La méthode des trapèzes donne une valeur proche de la valeur exacte.

Exercice 2 : Capacité d'un condensateur

Pour déterminer la capacité C d'un condensateur, une méthode simple consiste à le brancher à un générateur de tension $U_g = 3V$ et de mesurer l'intensité du courant $I(t)$ avec un ampèremètre numérique rapide. Les mesures ont donné :

t (ms)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
I (mA)	0	1.027	1.054	0.812	0.556	0.357	0.220	0.132	0.077	0.045	0.025	0.014	0.008	0.004

Dans la suite, on exprimera tous les résultats à 10^{-3} près.

1- Tracer le graphe $I = f(t)$.

2- Déterminer la capacité C (en μF) du condensateur par la méthode des trapèzes.

3- Comparer avec la valeur exacte qui est de $C = 3\mu F$.

Indications :

$C = \frac{1}{U}\int_0^{26} i\,dt\ \ avec\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{26-0}{13} = 2ms$

$C = 2{,}886\ \mu F;\ R(f) = 0{,}722\ \mu F;\ C = (2{,}886 \pm 0{,}722)\ \mu F$

Exercice 3 : Aire d'un disque

Considérons le disque limité par le cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$. Par raison de symétrie, l'aire du disque est le double de l'aire limitée par le demi-cercle d'équation $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ et l'axe (ox).

a) Calculer analytiquement l'aire $S(a) = 2\int_{-a}^{+a} f(x)dx$ du disque en fonction du rayon a. On effectuera un changement de variable en posant $x = acos(t)$.
b) Evaluer J_n et l'erreur $R(f)$ en fonction de a par la méthode des rectangles. On posera que le nombre d'intervalles est $n = 4$.
c) Que vaut, par la méthode des rectangles, la valeur de l'aire $S(a)$ si $a = 20cm$.
d) Comparer les résultats obtenus avec la valeur exacte pour $a = 20cm$.

Indications :

Méthode directe :$S(a) = 2\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 2\int_0^{\pi}(1 - cos2t)\,dt = \pi a^2 = 1257{,}14\ cm^2$

Méthode des rectangles : $S(a) = 2\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}(1 + \sqrt{3}) = 1092{,}82\ cm^2$

$R(f) = \frac{(a+a)^2}{4} \times sup|f'(x)| = \frac{a^2}{\sqrt{3}} = 230{,}94\ cm^2$

Exercice 4 :

La méthode des rectangles consiste à remplacer la fonction f par une fonction g en escalier définie par $g(x_i) = f(x_i)$ pour $x_{i-1} \le x \le x_i$. on donne : $I = \int_a^b sh(x)dx$.

1- Déterminer une valeur approchée de $ch(0{,}5)$ à partir de la table de $sh(x)$ suivant :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$sh(x)$	0	0,1002	0,2013	0,3045	0,4108	0,5211

2- Comparer avec la valeur réelle.

Indications :

$J_n = 0{,}15379$; $R(f) = \frac{(0{,}5-0)^2}{2\times 5} \times 1{,}1276 = 0{,}02819$; $ch(0{,}5) = I + ch(0) \approx J_n + 1 = 1{,}15379$

La valeur réelle est $ch(0{,}5) = 1{,}1276$. *La différence entre la valeur réelle et la valeur calculée est* $\Delta = 1{,}15379 - 1{,}1276 = 0{,}02619$ *qui tend sensiblement vers* $R(f)$.

Chapitre 7 : Méthodes matricielle

Introduction

Dans ce chapitre, nous procéderons par la résolution de certains exercices.

- Lecture et impression d'une matrice ligne par ligne.
- Recopie d'une matrice $A(i,j)$ dans une matrice $B(i,j)$.
- Construction d'une matrice nulle et d'une matrice unité.
- Produit et quotient d'une matrice par un réel non nul.
- Somme, différence et produit de deux matrices.
- Résolution d'un système d'équations par la méthode du pivot de Gauss.
- Résolution d'un système d'équations par la méthode de Jacobi.

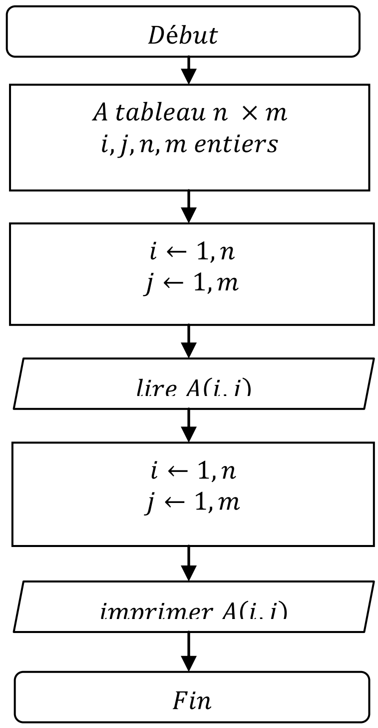
I- Opérations élémentaires

Dans cette partie, nous présenterons uniquement des exemples d'algorithme (ordinogrammes ou pseudo-codes)

1- Lecture et impression d'une matrice ligne par ligne

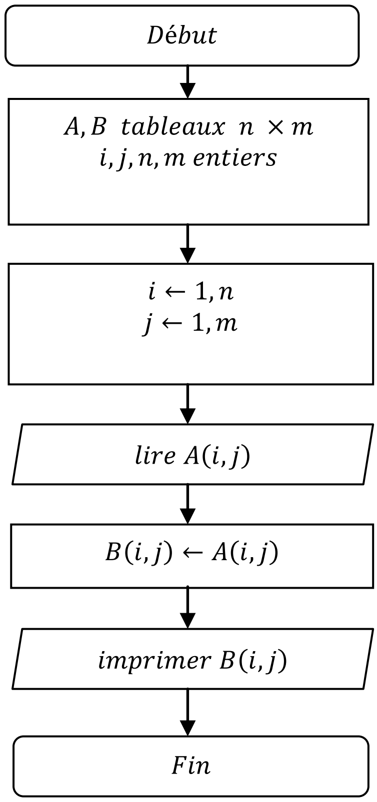
On désire lire tous les éléments d'une matrice et ensuite les afficher ligne par ligne.

Algorithme Lecture_impression
$A\ tableau\ n \times m$
$i, j, n, m\ entier$
Pour $i \leftarrow 1, n$ faire
    Pour $j \leftarrow 1, m$ faire
        $lire\ A(i,j)$
    $fin\ (j)$
$fin\ (i)$
Pour $i \leftarrow 1, n$ faire
    Pour $j \leftarrow 1, m$ faire
        $afficher\ A(i,j)$
    $fin\ (j)$
$fin\ (i)$
fin



2- Recopie d'une matrice $\boldsymbol{A(i,j)}$ dans une matrice $\boldsymbol{B(i,j)}$

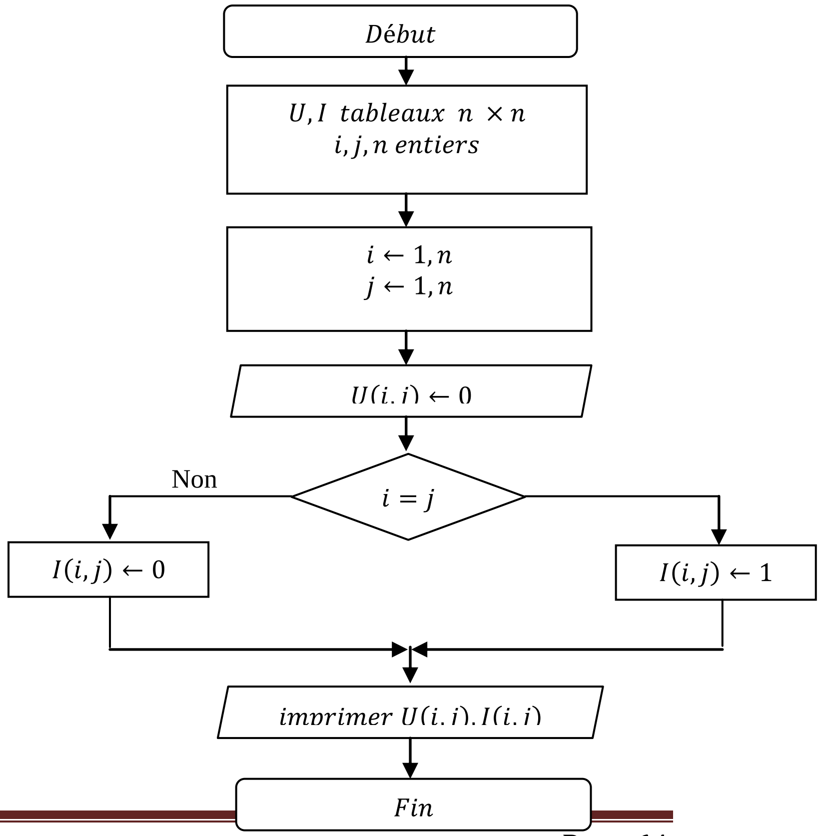
$Algorithme\ Recopie$
$A, B\ tableaux\ \ n\ \times m$
$i, j, n, m\ entier$
Pour $i \leftarrow 1, n$ faire
        Pour $j \leftarrow 1, m$ faire
                $lire\ A(i,j)$
                $B(i,j) \leftarrow A(i,j)$
        $fin\ (j)$
$fin\ (i)$
Pour $i \leftarrow 1, n$ faire
        Pour $j \leftarrow 1, m$ faire
                $afficher\ B(i,j)$
        $fin\ (j)$
$fin\ (i)$
fin



3- Construction d'une matrice nulle et d'une matrice unité

On veut construire une matrice nulle $U(i,j)$ et une matrice unité $I(i,j)$ toutes deux de dimension $n \times n$.

$Algorithme\ Nulle\_unité$
$U, I\ tableaux\ \ n\ \ \times n$
$i, j, n\ entier$
Pour $i \leftarrow 1, n$ faire
        Pour $j \leftarrow 1, n$ faire
                $U(i,j) \leftarrow 0$
                  Si $i = j$ alors
                  $I(i,j) \leftarrow 1$
                  Sinon $I(i,j) \leftarrow 0$
        $afficher\ U(i,j), I(i,j)$
        $fin\ (j)$
$fin\ (i)$
fin



4- Produit et quotient d'une matrice par un réel non nul

On veut multiplier et ensuite diviser une même matrice $A(i,j)$ par un réel α.

$Algorithme\ quotient\_produi$

$A, AP, AQ\ tableaux\ \ n\ \ \times m$

$i, j, n, m\ entier$

Pour $i \leftarrow 1, n$ faire

Pour $j \leftarrow 1, m$ faire

$lire\ A(i,j)$

$AP(i,j) \leftarrow \alpha * A(i,j)$

$AQ(i,j) \leftarrow A(i,j)/\alpha$

$fin\ (j)$

$fin\ (i)$

Pour $i \leftarrow 1, n$ faire

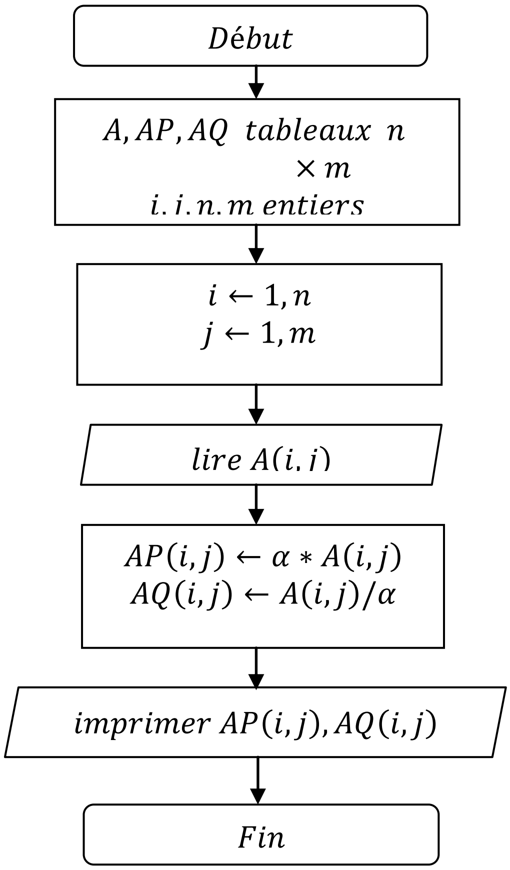
Pour $j \leftarrow 1, m$ faire

$afficher\ AP(i,j), AQ(i,j)$

$fin\ (j)$

$fin\ (i)$

fin



5- Somme, différence et produit de deux matrices

On veut faire la somme $S(i,j)$, la différence $D(i,j)$ et le produit $P(i,j)$ de deux matrices $A(i,j)$ et $B(i,j)$ de dimension $n \times n$.

$Algorithme\ somme\_différence\_produit$

$A, B, S, D, P\ tableaux\ n\ \times n$

$i, j, k, n\ entier$

Pour $i \leftarrow 1, n$ faire

    Pour $j \leftarrow 1, n$ faire

        $lire\ A(i,j), B(i,j)$

        $S(i,j) \leftarrow A(i,j) + B(i,j)$

        $D(i,j) \leftarrow A(i,j) - B(i,j)$

    $fin\ (j)$

$fin\ (i)$

Pour $i \leftarrow 1, n$ faire

    Pour $j \leftarrow 1, n$ faire

        $P(i,j) \leftarrow 0$

        Pour $k \leftarrow 1, n$

        $P(i,j) \leftarrow P(i,j) + A(i,k) * B(k,j)$

        $fin\ (k)$

    $fin\ (j)$

$fin\ (i)$

Pour $i \leftarrow 1, n$ faire

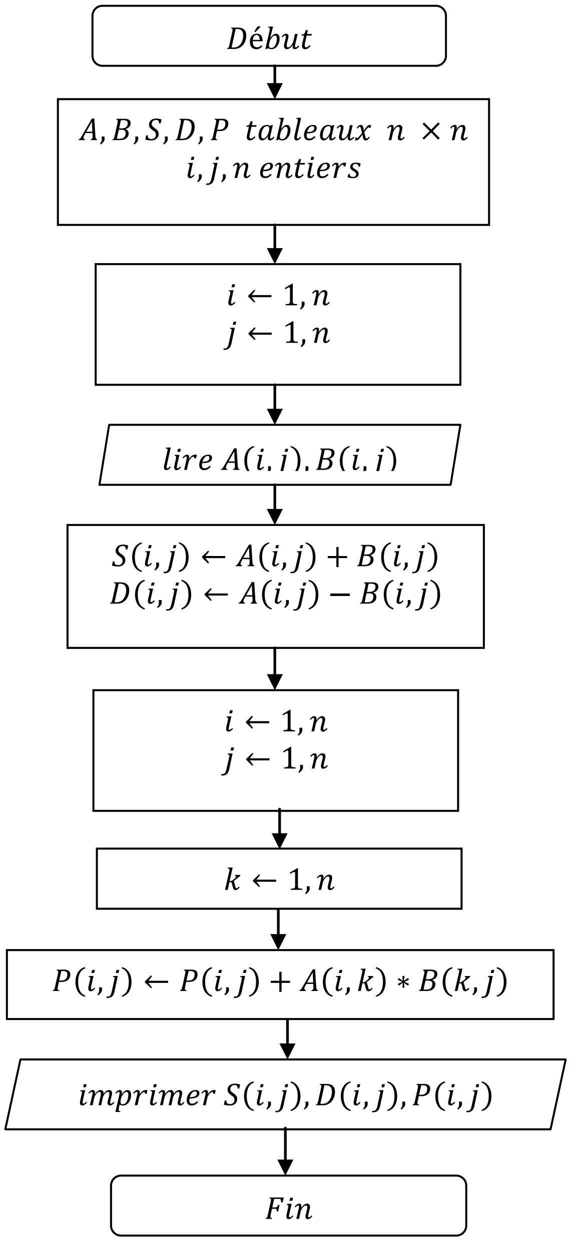
    Pour $j \leftarrow 1, n$ faire

        $afficher\ S(i,j), D(i,j), P(i,j)$

    $fin\ (j)$

$fin\ (i)$

fin



II- Résolution d'un système d'équations par la méthode du pivot de Gauss

Résolvons le système ci-dessous par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} a + b + c = -3 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 5 \end{cases}$$

Pour la résolution, on choisit successivement chaque ligne comme ligne pivot ; le pivot étant le premier élément non nul de la ligne. Ainsi :

- On divise la première ligne par a_{11}. Ensuite,
- On annule le premier terme de chacune des autres lignes :
  - A la deuxième ligne, on retranche la ligne L_1 multipliée par a_{21}, c'est-à-dire $L_2 - L_1 \times a_{11}$
  - A la troisième ligne, on retranche la ligne L_1 multipliée par a_{31}, c'est-à-dire $L_3 - L_1 \times a_{31}$
- On prend maintenant la deuxième ligne L_2 comme ligne pivot et la nouvelle valeur a'_{22} comme élément pivot. On divise L_2 par a'_{22}.
  - A la première ligne, on retranche la ligne L_2 multipliée par a'_{12}, c'est-à-dire $L_1 - L_2 \times a'_{12}$
  - A la troisième ligne, on retranche la ligne L_2 multipliée par a'_{32}, c'est-à-dire $L_3 - L_2 \times a'_{32}$
- On prend maintenant la deuxième ligne L_3 comme ligne pivot et la nouvelle valeur a''_{33} comme élément pivot. On divise L_3 par a''_{33}.
  - A la première ligne, on retranche la ligne L_3 multipliée par a''_{13}, c'est-à-dire $L_1 - L_3 \times a''_{13}$
  - A la deuxième ligne, on retranche la ligne L_3 multipliée par a''_{23}, c'est-à-dire $L_2 - L_3 \times a''_{23}$

Ce mode de calcul annule de ce fait les autres termes de la matrice pour n'obtenir qu'une matrice unité et les valeurs de a, b, c.

Le système à résoudre revient à :

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} L_1/1 \\ \rightarrow \\ \end{matrix} \quad \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} L_2 - 4L_1 \\ \rightarrow \\ L_3 - 9L_1 \end{matrix} \quad \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & -8 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -3 \\ 12 \\ 32 \end{matrix} \quad \begin{matrix} L_2/(-2) \\ \rightarrow \\ \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & -6 & -8\end{matrix}\right|\begin{matrix}-3\\ -6\\ 32\end{matrix} \quad \begin{matrix}L_1 - L_2\\ \rightarrow\\ L_3 + 6L_2\end{matrix} \quad \left|\begin{matrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}3\\ -6\\ -4\end{matrix} \quad \begin{matrix}L_3/1\\ \rightarrow\end{matrix} \quad \left|\begin{matrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}3\\ -6\\ -4\end{matrix} \quad \begin{matrix}L_1 + \frac{1}{2}L_3\\ \rightarrow\\ L_2 - \frac{3}{2}L_3\end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1\\ 0\\ -4\end{matrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases}a = 1\\ b = 0\\ c = -4\end{cases}$$

NB : l'algorithme de résolution n'est pas donné afin de simplifier la compréhension.

III- Résolution d'un système d'équations par la méthode de Jacobi

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\\ \vdots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n\end{cases}$$

On suppose que tous les éléments de la diagonale sont non nuls ($a_{ii} \neq 0$). Dans le cas où un élément de cette diagonale est nulle, on pivote cette ligne avec celle qui la précède ou la suit. A partir d'une approximation initiale, (valeurs arbitrairement choisies) $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ comme dans le cas de la méthode du point fixe, on construit l'algorithme qui consiste à isoler le coefficient de la diagonale de chaque ligne du système. Ainsi on a :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

Remarques :

- On arrête les calculs lorsque deux valeurs successives de x_i sont « suffisamment » voisines. On peut utiliser un critère de convergence absolue :
$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \leq \varepsilon$$
- On utilisera un critère simple de convergence pour montrer la convergence de la méthode comme dans le cas de la méthode du point fixe. On dira donc que la méthode de Jacobi est convergente si la matrice est diagonale strictement dominante, c'est-à-dire, si : $\forall i,\ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$

Exercices sur les méthodes matricielles

Exercice 1 :

Soit le système suivant: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = 18 \end{cases}$

1) montrer que la solution exacte est $(-3; 6;\ -5)$ en résolvant le système par la méthode de Gauss du pivot.

2) on veut maintenant résoudre le système par la méthode de Jacobi

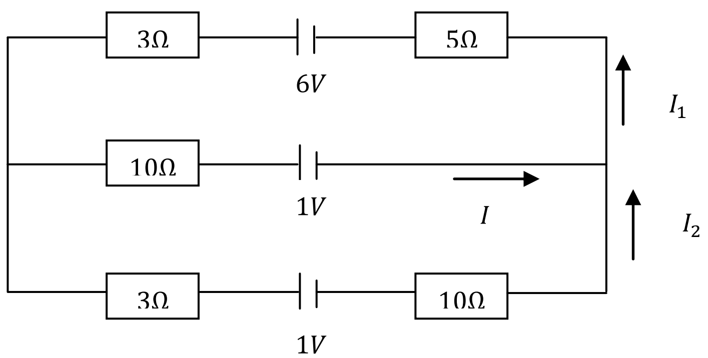
a) montrer que cette méthode est convergente

b) on pose que l'approximation de départ est $(0; 0; 0)$. Retrouver la solution de cette équation après avoir effectué 5 itérations.

Indications :
Méthode de Gauss : $(-3; 6;\ -5)$
Méthode de Jacobi : $(-2{,}65;\ \ 5{,}68\ ;\ -4{,}72)$

Exercice 2 : **circuit électrique**

Soit le circuit ci-dessous. Déterminer par la méthode des mailles, le système qui permet de calculer les courants $I_{1,}\ I_2, I_3$.



Calculer $I_{1,}\ I_2, I_3$ par la méthode du pivot de Gauss.

Indications :
Méthode de Gauss : $(-3; 6;\ -5)$
Méthode de Jacobi : $(-2{,}65;\ \ 5{,}68\ ;\ -4{,}72)$

Sujets d'examen PC2

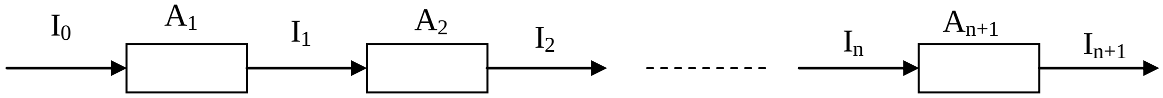
Examen 1ière session 2003-2004

Exercice 1 : les algorithmes

Un étudiant dispose d'amplificateurs identiques de lumières dont la caractéristique donnant l'intensité de sortie I_s en fonction de l'intensité d'entrée I_e pour un amplificateur est modélisée par la relation suivante :

$$I_s = \frac{2I_e}{1 + \frac{I_e}{10}}$$

Il possède un faisceau lumineux d'intensité I_0. Il veut au moyen de ces amplificateurs, arriver à une intensité finale d'au moins I_M. Combien d'amplificateurs doit-il mettre en série au minimum pour y parvenir (voir figure) ?



1- déterminer la relation de récurrence
2- établir l'ordinogramme de résolution
3- simuler la marche de la méthode pour $I_0 = 1$ et $I_M = 8$

n =nombre d'itérations nombre d'amplificateurs	0	1			
I_e	1		⋯		
I_s					

4- quelle est l'intensité finale de sortie I_F?

Exercice 2 : Interpolation de Lagrange

On veut calculer $ln(529{,}62)$. Dans une table de logarithme népérien, on trouve :

x	528	529	530	531
$ln(x)$	6,269096	6,270988	6,272877	6,274762

1- déterminer une valeur approximative de $ln(529{,}62)$ par l'interpolation de Lagrange.
2- Sachant que l'erreur est de la forme $\varepsilon(x) = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right|$ Déterminer l'erreur et comparer la valeur approchée de $ln(529{,}62)$ avec la valeur calculée par une machine.

Exercice 2 : méthodes numériques scalaires

Le but de l'exercice est de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $e^{-x} = x$.

1- Localisation des racines

a) Montrer qu'il existe un réel unique dans l'intervalle $[0; 1]$ noté α, solution de l'équation $e^{-x} = x$.

b) Faire la tabulation de pas 0,1 sur l'intervalle $[0; 1]$ et localiser la racine dans un intervalle J d'amplitude 0,1.

2- Méthode de dichotomie

a) Evaluer le nombre d'itérations nécessaires pour déterminer la solution α à 10^{-5} près pour α localisé dans J.
b) Donner l'algorithme en pseudo-code.

3- Méthode des approximations successives

a) Rappeler le principe et le transcrire en pseudo-code.
b) Application
- Montrer que $f(x) = e^{-x} - x = 0$ peut s'écrire sous la forme $x = 2x - e^{-x}$.
- Que pensez-vous de cette méthode ?

4- Méthode de Newton

a) Déterminer la relation de récurrence entre x_{n+1} et x_n à partir de la méthode de Newton. On pose $g(x_n) = x_{n+1}$.
b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$. Exprimer $g'(x)$ en fonction de f et de ses dérivées.
c) Sachant que g' est monotone sur $I = [0{,}5; 0{,}6]$, montrer que la fonction g vérifie la condition de convergence sur I.
d) Choisir x_0 de manière que la méthode converge vers α.
e) Calculer les 4 premiers termes de la suite (x_n). Quelle est la précision obtenue ?

Examen 2ième session 2004-2005

Exercice 1 : Période des oscillations d'une sphère plongée dans un liquide

Une sphère de rayon R, à moitié submergée dans un liquide, est plongée à une profondeur $p \in [0,\ R]$ puis relâchée. On veut calculer la période T des oscillations de cette sphère par la relation : $T = 8R\sqrt{\frac{R}{g(6R^2-p^2)}}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2 sin^2 t}}$

1) Soit $I = \int_a^b f(x)\,dx = J_n + \Re(f)$ où J_n est la valeur approchée et $\Re(f)$ est l'erreur.

a- Montrer que par la méthode des trapèzes, $J_n = \frac{b-a}{n} = \left(\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big) + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)\right)$ et $\Re(f) \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}M''$ où n est le nombre d'intervalles de même base et $M'' = \sup_{x\in[a\,,b]}|f''(x)|$.

b- Donner l'ordinogramme de calcul de J_n.

2) L'intervalle $[0, 2\pi]$ étant divisé en $n = 4$ intervalles de même longueur, déterminer l'expression de la période T des oscillations par la méthode des trapèzes (on ne calculera pas l'erreur).

3) a- On pose que $k^2 = \frac{p^2}{6R^2-p^2}$ avec $0 \leq k \leq 1$. En déduire que la période des oscillations est égale à : $T = 8\pi k\frac{R}{p}\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\right)$

b- si $M'' = \sup_{x\in[a\,,b]}|f''(x)| = \left|f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$, calculer l'erreur $\Re(f)$ en fonction de k.

4) on donne $g = 10\ ms^{-2}$ et $R = 1\ m$. Calculer la période T des oscillations pour $p = 1$ ainsi que l'erreur correspondante.

Exercice 2 : Cinématique du point

1) Montrer que les expressions de la dérivée première centrée à l'ordre 1 et de la dérivée seconde centrée à l'ordre 1 d'une fonction f en un point x_i ont respectivement :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h} \text{ et } f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1})+f(x_{i-1})-2f(x_i)}{h^2}$$

2) Une voiture de formule 1, assimilée à un point matériel, se déplace en ligne droite lors d'une course. On recueille les données suivantes :

$t(s)$	0	2	4	6	8
$x(m)$	20	40	100	200	340

a) calculer la vitesse et l'accélération de la voiture aux temps $t = 2s; t = 4s\ et\ t = 6s$.
b) calculer la vitesse et l'accélération de la voiture aux temps $t = 0s\ et\ t = 8s$ (on utilisera les dérivées première à gauche ou à droite au point x_i de la fonction f).
c) quelle est la nature du mouvement? Justifier votre réponse.

Exercice 3 : Méthode Matricielle

Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss. On prendra le soin de définir chaque étape de calcul. On exprimera les résultats des étapes sous la forme fractionnaire.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 4x - y + z = 5 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$$

Examen 1ière session 2007-2008

Exercice 1 : Dérivées

1) Donner sans les démontrer, les expressions de la dérivée centrale à l'ordre 1, de la dérivée à gauche à l'ordre 1 et de la dérivée à droite à l'ordre 1.
2) Une voiture de formule 1, assimilée à un point matériel se déplace en ligne droite lors d'une course. On recueille les données suivantes :

t(s)	0	2	4	6	8
x(m)	20	40	100	200	340

a- Calculer, à partir des dérivées centrales, la vitesse et l'accélération de la voiture aux temps t=2s, t=4s et t=6s.

b- Calculer, à partir des dérivées à gauche ou à droite, la vitesse et l'accélération de la voiture aux temps t=0s et t=8s.

c- Quelle est la nature du mouvement ? Justifier votre réponse.

On donne :

$$f_g''\ (x_i) = \frac{f(x_i)-2f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^2} \ ; \quad f_d''\ (x_i) = \frac{f(x_i)-2f(x_{i+1})+f(x_{i+2})}{h^2}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1})+f(x_{i+1})-2f(x_i)}{h^2} \ ;$$

Les expressions de la dérivée à gauche, à droite et centrale à l'ordre 2.

Exercice 2 : Méthode matricielle

Soient les points $M_1\,(1\ ,0)$; $M_2\,(2\ ,2)$ et $M_3\,(3\ ,5)$ du plan.

Trouver l'équation de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ passant par ces trois points. (On spécifiera chaque étape du calcul).

Problème : Méthodes numériques scalaires

Un mobile décrit un mouvement rectiligne uniformément varié d'équation : $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0$.

On pose $x_0 = -c$ (c>0) ; $a_0 = 2\,ms^{-2}$, $v_0 = 0\,ms^{-1}$ et $x(t) = f(t)$

On veut évaluer le temps t (t>0) nécessaire au mobile pour passer par le point origine. Pour cela on résoudra l'équation : $f(t) = t^2 - c = 0$

1) **Localisation de la racine**

a- Montrer qu'il existe une solution unique $t_s \in [0\,;+\infty[$.

b- En déduire les valeurs de c pour lesquelles $t_s \in [0\,;c[$.

2) **Méthode de dichotomie**

On considère maintenant que l'intervalle de départ est $[0\,;c]$. On utilise la méthode de dichotomie pour résoudre l'équation.

a- Donner les 7 premières valeurs, avec 5 chiffres significatifs, de t_i en remplissant le tableau suivant (on pose c=5).

Indice i	0	1	2	3	4	5	6
Borne inférieure a_i	0						
Borne supérieure b_i	c						

t_i							

b- Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une erreur $\varepsilon \leq 10^{-\beta}$ avec $\beta \epsilon N^*$ dans les cas suivants : $\beta = 3$ et $\beta = 5$

3) Méthode des approximations successives

a- Pour évaluer le temps t, on propose la méthode suivante : $A_0 \begin{cases} t_o \\ t_{n+1} = \frac{t_n}{2c}(3c - t_n^2) \end{cases}$

- Pour quelles valeurs de t_o la méthode A_0 converge-t-elle ?
- Représenter géométriquement la marche de la méthode pour t_o=2s (on prendra $c =$ 5).
- Donner les 6 première valeurs, avec 5 chiffres significatifs, de t_i

Indice i	0	1	2	3	4	5
t_i						

b- On propose maintenant une seconde méthode A_1 : $A_1 \begin{cases} t_o \\ t_{n+1} = t_n - kf(t_n) \end{cases}$, $k \in IR$

Pour quelles valeurs de k, la convergence de la méthode est-elle assurée dans l'intervalle $[0 ; c]$?
On donne $f'(t) = M_1$ avec M_1=sup{$f'(t)$}.

4) Interpolation de Lagrange

a- Trouver le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les points (0 ; 0) ; (4 ; 2) ;
(9 ; 3). On notera $P(t)$ ce polynôme.
b- En déduire $P(5)$.
c- Calculer l'erreur $\mathcal{E}(5)$.
d- En déduire un encadrement du temps (t), mis par le mobile pour passer le point origine.

Examen 1^{ière} session 2008-2009

Exercice 1 : Algorithme et Méthode numérique scalaire

On veut déterminer le volume V occupé par $N = 1000$ molécules de dioxyde de carbone (considéré comme un gaz) de température $T = 300\,K$ et de pression $P = 3{,}5.10^5\ Pa$. L'équation d'état qui lie P (en Pa), V (en m^3) et T (en K) est telle que :

$$\left[P + a\left(\frac{N}{V}\right)^2\right](V - Nb) = kNT \quad \text{avec } a = 0{,}4\,P_a m^6\ ;\ b = 42{,}7.10^{-6}\,m^3\ ;\ k = 1{,}38.10^{-23}\,JK^{-1}$$

1/ Algorithme

Soit $[\alpha\ ;\ \beta]$ l'intervalle de départ qu'on subdivise en plusieurs petits intervalles de longueur h ; α et β étant des réels. On suppose que le volume V recherché appartient à l'un de ces intervalles. Donner l'ordinogramme qui permet de localiser pas à pas le volume V.

2/ Méthode de Dichotomie

a) Faire la tabulation de pas $10^{-2}\,m^3$ de la fonction $f(V) = \left[P + a\left(\frac{N}{V}\right)^2\right](V - Nb) - kNT$ dans l'intervalle $]0\ ;\ 0{,}1]$ et localiser V entre deux réels consécutifs. Soit I l'intervalle trouvé.

b) Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour trouver le volume V par la méthode de dichotomie. On pose que l'erreur admise est de $10^{-3}\,m^3$.

3/ Méthode des approximations successives

a) On pose que $f(V) = V - g(V) = 0$. Montrer que $g(V) = \dfrac{kNT}{P + a\left(\frac{N}{V}\right)^2} + Nb$.

b) Montrer que $V = 0{,}043m^3$ est un point fixe de $g(V)$.

c) Calculer $\lim\limits_{V\to\infty} g(V)$. Si on suppose que $\dfrac{kT}{bP} << 1$, montrer que $\lim\limits_{V\to\infty} g(V) = Nb$. En déduire la valeur V du volume occupé par le gaz.

Exercice 2 : intégration numérique et dérivée

I- Intégration numérique

1/ Rappeler le principe de la méthode des trapèzes.

2/ on veut étudier l'intégrale $I = \int_a^b f(x)\,dx$ par la méthode des trapèzes. On pose $I = J_n \pm R(f)$. J_n est la valeur approchée de I ; $R(f)$ l'erreur avec $|R(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12\,n^2} M_2$ où $M_2 = \sup \left| f''\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)\right|$ avec $i = 0, \cdots, n$.

a) Démontrer que $J_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right) + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)\right)$ où n est le nombre d'intervalles de même base.

b) Ecrire le pseudo-code qui calcule J_n.

II- Dérivées

1/ Donner par la démonstration, l'expression de la dérivée seconde centrale à l'ordre 1.
2/ Donner sans les démontrer, les expressions de la dérivée seconde à gauche à l'ordre 1 et de la dérivée seconde à droite à l'ordre 1

III- Application

Pour déterminer la capacité $C = \int_a^b f(t)\,dt$ (avec $f(t) = \frac{I(t)}{U}$) d'un condensateur, une méthode simple consiste à le brancher à un générateur de tension $U_g = 3\ V$ et de mesurer l'intensité du courant $I(t)$ avec un ampèremètre numérique rapide. Les mesures ont donné :

t (ms)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
I (mA)	0	1.027	1.054	0.812	0.556	0.357	0.220	0.132	0.077	0.045	0.025	0.014	0.008	0.004

Dans la suite, on exprimera tous les résultats à 10^{-3} près.

a) déterminer la capacité C (en μF) du condensateur par la méthode des trapèzes.

b) calculer, à partir de la dérivée à gauche ou à droite, $f''(t)$ aux points $t = 0\ s$ et $t = 26\ s$. Compléter le tableau.

c) calculer, à partir de la dérivée centrale, $f''(t)$ aux points $t = 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24\,s$. Compléter le tableau.

d) En déduire l'erreur $|R(f)|$.

e) Donner un encadrement de la valeur de la capacité C en μF.

Examen 2ième session 2008-2009

Exercice 1 : Interpolation et méthodes matricielle

On veut déterminer la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ qui passe par les points $M_1(1;-3)$; $M_2(2;0)$ et $M_3(3;5)$.

1- Trouver $f(x)$ en résolvant le système ci-dessous par la méthode du pivot de Gauss. On prendra le soin de spécifier toutes les étapes du calcul :

$$\begin{cases} a+b+c=-3 \\ 4a+2b+c=0 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases}$$

2- Trouver $f(x)$ en utilisant le polynôme d'interpolation de Lagrange sur les trois points suscités.

Exercice 2 : Méthodes numériques scalaires

Un étudiant veut résoudre l'équation $f(x) = x^2 - 4 = 0$.

1- De combien de racines dispose $f(x)$ et dans quel intervalle I_1 sont-elles contenues ?

2- On suppose maintenant que $I_1 = [-3.5; 3.5]$. Faire la tabulation de pas 1 de $f(x)$ et déterminer l'intervalle I_2 tel que la racine recherchée $\alpha > 0$.

3- On suppose que l'intervalle I_2 contient la racine α recherchée. Dans le but de calculer α, l'étudiant dispose maintenant de deux méthodes A_1 et A_2 de la forme $x = g(x)$ avec : $A_1 = \begin{cases} x_0 \in I_2 \\ g_1(x) = x - (x^2 - 4) \end{cases}$ et $A_2 = \begin{cases} x_0 \in I_2 \\ g_2(x) = \frac{x}{8}(12 - x^2) \end{cases}$

a) Laquelle de ces deux méthodes va-t-il choisir ? pourquoi ?

b) On suppose que l'étudiant opte pour la méthode A_2. Simuler la marche de la méthode pour $x_0 = 1.6$ et $\Delta\alpha = 10^{-3}$. Quelle est la valeur de α ?

c) Pour quelles valeurs de α la convergence de la méthode A_2 est-t-elle quadratique ?

4- L'étudiant veut maintenant utiliser la méthode A_1, pour calculer la racine α. Pour cela, il force la convergence de celle-ci en introduisant alors un coefficient réel k. La nouvelle méthode A_3 obtenue est telle que : $A_3 = \begin{cases} x_0 \\ g_3(x) = x - kf(x) \end{cases}$. Pour quelles valeurs de k la méthode A_3 convergerait-elle ?

Exercice 3 : méthode des moindres carrés

Les données suivantes concernent la population des Etats-Unis en millions d'habitants.

Année	1920	1930	1940	1950	1960	1970
Population ($\bar{M}$)	105.711	123.203	131.669	150.697	179.323	203.212

Trouver l'équation de la droite des moindres carrés correspondant à ces valeurs et estimer la population aux années 1910, 1965 et 2000.

NB : on exprimera les résultats à 10^{-3} près. On suppose que l'unité qui exprime le nombre d'habitants est $\bar{M}$ avec $1\ \bar{M} = 10^6 = 1\ million$.

On montre que pour une droite des moindres carrés de la forme $y = ax + b$, les coefficients a et b sont :

$$a = \frac{n(\sum_{i=1}^n x_i\, y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)\,(\sum_{i=1}^n y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

$$b = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n x_i\, y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i^2)\,(\sum_{i=1}^n y_i)}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2 - n(\sum_{i=1}^n x_i^2)}$$

Examen 1ière session 2012-2013

Dans un circuit avec une tension $V(t)$ et une inductance constante $L = 0{,}98\ Henries$, la première loi de Kichhoff donne la relation :

$$V = L\frac{dI}{dt} + RI$$

Où $R = 0{,}142\ Ohms$ est la résistance dans le circuit et I le courant. Un étudiant a mesuré l'intensité I pour des valeurs du temps t. Lors de la retranscription des résultats consignés dans le tableau ci-dessous, une valeur de l'intensité a été involontairement omise.

$t\ (en\ seconde)$	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
$I\ (en\ Ampère)$	3.10	3.12		3.18	3.24
$V\ (en\ Volt)$					
$P''(t_i)$					

I- Interpolation et approximation

L'étudiant se propose de déterminer la valeur manquante de l'intensité par diverses méthodes.

1/ déterminer cette intensité par interpolation linéaire à partir des deux valeurs qui l'encadrent.

2/ si l'on considère les valeurs d'intensité aux temps $t = 1.01\ s,\ t = 1.03\ s,\ t = 1.04\ s$, déterminer l'intensité au temps $t = 1.02\ s$ à partir de l'interpolation de Lagrange.

II- Dérivées

On suppose maintenant, et pour la suite du sujet, que la valeur de l'intensité au temps $t = 1.02\ s$ est $I = 3.14\ A$.

Soit une fonction $P(t) = V(t) \times I(t)$ qui a pour expressions des dérivées seconde à droite et seconde à gauche :

$$P''_d(t_i) = \frac{P(t_i + 2h) - 2P(t_i + h) + P(t_i)}{h^2}$$

$$P''_g(t_i) = \frac{P(t_i) - 2P(t_i - h) + P(t_i - 2h)}{h^2}$$

Où h est la différence entre deux valeurs consécutives du temps t.

1/ Démontrer que les expressions littérales de la dérivée première centrale de I et de la dérivée seconde centrale de P sont respectivement :

$$I'(t_i) = \frac{I(t_i + h) - I(t_i - h)}{2\ h}$$

$$P''(t_i) = \frac{P(t_i + h) - 2P(t_i) + P(t_i - h)}{h^2}$$

2/ Donner sans les démontrer, les expressions de la dérivée première à gauche $I'_g(t_i)$ et de la dérivée première à droite $I'_d(t_i)$ de I.

3/ Compléter le tableau en calculant les valeurs de V et des dérivées secondes de P à 10^{-3} près (*il n'est pas nécessaire de présenter les calculs réalisés. Seuls les résultats du tableau sont demandés*).

III- Intégration numérique

L'étudiant veut maintenant calculer l'énergie électrique $E = \int_a^b P(t)\,dt$ sur toute la période de l'expérience en se servant des résultats du tableau. Pour ce faire, il utilise la méthode des trapèzes pour laquelle il démontre que $E = J \mp \Delta$ avec :

$$J = \frac{b-a}{2n}\left(P(a) + P(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} P(t_i)\right)$$

$$\Delta \leq \frac{(b-a)^3}{12\,n^2} \times sup|P''(t_i)|$$

Où J est la valeur approchée de E et Δ l'erreur. On notera que $P(t) = V(t) \times I(t)$ est la puissance électrique instantanée et n est le nombre d'intervalles de même base.

1/ Rappeler le principe de la méthode des trapèzes.

2/ Calculer les valeurs de J et de Δ à 10^{-3} près.

3/ En déduire un encadrement de l'énergie électrique.

Examen 2ième session 2012-2013

Dans le cadre d'un projet d'ingénierie chimique, on a besoin de connaître le volume molaire ($v_m\ en\ m^3/mol$) du dioxyde de carbone (CO_2) sur une échelle de températures et de pressions afin de pouvoir construire un conteneur adéquat. On utilise 2 lois pour calculer le volume molaire. Les pressions et les températures auxquelles on s'intéresse sont les couples de données suivantes $(10^5\ P_a\ , 300\ K)$ et $(10^7\ P_a\ , 700\ K)$:

3- ***La loi des gaz parfaits*** : $PV = nRT$ où P est la pression, V le volume, n le nombre de moles, R la constante des gaz parfaits et T la température absolue.

Calculer à 10^{-6} près, le volume molaire $v_m = \frac{V}{n}$ pour chaque couple de données selon la loi des gaz parfaits.

4- ***La loi de Van Der Wall*** : $\left(P + \frac{a}{{v_m}^2}\right)(v_m - b) = RT$ où $v_m = \frac{V}{n}$ est le volume molaire et a, b des constantes empiriques qui dépendent du gaz. On pose que $f(v_m) = \left(P + \frac{a}{{v_m}^2}\right)(v_m - b) - RT$.

d) **Tabulation** : Faire la tabulation de pas $0.01\ m^3/mol$ de la fonction f dans l'intervalle $[0.02\,;0.06]$ et localiser v_m entre deux réels consécutifs pour chacun des couples. Soit $I_1\ et\ I_2$ les intervalles trouvés pour chaque couple.

e) **Dichotomie** : Pour chacun des couples, combien d'itérations faudrait-il pour calculer v_m par la méthode de dichotomie ? L'erreur admise est $\Delta v_m = 10^{-5}\ m^3/mol$.

f) **Newton** : L'approximation de départ est $v_0 = 0.02\ m^3/mol$. Calculer par la méthode de Newton, la valeur du volume molaire v_m pour chacun des couples. L'erreur admise est $\Delta v_m = 10^{-3}\ m^3/mol$.

5- ***Comparaison*** : Comparer les valeurs de v_m obtenues par les deux lois. Laquelle des lois choisira-t-on ?

6- ***Interpolation de Lagrange*** : On veut maintenant calculer la pression P pour une valeur de température $T = 500K$. Utiliser la méthode d'interpolation de Lagrange sur les 2 couples de données pour évaluer cette pression.

Données :

$R = 0.082;\quad a = 3.592;\quad b = 0.043$

Correction des sujets d'examen PC2

Examen 1ière session 2003-2004

Exercice 1 : Les algorithmes

1- Pour un amplificateur, l'intensité de sortie en fonction de l'intensité d'entrée est :

$$I_s = \frac{2I_e}{1 + \frac{I_e}{10}}$$

Si nous ramenons cette relation à la figure 1, l'intensité de sortie en fonction de l'intensité d'entrée pour le premier amplificateur sera : $I_1 = \frac{2I_0}{1+\frac{I_0}{10}}$. Pour le second amplificateur, I_1 devient I_E, d'où la relation : $I_2 = \frac{2I_1}{1+\frac{I_1}{10}}$. De proche en proche, on peut donc avoir :

$$I_1 = \frac{2I_0}{1 + \frac{I_0}{10}}$$

$$I_2 = \frac{2I_1}{1 + \frac{I_1}{10}}$$

$$\vdots$$

$$I_{n+1} = \frac{2I_n}{1 + \frac{I_n}{10}}$$

On vient ainsi de déterminer la relation de récurrence.

2- Ordinogramme de résolution (A faire par chaque étudiant)

3- imulation de la marche de la méthode pour $I_0 = 1\ et\ I_M = 8$.

$n = nombre\ d'amplificateurs$	0	1	2	3	4	5	6
I_E	1	1	1,82	3,08	4,71	6,40	7,80
I_s		1,82	3,08	4,71	6,40	7,80	8,77

4- L'intensité finale est : $I_F = 8{,}77$

NB : pour arriver à cette intensité, l'étudiant doit mettre un nombre minimum $n = 6$ d'amplificateurs.

Exercice 2 : Interpolation de Lagrange

1- Par définition, le polynôme de Lagrange s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(\prod_{\substack{k=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) f(x_j)$$

j	0	1	2	3
x_j	528	529	530	531
$y_j = ln(x_j)$	6,269096	6,270988	6,272877	6,274762

Le polynôme sera donc :

$$P_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}\,y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\,y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\,y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\,y_3$$

Soit après calcul :

$$\begin{aligned} ln = (529{,}62) = P_3(529{,}62) &= -1{,}044849\,(529{,}62-529)(529{,}62-530)(529{,}62-531) \\ &+ 3{,}135494\,(529{,}62-528)(529{,}62-530)(529{,}62-531) \\ &- 3{,}136439\,(529{,}62-528)(529{,}62-529)(529{,}62-531) \\ &+ 1{,}045794\,(529{,}62-528)(529{,}62-529)(529{,}62-530) \\ &= 6{,}272159597 \end{aligned}$$

2- Calcul de l'erreur

$$\epsilon(529{,}62) = \left|(529{,}62-528)(529{,}62-529)(529{,}62-530)(529{,}62-531)\frac{f^{(4)}(c)}{4!}\right|$$

Où

$\left|f^{(4)}(c)\right| = \sup\left|f^{(4)}(c)\right|$ c'est-à-dire $f^{(4)}(c) = -\frac{6}{(528)^4}$

L'erreur est donc $\epsilon(529{,}62) = 0{,}166.10^{-11}$

La valeur calculée par une machine est $ln = (529{,}62) = 6{,}272159768$

<u>Exercice 3</u> : Méthodes numériques scalaires

1- Localisation des racines

f est monotone. De même, $f(0) = 1$ et , $f(1) = e^{-1} - 1 < 0$. Puisque , $f(0)f(1) < 0$ alors, il existe un réel unique α dans l'intervalle $[0; 1]$ solution de $f(x) = 0$.

Faisons donc une tabulation de pas 0,1 sur [0; 1].

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$	1	0,80	0,62	0,44	0,27	0,11	-0,05	-0,20	-0,35	-0,49	-0,63

On constate que $f(0{,}5)f(0{,}6) = 0{,}11 * (-0{,}05) < 0$. La racine α se trouve donc dans l'intervalle $J = [0{,}5\,; 0{,}6]$.

2- Méthode de dichotomie

A la $n^{ième}$ itération, on aura effectué une division de 2^n fois. L'incertitude est donc :

$\frac{(0{,}6-0{,}5)}{2^n} \leq 10^{-5}$ soit donc après calculs $n \geq \frac{4ln(10)}{ln(2)} \approx 13\ itérations$

L'algorithme en pseudo-code est :

algorithme dichotomie

début

$a, b, \varepsilon, x_0, x_s$ *des réels*

1- *choisir* a *et* b *tel que* $f(a) * f(b) < 0$

2- *choisir* ε

3- *faire (début)*

- *calculer* $x_0 = \frac{a+b}{2}$
- *si* $f(x_0) * f(a) < 0$ *alors*

$b \leftarrow x_0$

$sinon\ a \leftarrow x_0$

- $jusqu'àce\ que\ \left|\frac{a-b}{2}\right| \leq \varepsilon$
- $fin\ (faire)$

4- $x_s \leftarrow \frac{a+b}{2}$
5- $afficher\ x_s$
6- fin

3- Méthode des approximations successives

- ***Principe de la méthode***

On pose l'équation $f(x) = 0$. On transforme cette équation en une nouvelle équation telle que $x = \varphi(x)$. La solution cherchée se trouve à l'intersection de la bissectrice $y = x$ et de la courbe de $\varphi(x)$. Supposons connue une valeur approchée x_0 de la solution x_s. A x_0 correspond un point M_0 sur la courbe de $\varphi(x)$. Si nous faisons $x_1 = \varphi(x_0)$, x_1 est la nouvelle valeur approchée de x_s. A x_1 correspond M_1 d'ordonnée $\varphi(x_1)$. Ainsi, si nous posons de proche en proche :

$$x_1 = \varphi(x_0)$$
$$x_2 = \varphi(x_1)$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

On définit ainsi une suite qui si elle converge a pour limite x_s.

- ***Pseudo-code***

$algorithme\ approximation$
$début$
$\varepsilon, x_0, x_s\ des\ réels$

1- $lire\ x_0, x_s$
2- $x_0 \leftarrow x$
3- $faire\ (début)$
   - $\varphi(x) \leftarrow x - f(x)$
   - $x \leftarrow \varphi(x)$
   - $jusqu'àce\ que\ |x - x_0| \leq \varepsilon$
- $fin\ (faire)$

4- $afficher\ x_s \leftarrow x$
5- fin

<u>Application</u>

$$e^{-x} - x = 0$$
$$e^{-x} - x - x = -x$$
$$e^{-x} - 2x = -x$$
$$x = 2x - e^{-x}$$

Et on posera que $\varphi(x) = 2x - e^{-x}$

- Calculons la dérivée première de $\varphi(x)$. On a :

$$\varphi'(x) = 2 + e^{-x}$$

On constate que $\forall x \in \Re, e^{-x} > 0$ soit $\varphi'(x) > 2$. La condition de convergence n'étant pas respectée, la méthode diverge.

Méthode de Newton

- La relation de récurrence de la méthode de Newton est : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + \frac{e^{-x_n} - x_n}{e^{-x_n} + 1}$
- Posons que $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, la dérivée est : $g'(x) = \frac{f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2}$
- On sait que $g'(0{,}5) = 0{,}025$; $g'(0{,}6) = -0{,}012$ soit $\forall x \in [0{,}5 ; 0{,}6]$, $|g'(x)| \leq 1$ que g est monotone et décroissante sur $[0{,}5 ; 0{,}6]$. D'où la condition de convergence est vérifiée.
- On montre après calcul (après avoir calculé la dérivée seconde) que $g'(0{,}5)\ g''(0{,}5) < 0\ \ et\ \ g'(0{,}6)\ g''(0{,}6) > 0$ ou encore que
  $$g(0{,}5)\ g''(0{,}5) > 0\ \ et\ \ g(0{,}6)\ g''(0{,}6) < 0$$
  Ainsi, pour que la méthode converge, il faut que $x_0 = 0{,}5$.
- Calcul des 4 premiers termes

n	0	1	2	3
x_n	0,5	0,5663110032	0,5671431650	0,5671432904

La précision obtenue est : $\Delta(x) = |x_3 - x_2| = 0{,}13.10^{-6}$

Examen 2ième session 2004-2005

Exercice 1 :

$$T = 8R\sqrt{\frac{R}{g\left(6R^2 - p^2\right)}}\ \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

1. a) * Montrons pour Jn

$$I = \int_a^b f(x)dx = J_n + R(f).$$

or $Jn = \sum A_i$ $avec$ $A_i = h \bullet \dfrac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}$ la surface d'un trapèze élémentaire, d'où

$Jn = \dfrac{h}{2}\sum\left(f(x_i)+f(x_{i-1})\right)$; $Jn = \dfrac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+...\right)$

$Jn = \dfrac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\left(f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})\right)\right]$ soit

$$Jn = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

Or $h = \dfrac{b-a}{n}$ et $x_i = a + ih = a + i.\dfrac{b-a}{n}$ $et\ aussi$ $x_0 = a, x_n = b$ $d'où$

$$Jn = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)+\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a+i.\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

* <u>Calculons</u> $\alpha(f)$

On sait que :

$\varepsilon_i(h) = \int_{x_{i-4}}^{x_i}(x)dx - A_i = \int_{x_{i-h}}^{x_i}(x)dx - h.\dfrac{f(x_i)+f(x_i-h)}{2}$

Avec $x_{i-1} = x_i - h.$ On a alors

$\varepsilon_i(h) = F(x_i) - F(x_i-h) - \dfrac{h}{2}\left[f(x_i)+f(x_i-h)\right]$ si l'on pose que F est la primitive de f.

Utilisons un développement limité autour de $h = 0.$

- $\varepsilon_i(h) \approx \varepsilon_i(0) + h\varepsilon_i'(0) + \dfrac{h^2}{2}\varepsilon_i''(0) + ...$
- $\varepsilon_i(0) = F(x_i) - F(x_i) - 0 = 0$
- $\varepsilon_i'(h) = f(x_i-h) - \dfrac{1}{2}f(x_i) + \dfrac{h}{2}f'(x_i-h) - \dfrac{1}{2}f(x_i-h) = \dfrac{1}{2}\left[f(x_i-h) - f(x_i) + h f'(x_i-h)\right]$

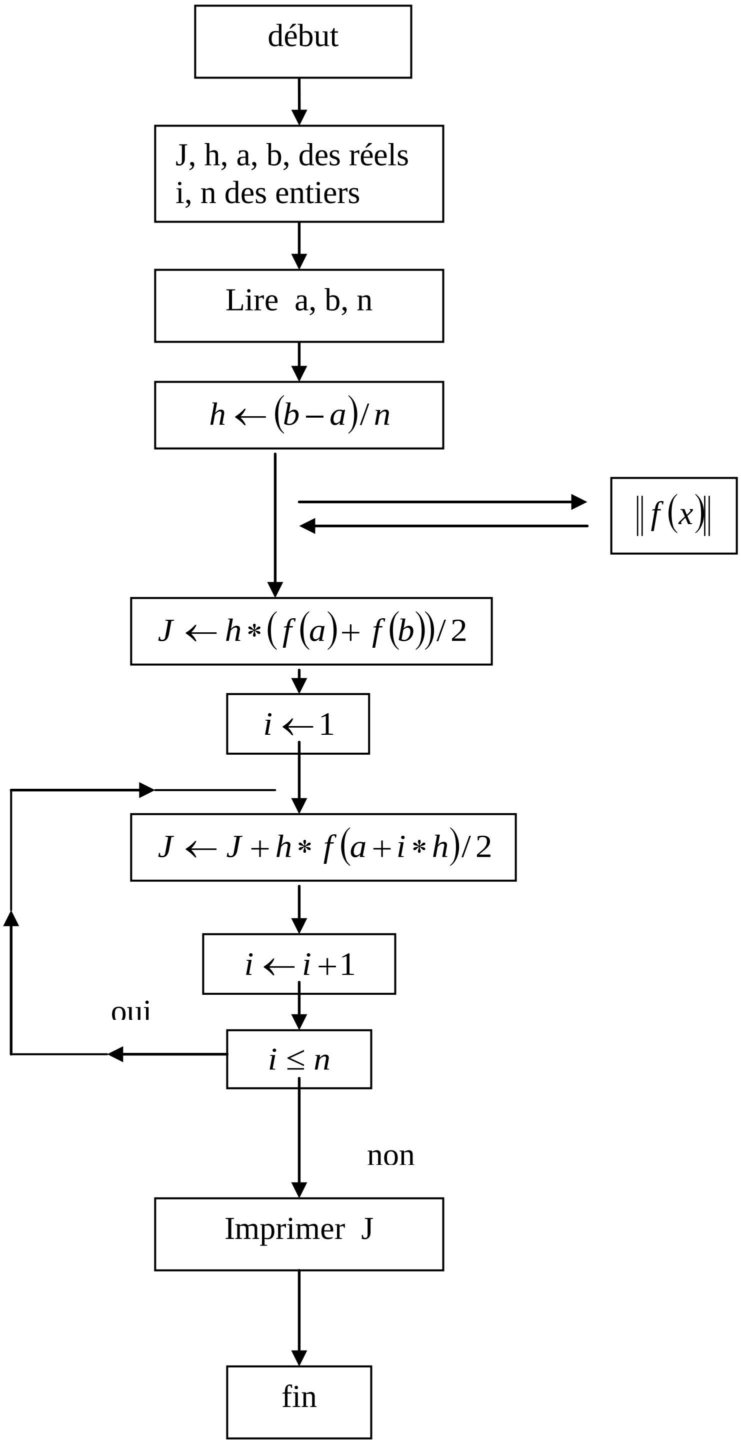
  soit $\varepsilon'_i(0) = 0$
- $\varepsilon''_i(h) = \dfrac{1}{2}\left[-f'(x_i-h)+f'(x_i-)-hf''(x_i-h)\right] = -\dfrac{h}{2}f''(x_i-h)$, soit $\varepsilon_i''(0) = 0$
- $\varepsilon_i'''(h) = -\dfrac{1}{2}f''(x_i-h) + \dfrac{h}{2}f''(x_i-h)$, soit $\varepsilon'_i'''(h) = -\dfrac{1}{2}f''(x_i)$

En remplaçant chaque expression pour sa valeur dans $\varepsilon_i(h)$ on obtient :

$$\varepsilon\,(h) = -\frac{h^3}{12} f''(x_i)$$

Ainsi $\left|R(f)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{h^3}{12} \left|f''(x_i)\right|$ soit $R(f) \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M''$ *avec* $M'' = \sup\left|f''(x_i)\right|$

a) <u>Ordinogramme de Calcul</u>



1. *Période T des oscillations*

Posons que $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$

D'après la méthode des trapèzes, on aura :

$$T=8\,R\sqrt{\frac{R}{g\left(6R^2-p^2\right)}}\bullet\frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(t_i)\right]$$

Avec :

$$a=0, b=2\pi, t_i=a+i^{\circ}.\frac{b-a}{n}\Rightarrow t_i=\frac{\pi}{2}i\ ;\ h=\frac{\pi}{2}$$

* Calculons $f(a),\ f(b),\ f(t_i)$

- $i=0\Rightarrow t_i=0=a\Rightarrow f(0)=1$
- $i=1\Rightarrow t_i=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow f(\pi)=\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$
- $i=2\Rightarrow t_i=\pi\Rightarrow f(\pi)=1$
- $i=3\Rightarrow t_i=\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$
- $i=4\Rightarrow t_i=2\pi\Rightarrow f(2\pi)=1$

* Calculons de

$$T=8\,R\sqrt{\frac{R}{g\left(6R^2-p^2\right)}}\ .\ \frac{\pi}{4}\ .\ \left[1+1+\frac{4}{\sqrt{1-\mathrm{k}^2}}+2\right]$$

$$T=8\,R\sqrt{\frac{R}{g\left(6R^2-p^2\right)}}\ .\ \left[1+\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{k}^2}}\right]$$

2. a) *En déduisons T*

$$k\ =\frac{p^2}{6R^2-p^2}\ \ d'où\ \ \frac{k^2}{p^2}=\frac{1}{6R^2-p^2}$$

On aura donc :

$$T=8\,\pi\,R\sqrt{\frac{R}{g}}\ .\frac{k^2}{p^2}.\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\right)$$

$$T=\frac{8\,\pi\,R}{P}\sqrt{\frac{R}{g}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\right]$$

b) Calculons $R(f)$ en fonction de k

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \Rightarrow f(t) = \left(1-k^2\sin^2 t\right)^{-1/2}$$

- $f'(t) = -\frac{1}{2}\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{-3/2}\left(-2k^2\sin t.\cos t\right)$

  $f'(t) = \frac{k^2}{2}\sin 2t\ \left(1-k^2\sin t\right)^{-3/2}$

- $f''(t) = k^2\cos 2t\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{-3/2} + \frac{k^2}{2}\sin 2\ t.\left(-\frac{3}{2}\right)\ .\ \left(-2k^2\sin t.\cos t\right).\ \left(1-k^2\sin^2 t\right)^{-5/2}$

  $f''(t) = k^2\cos 2t\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{-3/2} + \frac{3}{4}k^4(\sin 2\ t)^2\ \left(1-2k^2\sin t\right)^{-5/2}$

- et comme $M'' = \sup\left|f''(x_i)\right| = \left|f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$ d'où $M'' = k^2\left(1-k^2\right)^{-3/2}$
- On aura donc :

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{12n^2}.M''.8\ R\sqrt{\frac{R}{g\left(6R^2-p^2\right)}}\ ;\ R(f) = \frac{8\pi^3}{12\times 16}\ .8R\ .k^2\left(1-k^2\right)^{-3/2}\ .\ \sqrt{\frac{R}{g}\cdot\frac{k^2}{p^2}}$$

$$R(f) = \frac{\pi^3}{3}\ .\ \frac{k^3\left(1-k^2\right)^{-3/2}}{p}\ .\ \sqrt{\frac{R^3}{g}}$$

3. Application numérique

$R = 1\,m$ *et* $P = 1\,m$ *alors* $k = 0{,}447$ d'où : $T = 7{,}5281\,s$ *et* $R(f) = 0{,}4085\ s$

<u>Exercice 2</u> : **<u>Cinématique du point</u>**

1. *<u>Montrons</u>*

On sait que $f(x_{i+1}) = f(x_i+h)$ *et* $f(x_{i-1}) = f(x_i-h)$
avec $x_{i+1} = x_i + h$ *et* $x_i = x_{i-1} + h$ *et* $x_i - x_{i-1} = h$
en utilisant un développement limité de Taylon autour de $h = 0$ on a :

$$f(x_i+h) = f(x_i) + h\,f'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + \dots \quad (1)$$

$$f(x_i-h) = f(x_i) - h\,f''(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) - \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + \dots \quad (2)$$

- En soustrayant (1) et (2) on obtient :

  $f'(x_i) = \frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h} + \frac{h^2}{3}f'''(x_i) + \dots$

  Si on néglige les termes d'ordre supérieur on égal à h^2, on a :

  $f'(x_i) = \frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h} = \frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}$ qui est la dérivée première

- En additionnant (1) et (2) on obtient :

  $f(x_i+h) + f(x_i-h) = 2f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \dots$

  Si on néglige tous les termes strictement supérieurs à h^2 on a :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - h) + f(x_i - h) - 2f(x_i)}{h^2}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + 1) + f(x_i - 1) - 2f(x_i)}{h^2}$$

2. a) <u>Calcul de a et v</u>

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad et \quad v = \frac{dx}{dt}$$

Calculer a et v revient à calculer les dérivées seconde et première. D'où

$$a(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) + x(t_{i-1}) - 2x(t_i)}{h^2} \quad et \quad v = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_{i-1})}{2h}$$

avec $h = t_{i+12} - t_i = 2s$ on aura donc :

- $t = 2s \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{x(4) - x(0)}{4} \\ a = \dfrac{x(4) + x(0) - 2x(2)}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 20\,m/s \\ a = 10\,m/s^2 \end{cases}$
- $t = 4s \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{x(6) - x(2)}{4} \\ a = \dfrac{x(6) + x(4) - 2x(4)}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 40\,m/s \\ a = 10\,m/s^2 \end{cases}$
- $t = 2s \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{x(8) - x(4)}{4} \\ a = \dfrac{x(8) + x(4) - 2x(6)}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 60\,m/s \\ a = 10\,m/s^2 \end{cases}$

b). <u>Expression de</u> f'_g, f'_d, f''_g, f''_d

- $f'_g(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$ $\quad et \quad$ $f''_g(x_i) = \dfrac{f(x_{i-1}) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$
- $f'_d(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$ $\quad et \quad$ $f''_d(x_i) = \dfrac{f(x_{i-1}) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i+2})}{h^2}$

<u>Calculons</u> a et v

- Au point $t = 0s$, on calcule les dérivées à droite

$$v = \frac{x(2) - x(0)}{2} = v = 10\,m/s \text{ et } a = \frac{x(0) - 2x(2) + x(4)}{4} \Rightarrow a = 10\,m/s^2$$

- Au point $t = 8s$, on calcule les dérivées à gauche.

$$v = \frac{x(8) - x(6)}{2} \Rightarrow v = 70\,m/s \text{ et } a = \frac{x(0) - 2x(2) + x(4)}{4} \Rightarrow a = 10\,m/s^2$$

c) <u>Nature du mouvement</u>

Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré car :

1 - $a = cte$ (accélération constante à chaque instant).

2 - $\vec{v}.\,\vec{a} > 0$ à chaque instant.

<u>Exercice 3</u> : <u>Méthode Matricielle</u>

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 4x-y+z=5 \\ x-y+z=5 \end{cases}$$

Par la méthode de Gauss du pivot, on aura :

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right. \xrightarrow{L_1/(1)} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[L_3-(1).L_1]{L_2-(4).L_1} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -3 & -11 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{l_2\,(-5)} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[L_3-(-2).L_2]{L_1-(1).L_2} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & \frac{27}{5} \end{array}\right. \xrightarrow{l_3/(\;)} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right. \xrightarrow[L_2-\left(\frac{3}{5}\right).L_3]{L_1-\left(\frac{2}{5}\right).L_3} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{array}\right.$$

D'où $\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=\frac{9}{2} \end{cases}$

Examen 1ière session 2007-2008

Exercice 1 : Dérivées

4. *Dérivées à l'ordre 1*

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{+1}) - f(x_{i-1})}{2h} \quad ; \quad f'_d(x_i) = \frac{f(x_{+1}) - f(x_i)}{h} \quad ; \quad f'_g(x_i) = \frac{f(x\ ) - f(x_{i-1})}{h}$$

5. *Calcul de la vitesse et de l'accélération*

a) On a : $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_{i-1})}{2h}$ *avec* $h = 2\ s$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dx^2}{dt^2} \Rightarrow a = \frac{x(t_{i+1}) + x(t_{i-1}) - 2x(t_i)}{h^2}$$

- $t = 2s \ \ alors \ \begin{cases} v = \dfrac{x(4) - x(0)}{4} \\ a = \dfrac{x(4) + x(0) - 2x(2)}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 20m/s \\ a = 10m.s^{-2} \end{cases}$
- $t = 4s \ \ alors \ \begin{cases} v = \dfrac{x(6) - x(2)}{4} \\ a = \dfrac{x(6) + x(2) - 2x(4)}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 40m/s \\ a = 10ms^{-2} \end{cases}$
- $t = 6s \ \ alors \ \begin{cases} v = \dfrac{x(8) - x(4)}{4} \\ a = \dfrac{x(8) + x(4) - 2x(6)}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 60m/s \\ a = 10ms^{-2} \end{cases}$

d) à $t = 0\ s,$ on calcule les dérivées à droite

- $t = 0s \ \ alors \ \begin{cases} v = \dfrac{x(2) - x(0)}{2} \\ a = \dfrac{x(0) - 2x(2) + 2(4)}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 10m/s \\ a = 10ms^{-2} \end{cases}$

à $t = 8\ s,$ on calcule les dérivées à gauche

- $t = 8s \ \ alors \ \begin{cases} v = \dfrac{x(8) - x(6)}{4} \\ a = \dfrac{x(8) + x(4) - 2x(6)}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 70m/s \\ a = 10ms^{-2} \end{cases}$

e) Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré en

- $a = cste$ à chaque instant
- $\vec{v}\,.\,\vec{a} > 0$ à chaque instant

<u>Exercice 2</u> : **Méthode de Gauss du pivot.**

On obtient le système :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=2 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases}$$ d'où à résoudre :

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{matrix} \quad \frac{L_2-4.L_1}{L_3-9.L_1} \quad \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & -8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{L_2/(-2)} \left|\begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -6 & -8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{matrix} \quad \frac{L_2-4.L_1}{L_3-(-6).L_2} \quad \left|\begin{matrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{L_3/(+1)} \left|\begin{matrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{matrix} \quad \frac{L_1-L_2}{L_3-\left(\frac{3}{2}\right).L_3} \quad \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{matrix}$$

D'où $$\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=-1 \end{cases}$$

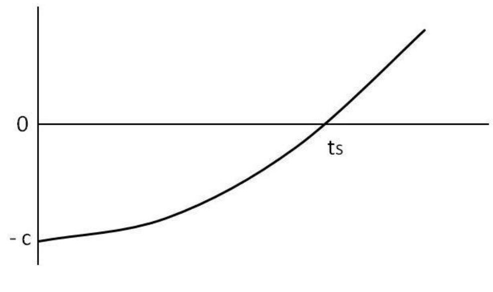
<u>Problème</u> : **Méthodes numériques scalaires**

1. *<u>Localisation de la racine</u>*

$$f(t)=t^2-c \quad \text{soit} \quad f'(t)=2t$$

a) 1ère méthode : Tableau de variation b) 2ème méthode : Représentation graphique

t	0 $+\infty$
f'(t)	+
f(t)	- c ↗ $+\infty$



f est monotone $\forall x \geq 0$ et $f \in [-c;+\infty[$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe une unique solution t_s.

b) Appliquons le théorème de Rolle dans
$[0;c]\, f(0).f(a)<0 \Rightarrow -c(c^2-c)<0.$

$$-c^2(c-1)<0 \Rightarrow c-1>0 \ d'où \ c>1$$

On a donc $\forall c \in]1;+\infty[, t_s \in [0;c].$

2. *Méthode de dichotomie*

a) Soient a et b tels que $f(a).f(b)<0,\ x_0=\dfrac{a+b}{2}.$

Si $f(a).f(b)<0$ alors on remplace b par $t_0(b=t_0)$ sinon $\theta_1=t_0$ ainsi de suite, jusqu'à ce que $|b-a|<\varepsilon.$

I	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
a_i	0	0	1,25	1,875	2,1875	2,1875	2,1875
b_i	c=5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,34375	2,265625
t_i	2,5	1,25	1,875	2,1875	2,34375	2,265625	2,2265625

b) *Nombre d'itérations*

Au bout de n itérations, l'intervalle est divisé par 2^n

$$\left|\frac{b-a}{2^n}\right| \le 10^{-\beta} \Rightarrow n \ge \frac{\ln|b-a|+\beta\ln 10}{\ln 2} \quad \text{or} \quad \begin{matrix} b=c \\ a=0 \end{matrix} \Rightarrow n \ge \frac{\ln c+\beta\ln 10}{\ln 2}$$

- $\beta=3 \Rightarrow n=13$ itérations
- $\beta=5 \Rightarrow n=19$ itérations

3. *Méthode des approximations successives*

$$A_0\begin{cases} t_0 \\ t_{n+1}=\dfrac{t_n}{2c}(3c-t^2{}_n). \end{cases}$$

b) *Convergence de la méthode*

* 1ère méthode : On utilisera un tableau de signes

* 2ème méthode

Posons $g(A)=\dfrac{t}{2c}(3c-t^2)$ d'où $g'(t)=\dfrac{3}{2c}(c-t^2).$

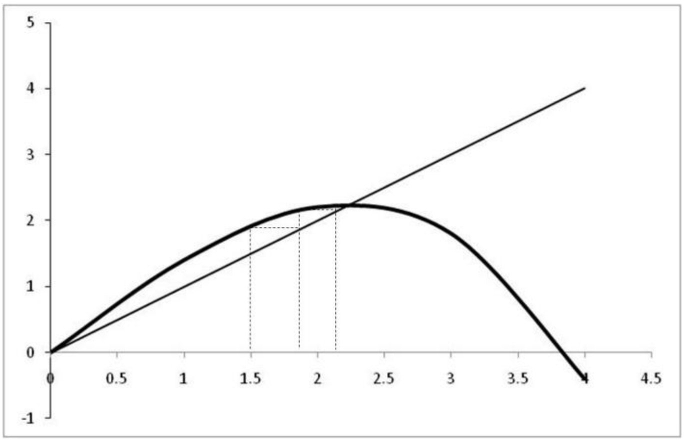
La méthode est convergente si $|g'(A)|<1$d'où

$-1<\dfrac{3}{2c}(c-t^2)<1$ Soit $\dfrac{c}{3}<t^2<\dfrac{5c}{3}$ si $t=t_0$. Ce qui donne $t_0 \in \left]\sqrt{\dfrac{c}{3}};\sqrt{\dfrac{5c}{3}}\right[$

Pour $c=5 \Rightarrow t_0 \in]1,29;2,88[.$

* <u>Marche de la méthode</u>

t	0	1	2	3	4	5
	0	14,4	2,2	1,8	-0,4	-5



<u>Tableau de valeurs</u>

I	0	1	2	3	4	5
t_i	2	2,2	2,2352	2,236067	2,236068	2,236068

4. *<u>Interpolation de Lagrange</u>*

a)

t	0	4	8
$f(A)$	0	2	3

Le polynôme d'interpolation est de la forme :

$$P(A) = -\frac{t(t-9)}{10} + \frac{t(t-4)}{15} \ ; \ P(A) = \frac{-3t(t-3)}{30} + \frac{2+(t-4)}{30} \ ; \ P(A) = \frac{t(t-4)}{15} - \frac{t(t-9)}{10}$$

Soit donc $P(A) = \dfrac{t(19-t)}{30}$

b) $P(5) = \dfrac{5(19-5)}{30} \Rightarrow P(A) = 2{,}333$

c) L'erreur est de la forme :

$$\varepsilon(x) = \left| \frac{(x-0)(x-4)(x-9)}{3?} \right| .M_3 \ avec \ M \ = \sup\left| f'''(x) \right|$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \ ; \ f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

d'où $\quad f'''(4) = \dfrac{2}{64} \approx 0{,}03125 \ \ et \ \ f'''(9) = \dfrac{2}{9^3} \approx 0{,}0027 \Rightarrow M_3 = 0{,}03125$

- $\varepsilon(5) = \left| \dfrac{(5-0)(5-4)(5-9)}{3 \times 2 \times 1} \right|$ x $0{,}03125 \Rightarrow \varepsilon(5) \approx 0{,}104$

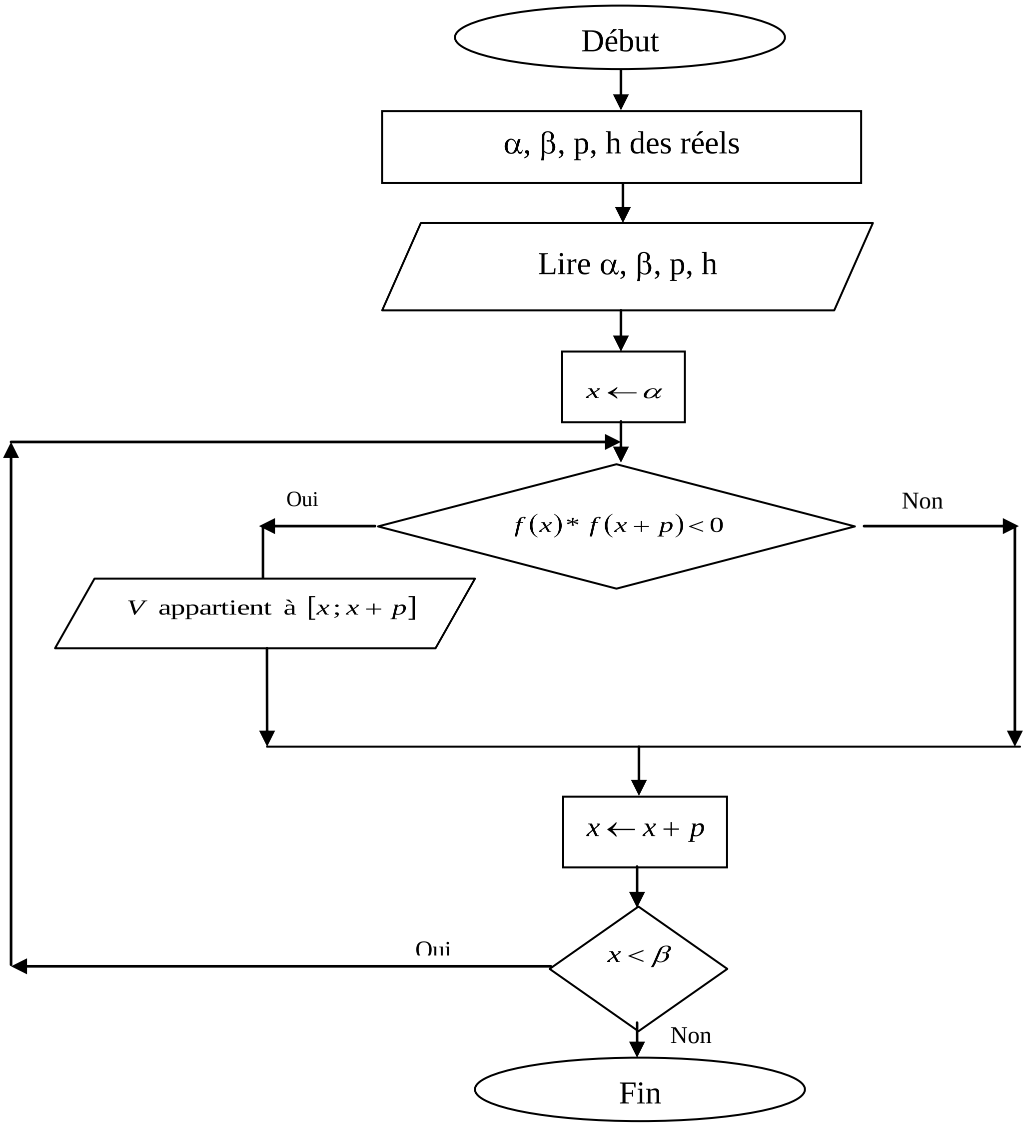
d'où avec $t = \sqrt{5} \Rightarrow 2{,}229 < t < 2{,}437$

Examen 1ière session 2008-2009

Exercice 1 : Algorithme et Méthode numérique scalaire

1/ Algorithme

Un exemple d'ordinogramme est donné ci-dessous



2/ Méthode de Dichotomie

a) Tabulation de pas $10^{-2}\ m^3$

V	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
f(V)	-1.31E+08	-2.27E+07	-5.65E+06	-6.76E+05	1.17E+06	1.93E+06	2.24E+06	2.34E+06	2.35E+06	2.31E+06

On remarque que $f(0.04)$ x $f(0.05) < 0$, d'où $V \in [0.04\ ;\ 0.05]$

b) Nombre d'itérations

Le calcul du nombre d'itération se fait par la formule :
$\dfrac{\beta-\alpha}{2^n} \le \varepsilon$ soit après calcul : $n \ge \dfrac{\ln(\beta-\alpha)-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$ et comme $\varepsilon = 10^{-3}$; $\alpha = 0.04$; $\beta = 0.05$
, alors $n \approx 3$ *itérations*

3/ Méthode des approximations successives

a) Il suffit seulement de montrer que $f\ (V) = V - g(V)$

$$f\ (V) = V - \frac{kNT}{P + a\left(\frac{N}{V}\right)^2} - Nb\ ; \qquad f\ (V) = \frac{V\left(P + a\left(\frac{N}{V}\right)^2\right) - kNT - Nb\left(P + a\left(\frac{N}{V}\right)^2\right)}{P + a\left(\frac{N}{V}\right)^2}$$

$$f\ (V) = \frac{(V - Nb)\left(P + a\left(\frac{N}{V}\right)^2\right) - kNT}{P + a\left(\frac{N}{V}\right)^2}$$

Soit donc après simplification $f\ (V) = \left[P + a\left(\frac{N}{V}\right)^2\right](V - Nb) - kNT$

On vient donc de montrer que $f\ (V) = V - g(V)$

b) Montrons que $V = 0{,}043m^3$ est un point fixe de $g\ (V)$

Il suffit de montrer que $g\ (0.043) = 0.043$. Calculons donc

$$g\ (0.043) = \frac{1.38 \text{x} 10^{-23} \text{x} 1000 \text{x} 300}{3.5 \text{x} 10^5 + 0.4 \text{x}\left(\frac{1000}{0.043}\right)^2} + 1000 \text{ x } 42.7 \text{ x } 10^{-6} = 0.0427 \approx 0.043$$

D'où $V = 0{,}043m^3$ est un point fixe de $g\ (V)$

c) Calculons et montrons

- Quand $V \to \infty$, on a $\dfrac{N}{V} \to 0$ d'où $\lim\limits_{V\to\infty} g(V) = \dfrac{kNT}{P} + Nb$

- $\lim\limits_{V\to\infty} g(V) = Nb\left(\dfrac{kNT}{NbP} + 1\right) = Nb\left(\dfrac{kT}{bP} + 1\right)$

Or $\dfrac{kT}{bP} << 1$ d'où on tire que $\lim\limits_{V\to\infty} g(V) = Nb$

- Puisque $g\ (V) = V$ et que $\lim\limits_{V\to\infty} g(V) = Nb$, alors $V = Nb \approx 0{,}043m^3$ est le volume occupé par le gaz.

<u>Exercice 2</u> : intégration numérique et dérivée

<u>I- Intégration numérique</u>

1/ principe de la méthode des trapèzes

Il s'agit d'approcher la valeur de $I = \int_a^b f(x)dx$ en évaluant l'aire comprise entre l'axe (ox), la courbe $f\ (x)$ et les parallèles à (oy) menées par a et b. On remplace $f(x)$ par une ligne brisée. Cette aire est constituée d'une somme finie de n aires élémentaires A_i de base $h = \frac{b-a}{n}$ ayant la forme de trapèzes. On aura donc $J = I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i$

2/ Démontrons

Un trapèze élémentaire a pour aire $A_i = \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}.(x_i - x_{i-1})$ d'où on a donc :

$$J_n = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}.(x_i - x_{i-1})\right]$$

Comme $x_i - x_{i-1} = h = \frac{b-a}{n}$; $x_0 = a$ et $x_n = b$, on a par développement :

$$J_n = \frac{b-a}{2n}[\,f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})+f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$$J_n = \frac{b-a}{2n}[\,f(a)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(b)]$$

$J_n = \frac{b-a}{2n}\left[\ f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$, or $x_i = a+ih = a+i\frac{b-a}{n}$, d'où on a finalement :

$$J_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(f(a)+f(b))+\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

2/ Pseudo-code qui calcule J_n

Algorithme trapèze

$\mathrm{a,b}, h, J_n, J_1, Somme$ des réels

i, n des entiers

Sous-programme (SP) : Algorithme Fonction $f(x = \text{réel}) = \text{réel}$

Début

- Lire $\mathrm{a,b,n}$
- $h \leftarrow (b-a)/n$
- $\mathrm{J}_1 \leftarrow (f(a)+f(b))/2$
- $somme \leftarrow 0$
    - Pour $i \leftarrow 1 \quad à \quad n-1$ faire

- $somme \leftarrow somme + f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$
- Fin (pour)

- $J_n \leftarrow h * [J_1 + somme]$
- Imprimer J_n
- Fin

II- Dérivées

1/ Expression de la dérivée seconde centrale à l'ordre 1.

En utilisant le développement limité de Taylor autour de $h = 0$

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \cdots + \Theta(h^4)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \cdots + \Theta(h^4)$$

En sommant ces deux expressions et si on néglige tous les termes supérieurs à $\Theta(h^4)$ alors :

$$f(x_i + h) + f(x_i - h) = 2f(x_i) + h^2 f''(x_i)$$

Soit donc $f''(x_i) = \frac{f(x_i + h) + f(x_i - h) - 2f(x_i)}{h^2}$

2/ Expressions de la dérivée seconde à gauche et de la dérivée seconde à droite à l'ordre 1

$$f_d''(x_i) = \frac{f(x_i + 2h) - 2f(x_i + h) + f(x_i)}{h^2}$$

$$f_g''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_i - h) + f(x_i - 2h)}{h^2}$$

III- Application

a) Calcul de la capacité

$$J_n = \frac{1}{U}\frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

$$J_n = \frac{1}{3} \text{ x } \frac{26-0}{2 \text{ x } 13} \text{ x } [0 + 0.004 + 2 \text{ x } (1.027 + 1.054 + 0.812 + 0.556 + 0.357 + 0.22 + 0.132 + 0.077 + 0.045 + 0.025 + 0.014 + 0.008)]$$

$$J_n = 2.886 \text{ x } 10^{-6}\ F = 2.886\ \mu F$$

b) Calcul des dérivées secondes à gauche et à droite (voir tableau)

c) Calcul de la dérivée seconde centrale (voir tableau)

Indice i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
t (ms)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
I (mA)	0	1.027	1.054	0.812	0.556	0.357	0.22	0.132	0.077	0.045	0.025	0.014	0.008	0.004
$f''(t_i)$	-83.333	-83.333	-22.417	-1.167	4.750	5.167	4.083	2.750	1.917	1.000	0.750	0.417	0.167	0.167

NB : dans le calcul des dérivées secondes, la valeur de la tension est déjà prise en compte. Ne pas oublier de convertir le temps et l'intensité respectivement en seconde et en ampère.

d) Calcul de l'erreur

$M_2 = \sup \left| f''\left(a + i\,\dfrac{b-a}{n}\right)\right| = 83.333$ d'où on aura :

$$\left|R(f)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12\,n^2}\,M_2 = \frac{\left((26-0)\text{ x }10^{-3}\right)^3}{12\text{ x }(13)^2}\text{ x }83.333$$

$$\left|R(f)\right| = 0.722\text{ x }10^{-6}\,F = 0.722\,\mu F$$

e) Encadrement de la valeur de la capacité

$I = J_n \pm R(f)$ soit donc $C = (2.886 \pm 0.722)\mu F$
ou encore
$2.886 - 0.722 \leq C \leq 2.886 + 0.722$ soit $2.164\ \mu F \leq C \leq 3.608\ \mu F$

Examen 2^{ième} session 2008-2009

<u>Exercice 1</u> : Interpolation et méthodes matricielle

1- Résolution par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} a+b+c=-3 \\ 4a+2b+c=0 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases}$$ Soit à poser le système :

$$\left|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 9 & 3 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}-3\\0\\5\end{matrix} \quad \underset{\rightarrow}{L_1/1} \quad \left|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 9 & 3 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}-3\\0\\5\end{matrix} \quad \begin{matrix}L_2-4L_1\\ \rightarrow \\ L_3-9L_1\end{matrix} \quad \left|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -3\\ 0 & -6 & -8\end{matrix}\right|\begin{matrix}-3\\12\\32\end{matrix} \quad \underset{\rightarrow}{L_2/(-2)}$$

$$\left|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & -6 & -8\end{matrix}\right|\begin{matrix}-3\\-6\\32\end{matrix} \quad \begin{matrix}L_1-L_2\\ \rightarrow \\ L_3+6L_2\end{matrix} \quad \left|\begin{matrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}3\\-6\\-4\end{matrix} \quad \underset{\rightarrow}{L_3/1} \quad \left|\begin{matrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}3\\-6\\-4\end{matrix} \quad \begin{matrix}L_1+\frac{1}{2}L_3\\ \rightarrow \\ L_2-\frac{3}{2}L_3\end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1\\0\\-4\end{matrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-4 \end{cases}$$

La fonction $f(x)=ax^2+bx+c$ qui passe par les points $M_1(1;-3)$; $M_2(2;0)$ et $M_3(3;5)$ est de la forme :
$f(x)=x^2-4=0$.

2- Polynôme d'interpolation de Lagrange sur les trois points

La fonction $f(x)$ est de la forme :

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\left(\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}\right)y_j$$

Soit donc :

$$f(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\,y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\,y_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\,y_3$$

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}\,(-3)+\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}\,(0)+\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}\,(5)$$

$$f(x)=-\frac{3}{2}\,x^2+\frac{15}{2}\,x-9+\frac{5}{2}\,x^2-\frac{15}{2}\,x+5$$

$$f(x)=x^2-4=0$$

<u>Exercice 2</u> : Méthodes numériques scalaires

Nous avons l'équation $f(x)=x^2-4=0$ au départ (remarquer que cette équation est le résultat de l'exercice 1).

1- Cette équation a au plus 2 racines contenues dans l'intervalle $I_1=[-R;\ +R]$ avec :

$$R = \frac{\max\limits_{i=0,n}|a_i|}{a_n} + 1 = \frac{4}{1} + 1 = 5$$

D'où $I_1 = [-5;\ +5]$

2- Tabulation de pas 1 de $f(x)$

x	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5
$f(x)$	8.25	2.25	-1.75	-3.75	-3.75	-1.75	2.25	8.25

Comme $x > 0$ et que $f(1.5) * f(2.5) < 0$ alors $I_2 = [1.5;\ 2.5]$

3- Recherche de la racine

a) Choix de la méthode

Pour le choix de la méthode, on calcule $g'_1(x)$ et $g'_2(x)$ dans l'intervalle I_2. Considéré.

$g'_1(x) = 1 - 2x$ et $g'_2(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{8}x^2$

$g'_1(1.5) = -2$ et $g'_2(1.5) = 0.65626$

$g'_1(2.5) = -4$ et $g'_2(2.5) = -0.84375$

On remarque donc que $\forall x \in\ I_2$ on a $\begin{cases} g'_1(x) > 1 \\ g'_2(x) < 1 \end{cases}$

Ce qui implique la méthode A_1 n'est pas convergente alors que la méthode A_2 est convergente. On choisira donc la méthode A_2.

b) Marche de la méthode

Faisons un tableau de résultats :

n	0	1	2	3
x_{n+1}	1.888	1.991	2.000	2.000
$\Delta\alpha = \lvert x_{n+1} - x_n\rvert$	$3.\ 10^{-1}$	$1.\ 10^{-1}$	$9.\ 10^{-3}$	0.

D'après le tableau, on arrête les calculs pour $\Delta\alpha = 0 < 10^{-3}$. D'où la solution cherchée est $\alpha = 2.000$ après 3 itérations.0

c) Convergence quadratique

La convergence de la méthode A_2 est quadratique si $|g'_2(\propto)| = 0$ et $|g''_2(\propto)| \neq 0$

- $|g'_2(\propto)| = 0$ alors on a $\frac{3}{2} - \frac{3}{8}\propto^2 = 0$ soit après calcul $\propto = \pm 2$.
- $g''_2(x) = -\frac{6}{8}x$ d'où $|g''_2(\pm 2)| = \frac{12}{8} \neq 0$
- Comme $\propto > 0$ car $\propto \in\ I_2$ alors pour $\propto = 2$, la convergence est quadratique.

4- Valeurs de k

$$g_3(x) = x - k(x^2 - 4)$$
$$g'_3(x) = 1 - 2kx$$

La méthode A_3 converge si $|g'_3(\propto)| < 1$, c'est-à-dire :

$$-1 < 1 - 2k \propto < 1$$
$$-2 < -2k \propto < 0$$
$$0 < 2k \propto < 2$$

$$0 < k < \frac{1}{\propto}$$

<u>Exercice 2</u> : Méthodes des moindres carrés

Dans le cas de notre exercice, $x_i = année$ et $y_i = population$. On calcule donc les diverses sommes et on remplit le tableau initial.

	$x_i = année$	$y_i = population$	$x_i * y_i$	x_i^2	y_i^2
	1920	105.711	202965.12	3686400	11174.816
	1930	123.203	237781.79	3724900	15178.979
	1940	131.669	255437.86	3763600	17336.726
	1950	150.697	293859.15	3802500	22709.586
	1960	179.323	351473.08	3841600	32156.738
	1970	203.212	400327.64	3880900	41295.117
somme	11670	893.815	1741844.64	22699900	139851.961

Calculons donc les coefficients a et b

$$a = \frac{6 \times 1741844.64 - 11670 \times 893.815}{6 \times 22699900 - (11670)^2} = 1.928$$

$$b = \frac{11670 \times 1741844.64 - 22699900 \times 893.815}{(11670)^2 - 6 \times 22699900} = -3601.508$$

La droite des moindres carrés est donc

$$y = 1.928\,x - 3601.508$$

ou encore

$$population(\bar{M}) = 1.928\,année - 3601.508$$

- Pour l'année 1910, la population était estimée à :
$$population(\bar{M}) = 1.928 \times 1910 - 3601.508 = 80.972$$
- Pour l'année 1965, la population était estimée à :
$$population(\bar{M}) = 1.928 \times 1965 - 3601.508 = 187.012$$
- Pour l'année 2000, la population était estimée à :
$$population(\bar{M}) = 1.928 \times 2000 - 3601.508 = 254.492$$

Examen 1ière session 2012-2013

I- Interpolation et approximation

1/ **interpolation linéaire**

Soit le polynôme $g(t)$ est tel que $g(t) = A\,t + B$ avec $g(1.01) = I(1.01)$ et $g(1.03) = I(1.03)$

On obtient donc un système de 2 équations à 2 inconnues à résoudre :

$$\begin{cases} 1.01\,A + B = 3.12 \\ 1.03\,A + B = 3.18 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{3.12 - 3.18}{1.01 - 1.03} = 3 \\ B = \dfrac{1.01 \times 3.18 - 1.03 \times 3.12}{1.01 - 1.03} = 0.09 \end{cases}$$

Le polynôme $g(x)$ sera donc :

$g(x) = 3\,t + 0.09$

$pour\ t = 1.02\ s \quad \Rightarrow \quad g(1.02) = 3 \times 1.02 + 0.09 = 3.15 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{I(1.02) = 3.15\ A}$

Interpolation de Lagrange

On sait que $g(t) = I(t_0)L_0(t) + I(t_1)L_1(t) + I(t_2)L_2(t)$ avec

$I(1.01) = 3.12\ A$; $I(1.03) = 3.18\ A$; $I(1.04) = 3.24\ A$ et

$$L_0(t) = \frac{(t-1.03)(t-1.04)}{(1.01-1.03)(1.01-1.04)} = \frac{(t-1.03)(t-1.04)}{0.0006}$$

$$L_1(t) = \frac{(t-1.01)(t-1.04)}{(1.03-1.01)(1.03-1.04)} = \frac{(t-1.01)(t-1.04)}{-0.0001}$$

$$L_2(t) = \frac{(t-1.01)(t-1.03)}{(1.04-1.01)(1.04-1.03)} = \frac{(t-1.01)(t-1.03)}{0.0003}$$

On a donc pour $t = 1.02\ s$:

$$g(1.02) = \frac{(1.02-1.03)(1.02-1.04)}{0.0006} \times 3.12 - \frac{(1.02-1.01)(1.02-1.04)}{0.0001} \times 3.18 + \frac{(1.02-1.01)(1.02-1.03)}{0.0003} \times 3.24$$

$g(1.02) = 3.14 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{I(1.02) = 3.14\ A}$

II- Dérivées

1/ ***Dérivée première centrale***

On sait que : $I(t_{i+1}) = I(t_i + h)$ Car $t_{i+1} = t_i + h$ et $t_{i-1} = t_i - h$

En utilisant un développement limité de Taylor autour de $h = 0$, on a :

$$I(t_{i+1}) = I(t_i + h) = I(t_i) + hI'(t_i) + \frac{h^2}{2!}I''(t_i) + \frac{h^3}{3!}I'''(t_i) + \cdots \qquad (1)$$

$$I(t_{i-1}) = I(t_i - h) = I(t_i) - hI'(t_i) + \frac{h^2}{2!}I''(t_i) - \frac{h^3}{3!}I'''(t_i) + \cdots \qquad (2)$$

Faisons la soustraction des deux termes. On obtient :

$$I'(t_i) = \frac{I(t_i + h) - I(t_i - h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}I'''(t_i)$$

En posant $\theta(h^2) = \frac{h^2}{3!}I'''(t_i)$ et en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à h^2, une approximation de la dérivée première est :

$$\boldsymbol{I'(t_i) = \frac{I(t_i + h) - I(t_i - h)}{2h}}$$

Dérivée seconde centrale

Faisons une addition des équations (1) et (2). On obtient :

$P(t_i + h) + P(t_i - h) = 2P(t_i) + h^2 P''(t_i) + \theta(h^4)$

En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à h^4, une approximation de la dérivée seconde est :

$$P''(t_i) = \frac{P(t_i + h) - 2P(t_i) + P(t_i - h)}{h^2}$$

2/ ***Dérivées première à gauche et à droite***

$$I_d'(t_i) = \frac{I(t_i + h) - I(t_i)}{h} \quad ; \quad I_g'(t_i) = \frac{I(t_i) - I(t_i - h)}{h}$$

3/ ***Tableau à remplir***

$t(en\ seconde)$	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
$i(en\ Ampère)$	3.1	3.12	3.14	3.18	3.24
$i'(t)$	2	2	3	5	6
$V(en\ Volt)$	2.400	2.403	3.386	5.352	6.340
$f(t) = V(t) \times i(t)$	7.441	7.497	10.632	17.018	20.542
$f''(t)$	30773.136	30773.136	32521.192	-28623.992	-28623.992

III- Intégration numérique

1/ **principe de la méthode des trapèzes :** Il s'agit d'approcher la valeur de $I = \int_a^b f(x)dx$ en évaluant l'aire comprise entre l'axe (ox), la courbe $f(x)$ et les parallèles à (oy) menées par a et b. On remplace $f(x)$ par une ligne brisée. Cette aire est constituée d'une somme finie de n aires élémentaires A_i de base $h = \frac{b-a}{n}$ ayant la forme de trapèzes. On aura donc

$J = I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i$

2/ **<u>* Calcul de *J*</u>**

$$J = \frac{b-a}{2n}\left(P(a) + P(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} P(t_i)\right)$$

$J = \frac{1.04 - 1.00}{2 \times 4}\left(7.441 + 20.542 + 2 \times (7.497 + 10.632 + 17.018)\right) \Rightarrow J = 0.491\ Joules$

<u>* Calcul de</u> Δ

$$\Delta \leq \frac{(b-a)^3}{12\ n^2} \times sup|P''(t_i)|$$

Si l'on consulte le tableau des valeurs, on trouve que $sup|P''''(t_i)| = 32521.192$ Soit donc :

$\Delta \leq \frac{(1.04-1.00)^3}{12 \times 4^2} \times 32521.192$ soit donc $\Delta = 0.011\ Joules$

3/ **Encadrement de *E***

$E = J \mp \Delta$ soit donc $E = 0.491 \mp 0.011$

ou encore $(0.481 \leq E \leq 0.502)\ Joules$

Examen 2ième session 2012-2013

Méthode de résolution des équations non-linéaire de type $f(x) = 0$

1/ ***La loi des gaz parfaits***

$PV = nRT$; $Pnv_m = nRT$; $v_m = \frac{RT}{P}$

Couple de données $(10^5\ P_a, 300\ K)$: $v_{m1} = \frac{0.082\times300}{10^5} = 0.000246\ m^3/mol$

Couple de données $(10^7\ P_a, 700\ K)$: $v_{m2} = \frac{0.082\times700}{10^7} = 0.000006\ m^3/mol$

2/ ***La loi de Van Der Wall***

a- Tabulation de la fonction

- Pour le couple $(1\ atm; 300\ K)$

v_m	0.02	0.03	**0.04**	**0.05**	0.06
$f(v_m)$	-2531.14	-1376.48	-331.34	685.46	1692.36

- Pour le couple $(100\ atm; 700\ K)$

v_m	0.02	0.03	**0.04**	**0.05**	0.06
$f(v_m)$	-230263.94	-130109.28	-30064.14	69952.66	169959.56

Dans les deux cas, $v_m \in [0.04\ m^3/mol\ ;\ 0.05\ m^3/mol]$

b- Nombre d'itérations

$$n \geq \frac{ln|b-a| - ln\varepsilon}{ln2}$$

Dans les deux cas où $v_m \in [0.04\ m^3\ ;\ 0.05\ m^3]$, on a :

$$n \geq \frac{ln|0.05-0.04| - ln10^{-5}}{ln2}\ ;\ soit\ \ n \approx 10\ itérations$$

c- Calcul de v_m par la méthode de Newton

$$v_{m_{n+1}} = v_{m_n} - \frac{f(v_{m_n})}{f'(v_{m_n})}$$

Avec :

$$f'(v_m) = P - \frac{a}{{v_m}^2} + \frac{2ab}{{v_m}^3}$$

Soit

$$v_{m_{n+1}} = v_{m_n} - \frac{\left(P + \frac{a}{{v_{m_n}}^2}\right)(v_{m_n} - b) - RT}{P - \frac{a}{{v_{m_n}}^2} + \frac{2ab}{{v_{m_n}}^3}}$$

- Pour le couple $(1\ atm; 300\ K)$

v_{m_n}	0.02	0.040	0.042
$v_{m_{n+1}}$	0.040	0.042	**0.043**

$\Delta\lvert v_{m_{n+1}} - v_{m_n}\rvert$	2.0 10^{-02}	3.0 10^{-03}	5.1 10^{-04}

- Pour le couple $(100\ atm; 700\ K)$

v_{m_n}	0.02	0.043
$v_{m_{n+1}}$	0.043	**0.043**
$\Delta\lvert v_{m_{n+1}} - v_{m_n}\rvert$	2.3 10^{-02}	4.2 10^{-05}

Dans les deux cas, on trouve $v_m = 0.043\ m^3/mol$

3/ **Comparaison des 2 lois**

On se rend compte qu'avec la loi des gaz parfaits, v_m varie alors que cette valeur est constante pour la loi de Van Der Wall. On choisira donc la loi de Van Der Wall.

4/ ***Interpolation de Lagrange***

$$P(T) = \sum_{i=0}^{1} P(T_i)\left[\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{1} \frac{(T-T_k)}{(T_i-T_k)}\right]$$

$$P(T) = 10^5 \times \frac{T-700}{300-700} + 10^7 \times \frac{T-300}{700-300}$$

$$P(500) = 10^5 \times \frac{500-700}{300-700} + 10^7 \times \frac{500-300}{700-300}$$

$$P(500) = 5050000\ \Rightarrow \boldsymbol{P_a}\ \approx \mathbf{50.5\ 10^5}\ \boldsymbol{P_a}$$